Установлено полное совпадение частоты, получаемой по формуле (21) с частотой, полученной в [3] при соответствующей форме погиби.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ, грант Т00М-096.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех.— 1996.— Т. 60, № 4.— С. 635—643. 2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы.— М.: Наука. Физматлит, 1995.— 320 с. 3. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела.— 1968.— № 3.— С. 140—144.

ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ОБОЛОЧКАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ ВНЕШИХ СИЛ

Авдошка И.В., Михасев Г.И.

В работе [1] предложена процедура построения формального асимптотического решения уравнений движения оболочек произвольной формы в виде локализованных в окрестности некоторых подвижных точек двумерных волновых пакетов (ВП). В настоящей работе указанный результат распространяется на случай оболочки, подверженной воздействию внешних сил, вызывающих в ней нестационарное безмоментное напряженное состояние.

1°. Введем на срединной поверхности тонкой упругой оболочки произвольного профиля криволинейную систему координат α_1, α_2, совпадающую с линиями кривизны, так что первая квадратичная форма поверхности имеет вид $d\sigma^2 = R^2\left(A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2\right)$, где R — характерный размер оболочки. Предполагается, что оболочка имеет переменные по обоим направлениям толщину $h^*(\alpha_k)$, модуль Юнга $E^*(\alpha_k)$, коэффициент Пуассона $\nu(\alpha_k)$ и плотность материала $\rho^*(\alpha_k)$. Пусть внешние плавно меняющиеся силы вызывают нестационарное безмоментное напряженное состояние оболочки, характеризующееся мембранными усилиями $T_1^0\left(\alpha_k,t^*\right)$, $T_2^0\left(\alpha_k,t^*\right)$, $S^0\left(\alpha_k,t^*\right)$, где t^* — время.

Предполагая большую изменяемость волн в направлении обеих пространственных координат, используем систему уравнений пологих оболочек произвольной формы для ортогональной системы координат, которая имеет вид [2]

$$\mu^2\Delta(d\Delta w)+\Delta_k\Phi+\Delta_T w+\gamma\,\partial^2 w/\partial t^2=0, \tag{1}$$
$$\mu^2\Delta(g\Delta\Phi)-\Delta_k w=0,$$

где

$$\Delta w=\frac{1}{A_1A_2}\sum_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{A_j}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}\right),\quad \Delta_k w=\frac{1}{A_1A_2}\sum_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{A_j}{A_iR_j}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}\right),$$
$$\Delta_T w=\frac{1}{A_1A_2}\sum_i\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{A_jT_i}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+T_3\frac{\partial w}{\partial\alpha_j}\right),\ i,j=1,2,\ j\neq i, \tag{2}$$
$$d(\alpha_k)=Eh^3/(1-\nu^2),\ g(\alpha_k)=1/(Eh),\ \gamma(\alpha_k)=\rho h.$$

Безразмерные величины в (1), (2) введены по формулам

$$w^*=\mu^{-2}Rw,\quad \Phi^*=E_0h_0R^2\Phi,\quad t^*=\mathrm{T}^*t,$$
$$E^*=E_0E(\alpha_k),\ h^*=h_0h(\alpha_k),\ \rho^*=\rho_0\rho(\alpha_k),$$
$$R_j^*=RR_j(\alpha_k),\ \mathrm{T}^*=\mu^{-1}R\sqrt{\rho_0/E_0},\ \mu^4=h_0^2/(12R^2),$$
$$\left\{T_1^0,T_2^0,S^0\right\}=-E_0h_0\mu^2\left\{T_1,T_2,T_3\right\}.$$

Здесь w^*,Φ^* — нормальный прогиб и функция напряжений, R_j^* — радиусы кривизны, h_0,E_0,ρ_0 — характерные значения переменных толщины, модуля Юнга и плотности материала (будут введены ниже), T^* — характерное время, μ — малый параметр.

Предполагается, что все коэффициенты в уравнениях (1) бесконечно дифференцируемы по α_k и нигде не обращаются в ноль.

Пусть

$$w\big|_{t=0}=w^\circ(\zeta_1,\zeta_2)\exp[\mathrm{i}\mu^{-1}S^\circ(\alpha_1,\alpha_2)], \tag{3}$$
$$\dot w\big|_{t=0}=\mathrm{i}\mu^{-1}\vartheta^\circ(\zeta_1,\zeta_2)\exp[\mathrm{i}\mu^{-1}S^\circ(\alpha_1,\alpha_2)],$$
$$S^\circ=\mathbf{p}^\circ(\alpha_1,\alpha_2)^T+\frac{1}{2}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}^\circ(\alpha_1,\alpha_2)^T,$$
$$w^\circ=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}w_j^\circ(\zeta_1,\zeta_2),\ \vartheta^\circ=\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}\vartheta_j^\circ(\zeta_1,\zeta_2),\quad \zeta_k=\mu^{-1/2}\alpha_k,\ k=1,2,$$

где $w_k^\circ,\vartheta_k^\circ$ – полиномы степеней M_k аргументов ζ_1,ζ_2 с комплексными коэффициентами, $\mathbf{p}^\circ=(p_1^\circ,p_2^\circ)$ – ненулевой вектор, $\mathbf{B}^\circ$ — симметричная комплексная матрица размерности 2×2 с положительно определенной мнимой частью $\operatorname{Im}\mathbf{B}^\circ$. Вещественные и мнимые части функций (3) задают на поверхности оболочки пару двумерных ВП с центрами в начале координат (0,0). Далее полагаем $R=\max\left\{R_1^*,R_2^*\right\},\ h_0=h^*(0,0),\ E_0=E^*(0,0),\ \rho_0=\rho^*(0,0)$.

2°. Как и в [1], будем искать решение задачи (1), (3), экспоненциально убывающее при удалении от некоторой подвижной точки $Q(q_1,q_2)$, где $q_1(t),q_2(t)$ — дважды дифференцируемые функции времени t, такие что $q_1(0)=q_2(0)=0$. Полагая, что на рассматриваемом нами конечном отрезке времени $0\le t\le T$ точка Q достаточно удалена от краев оболочки, отказываемся от рассмотрения граничных условий, считая приближенно, что упомянутое убывание заменяет удовлетворение граничных условий.

Перейдем в (1) к новой системе координат, связанной с центром ВП, по формуле

$$\alpha_k = q_k(t) + \mu^{1/2}\xi_k, k = 1, 2. \tag{4}$$

Принимая во внимание (3), выберем в качестве анзатца решения ряды

$$w = \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}w_j(\xi_1,\xi_2,t)\exp[i\mu^{-1}S(\xi_1,\xi_2,t,\mu)], \tag{5}$$

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty}\mu^{j/2}\Phi_j(\xi_1,\xi_2,t)\exp[i\mu^{-1}S(\xi_1,\xi_2,t,\mu)],$$

$$S(\xi_1,\xi_2,t,\mu) = \int_0^t\omega(\tau)d\tau + \mu^{1/2}\mathbf{p}(t)\Xi + \frac{1}{2}\mu\Xi^T\mathbf{B}(t)\Xi,$$

$$\mathbf{p} = (p_1(t), p_2(t)), \Xi = (\xi_1,\xi_2)^T,$$

$\mathbf{B}(t)$ — симметричная комплексная матрица с положительно определенной мнимой частью $\operatorname{Im}\mathbf{B}(t)$ для любого $t \geq 0$, w_k, Φ_k — полиномы аргументов ξ_1, ξ_2. Предполагается, что все неизвестные в (5) функции вместе со своими производными есть величины порядка $O(1)$. Для их определения подставим (5) в уравнения (1), разложив предварительно все коэффициенты (1) в ряды Тейлора в окрестности подвижной точки $Q(q_1(t), q_2(t))$.

3°. Приравнивая в системе (1) нулю коэффициенты при μ^{-2}, $\mu^{-3/2}$, μ^{-1}, придем к последовательности матричных уравнений

$$\sum_{j=0}^{m}\mathbf{L}_j\mathbf{X}_{m-j} = 0, m = 0, 1, 2\ldots \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_i = (w_i, \Phi_i)^T$ — двухкомпонентные векторы, а $\mathbf{L}_i$ — матрица размерности (2×2). Приведем элементы матрицы $\mathbf{L}_0$

$$l_{0,11} = d\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2 - T_1\frac{p_1^2}{A_1^2} - 2T_3\frac{p_1}{A_1}\frac{p_2}{A_2} - T_2\frac{p_2^2}{A_2^2} - \gamma(\omega - \dot{q}_1p_1 - \dot{q}_2p_2)^2, \tag{7}$$

$$l_{0,12} = -\left(\frac{p_1^2}{A_1^2R_2}+\frac{p_2^2}{A_2^2R_1}\right), \quad l_{0,21} = -l_{0,12}, \quad l_{0,22} = g\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2.$$

Значения функций γ, d, g, A_k^2, R_k, T_k в (6), (7) вычисляются в точке Q. Таким образом, при $m = 0$ в (6) получаем систему алгебраических уравнений, при $m = 1, 2$ — системы дифференциальных уравнений, причем $\mathbf{L}_1$ сохраняет вид, указанный в [1], а $\mathbf{L}_2$ отличается от аналогичного матричного оператора, представленного в [1], слагаемыми n_{kl}, которые с учетом наличия внешней нагрузки принимают вид

$$n_{11} = \sum_k\left\{-\frac{2}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{dA_j}{A_k^3}\right)p_k^3 + \frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{d}{A_1A_2}\right)p_kp_j^2\right]+\right.$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{A_1A_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{A_jT_k}{A_k}\right)p_k+\frac{\partial T_3}{\partial\alpha_k}p_j\right]-\gamma\ddot{q}_kp_k\quad\Bigg\},$$

$$n_{12}=\frac{1}{A_1A_2}\sum_k\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{A_j}{A_kR_j}\right)p_k^3,n_{21}=-n_{12},$$

$$n_{22}=-\frac{2}{A_1A_2}\sum_k\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{gA_j}{A_k^3}\right)p_k^3+\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{g}{A_kA_j}\right)p_kp_j^2\right\},k,j=1,2,k\neq j,$$

Условия существования решений систем (6) в виде полиномов по переменным ξ_1, ξ_2 приводят к следующим результирующим формулам и уравнениям. При $m = 0$ получаем формулу для мгновенной частоты колебаний оболочки в окрестности центра ВП — точки Q

$$\omega=\dot{q}_1p_1+\dot{q}_2p_2\mp H(p_1,p_2,q_1,q_2),\tag{8}$$

где

$$H=\left[\frac{d}{\gamma}\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2+\frac{1}{\gamma g}\left(\frac{p_1^2}{A_1^2R_2}+\frac{p_2^2}{A_2^2R_1}\right)^2\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^{-2}-\frac{T}{\gamma}\right]^{1/2},$$

$$T=T_1\frac{p_1^2}{A_1^2}+2T_3\frac{p_1}{A_1}\frac{p_2}{A_2}+T_2\frac{p_2^2}{A_2^2}.$$

Здесь H — функция Гамильтона, а T — слагаемое, учитывающее наличие безмоментного напряженного состояния. При $m = 1$ из условий разрешимости (6) в виде полиномов получаем матричную систему Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}},\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}},\tag{9}$$

где $\mathbf{q}=(q_1,q_2)^T$, $\mathbf{p}=(p_1,p_2)^T$. В (9) и ниже применяются обозначения

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}=\left(\frac{\partial}{\partial p_1},\frac{\partial}{\partial p_2}\right),\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}=\left(\frac{\partial}{\partial q_1},\frac{\partial}{\partial q_2}\right),\frac{\partial}{\partial\Xi}=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)^T.$$

Условия разрешимости (6) при $m = 2$ приводят к матричному уравнению Риккати

$$\dot{\mathbf{B}}+\mathbf{B}H_{\mathbf{pp}}\mathbf{B}+H_{\mathbf{qp}}\mathbf{B}+\mathbf{B}H_{\mathbf{qp}}^T+H_{\mathbf{qq}}=\mathbf{0},\tag{10}$$

где через $H_{\mathbf{pp}},H_{\mathbf{qp}},H_{\mathbf{qq}}$ обозначены матрицы размерности 2×2, элементы которых получаются дифференцированием гамильтониана H по p_i,q_j на векторах **q**, **p**, удовлетворяющих задаче (9). Также на этом этапе получаем уравнение для отыскания полинома w_0

$$-\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}\left(H_{\mathbf{pp}}\frac{\partial^2w_0}{\partial\Xi^2}\right)+\Xi\left(H_{\mathbf{qp}}\frac{\partial w_0}{\partial\Xi}\right)+(\mathbf{B}\Xi)\left(H_{\mathbf{pp}}\frac{\partial w_0}{\partial\Xi}\right)+\frac{\partial w_0}{\partial t}+Gw_0=0,\tag{11}$$

$$G=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(H_{\mathbf{pp}}\mathbf{B}\right)-\frac{1}{2H}\dot{\omega}-\frac{1}{H}\left(H_{q_1}H_{p_1}+H_{q_2}H_{p_2}\right)+\frac{l_{0,22}}{2\gamma H}\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{q}}+$$

$$+\frac{1}{2\gamma Hl_{0,22}}\left(2l_{0,12}n_{21}-l_{0,11}n_{22}-l_{0,22}n_{11}\right),\quad\lambda=-l_{0,11}/l_{0,12}.$$

Здесь tr — след матрицы.

Из (6), (7) нетрудно видеть, что $\Phi_0 = \lambda P_0$.

Сличая анзатц (5) и начальные условия (3) получаем начальные условия для систем дифференциальных уравнений (9), (10):

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^\circ,\ \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}^\circ \tag{12}$$

Проводилось численное решение уравнений (8)-(12) для оболочек различной формы, подверженным разного рода внешним нагрузкам. При этом установлена возможность «блуждания» ВП в окрестности наиболее слабых точек, т. е. точек, в окрестности которых оболочка наиболее полога, либо нагрузка максимальна.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ, грант Т00М-096.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г. И. Асимптотические решения системы уравнений пологих оболочек в виде двумерных волновых пакетов // Изв. вузов. Математика. — 1998. — № 2. — С. 47—53.
2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 320с.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ДВУМЯ ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

Акимов В.А.

Рассмотрим задачу о равновесии упругой изотропной среды прямоугольной формы, жестко сцепленной основанием и боковой стороной с неподвижным твердым телом, а на свободных гранях подверженной силовому воздействию (рис.1):

$F_z^\tau = F_1(x)$, $F_z^n = F_2(x)$,

$G_x^\tau = G_1(z)$, $G_x^n = G_2(z)$

Запишем уравнения равновесия упругого тела, считая, что имеет место плоское напряженное состояние [1]:

$$\nabla^2 U + (\gamma - 1)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\ \nabla^2 W + (\gamma - 1)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

где U и W — соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение частиц упругой среды; $\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, ν — коэффициент Пуассона.