

# К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ СИЛ

И.В. Авдошка<sup>1</sup>, Г.И. Михасев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусская государственная политехническая академия,  
Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Витебский государственный университет, Витебск, Беларусь

В работе [1] предложен асимптотический метод для исследования движения тонкой цилиндрической оболочки после сообщения ей локализованных в окрестности некоторой образующей начальных перемещений и скоростей. Здесь этот метод применяется для аналогичной задачи для линейно вязкоупругой цилиндрической оболочки, подверженной действию динамических внешних сил.

## 1. Постановка задачи

На срединной поверхности тонкой цилиндрической оболочки толщиной  $h$  введем ортогональную систему координат  $x, \varphi$ , где  $x$  – осевая,  $\varphi$  – окружная координаты, введенные таким образом, чтобы первая квадратичная форма имела вид  $d\sigma^2 = R^2(dx^2 + d\varphi^2)$ . Здесь  $R$  – характерный размер срединной поверхности. Тогда  $R_2(\varphi) = R/k(\varphi)$  – кривизна. Оболочка может быть незамкнутой в окружном направлении, а ее края могут быть косыми и задаются соотношениями

$$x_1(\varphi) \leq x \leq x_2(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \quad (1)$$

Пусть оболочка подвержена действию нестационарных, неоднородных по окружной координате осевых сил, вызывающих в ней медленно меняющееся по  $\varphi, t$  осевое усилие  $T_1^0$ . Материал оболочки – линейно вязкоупругий с мгновенным модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ .

Предполагая большую изменяемость решения в направлении обеих координат используем уравнения пологих оболочек [2], [3],

учитывающие вязкоупругие свойства материала и наличие осевых усилий,

$$\begin{aligned} \mu^4 \Delta^2 (W - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) W(x, \varphi, \tau) d\tau) + \mu^2 T_1(\varphi, t) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \\ - \mu^2 k_2(\varphi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (2) \\ \mu^4 \Delta^2 \Phi + \mu^2 k_2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (W - \int_{-\infty}^t K(t - \tau) W(x, \varphi, \tau) d\tau) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12(1 - \nu^2) R^2}, \quad T_1^0 = -Eh\mu^2 T_1,$$

$$W = \mu^2 \frac{W^*}{R}, \quad \Phi = \frac{\mu^{-2} \Phi^*}{hE}, \quad t = t_*/t_c, \quad t_c^2 = \frac{R^2}{Eh\mu^2}.$$

Здесь  $W^*$ ,  $\Phi^*$  — нормальный прогиб и функция напряжений,  $\mu$  — малый параметр,  $t$  — безразмерное время,  $t_c$  — характерное время,  $K(t - \tau)$  — ядро скорости релаксации.

Пусть ядро  $K(t - \tau)$  удовлетворяет свойству затухающей памяти, непрерывно при  $(t - \tau) \in [0, +\infty)$  и является величиной порядка  $O(1)$  на том же отрезке.

Предположим, что функции  $x_1(\varphi)$ ,  $x_2(\varphi)$ ,  $T_1(\varphi, t)$ ,  $k_2(\varphi)$  являются достаточное число раз дифференцируемыми по своим аргументам и вместе со своими производными являются величинами порядка  $O(1)$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

В качестве граничных условий рассмотрим условия Навье, соответствующие шарнирному опиранию

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1(\varphi), \quad x = x_2(\varphi) \quad (3)$$

Пусть при  $t = 0$  оболочке сообщаются начальные перемещения и скорости, локализованные в окрестности образующей  $\varphi = 0$ .

$$W|_{t=0} = W_0^*(x, \varphi, \mu) F_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = V_0^*(x, \varphi, \mu) F_0 \quad (4)$$

$$F_0 = \exp\{i\mu^{-1}(a_0\varphi + \frac{1}{2}b_0\varphi^2)\}, \quad \text{Im } b_0 > 0.$$

Здесь  $a_0$  - вещественное число,  $W_0^*$ ,  $V_0^*$  - комплекснозначные функции, такие что

$$\frac{\partial^m W_0^*}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^m V_0^*}{\partial x^m} \sim \mu^{-m} \quad \text{при } \mu \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Вещественные и мнимые части (5) определяют пару начальных волновых пакетов (ВП). Такие начальные условия могут возникнуть в результате кратковременного механического воздействия, сосредоточенного в окрестности образующей  $\varphi = 0$ , либо в результате возбуждения параметрических колебаний оболочки с неравномерно распределенными параметрами [5].

## 2. Решение задачи (2)-(4)

Учитывая большую изменяемость решения в направлении оси, выполним растяжение осевой координаты по формуле

$$x = \mu s \quad (6)$$

Разложим начальные условия (4) по системе функций  $\{z_n\}$  :

$$z_n = \sin \lambda_n(s - s_1(\varphi)), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{s_2(\varphi) - s_1(\varphi)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Здесь и ниже  $s_i(\varphi) = \mu^{-1}x_i(\varphi)$ ,  $i = 1, 2$ . В результате начальные условия примут вид

$$W|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^0 z_n F_0, \quad \dot{W}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^0 z_n F_0, \quad (8)$$

$$\{W_n^0, V_n^0\} = \int_{s_1(\varphi)}^{s_2(\varphi)} \{W_0^*, V_0^*\} z_n ds$$

Ряды (8) равномерно сходятся по  $s$  на  $[s_1(\varphi), s_2(\varphi)]$  для любого  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$  [4]. Учитывая (5), в (8) можно ограничиться конечным числом слагаемых  $N$ . Таким образом начальный волновой пакет (4) распадается на  $N$  начальных ВП. Решение будем искать в виде

$$W = \sum_{n=1}^N W_n, \quad \Phi = \sum_{n=1}^N \Phi_n \quad (9)$$

Пару функций  $W_n, \Phi_n$  будем называть  $n$ -м ВП [1]. Из (8) легко получить начальные условия для  $W_n$ .

Обозначим через  $q_n(t)$  центр  $n$ -го ВП, который полагаем подвижным. Функция  $q_n$  — дважды дифференцируемая и  $q_n(0) = 0$ . Далее будем рассматривать  $n$ -й ВП. Введем подвижную систему координат, связанную с центром  $q_n(t)$

$$\varphi = q_n(t) + \mu^{1/2} \xi_n \quad (10)$$

Теперь  $\xi_n$  характеризует удаленность образующей  $\varphi$  от центра  $n$ -го ВП  $q_n(t)$ .

Пару функций  $W_n, \Phi_n$  будем искать в виде

$$\{W_n, \Phi_n\} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m/2} \{w_{nm}(s, \xi_n, t), \varphi_{nm}(s, \xi_n, t)\} S_n, \quad (11)$$

$$S_n = \exp\left\{i[\mu^{-1} \int_0^t \omega_n(\tau) d\tau + \mu^{-1/2} p_n(t) \xi_n + \frac{1}{2} b_n(t) \xi_n^2]\right\}.$$

Неизвестные функции  $\omega_n, p_n, b_n$  — дважды дифференцируемые,  $w_{nm}, \varphi_{nm}$  — полиномы по  $\xi_n$ . Механический смысл параметров  $\omega_n, p_n, b_n$  см. в [1].

Используя формулу (11), выполнив дважды интегрирование по частям, получаем оценку для интегралов, входящих в (2)

$$\int_{-\infty}^t K(t-\tau) W_n(s, \xi_n, \tau) d\tau = -\frac{i\mu K(0) W_n(s, \xi_n, \tau)}{\omega_n(t)} + O(\mu^2). \quad (12)$$

При использовании этой оценки необходимо следить за тем, чтобы функция  $\omega_n(t)$  не обращалась в 0 для любого  $t \in [0, T]$ . Из (12) следует, что "вязкие" слагаемые появляются лишь во втором приближении.

Разложим коэффициенты (2) в ряды Тейлора в окрестности центра  $q_n(t)$  по степеням  $\mu^{1/2} \xi_n$ . Учитывая эти разложения, а также (6), (9)-(12), приравняем в (2) коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu^{1/2}$ . В результате придем к последовательности уравнений

$$\sum_{k=0}^m L_{nk} X_{nm-k} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где  $\mathbf{L}_{nk}$  — матрица с коэффициентами  $l_{nkij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), а  $\mathbf{X}_{nk} = (\omega_{nk}, \varphi_{nk})^T$ , где значок T означает транспонирование. Коэффициенты матрицы  $\mathbf{L}_{n0}$  равны

$$l_{n011} = \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} - p_n^2 \right)^2 + T_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - (\omega_n - \dot{q}_n p_n)^2,$$

$$l_{n012} = -l_{n021} = -k_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad l_{n022} = \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} - p_n^2 \right)^2,$$

$$\mathbf{L}_{n1} = b_n \xi_n \mathbf{L}_p + \xi_n \mathbf{L}_q + \dot{p}_n \xi_n \mathbf{L}_\omega - i \mathbf{L}_p \frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

$$\mathbf{L}_{n2} = \left( \frac{b_n^2}{2} \mathbf{L}_{pp} + b_n \mathbf{L}_{pq} + \frac{1}{2} \mathbf{L}_{qq} + \dot{p}_n^2 \mathbf{L}_{\omega\omega} + \dot{p}_n \mathbf{L}_{\omega q} + \dot{p}_n b_n \mathbf{L}_{\omega p} + \frac{\dot{b}_n}{2} \mathbf{L}_\omega \right) \xi_n^2$$

$$- \frac{1}{2} \mathbf{L}_{pp} \frac{\partial^2}{\partial \xi_n^2} - i (b_n \mathbf{L}_{pp} + \mathbf{L}_{pq} + \dot{p}_n \mathbf{L}_{\omega p}) \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} -$$

$$i \mathbf{L}_\omega \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i b_n}{2} \mathbf{L}_{pp} - \frac{i \dot{\omega}_n}{2} \mathbf{L}_{\omega\omega} - i \dot{p}_n \mathbf{L}_{\omega p} + \mathbf{S}_n,$$

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} -i \dot{q}_n p_n + \frac{i K^{(0)}}{\omega_n} \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} - p_n^2 \right)^2 & 0 \\ \frac{i K^{(0)}}{\omega_n} k_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже индексы  $p, q, \omega$  означают дифференцирование по соответствующему параметру. Функции  $k_2$  и  $T_1$  и их производные берутся при  $\varphi = q_n(t)$ .

Подставляя (11) в (3), с учетом (6) получаем последовательность граничных условий для уравнений (13).

Задача в нулевом приближении имеет решение в виде

$$\mathbf{X}_{n0} = P_{n0}(\xi_n, t) \mathbf{Y}_n(t) z_n(s, q_n(t)), \quad (14)$$

где  $P_{n0}$  — полином по  $\xi_n$ ,  $\mathbf{Y}_n$  — неизвестная вектор-функция, если

$$\omega_n = \dot{q}_n p_n \mp H_n(t, p_n, q_n), \quad (15)$$

где

$$H_n = \sqrt{(\lambda_n^2(q_n) + p_n^2)^2 - T_1(q_n, t) \lambda_n^2(q_n) + \frac{k_2^2(q_n) \lambda_n^2(q_n)}{(\lambda_n^2(q_n) + p_n^2)^2}} \quad (16)$$

— функция Гамильтона,

$$\mathbf{Y}_n = (1, \Lambda_n)^T, \quad \Lambda_n = k_2(q_n)\lambda_n^2(q_n)(\lambda_n^2(q_n) + p_n^2)^{-2}.$$

Решения неоднородных задач в первом и втором приближениях ищем в виде

$$\mathbf{X}_{ni} = P_{ni}(\xi_n, t)\mathbf{Y}_n(t)z_n(s, q_n(t)) + \mathbf{X}_{ni}^{(p)}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

где  $P_{ni}$  — полином по  $\xi_n$ , а  $\mathbf{X}_{ni}^{(p)}$  — какое-нибудь частное решение соответствующей неоднородной краевой задачи. В результате приходим к системе Гамильтона

$$\dot{q}_n = H_p, \quad \dot{p}_n = -H_q, \quad p_n(0) = a_0, \quad q_n(0) = 0, \quad (18)$$

уравнению Риккати

$$\dot{b}_n + H_{pp}b_n^2 + 2H_{pq}b_n + H_{qq} = 0, \quad b_n(0) = b_0 \quad (19)$$

и амплитудному уравнению для определения полинома  $P_{n0}$

$$h_{n0} \frac{\partial^2 P_{n0}}{\partial \xi_n^2} + h_{n1} \xi_n \frac{\partial P_{n0}}{\partial \xi_n} + h_{n2} \frac{\partial P_{n0}}{\partial t} + h_{n3} P_{n0} = 0, \quad (20)$$

$$h_{n0}(t) = H_{pp}, \quad h_{n1}(t) = 2i(b_n H_{pp} + H_{pq}), \quad h_{n2} = 2i,$$

$$h_{n3} = iH_n^{-1} \left\{ b_n H_n H_{pp} - 2H_p H_q - \dot{\omega}_n + \ddot{q}_n p_n + \frac{l'}{l} H_n H_p + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{l} \int_{s_1(q_n)}^{s_2(q_n)} \left( \frac{\partial l_{11}}{\partial p} - \Lambda_n^2 \frac{\partial l_{22}}{\partial p} \right) z_q z_n ds - \right.$$

$$\left. - \frac{K(0)}{\omega_n} [(\lambda_n^2 + p_n^2)^2 + k_2(q_n)\lambda_n^2 \Lambda_n] \right\},$$

где  $l(q_n) = s_2(q_n) - s_1(q_n)$ . Штрихом обозначается производная по  $\varphi$ . Как видим, "вязкие" слагаемые входят в коэффициент  $h_{n3}$  амплитудного уравнение (20).

### 3. Пример

Рассмотрим тонкую круговую цилиндрическую оболочку с прямыми краями, подверженную действию осевого сжатия, вызывающего в ней усилие  $T_1(\varphi)$ . Пусть

$$T_1 = 1 + \cos 2\varphi, s_1 = 0, s_2 = 4, k_2 = 2, a_0 = 1,5, b_0 = i, \quad (21)$$

$$W_0^* = V_0^* = z_n, h/R = 0,01, \nu = 0,3, n = 1.$$

В данном случае образующая  $\varphi = 0$  является наиболее слабой, поскольку на ней осевое усилие максимально. Результаты численного решения уравнений (15)-(20) приведены на рис.1. Вычисления проводились для знака "-" в (15). Цифрами 1-5 на рис.1 обозначены графики соответственно  $p_1(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $\omega_1(t)$ ,  $\text{Im}b_1(t)$ ,  $\text{Re}w_{1 \max}$ .

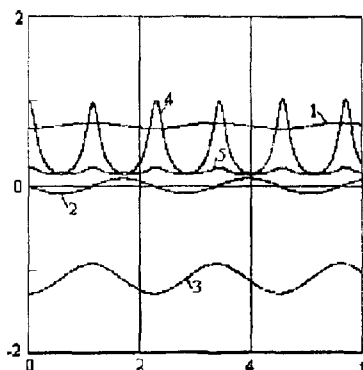


Рис.1

Из рисунка видно, что имеет место многократное отражение 1-го ВП от некоторых образующих  $\varphi^{(r)}$ . При этом функции  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $\omega_1$  — периодические, и каждому отражению ВП соответствует фокусировка (рост  $\text{Im}b_1$ ) и рост амплитуд.

Заметим, что в данном случае функция  $\omega_n$  не обращается в 0, поэтому законна оценка (12).

Исследуем влияние вязкости на характер волнового процесса при описанных выше условиях (21). На рис.2 приведены графики функции  $\text{Re}w_{1 \max}$  при различных значениях параметра вязкости  $K(0)$ . Цифрами 1-3 обозначены графики, соответствующие значениям  $K(0) = 0, 0,5, 1$ .

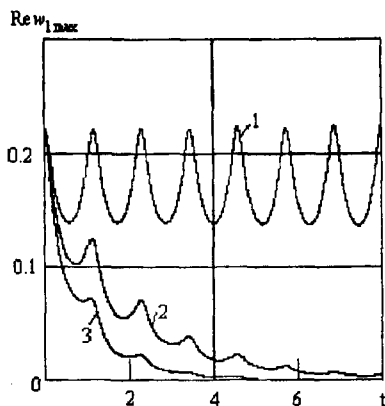


Рис.2

Как видим, наличие вязкости приводит к затуханию амплитуды колебаний оболочки, причем рост параметра вязкости ускоряет этот процесс.

#### 4. ВП в вязкоупругой цилиндрической оболочке, нагруженной кольцевым усилием

Для рассмотрения движения ВП в тонкой линейно вязкоупругой цилиндрической оболочке воспользуемся уравнениями [3], [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 (W - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) W(\tau, \varphi, s) d\tau) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} (T_2(\varphi, t) \frac{\partial W}{\partial \varphi}) - \\ - k_2(\varphi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (22) \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi + k_2(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (W - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) W(\tau, \varphi, s) d\tau) = 0, \end{aligned}$$

где безразмерные величины вводятся по формулам [1],  $T_2^0 = -Eh\varepsilon^6 T_2$ . Оболочка занимает область:  $s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ .

При решении этой задачи предполагалась малая изменяемость напряженно-деформированного состояния вдоль оси. В результате



выполнения действий, описанных в [1], при учете оценки (12) приходим к формуле (15), системе Гамильтона (18), уравнению Риккати и амплитудному уравнению (20). При этом функция Гамильтона

$$H_n = \sqrt{p_n^4 + \frac{\lambda_n^4 k_2^2}{p_n^4} - T_2(q_n, t) p_n^2}, \quad (23)$$

где  $\lambda_n = \pi n(s_2(q_n) - s_1(q_n))^{-1}$ . Коэффициенты  $h_{n0}$ ,  $h_{n1}$ ,  $h_{n2}$  совпадают с соответствующими коэффициентами уравнения (20), а

$$h_{n3} = iH_n^{-1} \left\{ b_n H_n H_{pp} - 2H_p H_q - \dot{\omega}_n + \ddot{q}_n p_n - \frac{4k_2 k_2'}{p_n^5} \lambda_n - \right. \\ \left. - p_n T_2' + \frac{1}{\eta_n} \int_{s_1(q_n)}^{s_2(q_n)} (\mathbf{L}_p z_q + \mathbf{L}_\omega \dot{z}_n) z_n ds - \frac{K(0)}{\omega_n} (p_n^4 - k_2^2 \lambda_n^4) \right\},$$

где  $\eta_n = \int_{s_1(q_n)}^{s_2(q_n)} z_n^2 ds$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке БФФИ, грант Т97-142.

## Литература

1. Михасев Г.И. Локализованные семейства изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке с косыми краями // Прикл. мат. и мех. — 1996. — Т. 60, N. 4. — Т. 635–643.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: ГТТИ, 1956. — 573 с.
3. Матяш В.И. Колебания изотропных упруго-вязких оболочек // Механика полимеров. — 1971. — N. 1. — Т. 157–163.
4. Курант Р., Гильберт Д. — Методы математической физики. Т. 1. — М.;Л.: Гостехиздат, 1951. — 476 с.
5. Mikhasev G.I. Free and parametric vibrations of cylindrical shells under static and periodic axial loads // Technische Mechanik. — 1997. — Band 17, Heft 3. — S. 209–216.
6. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 320 с.

# О КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ УДАРЕ ТВЕРДОГО ШАРА О ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ УПРУГОГО ТЕЛА

И.И. Аргатов

*Государственная морская академия им. адм. С.О. Макарова;  
Санкт-Петербург*

Методом сращиваемых асимптотических разложений изучается задача одностороннего контакта без трения для штампа, имеющего форму кругового параболоида. Предполагается, что размеры площадки контакта малы в сравнении с характерным размером тела. Модельная контактная задача для пограничного слоя решается при помощи аппарата теории Герца. Выводится уравнение  $P = K\alpha^{3/2} + k\alpha^2$ , связывающее силу  $P$  и перемещение  $\alpha$  штампа. Это уравнение, содержащее поправку  $k$  на геометрию и условия крепления упругого тела, применяется для построения уточненной теории квазистатического удара, учитывающей общие деформации упругого тела.

**Введение.** Известно (см. [1], гл. 1, § 1), что квазистатическая теория удара Г. Герца основана на решении статической контактной задачи о давлении на упругое полупространство штампа в форме эллиптического параболоида.

Контактная задача для упругого тела, отличного от полупространства, изучалась в работах [2] (см. решение осесимметричной задачи в § 49), [3, 4] (упругий слой) и [5] (упругий пространственный клин). В статье [6] построено асимптотическое решение задачи о вдавлении параболоидального штампа в плоский участок границы ограниченного упругого тела.

В данном сообщении полученные в [6] формулы привлекаются для описания квазистатического удара абсолютно твердого шара о плоскую границу упругого тела. В разд. 2 — 3 выписывается асимптотика решения контактной задачи. В разд. 4 выводится уравнение для контактной силы. Интегрирование уравнения движения твердого тела (разд. 5) проводится по известной схеме (см. [1], др.).