О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНОЙ ПОГИБИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Авдошка И.В.

Цилиндрические оболочки, имеющие начальные погиби, обусловленные технологическими неточностями, являются важным объектом исследования механиков. Известно, что даже незначительные погиби оказывают существенное влияние на устойчивость и собственные колебания оболочек. В данной работе исследуется влияние параболической погиби срединной поверхности цилиндрической оболочки, подверженной действию внешних сил, на характер движения в ней локализованных семейств изгибных волн (волновых пакетов (ВП)).

1. Постановка задачи.

Рассмотрим тонкую упругую оболочку, поверхность которой близка к опорной цилиндрической поверхности, в общем случае некруговой и с косыми краями. Введем на опорной поверхности ортогональную систему координат s, φ, где s — координата на образующей, φ — на направляющей, введенные таким образом, что первая квадратичная форма поверхности имеет вид $d\sigma^2 = R^2\left(ds^2 + d\varphi^2\right)$. Здесь R — характерный размер поверхности. Предполагаем, что рассматриваемая нами оболочка находится на расстоянии $\mu R f(s,\varphi)$ от опорной поверхности, где μ — некоторый малый параметр, а $f(s,\varphi)$ описывает форму погиби оболочки. Расстояние $\mu R f(s,\varphi)$ откладывается по направлению нормали к опорной поверхности в соответствующей точке.

Предположим, что $f(s,\varphi)$ вместе со своими производными имеет порядок $O(1)$.

В системе координат s, φ параметры геометрии оболочки с погибью имеют вид

$$A_1^2 = 1 + \mu^2\left(f_s'\right)^2,\ A_{12} = \mu^2 f_s' f_\varphi',\ A_2^2 = 1 + 2k(\varphi) f\mu + O(\mu),$$
$$L_1 = f_{ss}''\mu + O\left(\mu^2\right),\ L_{12} = f_{\varphi s}''\mu + O\left(\mu^2\right),\ L_2 = -k(\varphi) + O(\mu), \tag{1}$$

где $k(\varphi)$ — кривизна направляющей опорного цилиндра (радиус кривизны $R_2 = R/k(\varphi)$). В (1) элементы первой строки отнесены к R^2, второй — к R. Здесь и ниже штрих сверху означает дифференцирование по координате, указанной в качестве индекса внизу.

Для радиусов кривизны получаем

$$\frac{R}{R_1} = -f_{ss}''\mu + O\left(\mu^2\right),\ \frac{R}{R_{12}} = f_{s\varphi}''\mu + O\left(\mu^2\right),\ \frac{R}{R_2} = k(\varphi) + O(\mu). \tag{2}$$

Пусть края оболочки задаются соотношениями

$$s_1(\varphi) \le s \le s_2(\varphi) \text{ при } \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 . \tag{3}$$

Для исследования движения рассматриваемой оболочки воспользуемся системой уравнений пологих оболочек

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 \Delta^2 W + \Delta_R \Phi + \varepsilon^2 \Delta_t W + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \\ &\varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \Delta_R W = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\Delta \; z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\right],$$

$$\Delta_R z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2 R}{A_1 R_2}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1 R}{A_2 R_1}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{R}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{R}{R_{12}}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\right],$$

$$\Delta_t z = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A_1 T_2}{A_2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(T_3 \frac{\partial z}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(T_3 \frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{A_2 T_1}{A_1}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\right],$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2\left(1-\nu^2\right)},\ \left(T_1^0, T_2^0, S\right) = -Eh\varepsilon^6\left(T_1, T_2, T_3\right),\ t = \frac{t'}{t_c},\ t_c^2 = \frac{R^2\rho}{E\varepsilon^6},\ \Phi = \frac{\Phi'}{EhR\varepsilon^4},$$

где h — толщина оболочки, ε — естественный малый параметр, E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки соответственно, t' — время, T_1^0, T_2^0, S — мембранные усилия, в срединной поверхности оболочки.

Пусть функции $k(\varphi)$, $T_i(\varphi,t)$ вместе со своими производными являются функциями порядка $O(1)$.

Выберем малый параметр μ таким образом, чтобы влияние начальной погиби $\mu R f(s,\theta)$ сказывалось уже в нулевом приближении итерационного процесса. Для этого положим

$$\mu = \varepsilon^2 , \tag{5}$$

т. е будем считать, что характерное значение погиби $\mu R f(s,\theta)$ имеет порядок $(R/h)^{1/2}$.

Для исследования основного напряженного состояния на краях оболочки (3) рассмотрим условия шарнирного опирания, которые с точностью до величин ε^2 имеют вид [2]

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} = 0,\ \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{при} \quad s = s_i(\varphi). \tag{6}$$

Рассмотрим начальные условия [1]

$$W\big|_{t=0} = W_0^*(s,\varphi,\varepsilon) F_0,\quad \dot{W}\big|_{t=0} = \mathrm{i}\varepsilon^{-1} V_0^*(s,\varphi,\varepsilon) F_0, \tag{7}$$

$$F_0 = F_0(\varphi,\varepsilon) = \exp\left\{\mathrm{i}\varepsilon^{-1}\left(a_0 \varphi + \frac{1}{2} b_0 \varphi^2\right)\right\},$$

где $\operatorname{Im} b_0 > 0$, a_0 ($a_0 \ne 0$) – вещественное число, W_0^*, V_0^* — комплекснозначные функции, такие, что

$$\frac{\partial^m W_0^*}{\partial s^m},\ \frac{\partial^m V_0^*}{\partial s^m} \sim \varepsilon^{-m\gamma} \text{ при } \varepsilon \to 0, \quad m = 1, 2, \ldots,\ 0 \le \gamma < 3/4, \tag{8}$$

и имеющие в направлении φ конечное число осцилляций с изменяемостью $\varepsilon^{-1/2}$ и удовлетворяющие граничным условиям (2.2).

2. Метод решения

Дальнейшие действия во многом совпадают с описанными в статье [1]. Решение задачи (4), (6), (7) ищем в виде

$$W = \sum_{n=1}^{N} W_n, \quad \Phi = \sum_{n=1}^{N} \Phi_n, \tag{9}$$

где пару функций W_n, Φ_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) назовем n-м волновым пакетом (ВП). Считаем, что W_n, Φ_n в момент времени t локализованы в окрестности подвижной образующей $\varphi = q_n(t)$ ($q_n(0) = 0$).

Введем новую систему координат, связанную с центром $q_n(t)$, по формуле

$$\varphi = q_n(t) + \varepsilon^{1/2}\xi_n. \tag{10}$$

Разложим переменные коэффициенты уравнения (4) в ряды по переменной φ в окрестности точки $q_n(t)$. Формальное асимптотическое решение поставленной задачи ищем в виде

$$W_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} w_{nm}(s, \xi_n, t) F_n,\ \Phi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/2} f_{nm}(s, \xi_n, t) F_n, \tag{11}$$

$$F_n = \exp\left\{ \mathrm{i} \left[\varepsilon^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \varepsilon^{-1/2} p_n(t)\xi_n + \tfrac{1}{2} b_n(t)\xi_n^2 \right] \right\}.$$

3. Итоговые краевые задачи и их решение

В результате подстановки выражений (9), (11) с учетом (10) в уравнения (4) и граничные условия (6) приходим к последовательности краевых задач

$$\sum_{j=0}^{m} L_{nj} w_{nm-j} = 0,\ m = 0, 1, 2\ldots, \tag{12}$$

где

$$L_{n0}y = \frac{k^2(q_n)}{p_n^4}\frac{\partial^4 y}{\partial s^4} + \frac{k(q_n)}{p_n^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(f''_{ss}(s, q_n)\,y\right) + f''_{ss}(s, q_n)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right] +$$
$$+\left[p_n^4 + \left(f''_{ss}(s, q_n)\right)^2 - T_2(q_n)p_n^2 - \left(\omega_n - \dot{q}_n p_n\right)^2\right] y, \tag{13}$$

оператор L_{n1} выражается через L_{n0} так же, как это описано в [1], а к $L_{n2}y$ по сравнению с [1] прибавляется:

$$\frac{4\mathrm{i}k}{p_n^3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(f'''_{ss\varphi}y\right) + \frac{2\mathrm{i}k}{p_n^3}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(f''_{s\varphi}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + \frac{2\mathrm{i}k'_\varphi f''_{ss}}{p_n^3}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{2\mathrm{i}f''_{ss}}{p_n}\frac{\partial}{\partial s}\left(f''_{s\varphi}y\right) +$$
$$+\frac{2\mathrm{i}kf''_{s\varphi}}{p_n^3}\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} + \frac{2\mathrm{i}f''_{s\varphi}}{p_n}\frac{\partial}{\partial s}\left(f''_{ss}y\right) + 2\mathrm{i}p_n T_3\frac{\partial y}{\partial s} + \mathrm{i}p_n T'_{2\varphi}. \tag{14}$$

Граничные условия, соответствующие уравнениям (12), не меняют свой вид [1].

Коэффициенты в дифференциальном уравнении в нулевом приближении не зависят от s, если $f''_{ss} = \mathrm{const}$, что соответствует случаю важной с точки зрения приложений параболической погиби. Далее полагаем, что форма погиби определяется соотношением

$$f(s,\varphi) = a(\varphi)s^2 + b(\varphi)s + c(\varphi) \tag{15}$$

В этом случае краевая задача в нулевом приближении (13), (6) разрешима в явном виде. Ее решениями будут функции $z_n = \sin\lambda_n(s,q_n)(s - s_1(q_n))$, где $\lambda_n = \pi n(s_2(q_n) - s_1(q_n))^{-1}$. Разложим начальные условия (7) по системе функций $\{z_n\}$, подобно тому, как это было сделано в [1], откуда получим начальные условия для функций W_n, Φ_n, которые здесь не приводятся.

Решения краевых задач ищем в виде

$$w_{ni} = P_{ni}(\xi_n,t)z_n(s,q_n) + w_{ni}^{(p)}(s,\xi_n,t), \tag{16}$$

где P_{ni} — полином аргумента ξ_n, а $w_{ni}^{(p)}$ — какое-либо частное решение уравнения (12) для $m = i$ ($w_{n0}^{(p)} = 0$). Условия разрешимости краевых задач в виде (16) приводят к следующим результатам. Получена формула для частоты

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n \mp H_n[p_n(t),q_n(t),t], \tag{17}$$

$$H_n[p_n,q_n,t] = \sqrt{\left(k(q_n)\lambda_n^2(q_n)p_n^{-2} - 2a(q_n)\right)^2 + p_n^4 - T_2(q_n)p_n^2}, \tag{18}$$

где H_n — функция Гамильтона; система Гамильтона для отыскания функций p_n, q_n

$$\dot{q}_n = H_p,\ \dot{p}_n = -H_q; \tag{19}$$

уравнение Риккати для нахождения функции b_n

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0, \tag{20}$$

а также амплитудное уравнение для нахождения функции P_{n0}, которое здесь не приводится ввиду ограниченности объема статьи.

Предлагаемый метод содержит в себе возможность исследования собственных частот и форм колебаний оболочек, локализованных в окрестности некоторой образующей. Для изучения собственных колебаний рассматривают вырожденную систему Гамильтона (19) $H_p = 0$, $H_q = 0$, тем самым находя значение $p_n(0) = a_{n0}^*$, соответствующее стационарному (неподвижному ВП). Аналогично рассматривают вырожденное уравнение Риккати (20), находя соответствующее стационарному ВП $b_n(0)$. Для стационарного случая амплитудное уравнение упрощается, что позволяет в явном виде найти форму собственных колебаний. Нулевое приближение частоты стационарного ВП, согласно формуле (17),

$$\omega_1 = \mp H_1(a_{10}^*,0,0) \tag{21}$$

соответствует наинизшей частоте собственных колебаний оболочки вращения, близкой к круговой цилиндрической оболочке с прямыми краями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных образующим, загруженной однородной внешней нагрузкой.

В статье Кукуджанова С.Н. [3] исследуются наинизшие частоты собственных колебаний именно такой оболочки при некотором частном виде параболической формы образующей.

Установлено полное совпадение частоты, получаемой по формуле (21) с частотой, полученной в [3] при соответствующей форме погиби.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ, грант Т00М-096.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех.— 1996.— Т. 60, № 4.— С. 635—643. 2. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы.— М.: Наука. Физматлит, 1995.— 320 с. 3. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела.— 1968.— № 3.— С. 140—144.

ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПАКЕТЫ В ОБОЛОЧКАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ДЕЙСТВИЮ ВНЕШИХ СИЛ

Авдошка И.В., Михасев Г.И.

В работе [1] предложена процедура построения формального асимптотического решения уравнений движения оболочек произвольной формы в виде локализованных в окрестности некоторых подвижных точек двумерных волновых пакетов (ВП). В настоящей работе указанный результат распространяется на случай оболочки, подверженной воздействию внешних сил, вызывающих в ней нестационарное безмоментное напряженное состояние.

1°. Введем на срединной поверхности тонкой упругой оболочки произвольного профиля криволинейную систему координат α_1, α_2, совпадающую с линиями кривизны, так что первая квадратичная форма поверхности имеет вид $d\sigma^2 = R^2\left(A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2\right)$, где R — характерный размер оболочки. Предполагается, что оболочка имеет переменные по обоим направлениям толщину $h^*(\alpha_k)$, модуль Юнга $E^*(\alpha_k)$, коэффициент Пуассона $\nu(\alpha_k)$ и плотность материала $\rho^*(\alpha_k)$. Пусть внешние плавно меняющиеся силы вызывают нестационарное безмоментное напряженное состояние оболочки, характеризующееся мембранными усилиями $T_1^0\left(\alpha_k, t^*\right)$, $T_2^0\left(\alpha_k, t^*\right)$, $S^0\left(\alpha_k, t^*\right)$, где t^* — время.

Предполагая большую изменяемость волн в направлении обеих пространственных координат, используем систему уравнений пологих оболочек произвольной формы для ортогональной системы координат, которая имеет вид [2]