

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ПРАКТИКУМ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по аграрному техническому образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования
по специальности 1-74 06 05 «Энергетическое обеспечение
сельского хозяйства (по направлениям)»*

В двух частях

Часть 1

Электрические и магнитные поля постоянного тока.
Теория цепей постоянного тока.
Цепи однофазного синусоидального тока

Минск
БГАТУ
2022

УДК 621.31(07)
ББК 31.2я7
Т33

Составители:

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры *А. В. Крутов*,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры *Н. Г. Крылова*,
кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры *Г. М. Дворник*,
старший преподаватель *М. А. Бойко*

Рецензенты:

кафедра «Электротехника и электроника»
Белорусского национального технического университета
(и. о. заведующего кафедрой *Т. Е. Жуковская*);
кандидат технических наук, доцент, заместитель директора
РНПУП «Институт энергетики НАН Беларуси» *Н. Е. Шевчик*

Т33 **Теоретические** основы электротехники. Практикум : учебно-методическое пособие : в 2 ч. / сост.: А. В. Крутов [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2022. – Ч. 1: Электрические и магнитные поля постоянного тока. Теория цепей постоянного тока. Цепи однофазного синусоидального тока. – 172 с.
ISBN 978-985-25-0179-8.

Содержит материалы для практических занятий, включающие методики расчета электрических и магнитных цепей постоянного тока и однофазных цепей синусоидального тока, примеры решений, задачи для самостоятельной работы, индивидуальные задания.

Для студентов, обучающихся по специальности 1-74 06 05 «Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (по направлениям)» и направлению специальности 1-53 01 01-09 «Автоматизация технологических процессов и производств (сельское хозяйство)».

УДК 621.31(07)
ББК 31.2я7

ISBN 978-985-25-0179-8 (ч. 1)
ISBN 978-985-25-0178-1

© БГАТУ, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|------------|
| МОДУЛЬ 1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА | |
| 1.1. Расчет электрического поля постоянного тока. Шаговое напряжение..... | 4 |
| 1.2. Расчет магнитных цепей | 10 |
| МОДУЛЬ 2. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА | |
| 2.1. Расчет простых цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований..... | 24 |
| 2.2. Расчет простых цепей постоянного тока на основе законов электротехники | 35 |
| 2.3. Расчет сложных цепей постоянного тока методом уравнений Кирхгофа..... | 43 |
| 2.4. Расчет сложных цепей постоянного тока методами контурных токов, двух узлов, эквивалентного генератора | 49 |
| 2.5. Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока при последовательном, параллельном и смешанном соединении нелинейных резисторов..... | 63 |
| 2.6. Расчет нелинейных цепей постоянного тока методом двух узлов и методом итераций..... | 71 |
| МОДУЛЬ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА | |
| 3.1. Изображение синусоидальных величин векторами и комплексными числами | 77 |
| 3.2. Расчет простых цепей синусоидального тока. Законы Ома, Кирхгофа в комплексной форме..... | 83 |
| 3.3. Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока. Мощности в цепи синусоидального тока | 100 |
| 3.4. Расчет электрических цепей при резонансных явлениях | 123 |
| 3.5. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции | 134 |
| 3.6. Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС и напряжениях..... | 141 |
| 3.7. Расчет коэффициентов четырехполюсника | 147 |
| СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ..... | 157 |
| ПРИЛОЖЕНИЯ | 158 |

МОДУЛЬ 1. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Расчет электрического поля постоянного тока. Шаговое напряжение

Цель: изучить величины, характеризующие электрическое поле в проводящей среде, и методику расчета токов утечки через изоляцию в электрических устройствах.

Методические рекомендации

Основной величиной в электрическом поле проводящей среды является плотность тока \vec{J} . Электрический ток – поток вектора плотности тока сквозь сечение проводника площадью S :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u} dS.$$

Связь вектора плотности тока \vec{J} с вектором напряженности электрического поля \vec{E} определяется законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{J} = \gamma \vec{E},$$

где γ – удельная проводимость среды.

Мощность тепловых потерь в единице объема проводящей среды находится по закону Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$\frac{P}{V} = \gamma E^2.$$

Проводимость G между двумя телами, находящимися в проводящей среде с удельной проводимостью γ , может быть определена по формуле емкости C между этими телами, находящимися в среде из диэлектрика с абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_a , путем замены C на G и ϵ_a на γ .

Пример 1. Стальная пластина (рис. 1.1) представляет собой $3/4$ диска с концентрически вырезанным круглым отверстием. Внутренний радиус диска $R_1 = 1$ см, внешний $R_2 = 2$ см. Толщина пластины $h = 2$ мм. К электродам 1 и 2 приложено напряжение $U = 2$ В. Удельная проводимость стали $\gamma = 10^7$ См/м. Определить наибольшую и наименьшую плотность тока и значение тока источника питания.

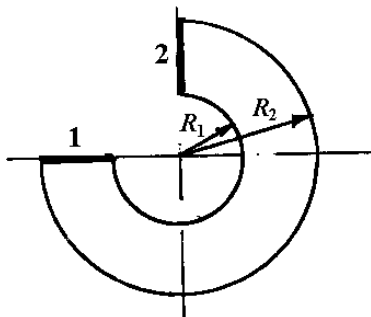


Рис. 1.1

Решение

Из условия симметрии линии вектора плотности тока \vec{J} и линии вектора напряженности электрического поля \vec{E} совпадают с концентрическими окружностями, проходящими по пластине:

$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}; \quad U = E \cdot \frac{3}{4} 2\pi R; \quad E = \frac{2U}{3\pi R}; \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}.$$

Следовательно:

$$J = \frac{\gamma 2U}{3\pi R}; \quad J_{\max} = \frac{\gamma 2U}{3\pi R_1} = \frac{10^7 \cdot 2 \cdot 2}{3\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 4,24 \cdot 10^8 \text{ А/м}^2;$$

$$J_{\min} = \frac{\gamma 2U}{3\pi R_2} = \frac{10^7 \cdot 2 \cdot 2}{3\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 2,12 \cdot 10^8 \text{ А/м}^2;$$

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S};$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\gamma 2U h dR}{3\pi R} = \frac{\gamma 2U h}{3\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{10^7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{3\pi} \ln \frac{2}{1} = 5,9 \cdot 10^3 \text{ А.}$$

Пример 2. Водонагреватель представляет собой металлический заземленный цилиндрический бак радиусом $R_1 = 0,5$ м и высотой $l = 1$ м. Дно и крышка бака выполнены из изолирующего материала. Бак имеет коаксиально расположенный электрод радиусом $R_2 = 0,1$ м. Водонагреватель присоединен к однофазному трансформатору $U = 220$ В. Один полюс трансформатора заземлен. Удельную проводимость воды $\gamma = 1$ См/м считать не зависящей от температуры. Определить значения тока и мощности нагревателя. Построить график зависимости удельной активной мощности в функции расстояния от оси цилиндров (рис. 1.2).

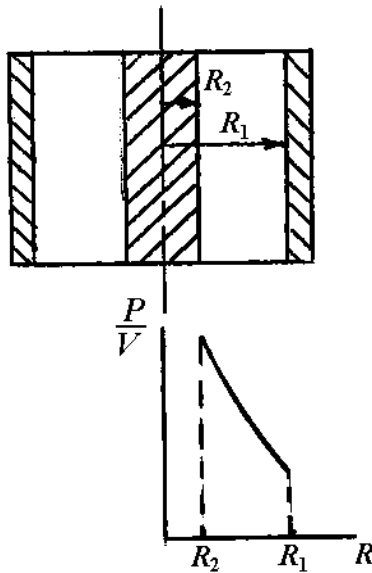


Рис. 1.2

Решение

Конструкция водонагревателя аналогична цилиндрическому конденсатору.

Емкость цилиндрического конденсатора $C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$, соответ-

ственно проводимость водонагревателя определяется из выражения

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{R_1}{R_2}} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{\ln \frac{0,5}{0,1}} = 3,9 \text{ См.}$$

Значение тока $I = GU = 3,9 \cdot 220 = 858 \text{ А.}$

Мощность $P = UI = 220 \cdot 858 = 188\,760 \text{ Вт.}$

Из условия симметрии плотность тока имеет только радиальную составляющую $J = \frac{I}{2\pi Rl}$, напряженность электрического поля

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma l R}.$$

Удельная активная мощность

$$\frac{P}{V} = \gamma E^2 = \frac{I^2}{4\pi^2 \gamma l^2} \frac{1}{R^2} = \frac{858^2}{4\pi^2 \cdot 1 \cdot 1} \frac{1}{R^2} = 18\,666 \frac{1}{R^2} \text{ Вт/м}^3;$$

$$R = R_2 = 0,1 \text{ м; } \frac{P}{V} = 1\,866\,600 \text{ Вт/м}^3;$$

$$R = R_1 = 0,5 \text{ м; } \frac{P}{V} = 74\,664 \text{ Вт/м}^3.$$

Пример 3. Два параллельных цилиндрических провода проходят через мраморный щит, толщина которого равна $a = 3 \text{ см}$, расстояние между осями отверстий для проводов $d = 20 \text{ см}$, радиус провода $R_0 = 0,2 \text{ см}$. Считая площадь щита неограниченно большой, найти значение тока утечки через мрамор между проводами, если напряжение $U = 220 \text{ В}$, а удельная проводимость мрамора $\gamma = 10^{-10} \text{ См/м}$ (рис. 1.3).

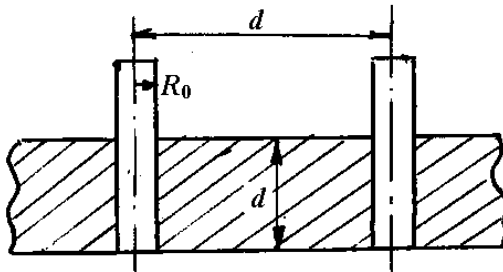


Рис. 1.3

Решение

Рассматриваемая конструкция щита с двумя проводами аналогична конструкции двухпроводной линии, между проводами которой находится идеальный диэлектрик. Согласно формуле емкости двухпроводной линии $C = \frac{\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{R_0}}$ проводимость щита

$$G = \frac{\pi \gamma l}{\ln \frac{d}{R_0}} = \frac{\pi \cdot 10^{-10} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{\ln \frac{20}{0,2}} = 2,04 \cdot 10^{-12} \text{ См};$$

$$I = UG = 220 \cdot 2,04 \cdot 10^{-12} = 4,49 \cdot 10^{-10} \text{ А.}$$

Пример 4. Ток короткого замыкания 1000 А проходит через фундамент опоры, который можно рассматривать как полусферический заземлитель (рис. 1.4, а). Удельная проводимость земли $2 \cdot 10^{-2}$ См/м. Найти значение шагового напряжения на расстоянии 5 м от центра опоры (длина шага 0,8 м).

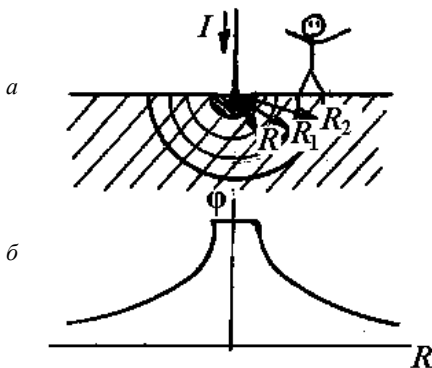


Рис. 1.4

Решение

Плотность тока имеет только радиальную составляющую

$$J = \frac{I}{2\pi R^2}, \text{ напряженность электрического поля } E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\gamma R^2}.$$

Потенциал $\varphi = -\int E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{1}{R} + \text{const}$. График изменения потенциала в зависимости от расстояния до центра опоры приведен на рис. 1.4, б.

Шаговое напряжение

$$U_{\text{ш}} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1000}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5,8} \right) = 220 \text{ В.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. К плоскому конденсатору, расстояние между обкладками которого $d = 5$ мм, а площадь каждой из них $S = 50 \text{ см}^2$, подключено постоянное напряжение $U = 500$ В. Удельная проводимость диэлектрика $\gamma = 10^{-10}$ См/м. Определить сопротивление изоляции, значения тока утечки и мощности тепловых потерь.

Ответ: 10^{10} Ом; $5 \cdot 10^{-8}$ А; $25 \cdot 10^{-6}$ Вт.

2. Изоляция коаксиального кабеля имеет удельную проводимость $\gamma = 10^{-9}$ См/м. Радиус жилы 4 мм, внутренний радиус оболочки 8 мм. Напряжение между жилой и оболочкой 600 В. Определить проводимость, значения тока утечки и мощности тепловых потерь в изоляции кабеля на единицу длины.

Ответ: $9,1 \cdot 10^{-9}$ См/м; 5,46 мкА/м; 3250 мкВт/м.

3. Определить радиус R_0 полусферического заземлителя, погруженного в глинистую почву, если через него протекает ток 314 А, а максимальное шаговое напряжение не превышает 150 В. Шаг человека принять равным 0,8 м. Удельная проводимость глинистой почвы $\gamma = 5 \cdot 10^{-2}$ См/м.

Ответ: $R_0 = 1,93$ м.

Контрольные вопросы

1. Как выражается ток через вектор плотности тока?
2. Как связаны между собой вектор плотности тока и вектор напряженности электрического поля?

3. Как определяется энергия, выделяющаяся в единицу времени в единице объема проводящей среды?
4. Как определяется проводимость между двумя электродами, помещенными в проводящую среду?

1.2. Расчет магнитных цепей

Цель: приобрести навыки расчета неразветвленных и разветвленных магнитных цепей.

А. Расчет неразветвленных магнитных цепей

Методические рекомендации

При расчете неразветвленных и разветвленных магнитных цепей встречаются с двумя типами задач.

Задачи первого типа

Заданы магнитный поток Φ , геометрические размеры и материал магнитопровода. Определить магнитодвижущую силу (МДС) Iw .

Порядок расчета:

1. Так как магнитный поток одинаковый вдоль всей цепи, то по заданному его значению необходимо найти значение магнитной индукции на каждом участке:

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k}. \quad (1.1)$$

Если же задана магнитная индукция B_k на каком-либо участке, определить магнитный поток $\Phi = B_k S_k$, после чего – значения магнитной индукции по формуле (1.1) на остальных участках.

2. По кривым намагничивания определить напряженность поля H_k для ферромагнитных участков.

Напряженность в воздушном зазоре H_b найти по формуле

$$H_b = \frac{B_b}{\mu_0} = \frac{B_b}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_b. \quad (1.2)$$

3. Определить сумму падений магнитного напряжения вдоль всей магнитной цепи $\sum H_k l_k$.

Согласно второму закону Кирхгофа для магнитной цепи

$$\sum H_k l_k = Iw. \quad (1.3)$$

По выражению (1.3) определить искомую величину МДС.

Задачи второго типа

Заданы МДС Iw , геометрические размеры и материал магнитопровода. Определить магнитный поток Φ .

Порядок расчета:

1. Задать произвольное значение потока Φ .
2. Найти значение магнитной индукции на каждом участке.
3. По кривой намагничивания определить соответствующие значения напряженности H_k на всех участках цепи. В воздушном зазоре напряженность найти по формуле (1.2).
4. Определить сумму падений магнитного напряжения вдоль всей цепи.
5. Задать новое значение потока и повторить расчеты, аналогичные приведенным.
6. По полученным данным построить вебер-амперную характеристику $\Phi = f(\sum H_k l_k)$ и по заданному значению МДС найти искомое значение магнитного потока Φ .

Пример 1. Определить количество витков, наматываемых на сердечник (рис. 1.12) для получения магнитного потока $\Phi = 47 \cdot 10^{-4}$ Вб при значении тока обмотки 25 А, если $l_1 = 56$ см, $S_1 = 36$ см², $l_2 = 17$ см, $S_2 = 36$ см², $l_B = 0,5$ см, $S_B = 36$ см².

Верхняя часть сердечника выполнена из электротехнической стали 3411, нижняя – из литой стали. Кривые намагничивания сталей приведены в прилож. А.

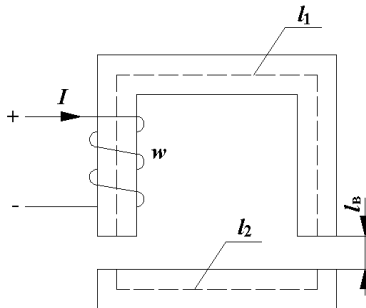


Рис. 1.5

Решение

1. Определить магнитную индукцию на участках цепи. Так как сечения участков равны между собой, то по формуле (1.1)

$$B_1 = B_2 = B_b = \frac{\Phi}{S} = \frac{47 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 10^{-4}} = 1,3 \text{ Тл.}$$

2. Определить значения напряженности на участках цепи по кривым намагничивания (прилож. А):

$$H_1 = 200 \text{ А/м}; \quad H_2 = 2000 \text{ А/м,}$$

напряженность поля в воздушном зазоре по формуле (1.2):

$$H_b = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_b = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 1,3 = 1,04 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

3. Определить магнитодвижущую силу Iw по формуле (1.3):

$$\begin{aligned} Iw &= H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_b l_b = \\ &= 200 \cdot 0,56 + 2000 \cdot 0,17 + 2 \cdot 1,04 \cdot 10^6 \cdot 0,005 = 10 \ 852 \text{ А.} \end{aligned}$$

4. Определить число витков:

$$w = \frac{Iw}{I} = \frac{10 \ 852}{25} = 434.$$

Пример 2. Определить магнитный поток Φ в сердечнике из стали 1512 (рис. 1.6), если $l_b = 2$ мм, $l = 0,598$ м, $S = 25$ см², $Iw = 2000$ А.

Кривая намагничивания стали приведена в прилож. А.

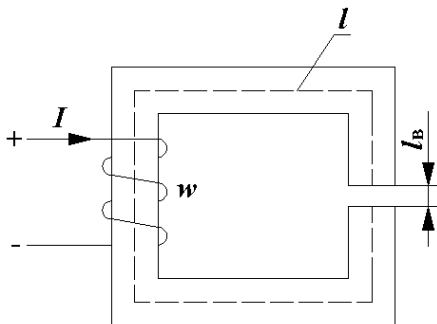


Рис. 1.6

Решение

1. Задать произвольное значение магнитной индукции $B = 0,2$ Тл и определить $\Phi = BS = 0,2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4}$ Вб.

2. По кривой намагничивания определить соответствующее значение напряженности $H = 30$ А/м. Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре

$$H_{\text{в}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B_{\text{в}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

Определить МДС по формуле (1.3):

$$Iw = Hl + H_{\text{в}}l_{\text{в}};$$

$$Iw = 30 \cdot 0,593 + 1,6 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 337,94 \text{ А.}$$

Так как МДС значительно меньше заданной, задать новые значения магнитной индукции, провести расчеты, аналогичные приведенным. Результаты расчетов свести в табл. 1.1.

Таблица 1.1

| | | | | | | | | |
|---------------------------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| $B, \text{Тл}$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 |
| $\Phi \cdot 10^{-4}, \text{Вб}$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 22 | 25 | 27 | 30 |
| $Iw, \text{А}$ | 338 | 700 | 1062 | 1442 | 1649 | 1869 | 2089 | 2398 |
| $H, \text{А/м}$ | 30 | 100 | 170 | 270 | 350 | 450 | 550 | 800 |
| $H_{\text{в}} \cdot 10^5, \text{А/м}$ | 1,6 | 3,2 | 4,8 | 6,4 | 7,2 | 8,0 | 8,8 | 9,6 |

По результатам расчета построить вебер-амперную характеристику $\Phi = f(Iw)$ (рис. 1.7).

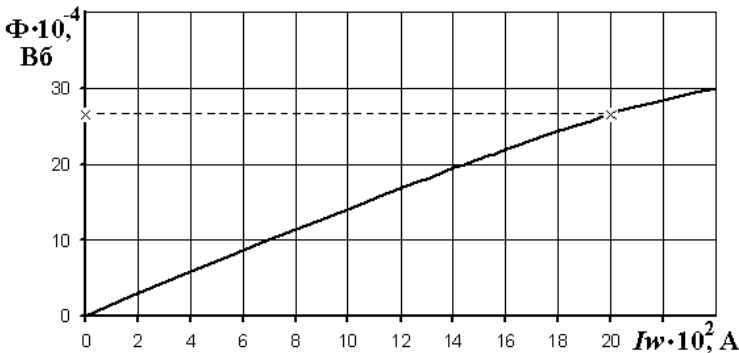


Рис. 1.7

3. По характеристике и заданному значению намагничивающей силы $Iw = 2000$ А определить значение магнитного потока: $\Phi = 26,5 \cdot 10^{-4}$ Вб.

Задачи для самостоятельного решения

1. В сердечнике из литой стали (рис. 1.8) необходимо создать магнитную индукцию $B = 1$ Тл. Число витков равномерно намотанной на сердечник обмотки $w = 200$, длина средней линии сердечника $l_{\text{ср}} = 69$ см, сечение $S = 6$ см². Как следует изменить значение тока I , протекающего по обмотке, для сердечника с воздушным зазором $l_{\text{в}} = 0,5$ мм?

Ответ: значение тока нужно увеличить на 2 А.

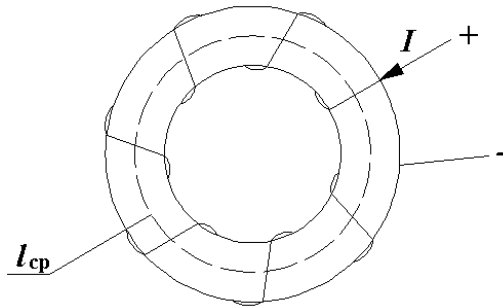


Рис. 1.8

2. Катушка с кольцевым сердечником, содержащим воздушный зазор $l_{\text{в}} = 0,01$ см, подключена к сети постоянного тока с напряжением $U = 12$ В. Обмотка катушки имеет сопротивление $R = 12$ Ом и число витков $w = 1000$. Сердечник выполнен из стали 1512 и имеет внешний диаметр $D = 22$ см, внутренний диаметр $d = 18$ см, толщину пакета $b = 1$ см. Определить магнитный поток и индуктивность катушки.

Ответ: $\Phi = 2,62 \cdot 10^{-4}$ Вб; $L = 262$ мГн.

3. Магнитопровод катушки состоит из двух различных по сечению участков 1, 2 и воздушного зазора $l_{\text{в}}$ (рис. 1.9). Определить значение тока в обмотке катушки, если магнитная индукция в воздушном зазоре $B_{\text{в}} = 1$ Тл, длина первого участка $l_1 = 4$ см, его сечение $S_1 = 1$ см², длина

второго участка $l_2 = 7$ см, его сечение $S_2 = 0,5$ см², воздушный зазор $l_B = 0,01$ мм, число витков обмотки $w = 100$. Материал магнитопровода – сталь 1512. При расчете рассеянием пренебречь, магнитное поле в зазоре считать равномерным.

Ответ: $I = 1,15$ А.

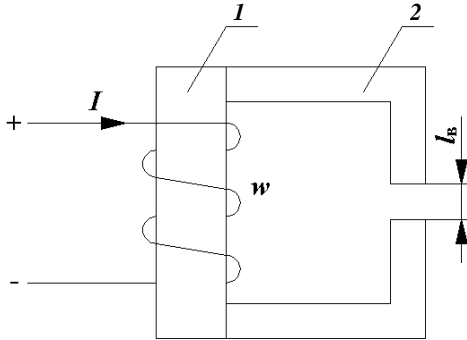


Рис. 1.9

Индивидуальное задание

Определить значение тока в катушке с ферромагнитным сердечником (рис. 1.10, 1.11), если заданы средняя длина l_{cp} , сечение сердечника S , длина воздушного зазора l_B , число витков w обмотки, магнитный поток Φ в зазоре и материал сердечника (табл. 1.2). Кривые намагничивания стали магнитопровода приведены в прилож. А.

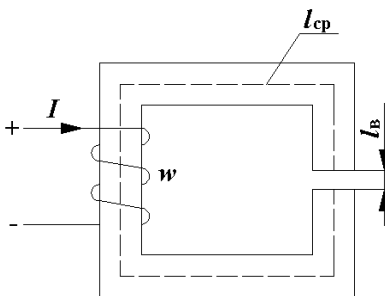


Рис. 1.10

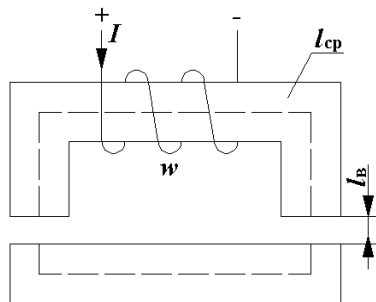


Рис. 1.11

Таблица 1.2

| Вариант | Рисунок | l_{cp} , см | S , см ² | l_b , см | w | $\Phi \cdot 10^{-4}$, Вб | Материал сердечника |
|---------|---------|---------------|-----------------------|------------|-----|---------------------------|-------------------------------|
| 1 | 1.10 | 100 | 4 | 0,02 | 100 | 4 | Литая сталь |
| 2 | 1.11 | 85 | 4 | 0,03 | 200 | 5 | Литая сталь |
| 3 | 1.10 | 70 | 15 | 0,05 | 300 | 10 | Литая сталь |
| 4 | 1.10 | 50 | 10 | 0,01 | 50 | 8 | Электротехническая сталь 1512 |
| 5 | 1.11 | 40 | 2 | 0,01 | 40 | 2 | Электротехническая сталь 1512 |
| 6 | 1.10 | 90 | 6 | 0,02 | 100 | 6 | Электротехническая сталь 1512 |
| 7 | 1.10 | 60 | 8 | 0,03 | 80 | 5 | Электротехническая сталь 3411 |
| 8 | 1.11 | 100 | 20 | 0,10 | 200 | 20 | Электротехническая сталь 3411 |
| 9 | 1.10 | 110 | 25 | 0,10 | 300 | 30 | Электротехническая сталь 3411 |
| 10 | 1.11 | 80 | 15 | 0,02 | 70 | 15 | Литая сталь |
| 11 | 1.10 | 70 | 10 | 0,05 | 100 | 4 | Электротехническая сталь 1512 |
| 12 | 1.11 | 120 | 25 | 0,20 | 400 | 30 | Электротехническая сталь 3411 |
| 13 | 1.10 | 80 | 5 | 0,10 | 300 | 5 | Электротехническая сталь 1512 |
| 14 | 1.11 | 60 | 4 | 0,05 | 200 | 4 | Литая сталь |
| 15 | 1.10 | 100 | 20 | 0,20 | 500 | 20 | Электротехническая сталь 3411 |

Б. Расчет разветвленной магнитной цепи

Методические рекомендации

Для расчета нелинейных магнитных цепей, имеющих только узлы a и b , используют метод двух узлов: определяют напряжение между двумя узлами, при котором выполняется первый закон Кирхгофа,

затем находят магнитные потоки в ветвях. Для нелинейных магнитных цепей решение можно выполнить графически.

Порядок расчета:

1. Указать направление магнитодвижущих сил (МДС), используя правило правого винта или обхвата катушки правой руки.

2. Указать положительное направление магнитного напряжения между двумя узлами и положительные направления магнитных потоков в ветвях. Рекомендуется принимать направления магнитных потоков, совпадающие с направлением магнитного напряжения между двумя узлами.

3. Используя второй закон Кирхгофа, выразить магнитное напряжение между двумя узлами $U_{\text{маб}}$ через падения магнитных напряжений и МДС каждой ветви.

4. Построить характеристики $\Phi_k = f(U_{\text{маб}})$ для каждой ветви в одной системе координат.

5. Найти сумму магнитных потоков (ординат) характеристик $\Phi_k = f(U_{\text{маб}})$, получить характеристику $\sum \Phi_k = f(U_{\text{маб}})$.

Сумма магнитных потоков, направленных к одному узлу, согласно первому закону Кирхгофа равна нулю, поэтому точка пересечения кривой $\sum \Phi_k = f(U_{\text{маб}})$ с осью абсцисс соответствует режиму данной цепи. Эта точка определяет искомое значение $U_{\text{маб}}$.

6. По найденному значению $U_{\text{маб}}$ определить значения магнитных потоков в ветвях по соответствующим характеристикам $\Phi_k = f(U_{\text{маб}})$.

Примечание. В случае, когда не задана одна из МДС и требуется кроме магнитных потоков определить МДС, при этом дается дополнительное условие, например $\Phi_1 - \Phi_2 = 20 \cdot 10^{-5}$ Вб. Порядок расчета сохраняется, но строят только кривые $\Phi_k = f(U_{\text{маб}})$ ветвей, для которых МДС заданы или в которых МДС отсутствуют. Первый закон Кирхгофа $\sum \Phi = 0$ переписывают с учетом дополнительного условия. Строят характеристику $\sum \Phi_k = f(U_{\text{маб}})$ с учетом дополнительного условия. Точка пересечения характеристики $\sum \Phi_k = f(U_{\text{маб}})$ с осью абсцисс определяет искомое значение $U_{\text{маб}}$, по которому находят магнитные потоки. Неизвестное значение МДС определяют по найденному значению $U_{\text{маб}}$, используя уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа для соответствующей ветви.

Пример 3. Определить магнитные потоки в ветвях магнитной цепи (рис. 1.12), если материал магнитопровода – сталь 1512, $l_1 = 20$ см, $S_1 = 4$ см², $w_1 = 80$ витков, $I_1 = 1$ А, $l_2 = 12$ см, $S_2 = 6$ см², $w_2 = 150$ витков, $I_2 = 2$ А, $l_3 = 40$ см, $S_3 = 36$ см², $l_B = 0,5$ см.

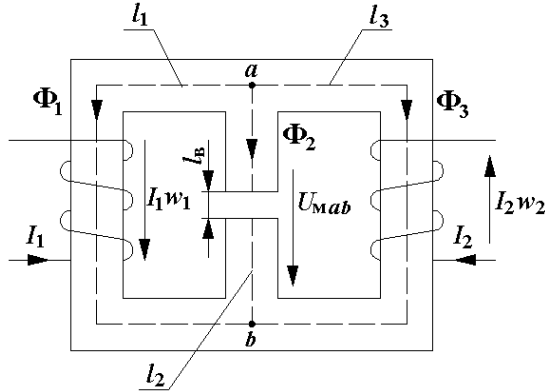


Рис. 1.12

Решение

1. Указать направления магнитодвижущих сил $I_1 w_1$ и $I_2 w_2$, используя правило правоходного винта или обхвата катушки правой рукой.

2. Задать положительное направление магнитного напряжения между двумя узлами и положительное направление магнитных потоков (рис. 1.12).

3. Выразить значение U_{mab} через падения магнитных напряжений и МДС каждой ветви, используя второй закон Кирхгофа для магнитных цепей:

$$H_1 l_1 - U_{mab} = I_1 w_1; H_2 l_2 + H_B l_B - U_{mab} = 0; H_3 l_3 - U_{mab} = -I_2 w_2,$$

откуда следует, что для левой ветви

$$U_{mab} = H_1 l_1 - I_1 w_1, \quad (1.4)$$

для средней ветви

$$U_{mab} = H_2 l_2 + H_B l_B, \quad (1.5)$$

для правой ветви

$$U_{\text{mab}} = H_3 l_3 + I_2 w_2. \quad (1.6)$$

4. На основании выражений (1.4), (1.5), (1.6) построить вебер-амперные характеристики ветвей $\Phi_1 = f(U_{\text{mab}})$, $\Phi_2 = f(U_{\text{mab}})$, $\Phi_3 = f(U_{\text{mab}})$, для чего выполнить следующий расчет.

Задать произвольные значения магнитной индукции B . Определить магнитные потоки в ветвях:

$$\Phi_1 = BS_1; \quad \Phi_2 = BS_2; \quad \Phi_3 = BS_3.$$

Определить напряженность магнитного поля в магнитопроводе H по кривой намагничивания (прилож. А), а в воздушном зазоре – согласно формуле

$$H_{\text{в}} = 0,8 \cdot 10^6 \cdot B.$$

Падения магнитных напряжений в ветвях цепи определить по формулам:

$$U_{\text{m1}} = H_1 l_1; \quad U_{\text{m2}} = H_2 l_2 + H_{\text{в}} l_{\text{в}}; \quad U_{\text{m3}} = H_3 l_3.$$

Согласно выражениям (1.4)–(1.6) определить значения U_{mab} для принятых значений магнитной индукции. Расчеты выполнить как для положительных, так и для отрицательных значений магнитной индукции B . Результаты расчетов свести в табл. 1.3 и построить в одной системе координат характеристики $\Phi_1(U_{\text{mab}})$, $\Phi_2(U_{\text{mab}})$, $\Phi_3(U_{\text{mab}})$ (рис. 1.13).

5. По первому закону Кирхгофа для цепи $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ построить кривую $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = f(U_{\text{mab}})$, для чего найти сумму ординат характеристик $\Phi_1(U_{\text{mab}})$, $\Phi_2(U_{\text{mab}})$, $\Phi_3(U_{\text{mab}})$. Для более точного построения составить табл. 1.4. Суммарная характеристика приведена на рис. 1.13.

Характеристика $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) = f(U_{\text{mab}})$ пересекает ось абсцисс в точке a , которая определяет значение напряжения U_{mab} , при котором выполняется первый закон Кирхгофа: $U_{\text{mab}} = 25 \text{ А}$.

Таблица 1.3

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|-----|------|------|------|-----|------|------|-------|-------|-------|------|
| B , Тл | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | -0,2 | -0,4 | -0,6 | -0,8 | -1,0 | -1,2 |
| H , А/м | 0 | 50 | 100 | 170 | 260 | 410 | 900 | -50 | -100 | -170 | -260 | -410 | -900 |
| Левая ветвь: | | | | | | | | | | | | | |
| $\Phi_1 \cdot 10^{-4}$, Вб | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4 | 4,8 | -0,8 | -1,6 | -2,4 | -3,2 | -4 | -4,8 |
| $H_1 l_1$, А | 0 | 10 | 20 | 34 | 52 | 82 | 180 | -10 | -20 | -34 | -52 | -82 | -180 |
| $U_{Маb}$, А | -80 | -70 | -60 | -46 | -28 | 2 | 100 | -90 | -100 | -114 | -132 | -162 | -260 |
| Средняя ветвь: | | | | | | | | | | | | | |
| $\Phi_2 \cdot 10^{-4}$, Вб | 0 | 1,2 | 2,4 | 3,6 | 4,8 | 6 | 7,2 | -1,2 | -2,4 | -3,6 | -4,8 | -6 | -7,2 |
| $H_2 l_2$, А | 0 | 6 | 12 | 20,4 | 31,2 | 49,2 | 108 | -6 | -12 | -20,4 | -31,2 | -49,2 | -108 |
| $U_{Маb}$, А | 0 | 86 | 172 | 260 | 351 | 449 | 588 | -96 | -172 | -260 | -351 | -49,2 | -588 |
| Правая ветвь: | | | | | | | | | | | | | |
| $\Phi_3 \cdot 10^{-4}$, Вб | 0 | 0,8 | 1,6 | 2,4 | 3,2 | 4 | 4,8 | -0,8 | -1,6 | -2,4 | -3,2 | -4 | -4,8 |
| $H_3 l_3$, А | 0 | 20 | 40 | 68 | 104 | 164 | 360 | -20 | -40 | -88 | -104 | -164 | -360 |
| $U_{Маb}$, А | 300 | 320 | 340 | 363 | 404 | 464 | 660 | 280 | 260 | 232 | 169 | 136 | -60 |

Таблица 1.4

| | | | | |
|---|------|------|------|------|
| $U_{\text{маб}}, \text{A}$ | 100 | 50 | 0 | -50 |
| $\Phi_1 \cdot 10^{-4}, \text{Вб}$ | 4,8 | 4,3 | 4 | 2,2 |
| $\Phi_2 \cdot 10^{-4}, \text{Вб}$ | 1,3 | 0,6 | 0 | -0,7 |
| $\Phi_3 \cdot 10^{-4}, \text{Вб}$ | -4,1 | -4,4 | -4,6 | -4,7 |
| $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3) \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ | 2,0 | 0,5 | -0,6 | -3,2 |

6. По найденному значению $U_{\text{маб}}$ определить магнитные потоки в ветвях по характеристикам $\Phi_1(U_{\text{маб}})$, $\Phi_2(U_{\text{маб}})$, $\Phi_3(U_{\text{маб}})$:

$$\Phi_1 = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad \Phi_2 = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}; \quad \Phi_3 = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Знак минус при Φ_3 говорит о том, что истинное направление магнитного потока Φ_3 противоположно принятому.

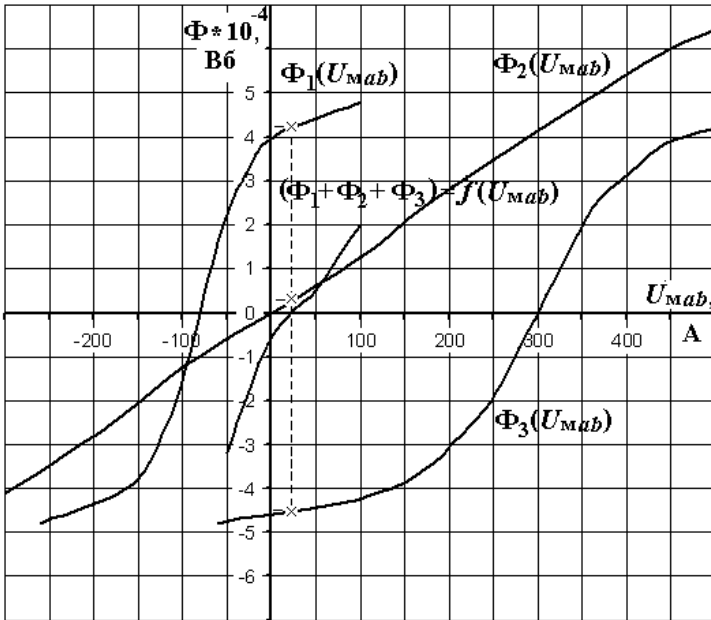


Рис. 1.13

Задача для самостоятельного решения

Определить магнитные потоки в ветвях и значение тока I_1 , если для магнитной цепи (рис. 1.14) $l_1 = 20$ см, $S_1 = 4$ см², $l_2 = 12$ см, $S_2 = 6$ см², $l_3 = 40$ см, $S_3 = 4$ см², $w_1 = 100$ витков, $w_2 = 150$ витков, $I_2 = 2$ А, $l_b = 0,5$ мм, $\Phi_1 = \Phi_2 + 0,5 \cdot 10^{-4}$ Вб. Материал магнитопровода – сталь 1512. Кривые намагничивания стали магнитопровода приведены в прилож. А.

Ответ: $\Phi_1 = 24$ мВб; $\Phi_2 = 19$ мВб; $\Phi_3 = -43$ мВб; $I_1 = 1,94$ А.

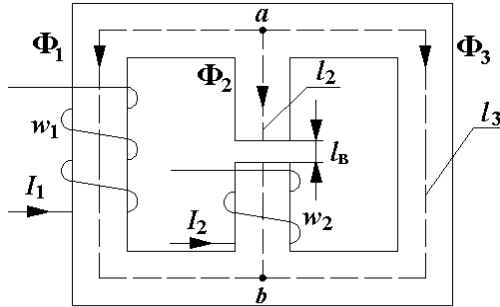


Рис. 1.14

Индивидуальное задание

Построить зависимость магнитного потока от магнитного напряжения U_{mab} (вебер-амперную характеристику) участка магнитной цепи (рис. 1.15), если заданы: кривая намагничивания (табл. 1.5), длина магнитного участка l , длина воздушного зазора l_b , сечение участка магнитопровода S , МДС, направление магнитного потока Φ , направление тока в обмотке (табл. 1.6).

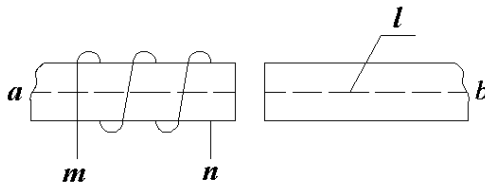


Рис. 1.15

Таблица 1.5

| | | | | | | |
|-----------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| B , Тл | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 |
| H , А/м | 0 | 100 | 170 | 260 | 410 | 900 |

Таблица 1.6

| Вариант | l , см | l_B , см | S , см ² | МДС, А | Направление потока, Ф | Ток течет от зажима |
|---------|----------|------------|-----------------------|--------|-----------------------|---------------------|
| 1 | 2 | 0,2 | 5 | 200 | от a к b | n |
| 2 | 10 | 0,1 | 4 | 80 | от a к b | m |
| 3 | 15 | 0,2 | 6 | 150 | от b к a | n |
| 4 | 25 | 0,3 | 7 | 0 | от a к b | m |
| 5 | 30 | 0,0 | 5 | 20 | от a к b | n |
| 6 | 40 | 0,4 | 10 | 250 | от a к b | m |
| 7 | 35 | 0,0 | 8 | 50 | от b к a | n |
| 8 | 80 | 0,0 | 10 | 150 | от b к a | m |
| 9 | 60 | 0,2 | 15 | 180 | от a к b | n |
| 10 | 70 | 0,0 | 12 | 160 | от b к a | m |
| 11 | 50 | 0,2 | 8 | 120 | от b к a | m |
| 12 | 100 | 0,0 | 20 | 100 | от a к b | n |
| 13 | 70 | 0,1 | 10 | 80 | от a к b | m |
| 14 | 80 | 0,4 | 15 | 100 | от a к b | n |
| 15 | 100 | 0,5 | 20 | 220 | от b к a | m |

Контрольные вопросы

1. Какие величины характеризуют магнитное поле? Запишите законы полного тока и непрерывности магнитных линий.

2. Как связаны между собой магнитная индукция B и напряженность магнитного поля H ? Как определяют напряженность в воздушном зазоре?

3. Что называют кривой намагничивания?

4. Что понимают под МДС? Как определяют ее направление?

5. Как определяют падение магнитного напряжения?

6. Что представляет собой вебер-амперная характеристика? Как ее строят?

7. Каков порядок расчета неразветвленной магнитной цепи?

8. Как определяют направление магнитодвижущей силы?

9. Как формулируются законы Кирхгофа для магнитных цепей?

МОДУЛЬ 2. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. Расчет простых цепей постоянного тока методом эквивалентных преобразований

Цель: освоить законы электрических цепей, методику определения эквивалентного сопротивления простой цепи постоянного тока, методику расчета простых цепей постоянного тока со смешанным соединением резистивных элементов.

Методические рекомендации

Простая цепь содержит один источник энергии. Как правило, такую цепь преобразуют в эквивалентное сопротивление с одним резистором. Сопротивления резисторов, соединенных треугольником, при необходимости преобразуют в эквивалентные, соединенные звездой. При расчете электрических цепей используют законы Ома, Кирхгофа, Джоуля–Ленца.

Закон Ома: ток I на участке цепи с сопротивлением R равен напряжению U на этом участке, деленному на величину сопротивления этого участка R :

$$I = \frac{U}{R}.$$

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю ($\sum I = 0$).

Подходящие к узлу токи считают положительными, отходящие от него – отрицательными. Вторая формулировка первого закона Кирхгофа: сумма токов, подходящих к узлу, равна сумме токов, отходящих от узла ($\sum I_n = \sum I_o$).

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме напряжений на всех участках с сопротивлениями, входящими в этот контур ($\sum E = \sum IR$).

В каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если не совпадают.

Мощность цепи постоянного тока равна произведению напряжения U на ток I :

$$P = UI.$$

Мощность может быть также найдена по закону Джоуля–Ленца.

Закон Джоуля–Ленца: мощность P тепловых потерь на участке цепи с сопротивлением R равна произведению квадрата тока I на сопротивление R :

$$P = I^2 R.$$

Определение эквивалентного сопротивления

Эквивалентным называют такое преобразование электрической цепи, при котором токи и напряжения, внешние по отношению к преобразуемому участку цепи, не изменяются.

Последовательным соединением участков электрической цепи называют такое соединение, при котором через все участки цепи проходит один и тот же ток.

При последовательном соединении резистивных элементов $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ эквивалентное сопротивление R_3 равно сумме сопротивлений:

$$R_3 = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n.$$

Параллельным соединением участков цепи называют такое соединение, при котором все участки присоединены к одной паре узлов и находятся под действием одного и того же напряжения.

Параллельно соединенные резистивные элементы $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ можно заменить одним эквивалентным с проводимостью

$$g_3 = g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n,$$

где $g_3 = \frac{1}{R_3}$; $g_1 = \frac{1}{R_1}$; $g_2 = \frac{1}{R_2}$; $g_3 = \frac{1}{R_3}$; \dots ; $g_n = \frac{1}{R_n}$.

Для двух параллельно соединенных резисторов

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При смешанном соединении участков электрической цепи имеются участки с последовательным и параллельным соединением. Определение эквивалентного сопротивления при смешанном соединении приведено в примере 1.

Пример 1. Определить в электрической схеме (рис. 2.1) эквивалентное сопротивление между зажимами ab , если $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$; $R_4 = 30 \text{ Ом}$; $R_5 = 6 \text{ Ом}$.

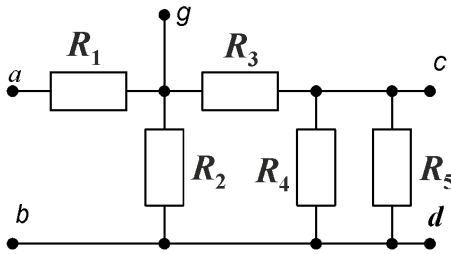


Рис. 2.1

Решение

Чтобы определить эквивалентное сопротивление относительно зажимов ab , нужно представить, что к этим зажимам подключен источник энергии, а зажимы g, c, d свободны (рис. 2.2).

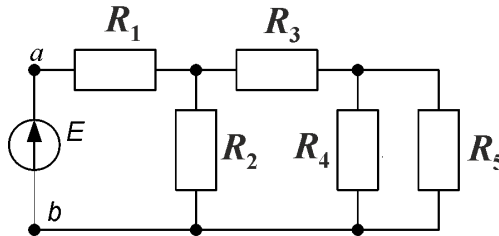


Рис. 2.2

Как правило, объединение резисторов в один эквивалентный начинают с наиболее удаленных от источника участков цепи.

Резисторы R_4, R_5 соединены параллельно, т. к. присоединены к одной паре узлов. Их эквивалентное сопротивление

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом}.$$

Схема принимает вид рис. 2.3.

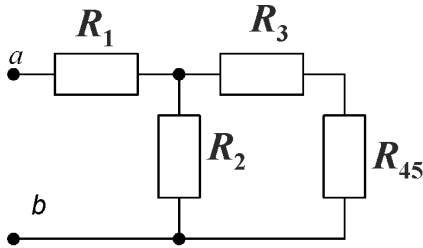


Рис. 2.3

По участкам цепи с резисторами R_{45} , R_3 проходит один и тот же ток, значит эти участки соединены последовательно. Тогда

$$R_{345} = R_3 + R_{45} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом}.$$

Схема принимает вид рис. 2.4.

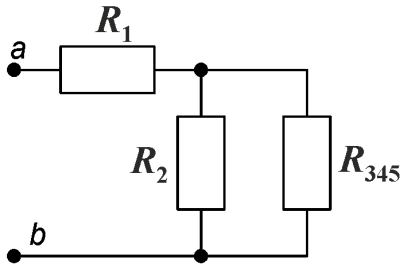


Рис. 2.4

Резисторы R_2 и R_{345} соединены параллельно

$$R_{2345} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 6 \text{ Ом}.$$

Резисторы R_1 и R_{2345} соединены последовательно (рис. 2.5).

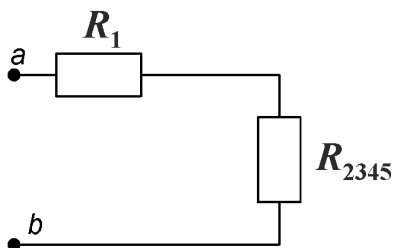


Рис. 2.5

Таким образом, $R_{\text{эКВ}} = R_1 + R_{2345} = 6 + 6 = 12 \text{ Ом}$.

При определении эквивалентного сопротивления рисовать промежуточные схемы не обязательно.

Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду рассматривается на примере 2.

Пример 2. В цепи (рис. 2.6) определить значение тока I , если $E = 26 \text{ В}$, $R_1 = 1,4 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 6,5 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$.

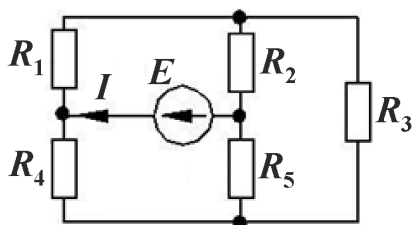


Рис. 2.6

Решение

Значение тока I можно определить, применив метод эквивалентных преобразований

$$I = \frac{E}{R_{\text{эКВ}}} .$$

Для определения эквивалентного сопротивления $R_{\text{эКВ}}$ необходимо преобразовать соединение треугольником, образованное сопротив-

лениями R_2 , R_3 и R_5 , в эквивалентное соединение звездой с сопротивлениями R_6 , R_7 и R_8 (рис. 2.7).

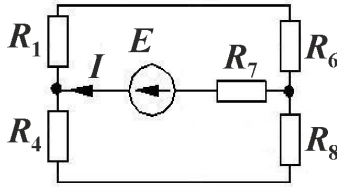


Рис. 2.7

$$R_6 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{2 \cdot 3}{2 + 3 + 5} = 0,6 \text{ Ом};$$

$$R_7 = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{2 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = 1 \text{ Ом};$$

$$R_8 = \frac{R_3 R_5}{R_2 + R_3 + R_5} = \frac{3 \cdot 5}{2 + 3 + 5} = 1,5 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_1 и R_6 соединены последовательно:

$$R_{16} = R_1 + R_6 = 1,4 + 0,6 = 2 \text{ Ом}.$$

Сопротивления R_4 и R_8 соединены последовательно:

$$R_{48} = R_4 + R_8 = 6,5 + 1,5 = 8 \text{ Ом}.$$

Сопротивление R_7 соединено последовательно с эквивалентным сопротивлением двух параллельных ветвей R_{16} и R_{48} .

Эквивалентное сопротивление цепи

$$R_{\text{эКВ}} = R_7 + \frac{R_{16} R_{48}}{R_{16} + R_{48}} = 1 + \frac{2 \cdot 8}{2 + 8} = 2,6 \text{ Ом}.$$

Тогда значение тока I

$$I = \frac{26}{2,6} = 10 \text{ А}.$$

Пример 3. Приемник энергии с сопротивлением $R_2 = 90$ Ом с помощью двухпроводной линии электропередачи с сопротивлением проводов $R_1 = R_3 = 0,5$ Ом подключен к генератору с ЭДС $E = 100$ В (рис. 2.8). Определить R_3 , I , напряжение на приемнике U_2 $\Delta U_{л} = U_1 + U_3$.

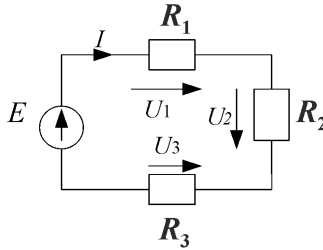


Рис. 2.8

Решение

Эквивалентное сопротивление $R_3 = R_1 + R_2 + R_3 = 0,5 + 9 + 0,5 = 10$ Ом.

Согласно закону Ома значение тока $I = \frac{E}{R_3} = \frac{100}{10} = 10$ А.

Напряжения $U_2 = R_2 I = 9 \cdot 10 = 90$ В; $\Delta U_{л} = U_1 + U_3 = R_1 I + R_3 I = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 10 = 5 + 5 = 10$ В.

Пример 4. Электрические лампы мощностью $P_1 = 100$ Вт; $P_2 = 60$ Вт соединены параллельно и подключены к источнику напряжения $U = 220$ В (рис. 2.9). Определить значения R_1 , R_2 , I_1 , I_2 , R_3 , I .

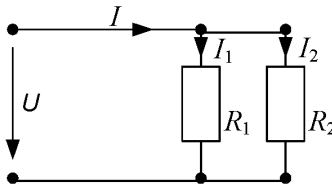


Рис. 2.9

Решение

Исходя из формулы мощности

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{100}{220} = 0,455 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{60}{220} = 0,272 \text{ А}.$$

Согласно закону Ома сопротивления

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{220}{0,455} = 484 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{220}{0,272} = 807 \text{ Ом}.$$

Эквивалентная проводимость цепи

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

откуда

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{484 \cdot 807}{484 + 807} = 302,5 \text{ Ом}.$$

По закону Ома значение тока

$$I = \frac{U}{R_3} = \frac{220}{302,5} = 0,727 \text{ А}.$$

Значение тока можно найти и по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 0,455 + 0,272 = 0,727 \text{ А}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. По условию примера 1 определить эквивалентное сопротивление между зажимами gc , gd , cd .

Ответ: $R_{gc} = 4 \text{ Ом}$; $R_{gd} = 6 \text{ Ом}$; $R_{cd} = 4 \text{ Ом}$.

2. В электрической цепи (рис. 2.10) $U = 100 \text{ В}$; $I = 5 \text{ А}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ Ом}$. Определить значения R_3 , R_3 , U_1 , U_2 , U_3 .

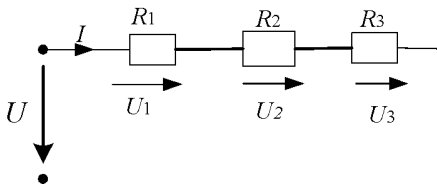


Рис. 2.10

Ответ: $R_3 = 4 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $U_1 = 50 \text{ В}$; $U_2 = 30 \text{ В}$; $U_3 = 20 \text{ В}$.

3. В электрической цепи (рис. 2.11) $P = 10$ Вт; $I = 1$ А; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 25$ Ом. Определить значения U , I_1 , I_2 , I_3 , R_3 , R_3 .

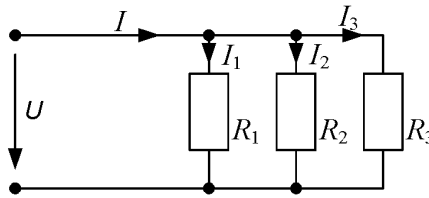


Рис. 2.11

Ответ: $U = 10$ В; $I_1 = 0,1$ А; $I_2 = 0,4$ А; $I_3 = 0,5$ А; $R_3 = 20$ Ом; $R_3 = 10$ Ом.

Индивидуальные задания

1. Определить эквивалентное сопротивление цепи относительно входных зажимов при заданном положении переключателей SA1 и SA2 в соответствии с рис. 2.12 и табл. 2.1.

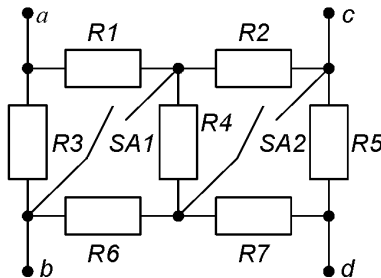


Рис. 2.12

Таблица 2.1

| Номер варианта | Входные зажимы цепи | Положение переключателей* | | Сопротивления, Ом | | | | | | |
|----------------|---------------------|---------------------------|-----------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | SA ₁ | SA ₂ | R ₁ | R ₂ | R ₃ | R ₄ | R ₅ | R ₆ | R ₇ |
| 1 | ab | 0 | 1 | 10 | 10 | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 |
| 2 | ab | 1 | 0 | 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 10 |

Окончание таблицы 2.1

| Номер варианта | Входные зажимы цепи | Положение переключателей* | | Сопротивления, Ом | | | | | | |
|----------------|---------------------|---------------------------|--------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | SA_1 | SA_2 | R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | R_5 | R_6 | R_7 |
| 3 | ab | 0 | 1 | 10 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 4 | ab | 0 | 0 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | cd | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 6 | cd | 1 | 0 | 20 | 20 | 10 | 10 | 20 | 20 | 20 |
| 7 | ad | 0 | 1 | 10 | 10 | 20 | 20 | 10 | 10 | 10 |
| 8 | ad | 1 | 0 | 5 | 5 | 10 | 20 | 5 | 20 | 5 |
| 9 | cb | 0 | 1 | 5 | 10 | 5 | 10 | 5 | 10 | 5 |
| 10 | cb | 1 | 0 | 10 | 5 | 10 | 5 | 10 | 5 | 10 |
| 11 | ac | 0 | 1 | 5 | 20 | 10 | 5 | 20 | 10 | 5 |
| 12 | cd | 1 | 0 | 20 | 10 | 20 | 10 | 20 | 10 | 20 |
| 13 | bd | 0 | 1 | 20 | 20 | 10 | 10 | 20 | 20 | 10 |
| 14 | eb | 1 | 0 | 10 | 20 | 5 | 5 | 5 | 10 | 20 |
| 15 | ab | 0 | 1 | 5 | 5 | 10 | 20 | 20 | 5 | 10 |

*Положение переключателей: 0 – в разомкнутом состоянии; 1 – в замкнутом.

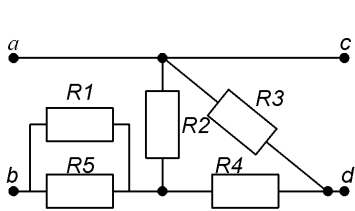
2. Для электрической цепи (табл. 2.2) определить эквивалентное сопротивление между зажимами ab или cd , если $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $R_4 = 4$ Ом; $R_5 = 5$ Ом; $R_6 = 6$ Ом.

Таблица 2.2

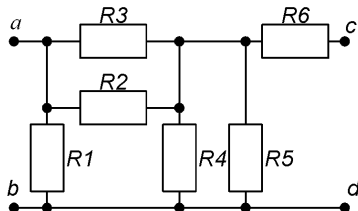
| | | | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Номер рисунка | 2.13 | 2.14 | 2.15 | 2.16 | 2.17 | 2.18 | 2.19 | 2.20 |
| Зажимы | ab | ab | ab | ab | ab | ab | ab | ab |

Окончание таблицы 2.2

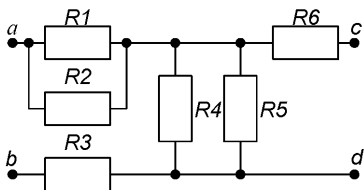
| | | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Вариант | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| Номер рисунка | 2.21 | 2.22 | 2.13 | 2.14 | 2.15 | 2.16 | 2.17 |
| Зажимы | cd | cd | cd | cd | cd | cd | cd |



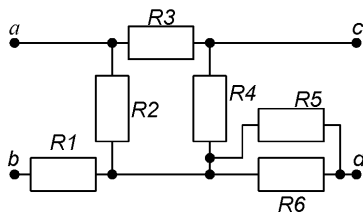
Puc. 2.13



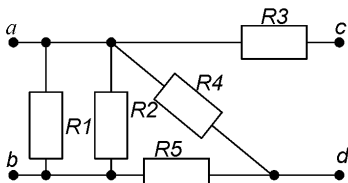
Puc. 2.14



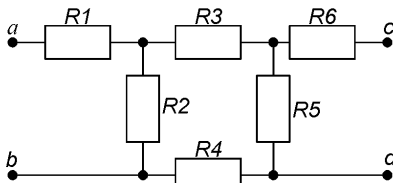
Puc. 2.15



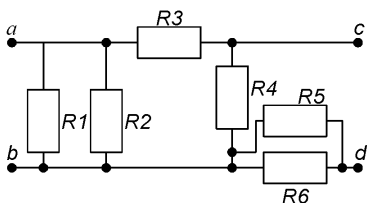
Puc. 2.16



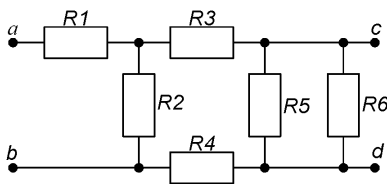
Puc. 2.17



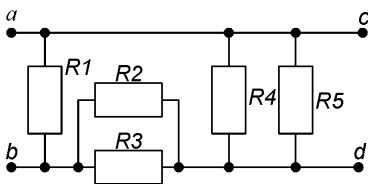
Puc. 2.18



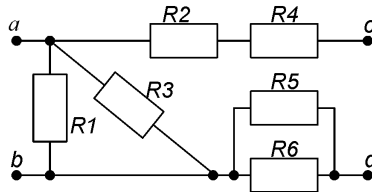
Puc. 2.19



Puc. 2.20



Puc. 2.21



Puc. 2.22

Контрольные вопросы

1. Что называют электрической цепью и электрической схемой?
2. Что называют узлом, ветвью и контуром электрической цепи?
3. Что понимают под направлением электрического тока?
4. Что такое падение напряжения на участке электрической цепи?
5. Как формулируют и записывают закон Ома?
6. Что называют последовательным соединением участков цепи?
7. Что называют параллельным соединением участков цепи?
8. Чему равно эквивалентное сопротивление электрической цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединением участков цепи?
9. Как формулируют и записывают первый закон Кирхгофа?
10. Как формулируют и записывают второй закон Кирхгофа?

2.2. Расчет простых цепей постоянного тока на основе законов электротехники

Цель: освоить методику расчета простых цепей постоянного тока со смешанным соединением резистивных элементов.

Методические рекомендации

Отличиями данной темы от предыдущей являются расчет более сложных схем электрических цепей и проверка правильности расчета путем составления баланса мощностей. Достоверность расчета подтверждается, когда мощность источника равна сумме активных мощностей приемников.

Пусть для схемы со смешанным соединением участков цепи (рис. 2.23) необходимо рассчитать токи в ветвях. Следует провести последовательное преобразование цепи и сведение всех резистивных элементов к одному с эквивалентным сопротивлением. Должны быть заданы величины сопротивлений и напряжение или ЭДС на входе цепи.

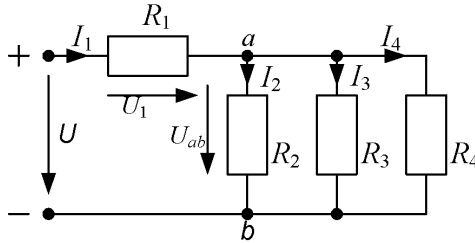


Рис. 2.23

Для схемы (рис. 2.23) преобразование проводят следующим образом. Параллельно соединенные участки заменяют одним эквивалентным, выражая их через проводимость

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}, \text{ откуда } R_{234} = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4}.$$

После такого преобразования схема будет состоять из двух последовательно соединенных участков с сопротивлениями R_1 и R_{234} (рис. 2.24). Эквивалентное сопротивление цепи $R_3 = R_1 + R_{234}$.

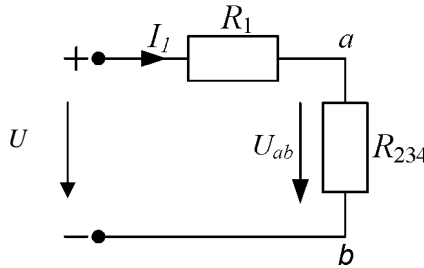


Рис. 2.24

Ток в неразветвленной части цепи

$$I_1 = \frac{U}{R_3}.$$

Напряжение U_{ab} на параллельно соединенных участках находят по второму закону Кирхгофа. Для контура схемы на рис. 2.24

$$I_1 R_1 + U_{ab} - U = 0, \text{ откуда } U_{ab} = U - I_1 R_1.$$

Это же напряжение можно определить по закону Ома.

Для схемы на рис. 2.24 $U_{ab} = I_1 R_{234}$.

Токи в параллельных ветвях

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3}; \quad I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4}.$$

После расчета целесообразно выполнить проверки: по первому закону Кирхгофа $I_1 = I_2 + I_3 + I_4$ и по балансу мощностей $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$.

Мощность источника питания

$$P_{\text{ист}} = UI_1 \text{ или } P_{\text{ист}} = EI_1.$$

Мощность тепловых потерь в сопротивлениях потребителя

$$P_{\text{потр}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4.$$

Пример. Определить значения сопротивления R_1 , токов I_1, I_2, I_3 и мощность в каждой ветви схемы (рис. 2.25), если показания ваттметра $P = 31,25$ кВт, напряжение питания $U = 625$ В, сопротивления $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом.

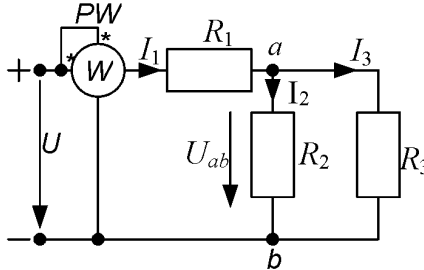


Рис. 2.25

Решение

Прибор PW является ваттметром, предназначенным для измерения мощности. Его показания равны произведению напряжения на параллельной обмотке ваттметра на ток, протекающий по последовательной обмотке, т. е. $P = UI_1$, откуда можно определить значение тока:

$$I_1 = \frac{P}{U} = \frac{31,25 \cdot 10^3}{625} = 50 \text{ А.}$$

Общее сопротивление цепи

$$R_3 = \frac{U}{I_1} = \frac{625}{50} = 12,5 \text{ Ом}.$$

Так как

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

то сопротивление

$$R_1 = R_3 - \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 12,5 - \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 0,5 \text{ Ом}.$$

Напряжение на сопротивлениях R_2, R_3

$$U_{ab} = U - I_1 R_1 = 625 - 50 \cdot 0,5 = 600 \text{ В}.$$

Значения токов в ветвях:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{600}{20} = 30 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{600}{30} = 20 \text{ А}.$$

Значения мощности в каждой ветви цепи:

$$P_1 = I_1^2 R_1 = 50^2 \cdot 0,5 = 1250 \text{ Вт};$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = 30^2 \cdot 20 = 18\,000 \text{ Вт};$$

$$P_3 = I_3^2 R_3 = 20^2 \cdot 30 = 12\,000 \text{ Вт}.$$

Проверка:

$$I = I_1 + I_2; \quad 50 \text{ А} = 30 \text{ А} + 20 \text{ А};$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 1250 + 18\,000 + 1200 = 31\,250 \text{ Вт}.$$

Расчеты выполнены правильно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить значения токов на участках с резисторами $R_3 = 20 \text{ Ом}$ и $R_4 = 10 \text{ Ом}$ (рис. 2.26), если ток источника питания $I = 0,6 \text{ А}$.

Ответ: $0,2 \text{ А}$; $0,4 \text{ А}$.

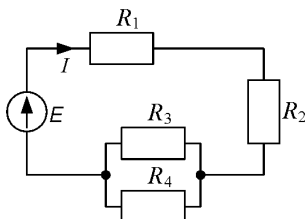


Рис. 2.26

2. Амперметры PA_1 и PA_2 (рис. 2.27) показывают токи $2,4$ и $1,6 \text{ мА}$ соответственно. Определить сопротивление R_5 и ЭДС источника энергии, если $R_1 = R_2 = 5 \text{ кОм}$; $R_3 = 1,5 \text{ кОм}$; $R_4 = 2 \text{ кОм}$.

Ответ: 1 кОм ; $8,4 \text{ В}$.

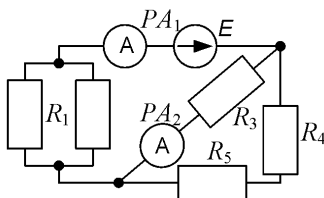


Рис. 2.27

3. В цепи (рис. 2.28) амперметр показывает ток $0,5 \text{ мА}$. Определить напряжение на выводах источника, если $R_1 = 600 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ кОм}$; $R_3 = 2 \text{ кОм}$; $R_4 = 1 \text{ кОм}$, $R_5 = 4 \text{ кОм}$.

Ответ: $5,8 \text{ В}$.

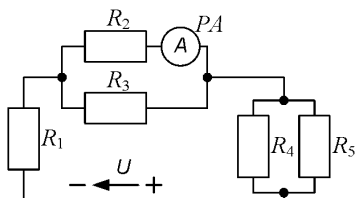


Рис. 2.28

4. Определить величину ЭДС E и сопротивление R_5 в цепи рис. 2.29, если $I_2 = 4 \text{ A}$; $I_5 = 2 \text{ A}$; $R_1 = 15 \text{ Ом}$; $R_2 = 8 \text{ Ом}$; $R_3 = 6 \text{ Ом}$; $R_4 = 4 \text{ Ом}$.

Ответ: $E = 60 \text{ В}$; $R_5 = 6 \text{ Ом}$.

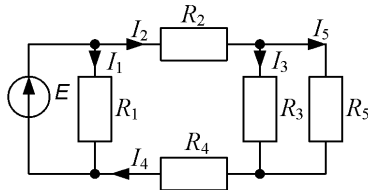


Рис. 2.29

5. Определить напряжение между точками a , c (рис. 2.30), если $E = 30 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_4 = 8 \text{ Ом}$, $R_5 = 1 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$.

Ответ: $U_{bc} = 14 \text{ В}$.

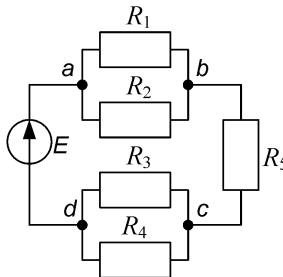


Рис. 2.30

Индивидуальные задания

1. Определить значения токов и мощности источника питания в схеме (рис. 2.31) в соответствии с исходными данными (табл. 2.3).

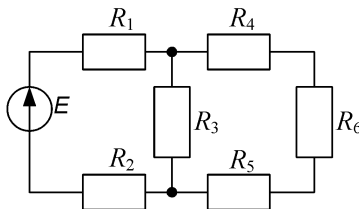
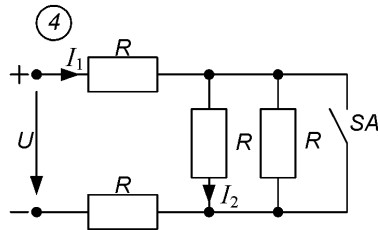
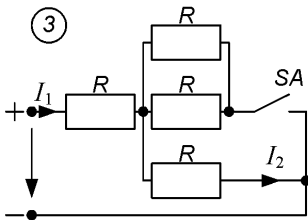
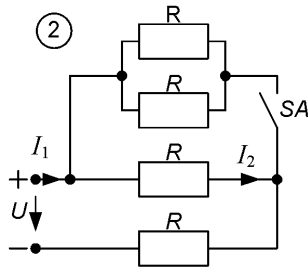
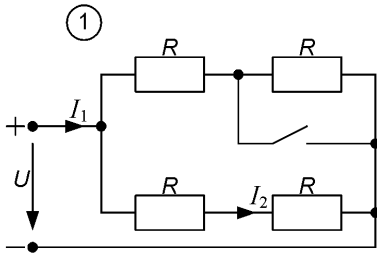


Рис. 2.31

Таблица 2.3

| Номера вариантов | ЭДС, В | Сопротивление, Ом | | | | | |
|------------------|--------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | R_1 | R_2 | R_3 | R_4 | R_5 | R_6 |
| 1 | 48 | 1 | 0 | 12 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 48 | 1 | 2 | 12 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | 24 | 1 | 0 | 12 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 24 | 2 | 4 | 10 | 2 | 2 | 4 |
| 5 | 48 | 2 | 2 | 10 | 0 | 2 | 2 |
| 6 | 48 | 1 | 2 | 12 | 2 | 0 | 3 |
| 7 | 24 | 2 | 2 | 6 | 2 | 2 | 0 |
| 8 | 60 | 4 | 0 | 16 | 2 | 2 | 6 |
| 9 | 60 | 1 | 2 | 10 | 1 | 0 | 3 |
| 10 | 60 | 1 | 4 | 12 | 0 | 2 | 6 |

2. Определить значения токов I_1 и I_2 в электрической цепи на рис. 2.32 (в соответствии с заданным вариантом, указанным на схемах) при замкнутом выключателе SA , если при разомкнутом выключателе ток $I_1 = 1$ А, сопротивление $R = 1$ Ом. Напряжение U остается неизменным.



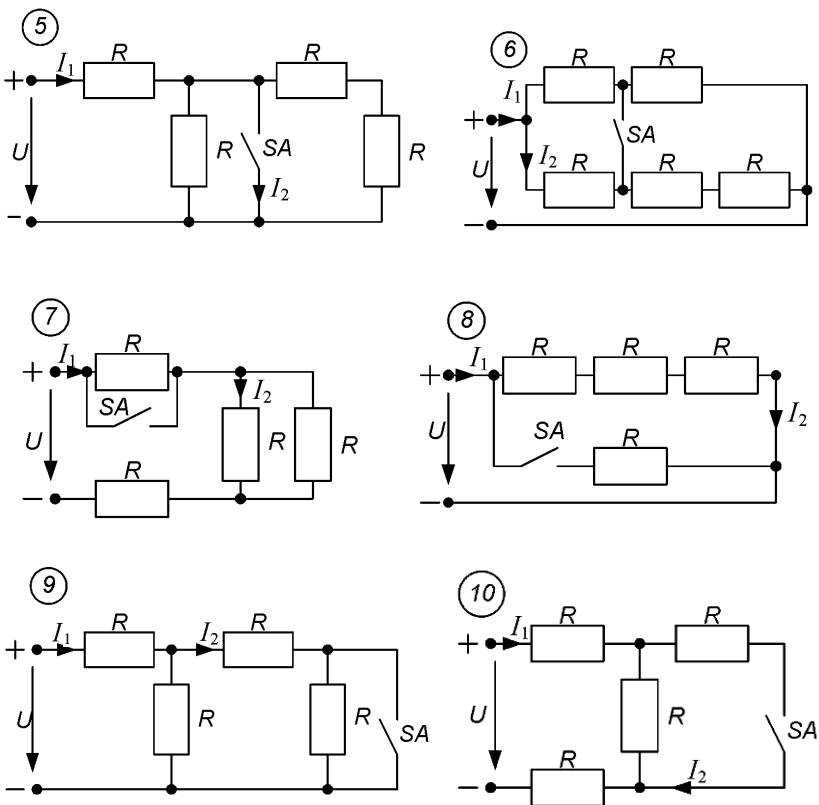


Рис. 2.32

Контрольные вопросы

1. Каков порядок расчета токов в цепях со смешанным соединением участков?
2. Как определить напряжение на участке с параллельно соединенными ветвями?
3. Как определить мощность цепи постоянного тока?
4. Как составить баланс мощностей?
5. Как проверить правильность расчета токов?

2.3. Расчет сложных цепей постоянного тока методом уравнений Кирхгофа

Цель: освоить методику расчета сложных цепей путем применения законов Кирхгофа.

Методические рекомендации

Распределение токов и напряжений в электрических цепях подчиняется законам Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа выражает баланс токов в разветвлениях, второй – баланс напряжений на замкнутых участках цепи.

При составлении уравнений по законам Кирхгофа направления токов в ветвях и направления обхода контуров выбирают произвольно. В результате расчета значения токов и напряжений могут иметь знак минус.

Второй закон Кирхгофа может быть записан и для контура, который проходит от одной точки цепи к другой по окружающему электрическую цепь пространству (в частности, воздуху). Например, на рис. 2.30 таким является контур *acdea*, для которого второй закон Кирхгофа имеет вид:

$$I_1(R_1 + R_3) + U_{ac} = E_1.$$

Аналогично для контура *abca*:

$$IR_2 - U_{ac} = -E_2, \text{ или } U_{ac} - IR_2 = E_2.$$

На основании законов Кирхгофа можно определить значения токов, ЭДС, сопротивления, а также напряжения между любыми двумя точками электрической цепи.

Потенциальная диаграмма – график распределения потенциала вдоль какого-либо участка цепи или замкнутого контура. По оси абсцисс откладывают сопротивления вдоль контура, начиная с какой-либо произвольной точки, по оси ординат – потенциалы. Каждой точке участка цепи или замкнутого контура соответствует точка на диаграмме. Рассчитывая потенциал, необходимо учитывать, что на участке цепи

с сопротивлением потенциал ϕ уменьшается по направлению тока или увеличивается против направления тока на величину падения напряжения, а на участке цепи с ЭДС потенциал ϕ возрастает по направлению ЭДС или уменьшается при обратном направлении ЭДС на величину этой ЭДС.

Пример 1. Для электрической схемы цепи на рис. 2.33 задано: $E_1 = 60$ В; $E_2 = 10$ В; $R_1 = R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 10$ Ом. Построить потенциальную диаграмму и определить напряжение U_{ac} по второму закону Кирхгофа и по потенциальной диаграмме.

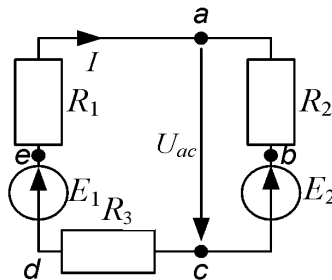


Рис. 2.33

Решение

Приняв положительное направление тока в цепи по часовой стрелке (рис. 2.30), составить уравнение по второму закону Кирхгофа для внешнего контура $abcdea$:

$$I(R_1 + R_2 + R_3) = E_1 - E_2,$$

откуда значение тока в цепи

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{60 - 10}{20 + 20 + 10} = 1 \text{ А.}$$

Значение напряжения U_{ac} определить из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для контура $acdea$:

$$U_{ac} = E_1 - I(R_1 + R_3) = 60 - 1(20 + 10) = 30 \text{ В.}$$

Для построения потенциальной диаграммы принять потенциал одной из точек, например $\varphi_a = 0$, и определить потенциалы других точек по внешнему контуру:

$$\varphi_e = \varphi_a - IR_2 = 0 - 1 \cdot 20 = -20 \text{ В};$$

$$\varphi_c = \varphi_e - E_2 = -20 - 10 = -30 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_c - IR_3 = -30 - 1 \cdot 10 = -40 \text{ В};$$

$$\varphi_e = \varphi_d + E_1 = -40 + 60 = 20 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_e - IR_1 = 20 - 1 \cdot 20 = 0.$$

Построить потенциальную диаграмму (рис. 2.34).

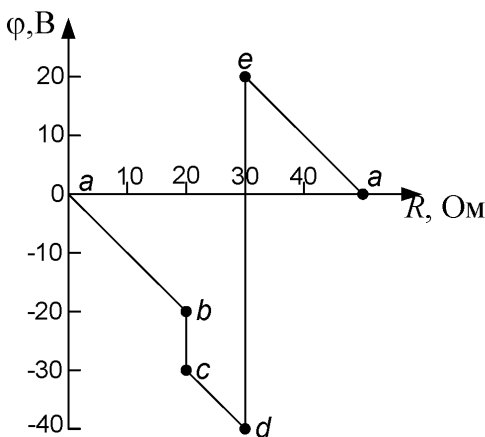


Рис. 2.34. Потенциальная диаграмма контура abcdea

Напряжение между точками a и c является разностью потенциалов между ними:

$$U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c = 0 - (-30) = 30 \text{ В}.$$

Пример 2. Составить систему уравнений для расчета токов методом уравнений Кирхгофа (рис. 2.35, a), если $E_1 = 40 \text{ В}$, $E_2 = 20 \text{ В}$, $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 27 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 15 \text{ Ом}$, $R_5 = 12 \text{ Ом}$, $R_6 = 10 \text{ Ом}$.

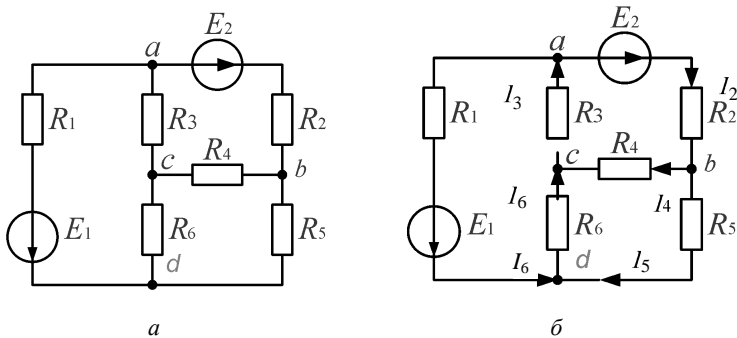


Рис. 2.35

Решение

1. Произвольно указать направления токов в ветвях (рис. 2.35, б).
2. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для определения значений токов в ветвях. Схема содержит шесть ветвей и четыре узла. Общее число уравнений, которое необходимо составить по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов, т. е. числу ветвей.

По первому закону Кирхгофа составить уравнения, число которых на единицу меньше числа узлов, т. е. равно трем.

Записать уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов. Значения притекающих к узлу токов брать с плюсом, оттекающих от узла – с минусом.

Узел *a*:

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0. \tag{2.1}$$

Узел *b*:

$$-I_4 - I_2 - I_5 = 0. \tag{2.2}$$

Узел *c*:

$$I_4 + I_6 - I_3 = 0. \tag{2.3}$$

По второму закону Кирхгофа составить недостающее число уравнений. Для данного примера необходимо еще три.

Произвольно выбрать направление обхода каждого контура цепи, например по часовой стрелке, и составить уравнения по второму закону Кирхгофа.

Для контура $abca$:

$$-I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_3 R_3 = E_2. \quad (2.4)$$

Для контура $acda$:

$$-I_5 R_5 - I_6 R_6 - I_1 R_1 = -E_1. \quad (2.5)$$

Для контура $bcd b$:

$$I_5 R_5 + I_6 R_6 - I_4 R_4 = 0. \quad (2.6)$$

В уравнениях (2.4)–(2.6) значения всех ЭДС и токов, совпадающих с направлением обхода, записать со знаком плюс, ЭДС и токов, направленных навстречу обходу, – со знаком минус.

Решив полученную систему из шести уравнений, найти значения токов в ветвях.

Рассмотренный метод в большинстве случаев является достаточно громоздким, при большом числе уравнений для решения системы целесообразно применять ПЭВМ.

Для упрощения расчета разработаны методы, в основу которых также положены уравнения Кирхгофа, но количество уравнений значительно сокращено (метод контурных токов, узловых потенциалов и др.).

Индивидуальное задание

В соответствии с заданным вариантом электрической схемы, указанной на рис. 2.36:

- а) расставить токи;
- б) составить уравнения по первому закону Кирхгофа для узла a ;
- в) составить уравнения по второму закону Кирхгофа для внешнего контура;
- г) выразить напряжение U_{cd} , используя второй закон Кирхгофа.

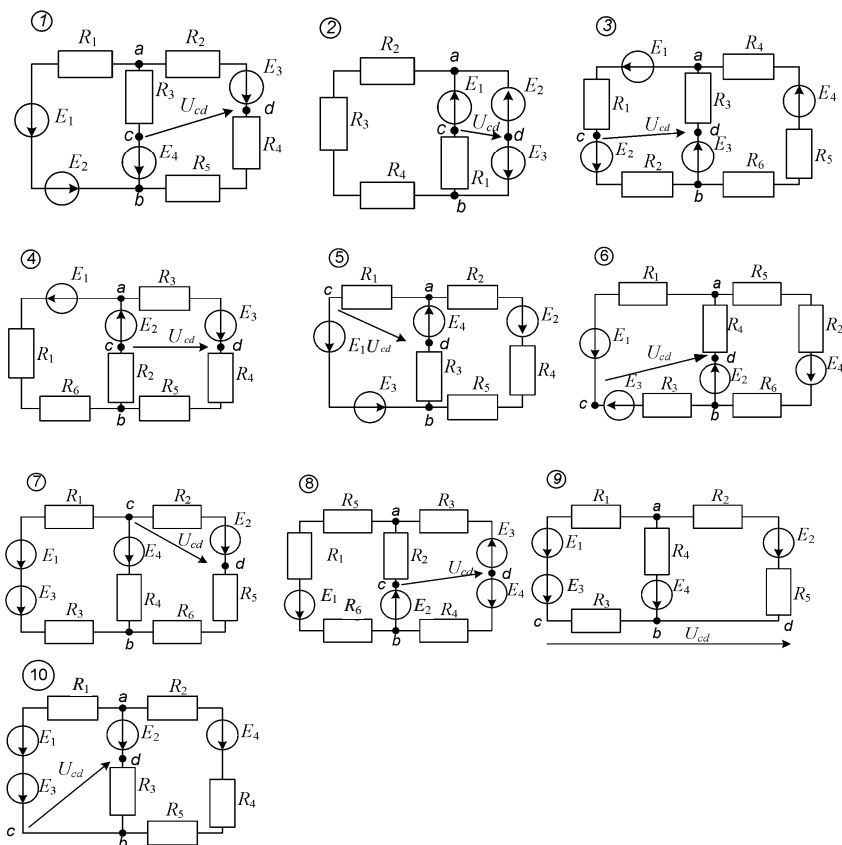


Рис. 2.36

Контрольные вопросы

1. Как формулируют и записывают первый закон Кирхгофа?
2. Как формулируют и записывают второй закон Кирхгофа?
3. Что называют ветвью?
4. Как выбирают положительные направления токов в ветвях?
5. Как определить количество токов, которое нужно рассчитать в электрической цепи?
6. Что означает полученное в результате расчета значение тока со знаком минус?
7. Как определяют потенциалы различных точек схемы?

2.4. Расчет сложных цепей постоянного тока методами контурных токов, двух узлов, эквивалентного генератора

Цель: освоить методику расчета сложной электрической цепи постоянного тока методом контурных токов, методом двух узлов, эквивалентного генератора.

Методические рекомендации

Метод контурных токов заключается в том, что на электрической схеме выбирают независимые контуры и в них определяют контурные токи. Независимый контур – это контур, отличающийся хотя бы одной новой ветвью. Контур с ветвью, содержащей источник тока, не рассматривают, т. к. в этой ветви ток известен. В реальности контурных токов не существует: это математический прием, который позволяет решать систему уравнений с меньшим их количеством. Истинные токи в ветвях определяют по контурным токам как их алгебраическую сумму (в т. ч. источника тока). На исходной схеме указывают токи в ветвях, а также направление контурных токов. Контурные токи удобнее указывать в одном направлении. С учетом контурных токов составляют уравнения для каждого контура по второму закону Кирхгофа.

Методика расчета сложной цепи методом контурных токов

Пример 1. Пусть для электрической цепи на рис. 2.37 необходимо определить значения токов в ветвях методом контурных токов при заданных значениях ЭДС, источника тока, сопротивлений резисторов: $E_1 = 20$ В; $E_3 = 50$ В; $E_2 = 40$ В; $J = 4$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $R_4 = 7$ Ом; $R_3 = 2$ Ом.

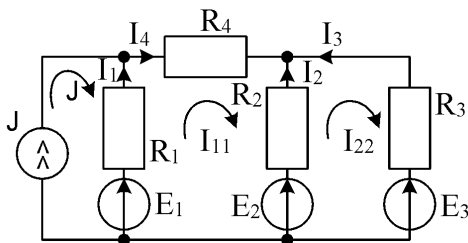


Рис. 2.37

Решение

Указать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме. Задать положительное направление контурных токов I_{11} , I_{22} . Составить систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_4 + R_2) - I_{22}R_2 - JR_1 = E_1 - E_2; \\ I_{22}(R_2 + R_3) - I_{11}R_2 = E_2 - E_3. \end{cases}$$

Подставить в составленную систему уравнений известные величины и, решая ее, определить значения контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}(10 + 7 + 3) - I_{22} \cdot 3 - 4 \cdot 10 = 20 - 40; \\ I_{22}(3 + 2) - I_{11} \cdot 3 = 40 - 50; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 20 I_{11} - 3 I_{22} = 20; \\ -3 I_{11} + 5 I_{22} = -10; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 100 - 9 = 91; \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 20 & 20 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = -200 + 60 = -140;$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 20 & -3 \\ -10 & 5 \end{vmatrix} = 100 - 30 = 70;$$

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{70}{91} = 0,77 \text{ А}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{-140}{91} = -1,54 \text{ А}.$$

Определить значения токов в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - J = 0,77 - 4 = -3,23 \text{ А}; \\ I_2 &= I_{22} - I_{11} = -1,54 - 0,77 = -2,31 \text{ А}; \\ I_3 &= -I_{22} = -1,54 \text{ А}; \quad I_4 = I_{11} = 0,77 \text{ А}. \end{aligned}$$

Пример 2. Для электрической цепи (рис. 2.38) рассчитать токи методом контурных токов, если известно, что $E_1 = 40 \text{ В}$, $E_2 = 20 \text{ В}$, $R_1 = 15 \text{ Ом}$, $R_2 = 27 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $R_4 = 15 \text{ Ом}$, $R_5 = 12 \text{ Ом}$, $R_6 = 10 \text{ Ом}$. Провести проверку правильности расчета токов, составив баланс мощностей. Определить значение тока I_1 методом эквивалентного генератора.

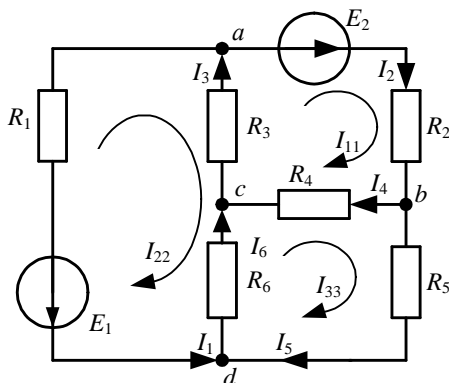


Рис. 2.38

Определить значения токов в ветвях методом контурных токов, считая, что в каждом независимом контуре схемы (рис. 2.38) течет свой контурный ток: I_{11} , I_{22} , I_{33} . Для единообразия направить контурные токи в одну сторону, в данном случае по часовой стрелке.

Составить уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов, приняв направления обхода контуров также по часовой стрелке:

$$\begin{cases} I_{11}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{22}R_3 - I_{33}R_4 = E_2; \\ I_{22}(R_1 + R_3 + R_6) - I_{11}R_3 - I_{33}R_6 = -E_1; \\ I_{33}(R_4 + R_5 + R_6) - I_{11}R_4 - I_{22}R_6 = 0. \end{cases}$$

Представить значения сопротивления и ЭДС:

$$\begin{cases} 47I_{11} - 51I_{22} - 15I_{33} = 20; \\ -5I_{11} + 30I_{22} - 10I_{33} = -40; \\ -15I_{11} - 10I_{22} + 37I_{33} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Дальнейший расчет вести методом последовательного исключения неизвестных или методом определителей. В данном случае выбран последний, как более упорядоченный.

Найти главный определитель, используя разложение по элементам столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 47 & -5 & -15 \\ -5 & 30 & -10 \\ -15 & -10 & 37 \end{vmatrix} = 47 \cdot \begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 37 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -15 \\ -10 & 37 \end{vmatrix} - 15 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -15 \\ 30 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= 47(1110 - 100) + 5(-185 - 150) - 15(50 + 450) = 38\,295.$$

Для нахождения контурного тока I_{11} заменить в главном определителе первый столбец на свободные члены системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -5 & -15 \\ -40 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 37 \end{vmatrix} = 6800; \quad I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6800}{38295} = 0,177 \text{ А.}$$

Расчет контурного тока I_{22} :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 47 & 20 & -15 \\ -5 & -40 & -10 \\ -15 & 0 & 37 \end{vmatrix} = -53\,860; \quad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-53\,860}{38\,295} = -1,4 \text{ А.}$$

Расчет контурного тока I_{33} :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 47 & -5 & 20 \\ -5 & 30 & -40 \\ -15 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -11\,800; \quad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-11\,800}{38\,295} = -0,308 \text{ А.}$$

Чтобы убедиться в правильности расчета, подставить найденные значения контурных токов в первое уравнение системы (2.7):

$$47 \cdot 0,177 - 5(-1,4) - 15(-0,308) = 19,93.$$

Полученное значение $19,93 \approx 20$ равно правой части первого уравнения системы (2.7), т. е. система решена правильно.

Следует определить истинные токи в ветвях. Ток в ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой же ветви. Рассчитать значения токов в ветвях схемы рис. 2.38, сравнивая направления контурных токов в ветвях с направлением истинных токов:

$$I_1 = -I_{22} = 1,44 \text{ А;}$$

$$I_2 = -I_{11} = -0,177 \text{ А;}$$

$$I_3 = I_{11} - I_{22} = 0,177 + 1,4 = 1,577 \text{ A};$$

$$I_4 = -I_{33} + I_{11} = 0,308 + 0,177 = 0,485 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{33} = -0,308 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{33} - I_{22} = -0,308 + 1,4 = 1,09 \text{ A}.$$

Действительные направления токов I_2 и I_5 противоположны принятым для них на рис. 2.38 за положительные.

Для проверки расчета составляется баланс мощностей.

На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в сопротивлениях схемы, должно равняться количеству энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$\sum I^2 R = \sum EI.$$

Мощность источника энергии EI записывается со знаком плюс, если ток в источнике совпадает с направлением ЭДС. Если же ток противоположен направлению ЭДС, то этот источник ЭДС является потребителем энергии и его мощность записывается со знаком минус. В данном случае

$$\sum EI = E_1 I_1 - E_2 I_2 = 40 \cdot 1,4 - 20(-0,177) = 59,54 \text{ Вт}.$$

Мощность тепловых потерь в сопротивлениях

$$\begin{aligned} \sum I^2 R &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = \\ &= 1,4^2 \cdot 15 + 0,177^2 \cdot 27 + 1,577^2 \cdot 5 + 0,485^2 \cdot 15 + \\ &\quad + 0,308^2 \cdot 12 + 1,09^2 \cdot 10 = 59,22 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Расхождения в результатах вычислений не превосходят 1 %. Это означает, что токи рассчитаны правильно.

Метод эквивалентного генератора

По отношению к сопротивлению R_1 остальную часть схемы можно заменить эквивалентным генератором, ЭДС которого равна напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви, а внут-

реннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника при закороченных ЭДС.

1. Разомкнуть ветвь с сопротивлением R_1 и найти напряжение холостого хода U_{xx} (рис. 2.39), для чего определить значения токов I_3 и I_6 .

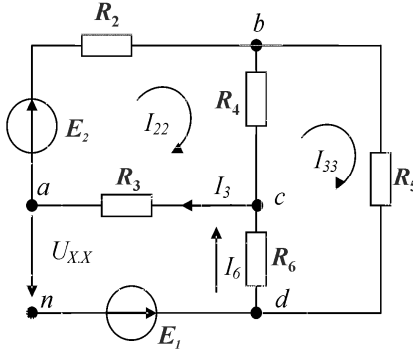


Рис. 2.39

Следует воспользоваться методом контурных токов:

$$\begin{cases} I_{22}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{33}R_4 = E_2; \\ I_{33}(R_4 + R_5 + R_6) - I_{22}R_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{22} \cdot 47 - I_{33} \cdot 15 = 20; \\ I_{33} \cdot 37 - I_{22} \cdot 15 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

После решения системы (2.8) $I_{22} = 0,488$ А, $I_{33} = 0,197$ А, $I_3 = I_{22} = 0,488$ А, $I_6 = I_{33} = 0,197$ А.

Составить уравнение по второму закону Кирхгофа для контура *andca*, в который входит участок между разомкнутыми зажимами:

$$U_{xx} + I_6 R_6 + I_3 R_3 = E_1;$$

$$U_{xx} = E_1 - I_6 R_6 - I_3 R_3 = 40 - 0,197 \cdot 10 - 0,488 \cdot 5 = 35,59 \text{ Вт.}$$

2. Определить входное сопротивление $R_{вх}$ всей схемы по отношению к разомкнутым зажимам при закороченных ЭДС (рис. 2.40).

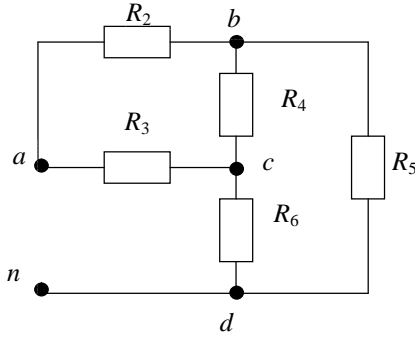


Рис. 2.40

Сопротивления R_2, R_3, R_4 , соединенные треугольником, преобразовать в эквивалентное соединение звездой с сопротивлениями R_a, R_b, R_c :

$$R_a = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{27 \cdot 5}{27 + 5 + 15} = 2,87 \text{ Ом};$$

$$R_b = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{27 \cdot 15}{27 + 15 + 5} = 8,61 \text{ Ом};$$

$$R_c = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{5 \cdot 15}{47} = 1,59 \text{ Ом}.$$

Схему на рис. 2.40 преобразовать в схему на рис. 2.41 с последовательно-параллельным соединением сопротивлений.

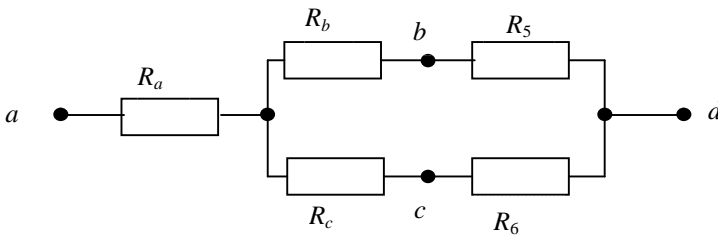


Рис. 2.41

Сопротивление относительно зажимов ad :

$$R_{\text{вх}} = R_a + \frac{(R_6 + R_5)(R_c + R_b)}{R_b + R_5 + R_c + R_6} = 2,87 + \frac{(8,61 + 12)(1,59 + 10)}{8,61 + 12 + 1,59 + 10} = 10,28 \text{ Ом}.$$

3. В результате замены по отношению к сопротивлению R_1 всей остальной схемы на рис. 2.38 эквивалентным генератором с ЭДС, равной напряжению холостого хода U_{xx} , и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению $R_{вх}$, получить схему на рис. 2.42.

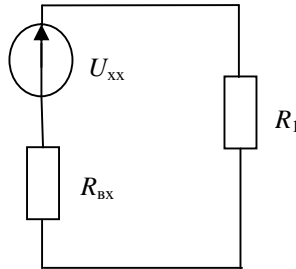


Рис. 2.42

Определить значение тока I_1 по формуле

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{вх} + R_1} = \frac{35,59}{10,28 + 15} = 1,4 \text{ А.}$$

Получено такое же значение тока I_1 , как и при расчете по методу контурных токов.

Метод двух узлов

Метод двух узлов применяется в том случае, если электрическая цепь содержит только два узла. Метод двух узлов основан на первом законе Кирхгофа.

Порядок расчета:

1. Задать условное положительное направление напряжения между узлами a и b (от a к b).
2. Определить напряжение между двумя узлами согласно формуле

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k G_k \pm J_k}{\sum G_k}. \quad (2.9)$$

Если ЭДС в какой-либо ветви отсутствовать, то отсутствует и соответствующее слагаемое в числителе, но проводимость этой ветви G_k в знаменателе остается.

Если направление ЭДС в ветви совпадает с заданным направлением напряжения между двумя узлами, то ее значение войдет в формулу со знаком минус, в противном случае – со знаком плюс.

Если направление тока источника тока J_k совпадает с заданным положительным направлением напряжения U_{ab} , то его значение войдет в формулу (2.9) со знаком минус, в противном случае – со знаком плюс.

3. Задать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме.

4. Определить значения токов в ветвях по закону Ома для участка цепи с ЭДС

$$I_k = \frac{\pm U_{ab} \pm E_k}{R_k} = (\pm U_{ab} \pm E_k) G_k. \quad (2.10)$$

Знак плюс перед U_{ab} и перед E_k ставится в том случае, если направление напряжения и ЭДС и положительное направление тока I_k совпадают.

Пример 3. Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 2.43) методом двух узлов, если $E_1 = 10$ В, $E_2 = 2$ В, $J_k = 3$ А, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом.

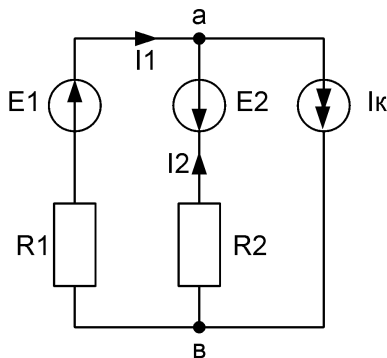


Рис. 2.43

Решение

1. Задать условные положительные направления токов и напряжения между узлами a и b и обозначить их на схеме.

2. Определить напряжение между двумя узлами:

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 - J_k}{g_1 + g_2} = \frac{1 \cdot 10 - 2 \cdot 0,5 - 3}{1 + 0,5} = 4 \text{ В},$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ См}$; $g_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ См}$.

3. Определить значения токов в ветвях:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{-4 + 10}{1} = 6 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{-U_{ab} - E_2}{R_2} = \frac{-4 - 2}{2} = -3 \text{ А}.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 - J_k = 0;$$

$$6 - 3 - 3 = 0.$$

Отрицательное значение тока I_2 показывает, что его действительное направление противоположно указанному на схеме положительному.

Пример 4. Определить величину E_1 в электрической цепи (рис. 2.42), где $E_2 = 130 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_3 = 9,5 \text{ Ом}$, при условии, что ток $I_1 = 0$.

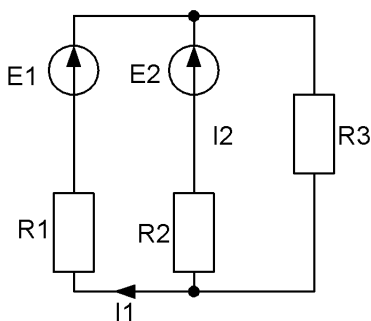


Рис. 2.44

Ответ: $E_1 = 123,5 \text{ В}$.

Пример 5. Определить показание амперметра методом эквивалентного генератора для цепи (рис. 2.43), если $E_1 = 20$ В, $E_2 = 10$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 2$ Ом.

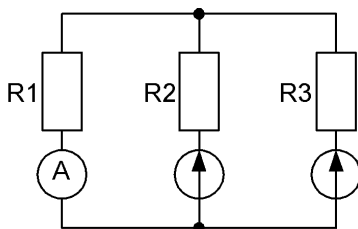


Рис. 2.45

Решение

1. Удалить ветвь с искомым током и сопротивлением R_1 из цепи. Закоротить все ЭДС и определить входное сопротивление (рис. 2.46):

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 2}{2 + 2} = 1 \text{ Ом.}$$

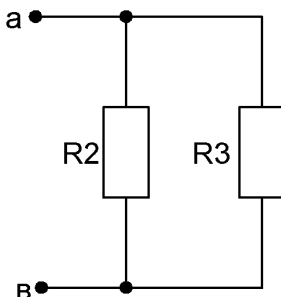


Рис. 2.46

2. Определить напряжение на зажимах разомкнутой ветви $U_{\text{авхх}}$ (рис. 2.47), для чего найти значение тока $I_{\text{хх}}$:

$$I_{\text{хх}} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_3} = \frac{20 - 10}{2 + 2} = 2,5 \text{ А.}$$

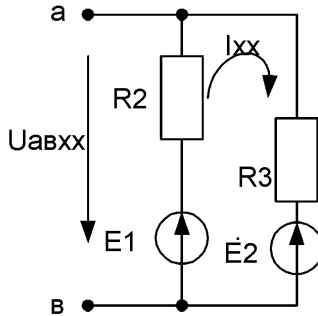


Рис. 2.47

Записать уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, проходящего через узлы a и b и ветвь с R_2 и E_1 :

$$I_{xx}R_2 + U_{авхх} = E_1;$$

$$U_{авхх} = E_1 - I_{xx}R_2 = 20 - 2,52 = 15 \text{ В.}$$

3. Определить показание амперметра, т. е. значение тока I_1 :

$$I_1 = \frac{U_{авхх}}{R_{вх} + R_1} = \frac{15}{1 + 2} = 5 \text{ А.}$$

Индивидуальные задания

1. В электрических цепях постоянного тока (рис. 2.48–2.52) заданы ЭДС и сопротивления (табл. 2.4). Вычертить схему электрической цепи согласно заданному варианту. Определить значения токов в ветвях, используя метод контурных токов.

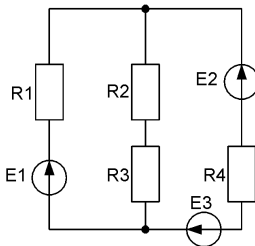


Рис. 2.48

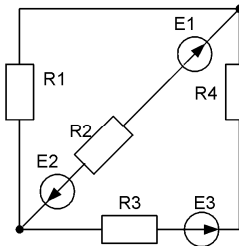


Рис. 2.49

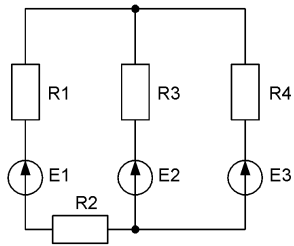


Рис. 2.50

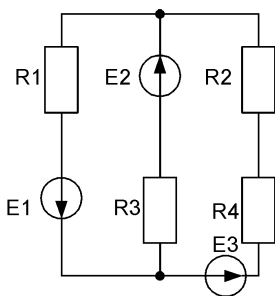


Рис. 2.51

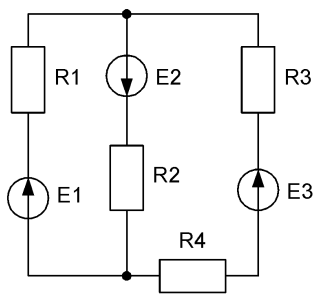


Рис. 2.52

Таблица 2.4

| Вариант | Рисунок | Элементы, входящие в электрическую цепь | | | | | | |
|---------|---------|---|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | | $E_1, \text{В}$ | $E_2, \text{В}$ | $E_3, \text{В}$ | $R_1, \text{Ом}$ | $R_2, \text{Ом}$ | $R_3, \text{Ом}$ | $R_4, \text{Ом}$ |
| 1 | 2.48 | 10 | 20 | 40 | 5 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 2.49 | 40 | 80 | 20 | 6 | 4 | 2 | 0 |
| 3 | 2.50 | 50 | 20 | 30 | 10 | 2 | 5 | 5 |
| 4 | 2.51 | 30 | 70 | 20 | 10 | 2 | 4 | 8 |
| 5 | 2.52 | 10 | 50 | 20 | 15 | 5 | 3 | 7 |
| 6 | 2.48 | 20 | 0 | 50 | 4 | 6 | 10 | 5 |
| 7 | 2.49 | 0 | 50 | 20 | 5 | 10 | 4 | 6 |
| 8 | 2.50 | 40 | 0 | 80 | 6 | 4 | 2 | 8 |
| 9 | 2.51 | 100 | 20 | 0 | 20 | 30 | 40 | 10 |
| 10 | 2.52 | 0 | 60 | 30 | 8 | 10 | 2 | 4 |
| 11 | 2.48 | 50 | 20 | 30 | 4 | 6 | 10 | 5 |
| 12 | 2.49 | 30 | 0 | 70 | 2 | 4 | 10 | 3 |
| 13 | 2.50 | 40 | 60 | 0 | 5 | 10 | 2 | 8 |
| 14 | 2.51 | 0 | 20 | 40 | 5 | 10 | 4 | 4 |
| 15 | 2.52 | 60 | 0 | 20 | 2 | 5 | 4 | 6 |

2. Для заданной цепи (рис. 2.53–2.58) определить согласно варианту (табл. 2.5) показание амперметра методом эквивалентного генератора.

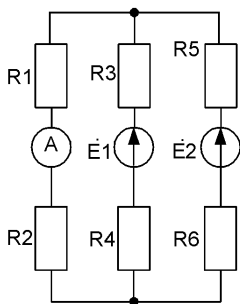


Рис. 2.53

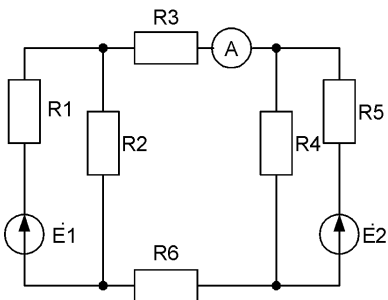


Рис. 2.54

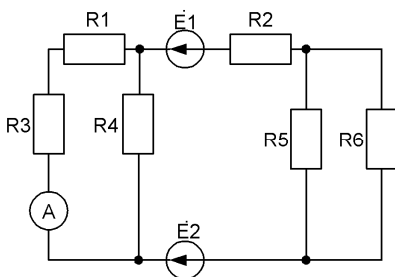


Рис. 2.55

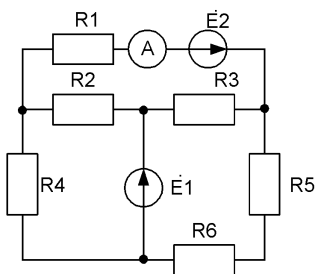


Рис. 2.56

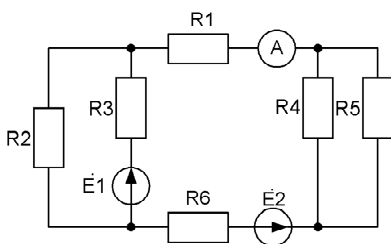


Рис. 2.57

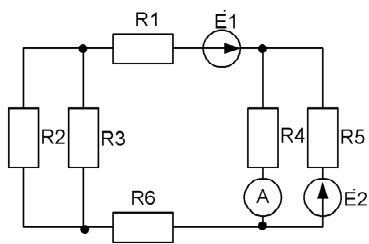


Рис. 2.58

Таблица 2.5

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------|------|------|------|------|------|------|-----------|-----------|-----------|------|----------------|-----------|-----------|----------------|-----------|
| Рисунок | 2.53 | 2.54 | 2.55 | 2.56 | 2.57 | 2.58 | 2.53 | 2.54 | 2.55 | 2.56 | 2.57 | 2.58 | 2.53 | 2.54 | 2.55 |
| Примечание | | | | | | | $R_4 = 0$ | $R_6 = 0$ | $R_1 = 0$ | | $R_5 = \infty$ | $R_2 = 0$ | $R_1 = 0$ | $R_4 = \infty$ | $R_3 = 0$ |

Контрольные вопросы

1. На чем основан метод контурных токов?
2. Каков порядок определения токов в ветвях электрических цепей по методу контурных токов?
3. На чем основан метод двух узлов?
4. Когда используется метод двух узлов?
5. Каков порядок определения токов в ветвях по методу двух узлов?
6. Как определить напряжение между двумя узлами?
7. На чем основан метод эквивалентного генератора?
8. Каков порядок расчета тока по методу эквивалентного генератора?
9. Как определить входное сопротивление эквивалентного генератора?

2.5. Графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока при последовательном, параллельном и смешанном соединении нелинейных резисторов

Цель: освоить методику графического расчета цепей постоянного тока с последовательным, параллельным и смешанным соединением нелинейных резисторов.

Методические рекомендации

Для проведения расчета нелинейных электрических цепей должны быть известны вольт-амперные характеристики (ВАХ) входящих в схему нелинейных резисторов. Сущность расчета состоит в замене нескольких резисторов одним эквивалентным нелинейным резистором с соответствующей результирующей ВАХ. Построение этой характеристики выполняют, как правило, графически, руководствуясь законами Кирхгофа. С помощью результирующей ВАХ по заданному напряжению или току на входе цепи находят напряжения или токи в ветвях.

Пример 1. Двухполюсник состоит из последовательно включенных резистора $R = 100$ Ом и диода VD (рис. 2.59). Задана ВАХ двухполюсника $I(U)$ (табл. 2.6).

Таблица 2.6

| | | | | | | |
|----------------|---|-----|-----|-----|-----|------|
| $U, \text{В}$ | 0 | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,6 | 2,0 |
| $I, \text{мА}$ | 0 | 1,2 | 3,5 | 6,4 | 9,4 | 12,3 |

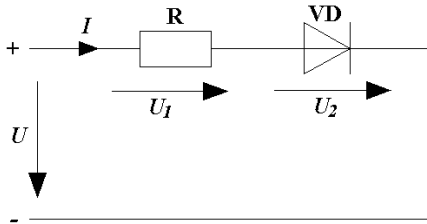


Рис. 2.59

Построить ВАХ диода $I(U_2)$. Определить значения напряжений U, U_1, U_2 при $I = 10 \text{ мА}$.

Решение

Расчет проводится графическим методом.

Построить ВАХ двухполосника $I(U)$ (рис. 2.60) на основании данных табл. 2.6. Чтобы построить ВАХ линейного резистора $I(U_1)$, необходимо иметь хотя бы две точки. Следует задать произвольное значение тока, протекающего по резистору. Пусть $I = 8 \text{ мА} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ А}$. Тогда

$$U_1 = IR = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,8 \text{ В.}$$

По двум точкам с координатами $(0; 0)$ и $(8 \text{ мА}; 0,8 \text{ В})$ построить линейную характеристику $I(U_1)$ (рис. 2.60).

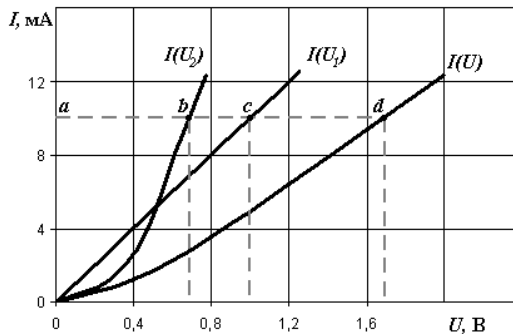


Рис. 2.60

На основании второго закона Кирхгофа

$$U_2 = U - U_1.$$

Для построения ВАХ диода необходимо произвести вычитание абсцисс ВАХ $I(U)$ и $I(U_1)$, соответствующих каждому произвольно принятому значению тока. Например, для тока $I = 10$ мА (см. рис. 2.60) $ab = ad - ac$. Приняв другие значения тока, получить другие точки ВАХ $I(U_2)$.

По заданному току двухполюсника $I = 10$ мА провести горизонтальную линию и на пересечении с ВАХ в точках b и d найти соответствующие значения напряжения: $U_2 = 0,68$ В, $U = 1,68$ В.

По закону Ома

$$U_1 = RI = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1 \text{ В.}$$

Проверка: $U_1 + U_2 = U$; $1 + 0,68 = 1,68$. Расчет выполнен правильно.

Пример 2. Для стабилизации напряжения на приемнике параллельно ему присоединили стабилитрон (рис. 2.61). Задана его ВАХ $I_1(U_H)$ (рис. 2.62). Определить пределы изменения напряжения приемника U_H , если напряжение источника питания $U = 12$ В изменяется в пределах $\pm 10\%$. Сопротивление $R = 1,2$ кОм, $R_H = 10$ кОм.

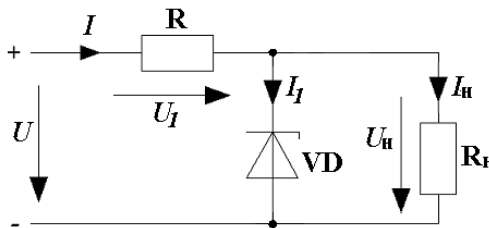


Рис. 2.61

Решение

Построить результирующую ВАХ смешанного соединения резисторов. Для этого следует построить сначала результирующую ВАХ $I(U_H)$ параллельного соединения стабилитрона VD и резистора приемника R_H , а затем – результирующую ВАХ $I(U)$ последовательного соединения резистора R и эквивалентного резистора R_{HVD} .

Чтобы выполнить указанные преобразования, воспользоваться методами построения результирующих ВАХ для параллельного и последовательного соединений резисторов.

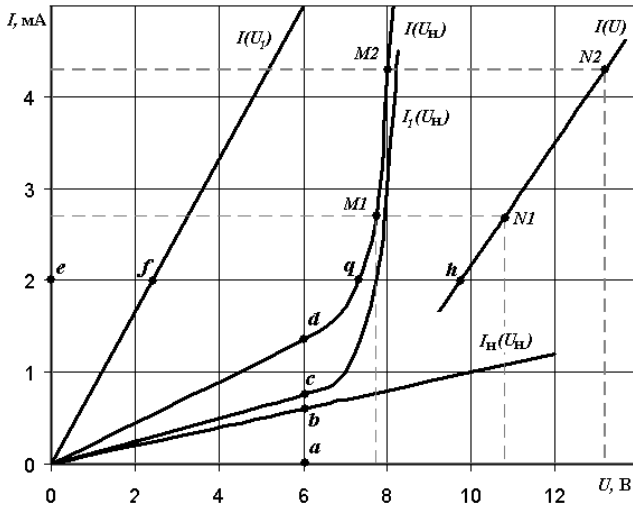


Рис. 2.62

ВАХ линейных элементов R и R_n построить, задав произвольные значения токов: $I = 5$ мА, $I_n = 1$ мА. Тогда

$$U_1 = IR = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1200 = 6 \text{ В};$$

$$U_n = I_n R_n = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = 10 \text{ В}.$$

По двум точкам (0,0 и 5 мА, 6 В) провести прямую линию и получить характеристику $I(U_1)$. Аналогично по двум точкам (0,0 и 1 мА, 10 В) построить ВАХ $I_n(U_n)$ (рис. 2.62).

Зависимость $I(U_n)$ (рис. 2.62) для параллельного соединения получить суммированием ординат ВАХ стабилитрона $I_1(U_n)$ и приемника $I_n(U_n)$, соответствующих выбранному напряжению. Например, при $U_n = 6$ В суммировать отрезки ab и ac и получить точку d характеристики $I(U_n)$. Аналогично для других точек.

Для последовательного соединения зависимости $I(U)$ получить суммированием абсцисс характеристик $I(U_1)$ и $I(U_n)$, соответствующих выбранному току. Например, при $I = 2$ мА суммировать

отрезки ef и eq и получить точку h характеристики $I(U)$. Аналогично для других точек. Кривая $I(U)$ является результирующей ВАХ всей цепи.

По условию задачи напряжение U изменяется в пределах $\pm 10\%$, т. е. от $0,9U = 0,9 \cdot 12 = 10,8$ В до $1,1U = 1,1 \cdot 12 = 13,2$ В. Чтобы определить, в каких пределах при этом изменяется U_n , следует воспользоваться двумя характеристиками: $I(U)$ и $I(U_n)$.

По ВАХ $I(U)$:

– точка $N1$: $I = 2,7$ мА при $U = 10,8$ В;

– точка $N2$: $I = 4,3$ мА при $U = 13,2$ В.

По ВАХ $I(U_n)$:

– точка $M1$: $U_n = 7,8$ В при $I = 2,7$ мА;

– точка $M2$: $U_n = 8$ В при $I = 4,3$ мА.

Изменение напряжения на нагрузке

$$\Delta U_n = 8,0 - 7,8 = 0,2 \text{ В}$$

или в процентном выражении к среднему напряжению на нагрузке

$$\Delta U_{n, \text{cp}} = \frac{0,2}{7,9} 100 \% \approx 2,5 \%$$

Таким образом, при колебаниях напряжения источника на $\pm 10\%$ напряжение на нагрузке изменяется только на $\pm 1,25\%$, т. е. в 8 раз меньше.

Задачи для самостоятельного решения

1. Лампа накаливания с заданной ВАХ (табл. 2.7) подключена последовательно с реостатом к источнику питания напряжением $U = 120$ В. Определить значение сопротивления, на которое следует установить реостат, чтобы напряжение на лампе составило 75 В.

Ответ: 35 Ом.

Таблица 2.7

| | | | | | | | |
|----------------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $U, \text{ В}$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| $I, \text{ А}$ | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2,0 | 2,5 |

2. Бареттер с ВАХ, показанной на рис. 2.63, и линейный резистор $R = 80 \text{ Ом}$ соединены параллельно и включены на постоянное напряжение. Значение тока на входе цепи $I = 0,4 \text{ А}$. Определить значения напряжения U на входе цепи и токов в параллельных ветвях цепи.

Ответ: 12 В; 0,25 А; 0,15 А.

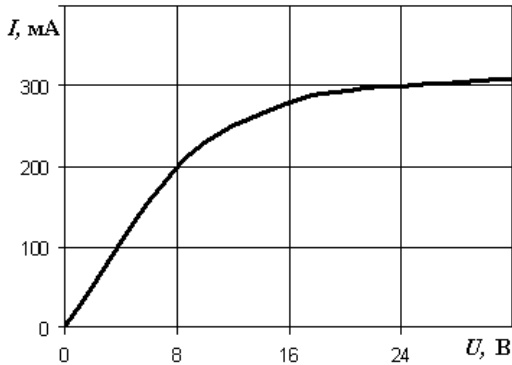


Рис. 2.63

Индивидуальные задания

1. Рассчитать электрическую цепь (табл. 2.8) в соответствии с заданным вариантом.
2. Рассчитать электрическую цепь (табл. 2.9) в соответствии с заданным вариантом.

Контрольные вопросы и задания

1. Какую электрическую цепь постоянного тока называют нелинейной?
2. В каком виде может быть задана вольт-амперная характеристика нелинейного элемента?
3. Изложите порядок графического расчета нелинейной цепи при последовательном соединении, при параллельном соединении линейных и нелинейных элементов.
4. Нарисуйте схему нелинейной цепи постоянного тока со смешанным соединением одного линейного и двух нелинейных элементов.

Таблица 2.8

69

| Номер варианта | Схема электрической цепи | ВАХ нелинейных резисторов | Напряжение источника U , В | Ток цепи I , А | Сопротивление R_1 , Ом | Напряжения | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--------------------------|---|------------------------------|------------------|--------------------------|------------|-----------|-----|-----|-----------|---|----|----|----|----|-----|---|---|----|----|---|
| | | | | | | U_1 , В | U_2 , В | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | 40 | ? | 10 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | ? | 2 | 30 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | 30 | ? | 20 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | ? | 3 | 15 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | 50 | ? | 5 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | 250 | ? | — | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | ? | 4 | — | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | 200 | ? | — | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | ? | 3 | — | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | 150 | ? | — | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | <table border="1"> <tr> <td>I, А</td> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,5</td> <td>0,9</td> <td>1,4</td> <td>2,0</td> </tr> <tr> <td>U_2, В</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td>100</td> </tr> </table> | I , А | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2,0 | U_2 , В | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | ? | ? | 20 | 24 | ? |
| I , А | | | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2,0 | | | | | | | | | | | | | |
| U_2 , В | | | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | ? | ? | 25 | ? | 40 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | ? | ? | 30 | 30 | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | ? | ? | 35 | ? | 60 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | ? | ? | 40 | 60 | ? | | | | | | | | | | | | | | | | |

Таблица 2.9

| Номер варианта | Схема электрической цепи | ВАХ нелинейных резисторов | Напряжение источника U , В | Сопротивление R_1 , Ом | Токи в ветвях | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|--------------------------|---|------------------------------|--------------------------|---------------|-----------|-----------|-----|-----|--------|---|----|----|----|----|-----|---|----|---|-----|---|
| | | | | | I , А | I_1 , А | I_2 , А | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | 200 | 100 | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | ? | 50 | 4 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | 250 | 100 | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | ? | 75 | 3 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | 150 | 80 | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | 25 | — | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | ? | — | 2 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | 40 | — | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | ? | — | 3 | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | 50 | — | ? | ? | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | <table border="1"> <tr> <td>i_2, A</td> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,5</td> <td>0,9</td> <td>1,4</td> <td>2,0</td> </tr> <tr> <td>U, B</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>40</td> <td>60</td> <td>80</td> <td>100</td> </tr> </table> | i_2, A | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2,0 | U, B | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | ? | 10 | ? | 1,0 | ? |
| i_2, A | | | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,9 | 1,4 | 2,0 | | | | | | | | | | | | | |
| U, B | | | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | ? | 15 | ? | ? | 1,0 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | | ? | 20 | ? | 2,0 | ? | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | ? | 25 | ? | ? | 1,5 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | ? | 30 | ? | 1,5 | ? | | | | | | | | | | | | | | | | |

2.6. Расчет нелинейных цепей постоянного тока методом двух узлов и методом итераций

Цель: освоить методику графического расчета сложных нелинейных цепей постоянного тока методом двух узлов и методом итераций.

Методические рекомендации

Для расчета нелинейных цепей постоянного тока, имеющих только узлы a и b , используют метод двух узлов.

Сущность метода состоит в определении напряжения между двумя узлами, при котором выполняется первый закон Кирхгофа. Для нелинейной цепи решение можно найти графически.

Порядок расчета:

1. Указать положительное направление напряжения между двумя узлами и положительные направления токов в ветвях. Рекомендуется принять направления токов совпадающими с направлением напряжения между двумя узлами.

2. Используя второй закон Кирхгофа, выразить напряжение между двумя узлами U_{ab} через ЭДС и падения напряжений каждой ветви.

3. Построить ВАХ ветвей $I_k = f(U_{ab})$ в одной системе координат.

4. Суммировать значения токов (ординат) характеристик $I_k = f(U_{ab})$ и получить характеристику $\sum I_k = f(U_{ab})$.

Сумма токов, направленных к одному узлу, согласно первому закону Кирхгофа равна нулю, поэтому точка пересечения кривой $\sum I_k = f(U_{ab})$ с осью абсцисс определяет искомое значение U_{ab} .

5. По найденному значению U_{ab} определить значения токов в ветвях по соответствующим характеристикам $I_k(U_{ab})$.

Пример. Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 2.64) методом двух узлов, если $E_1 = 4$ В, $E_2 = 8$ В. ВАХ нелинейных резисторов приведены на рис. 2.65.

Решение

1. Указать направление токов в ветвях к узлу b .

2. Выразить напряжения U_{ab} через ЭДС и падения напряжений для каждой ветви отдельно, используя второй закон Кирхгофа:

$$U_{ab} = U_1 + E_1; \quad (2.11)$$

$$U_{ab} = U_2 - E_2; \quad (2.12)$$

$$U_{ab} = U_3. \quad (2.13)$$

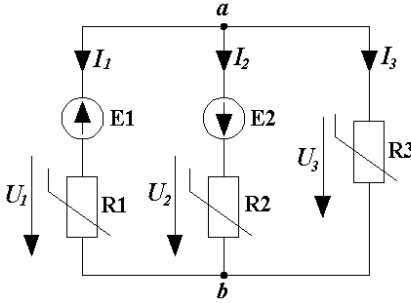


Рис. 2.64

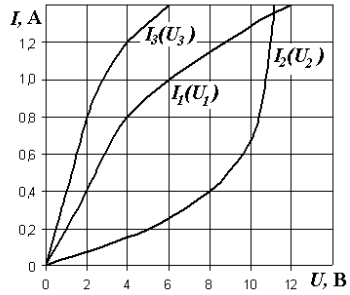


Рис. 2.65

3. Построить ВАХ ветвей $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ (рис. 2.66). Из выражений (2.11), (2.12), (2.13) следует, что характеристика $I_1(U_{ab})$ – это $I_1(U_1)$, смещенная вправо на величину $E_1 = 4$ В, характеристика $I_2(U_{ab})$ – это $I_2(U_2)$, смещенная влево на $E_2 = 8$ В, характеристика $I_3(U_{ab})$ – это $I_3(U_3)$.

Для более точного построения указанных характеристик составить табл. 2.10. Произвольно задать значения токов I_1 и I_2 , по характеристикам $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$ определить соответствующие значения U_1 и U_2 . Используя выражения (2.11), (2.12), найти значения U_{ab} для принятых значений токов I_1 и I_2 .

Таблица 2.10

| | | | | | | | | | |
|---------------------|------|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|
| $I_1, \text{ A}$ | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,2 | -0,4 | -0,6 | -0,8 | -1,2 |
| $U_{ab}, \text{ B}$ | 4 | 6 | 7 | 8 | 13 | 2 | 1 | 0 | -5 |
| $I_2, \text{ A}$ | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,2 | -0,4 | -0,6 | -0,8 | -1,2 |
| $U_{ab}, \text{ B}$ | -8,0 | 0 | 1,6 | 2,4 | 3,0 | -16,0 | -17,4 | -18,4 | -19,0 |

4. Суммировать значения токов (ординаты) характеристик $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$, для чего произвольно задать значение U_{ab} , по характеристикам $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ найти соответствующие значения токов I_1 , I_2 , I_3 и получить характеристику $(I_1 + I_2 + I_3) = f(U_{ab})$ (рис. 2.66).

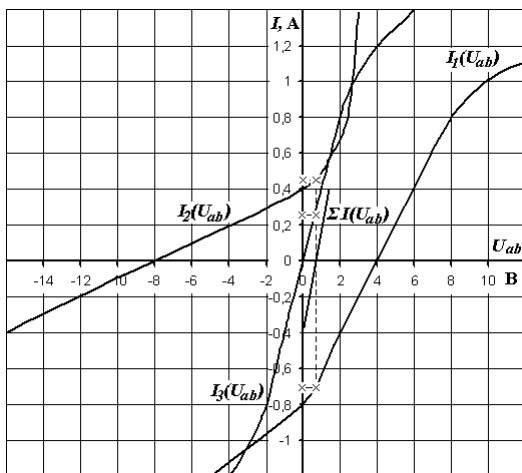


Рис. 2.66

Сумма токов ветвей в рассматриваемой цепи равна нулю, поэтому точка пересечения характеристики $(I_1 + I_2 + I_3) = f(U_{ab})$ с осью абсцисс определяет искомое значение напряжения: $U_{ab} = 0,7$ В.

5. По характеристикам $I_1(U_{ab})$, $I_2(U_{ab})$, $I_3(U_{ab})$ определить искомые значения токов при найденном значении $U_{ab} = 0,7$ В (рис. 2.66): $I_1 = -0,7$ А; $I_2 = 0,45$ А; $I_3 = 0,25$ А.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рассчитать значения токов в цепи (рис. 2.67) методом двух узлов, если $E_1 = 30$ В, $E_2 = 35$ В, $R = 5$ Ом. ВАХ одинаковых нелинейных резисторов R_1 и R_2 дана на рис. 2.68.

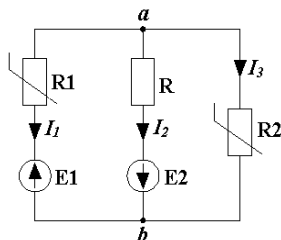


Рис. 2.67

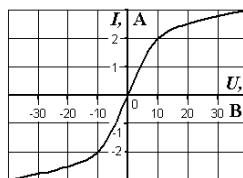


Рис. 2.68

Ответ: $I_1 = -3$ А; $I_2 = 5$ А; $I_3 = -2$ А.

2. Определить значения токов I_1 , I_2 , I в электрической цепи (рис. 2.69) итерационным методом. ВАХ нелинейных резисторов представлены на рис. 2.70, активное сопротивление $R = 100$ Ом, напряжение $U = 60$ В.

Ответ: $I = 1,55$ А; $I_1 = 0,3$ А; $I_2 = 1,25$ А.

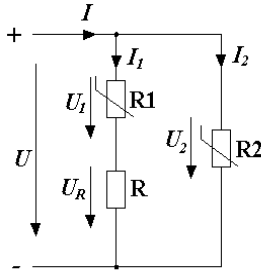


Рис. 2.69

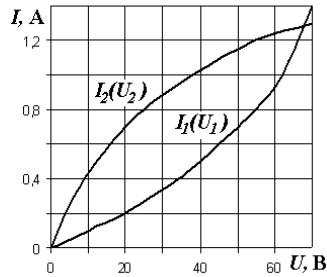


Рис. 2.70

Индивидуальное задание

Построить ВАХ $I = f(U_{ab})$ участка цепи (рис. 2.71–2.77).

Значения сопротивлений линейных резисторов и ЭДС заданы в табл. 2.11. ВАХ нелинейных резисторов R_1 и R_2 представлены на рис. 2.78.

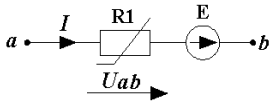


Рис. 2.71

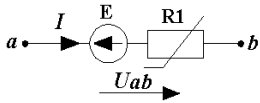


Рис. 2.72

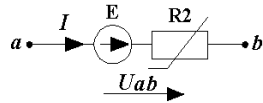


Рис. 2.73

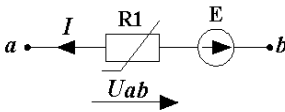


Рис. 2.74

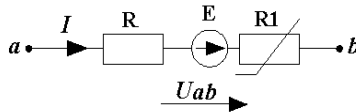


Рис. 2.75

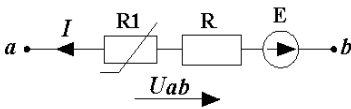


Рис. 2.76

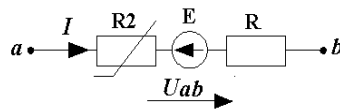


Рис. 2.77

Таблица 2.11

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Рисунок | 2.71 | 2.74 | 2.72 | 2.73 | 2.74 | 2.75 | 2.76 | 2.77 | 2.71 | 2.72 | 2.73 | 2.74 | 2.75 | 2.76 | 2.77 |
| $E, В$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 10 | 15 | 20 | 25 | 5 | 10 | 15 | 20 | 10 | 10 |
| $R, Ом$ | | | | | 30 | 40 | 60 | | | | | 50 | 60 | 100 | 70 |

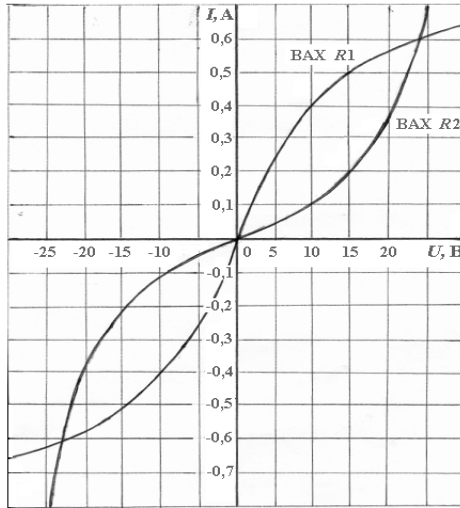


Рис. 2.78

Для расчета цепей методом итераций необходимо иметь ВАХ нелинейных элементов, заданные графически или аналитически.

Пример. Определить значение тока I для цепи, представленной на рис. 2.79, при известных значениях E , $I(U_1)$, $I(U_2)$.

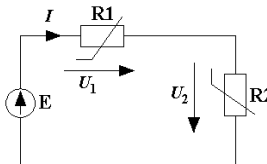


Рис. 2.79

1. На основании второго закона Кирхгофа составить расчетную формулу для искомой величины:

$$E = U_1 + U_2; \quad E = IR_1(I) + IR_2(I),$$

откуда

$$I = \frac{E}{R_1(I) + R_2(I)}, \quad (2.14)$$

где $R_1(I)$, $R_2(I)$ – значения сопротивлений нелинейных элементов при данном токе.

2. Произвольно задать значение тока нулевого приближения I_0 .
3. По ВАХ $I(U_1)$ и $I(U_2)$ найти значения напряжений U_{10} и U_{20} , которые соответствуют току I_0 .
4. По закону Ома определить R_{10} и R_{20} :

$$R_{10} = \frac{U_{10}}{I_0}; \quad R_{20} = \frac{U_{20}}{I_0}. \quad (2.15)$$

5. Найденные значения сопротивлений подставить в формулу (2.14) и определить значение тока в первом приближении:

$$I_1 = \frac{E}{R_{10} + R_{20}}.$$

6. По найденному значению тока I_1 по ВАХ определить U_{11} и U_{21} , затем R_{11} и R_{21} , подставить эти значения сопротивлений в формулу (2.14), найти второе приближение тока I_2 .

Аналогичные расчеты проводить до тех пор, пока из-за сходимости итерационного процесса результат не начнет практически повторяться. В случае расходящейся итерации перейти к другой расчетной формуле.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы представления ВАХ?
2. Как по ВАХ получить зависимость сопротивления R от тока I ?
3. Как построить ВАХ участка цепи с нелинейным резистором и ЭДС?
4. Каков порядок расчета нелинейных цепей постоянного тока методом двух узлов?
5. Каков порядок расчета нелинейных цепей постоянного тока методом итераций?

МОДУЛЬ 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

3.1. Изображение синусоидальных величин векторами и комплексными числами

Цель: усвоить основные понятия и величины, характеризующие переменный синусоидальный ток; овладеть методами представления его векторами и комплексными числами.

Методические рекомендации

Переменным называют ток, изменяющийся во времени. Переменный ток, который описывается синусоидальной функцией, называется синусоидальным током. Величины, характеризующие синусоидальный ток: период, частота, амплитуда, угловая (циклическая) частота, фаза, начальная фаза.

Период T – время, за которое синусоидальный ток повторяет свои значения в такой же последовательности. Период измеряется в секундах (с). Величина, обратная периоду, т. е. число периодов в единицу времени, называется частотой, обозначается f и измеряется в герцах (Гц):

$$f = \frac{1}{T}.$$

На рис. 3.1 изображен график синусоидального тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi),$$

где i – мгновенное значение тока;

I_m – максимальное значение, или амплитуда;

$\omega = 2\pi f$ – угловая (циклическая) частота, рад/с;

ψ – начальная фаза, определяемая смещением начала синусоиды относительно начала координат (началом синусоиды считается точка перехода отрицательной полуволны в положительную).

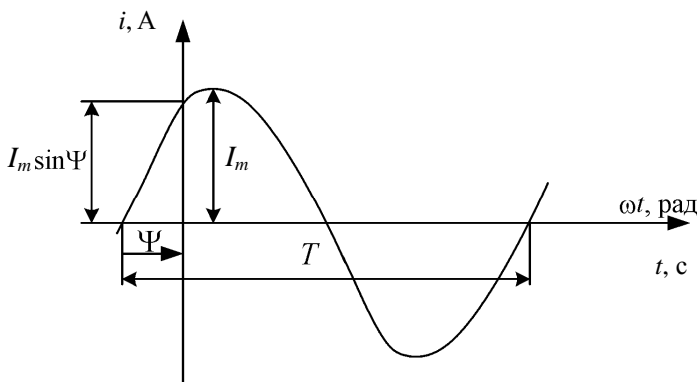


Рис. 3.1

Угол ψ положителен в том случае, если начало синусоиды смещено влево от начала координат, и отрицателен, если смещено вправо.

Величина $(\omega t + \psi)$, определяющая стадию изменения синусоидальной функции, называется фазовым углом, или фазой.

При расчете цепей синусоидального тока наряду с амплитудным значением тока широко используется понятие действующего значения тока. Действующие значения синусоидального тока, напряжения, ЭДС связаны с их амплитудными значениями следующими соотношениями:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Для облегчения расчетов и анализа цепей синусоидального тока широко применяется метод представления синусоидальных функций векторами и комплексными числами.

Сущность метода заключается в том, что синусоидальной величине ставится в соответствие вектор на комплексной плоскости. Длина вектора (модуль) равна амплитуде синусоидальной величины. Вектор строится выходящим из начала координат под углом ψ к действительной положительной полуоси комплексной плоскости. Если $\psi > 0$, вектор повернут против часовой стрелки; если $\psi < 0$ – по часовой.

В свою очередь, данный вектор может быть аналитически представлен комплексным числом, которое получило название

комплексной амплитуды. Комплексную амплитуду, как и любое комплексное число, можно записать в показательной, тригонометрической и алгебраической формах.

При переходе от синусоидальной функции к записи ее комплексной амплитуды удобнее всего пользоваться показательной формой. Модуль комплексного числа берется равным амплитуде синусоидальной величины, а аргумент – углу ψ .

Если комплексную амплитуду разделить на $\sqrt{2}$, можно получить комплексное действующее значение синусоидальной величины:

$$\dot{i} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}; \quad \dot{U} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}; \quad \dot{E} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}.$$

Пример 1. Задано выражение мгновенного значения синусоидального тока: $i = 10\sin(314t + 60^\circ)$ А. Определить амплитуду тока I_m , действующее значение I , период T , частоту f , угловую частоту ω , начальную фазу ψ .

Решение

Из условия задачи $I_m = 10$ А, $\omega = 314$ рад/с, $\psi = 60^\circ$, тогда

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ А};$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50 \text{ Гц};$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с}.$$

Пример 2. Задано мгновенное значение синусоидальной ЭДС $e = 100\sin(\omega t + 120^\circ)$ В. Построить на комплексной плоскости вектор, изображающий эту ЭДС, и записать ее комплексную амплитуду.

Решение

Построить на комплексной плоскости вектор \dot{E}_m , длина которого в масштабе равна 100 В, направленный под углом $\psi = 120^\circ$ к действительной положительной полуоси (рис. 3.2).

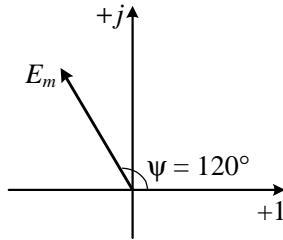


Рис. 3.2

Комплексная амплитуда

$$\dot{E}_m = 100e^{j120} = 100(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ) = -50 + j86,6 \text{ В.}$$

Пример 3. Задано комплексное действующее значение тока $\dot{I} = 5 + j5 \text{ А}$. Записать выражение его мгновенного значения.

Решение

Определить действующее значение тока как модуль комплексного действующего значения тока:

$$I = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7,07 \text{ А.}$$

Определить амплитуду тока, умножив действующее значение на $\sqrt{2}$:

$$I_m = I\sqrt{2} = 7,07\sqrt{2} = 10 \text{ А.}$$

Определить начальную фазу как арктангенс отношения величины мнимой части комплексного значения тока к вещественной части:

$$\psi = \arctg \frac{5}{5} = 45^\circ.$$

Записать выражение мгновенного значения синусоидального тока:

$$i = 10\sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А.}$$

Примечание. При определении угла ψ следует иметь в виду, что арктангенс отношения мнимой части комплексного числа к его вещественной части даст истинное значение угла в том случае, если

вектор находится в первом или четвертом квадранте. Если же вектор расположен во втором либо третьем квадранте, то к полученному значению угла необходимо прибавить 180° . Чтобы избежать ошибки, рекомендуется оценить величину угла, построив предварительно вектор на комплексной плоскости.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выражение мгновенного значения синусоидального тока имеет вид:

$$i = 5 \sin \left(628t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ А.}$$

Определить период T , частоту f , действующее значение тока I . Нарисовать синусоиду тока и построить на комплексной плоскости вектор, изображающий данный ток.

2. Определить значение общего тока i (рис. 3.3), если

$$i_1 = 14,1 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ А;}$$

$$i_2 = 28,2 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ А.}$$

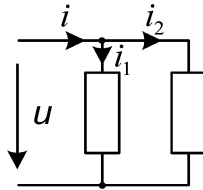


Рис. 3.3

3. Записать выражение мгновенного значения синусоидального напряжения, если комплексное действующее значение напряжения $\dot{U} = -80 - j60 \text{ В.}$

Индивидуальное задание

По выражению мгновенного значения синусоидального тока i согласно варианту (табл. 3.1) определить: амплитуду тока I_m ,

действующее значение тока I , период T , угловую частоту ω , частоту f , фазу, начальную фазу ψ .

Нарисовать кривую изменения тока во времени и построить на комплексной плоскости вектор, изображающий синусоиду тока i . Записать комплексную амплитуду тока.

Таблица 3.1

| Номер варианта | Выражение тока i |
|----------------|---|
| 1 | $i = 400\sin(314t + 135^\circ)$ |
| 2 | $i = 5\sin\left(314t - \frac{\pi}{6}\right)$ |
| 3 | $i = 80\sin(942t + 60^\circ)$ |
| 4 | $i = 15\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 5 | $i = 205\sin(628t - 120^\circ)$ |
| 6 | $i = 40\sin(157t - 240^\circ)$ |
| 7 | $i = 60\sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right)$ |
| 8 | $i = 25\sin(314t - 60^\circ)$ |
| 9 | $i = 30\sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$ |
| 10 | $i = 70\sin\left(157t - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| 11 | $i = 20\sin\left(157t - \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 12 | $i = 127\sin(1256t + 60^\circ)$ |
| 13 | $i = 127\sin\left(157t - \frac{2\pi}{3}\right)$ |
| 14 | $i = 200\sin\left(314t - \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 15 | $i = 220\sin\left(780t + \frac{2\pi}{3}\right)$ |

Контрольные вопросы

1. Как записывается выражение мгновенного значения тока? Как определяются период, частота, угловая частота?
2. Как определить действующее значение напряжения синусоидального тока по его амплитудному значению?
3. Что такое фаза, начальная фаза?
4. Как определяется начальная фаза синусоидального тока?
5. Каковы правила изображения синусоидальной функции вектором?
6. Что такое комплексная амплитуда? Как ее записать?

3.2. Расчет простых цепей синусоидального тока. Законы Ома, Кирхгофа в комплексной форме

Цель: овладеть комплексным методом расчета цепей синусоидального тока при последовательном соединении элементов R , L , C , а также при смешанном соединении.

Методические рекомендации

Расчет цепи синусоидального тока, состоящей из последовательно соединенных элементов R , L , C (рис. 3.4), основывается на законе Ома в комплексной форме:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

где \dot{I} , \dot{U} – комплексные действующие значения тока и напряжения;
 \underline{Z} – комплексное сопротивление.

Для цепи с последовательным соединением элементов R , L , C (рис. 3.4) комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

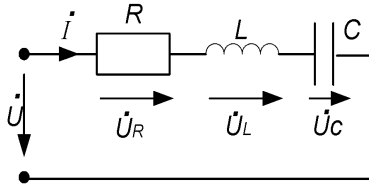


Рис. 3.4

Закон Ома принимает вид:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

После введения обозначений $\omega L = X_L$ (индуктивное сопротивление) и $\frac{1}{\omega C} = X_C$ (емкостное сопротивление) закон Ома принимает вид:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)}.$$

После введения обозначения реактивного сопротивления $X_L - X_C = X$ (может иметь положительное или отрицательное значение) комплексное сопротивление $\underline{Z} = R \pm jX$.

Комплексное сопротивление может быть записано в показательной форме:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ – модуль комплексного сопротивления, называемый полным сопротивлением;

$\varphi = \arctg \frac{\pm X}{R}$ – аргумент (угол) комплексного сопротивления.

Из закона Ома в комплексной форме комплексное сопротивление $\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$.

Комплексные величины, записанные в показательной форме:

$$Ze^{j\varphi} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}.$$

Следовательно, $Z = \frac{U}{I}$; $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Полное сопротивление Z , активное сопротивление R и реактивное сопротивление X соотносятся между собой как стороны прямоугольного треугольника (рис. 3.5), который получил название прямоугольного треугольника сопротивлений. Из этого треугольника $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}$; $R = Z \cos \varphi$; $X = Z \sin \varphi$.

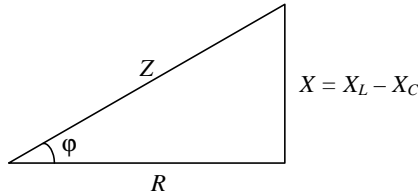


Рис. 3.5

Для ветвей электрической цепи, каждая из которых содержит только сопротивление R , только индуктивность L и только емкость C , комплексные сопротивления соответственно:

$$\underline{Z}_R = R; \quad \underline{Z}_L = j\omega L; \quad \underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C}.$$

Если ветвь содержит не по одному элементу R , L , C , включенным последовательно, а несколько, то вначале определяются:

– эквивалентное активное сопротивление

$$R_{\text{ЭКВ}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n;$$

– эквивалентное индуктивное сопротивление

$$X_{L\text{ЭКВ}} = X_{L1} + X_{L2} + \dots + X_{Lk};$$

– эквивалентное емкостное сопротивление

$$X_{C\text{ЭКВ}} = X_{C1} + X_{C2} + \dots + X_{Cm}.$$

Затем находится комплексное сопротивление ветви $\underline{Z} = R_{\text{экв}} + j(X_{L_{\text{экв}}} - X_{C_{\text{экв}}})$.

Для наглядности расчет цепи часто сопровождают построением векторной диаграммы тока и напряжений. При построении диаграммы необходимо помнить, что на резистивном элементе напряжение и ток совпадают по фазе, на индуктивном элементе напряжение опережает ток на угол 90° , на емкостном элементе напряжение отстает от тока на угол 90° . По этой причине второй закон Кирхгофа для схемы рис. 3.5 выполняется только для комплексных значений напряжений и не выполняется для действующих значений:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C; \quad U \neq U_R + U_L + U_C.$$

Пример 1. Определить действующие значения тока и напряжения на элементах цепи (рис. 3.6.) если $R = 30$ Ом, $L_1 = 80$ мГн, $L_2 = 20$ мГн, $C = 16,7$ мкФ, $u = 141\sin 1000t$ В. Построить векторную диаграмму тока и напряжений. Задачу решить комплексным методом.

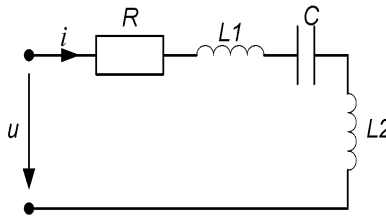


Рис. 3.6

Решение

Определить индуктивные и емкостные сопротивления:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 1000 \cdot 0,08 = 80 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 1000 \cdot 0,02 = 20 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 16,7 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление цепи при последовательном соединении элементов

$$\underline{Z} = R + j(X_{L1} + X_{L2} - X_C) = 30 + j(80 + 20 - 60) = 30 + j40 \text{ Ом}.$$

Записать комплексное действующее напряжение на входе цепи:

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 100 \text{ В.}$$

По закону Ома в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z} = \frac{100}{30 + j40} = \frac{100(30 - j40)}{30^2 + 40^2} = 1,2 - j1,6 \text{ А.}$$

Действующее значение тока $I = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2 \text{ А.}$

Напряжения на элементах цепи по закону Ома

$$\dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I} = 30(1,2 - j1,6) = 36 - j48 \text{ В.}$$

Действующее значение напряжения $U_R = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ В;}$

$$\dot{U}_{L1} = \underline{Z}_{L1} \dot{I} = j\omega L_1 \dot{I} = j80(1,2 - j1,6) = 128 + j96 \text{ В;}$$

$$U_{L1} = \sqrt{96^2 + 128^2} = 160 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{L2} = \underline{Z}_{L2} \dot{I} = jL_2 \omega \dot{I} = j20(1,2 - j1,6) = 32 + j24 \text{ В;}$$

$$U_{L2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \text{ В;}$$

$$\dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = -j60(1,2 - j1,6) = -96 - j72 \text{ В;}$$

$$U_C = \sqrt{72^2 + 96^2} = 120 \text{ В.}$$

Проверка по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\begin{aligned} U &= U_R + U_{L1} + U_{C1} + U_{L2} = \\ &= 36 - j48 + 128 + j96 + 32 + j24 - 96 - j72 = 100 \text{ В.} \end{aligned}$$

Векторную диаграмму построить в соответствии с расчетом в комплексной форме, выбрать масштабы построения векторов. Векторы тока и напряжений расположить в одной комплексной плоскости (рис. 3.7).

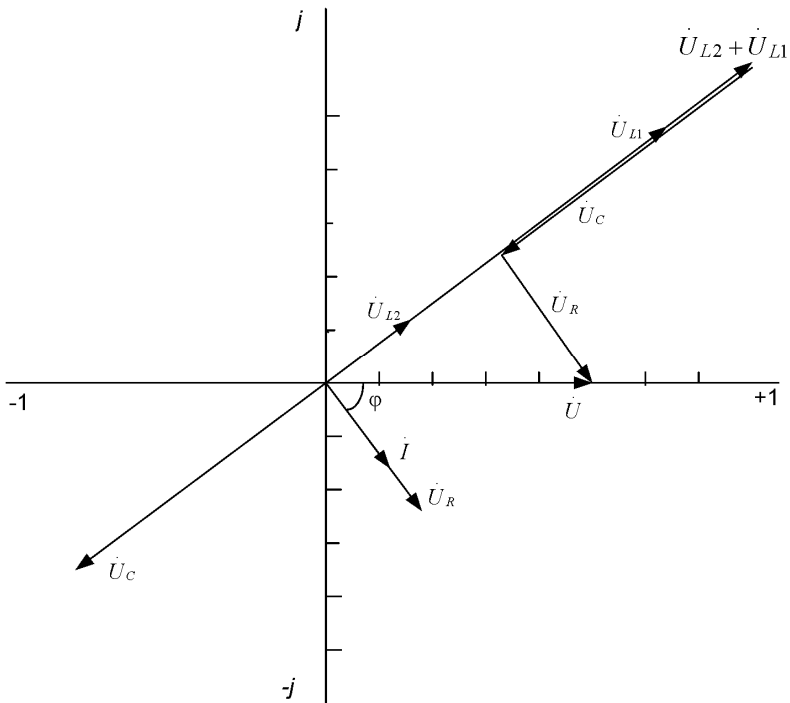


Рис. 3.7

Из данных векторной диаграммы (рис. 3.7) видно, что векторы напряжений на индуктивных элементах \dot{U}_{L1} , \dot{U}_{L2} опережают вектор тока \dot{I} на 90° (повернуты по отношению к вектору \dot{I} на 90° против часовой стрелки). Вектор напряжения \dot{U}_C отстает от вектора \dot{I} на 90° (повернут по отношению к вектору \dot{I} на 90° по часовой стрелке), а вектор напряжения на активном сопротивлении \dot{U}_R совпадает с вектором тока \dot{I} . Напряжение на входе цепи \dot{U} получить сложением векторов напряжения на элементах цепи.

Пример 2. Определить показания вольтметров PV_1 и PV_2 (рис. 3.8), если $U = 120$ В, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $X_L = 50$ Ом, $X_C = 30$ Ом.

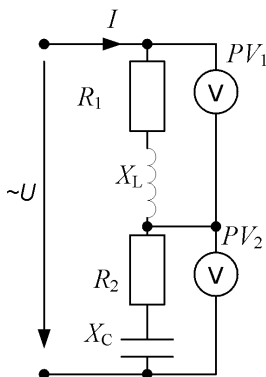


Рис. 3.8

Решение

Принять начальную фазу напряжения $\psi_u = 0$, тогда $\dot{U} = U = 120$ В.
Комплексные сопротивления участков цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 10 + j50 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 - jX_C = 10 - j30 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 10 + j50 + 10 - j30 = 20 + j20 \text{ Ом}.$$

По закону Ома значение тока

$$\dot{I} = \dot{U} / \underline{Z} = \frac{120(20 - j20)}{(20 + j20)(20 - j20)} = \frac{2400}{20^2 + 20^2} = 3 - j3 \text{ А}.$$

Падения напряжений на отдельных участках цепи:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I} = (3 - j3)(10 + j50) = 30 + j150 - j30 + 150 = 180 + j120 \text{ В};$$

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I} = (3 - j3)(10 - j30) = -60 - j120 \text{ В}.$$

Действующие значения напряжений:

$$U_1 = \sqrt{180^2 + 120^2} = 216,3 \text{ В};$$

$$U_2 = \sqrt{(-60)^2 + (-120)^2} = 134,2 \text{ В}.$$

Пример 3. Определить значения тока, напряжения на входе цепи (рис. 3.9) и напряжений на элементах, если показание вольтметра *PV* составляет 60 В, а $R = 50$ Ом, $X_L = 100$ Ом, $X_{C1} = 50$ Ом, $X_{C2} = 20$ Ом. Построить векторную диаграмму тока и напряжений.

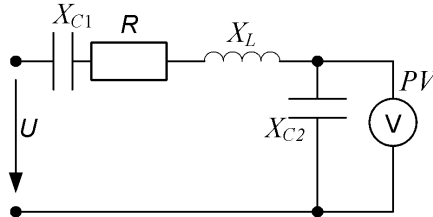


Рис. 3.9

Решение

Поскольку все элементы цепи включены последовательно, по ним протекает один и тот же ток. Определить величину тока по закону Ома в комплексной форме для участка цепи с сопротивлением X_{C2} :

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{C2}}{\underline{Z}_{C2}}.$$

Принять:

$$\dot{U}_{C2} = U_{C2} = 60 \text{ В};$$

$$\underline{Z}_{C2} = -jX_{C2} = -j20 \text{ Ом};$$

$$\dot{I} = \frac{60}{-j20} = j3 \text{ А}.$$

Действующее значение тока $I = 3$ А.

Комплексное сопротивление цепи при последовательном соединении элементов $\underline{Z} = R + j(X_L - X_{C1} - X_{C2}) = 40 + j(100 - 50 - 20) = 40 + j30$ Ом.

Напряжение на входе цепи $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I} = (40 + j30)j3 = -90 + j120$ В.

Действующее значение напряжения $U = \sqrt{90^2 + 120^2} = 150$ В.

Определить значения напряжений на элементах цепи по закону Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I} = 40 j3 = 120j \text{ В};$$

$$\dot{U}_{C1} = \underline{Z}_{C1} \dot{I} = -j50 j3 = 150 \text{ В};$$

$$\dot{U}_L = \underline{Z}_L \dot{I} = j100 j3 = -300 \text{ В}.$$

Действующие напряжения на элементах цепи:

$$U_R = 120 \text{ В}; \quad U_{C1} = 150 \text{ В}; \quad U_L = 300 \text{ В}.$$

Проверка по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_L = 150 + j120 - 300 + 60 = -90 + j120 \text{ В}.$$

Построить векторную диаграмму (рис. 3.10).

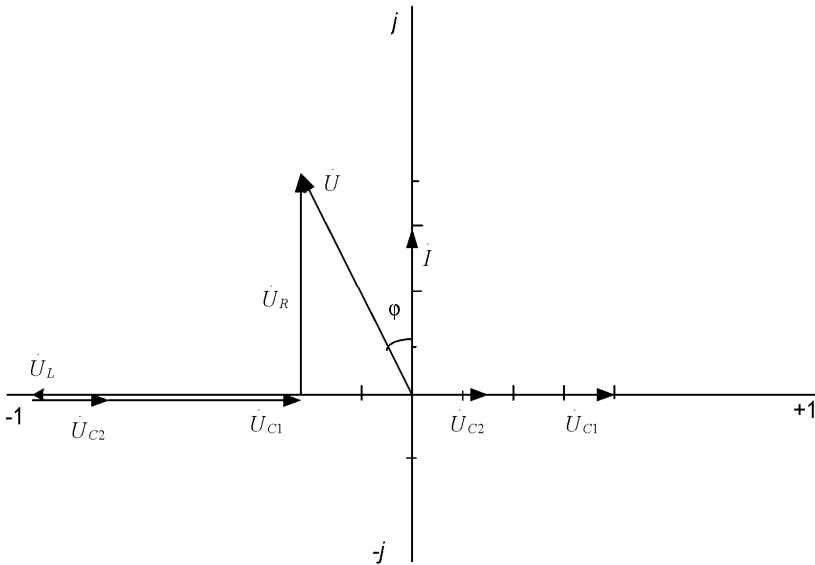


Рис. 3.10

Рассмотрим примеры со смешанным соединением приемников.

Пример 4. Определить значения токов в цепи (рис. 3.11), построить векторную диаграмму токов и напряжений, если $U = 40 \text{ В}$, $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $X_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ Ом}$, $X_2 = 4 \text{ Ом}$, $X_3 = 10 \text{ Ом}$.

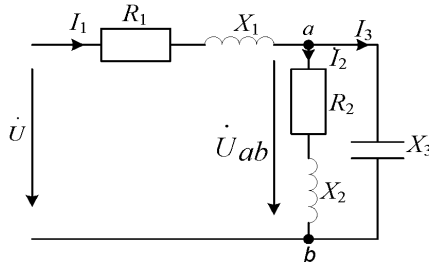


Рис. 3.11

Решение

Принять начальную фазу напряжения $\psi_u = 0$, тогда $\dot{U} = Ue^{j0} = 40$ В. Записать комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 8 + j6 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 3 + j4 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = -jX_3 = -j10 \text{ Ом}.$$

Определить эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи: \underline{Z}_2 и \underline{Z}_3 соединены параллельно, поэтому

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \frac{(3 + j4)(-j10)}{3 + j4 - j10} = \frac{40 - j30}{3 - j6} = \frac{(40 - j30)(3 + j6)}{(3 - j6)(3 + j6)} = \\ &= \frac{120 - j90 + j240 + 180}{3^2 + 6^2} = \frac{300 + j150}{45} = 6,67 + j3,33 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

\underline{Z}_{23} и \underline{Z}_1 соединены последовательно, поэтому

$$\underline{Z}_{\text{эКВ}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 8 + j6 + 6,67 + j3,33 = 14,67 + j9,33 \text{ Ом}.$$

Определить значение тока \dot{I}_1 по закону Ома:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{U} / \underline{Z}_{\text{эКВ}} = \frac{40(14,67 - j9,33)}{(14,67 + j9,33)(14,67 - j9,33)} = \frac{586,8 - j373,2}{14,67^2 + 9,33^2} = \\ &= 1,94 - j1,23 \text{ А}. \end{aligned}$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{1,94^2 + 1,23^2} = 2,3 \text{ А}.$$

Зная значение тока \dot{I}_1 , рассчитать падение напряжения на участке с сопротивлением \underline{Z}_1 :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{I}_1 Z_1 = (1,94 - j1,23)(8 + j6) = \\ &= 15,52 - j9,84 + j11,64 + 7,38 = 22,9 + j1,8 \text{ В.}\end{aligned}$$

Тогда в соответствии со вторым законом Кирхгофа напряжение

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{U}_1 = 40 - 22,9 - j1,8 \text{ В.}$$

Напряжение \dot{U}_{ab} можно определить по закону Ома:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{ab} &= \dot{I}_1 Z_{23} = (1,94 - j1,23)(6,67 + j3,33) = \\ &= 12,94 - j8,2 + j6,46 + 4,1 = 17,04 - j1,74 \text{ В.}\end{aligned}$$

Определить значения токов \dot{I}_2 и \dot{I}_3 :

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= \dot{U}_{ab} / \underline{Z}_2 = \frac{17,04 - j1,74}{3 + j4} = \frac{(17,04 - j1,74)(3 - j4)}{(3 + j4)(3 - j4)} = \\ &= \frac{51,12 - j5,22 - j68,16 - 6,96}{3^2 + 4^2} = \frac{44,16 - j73,38}{25} = 1,77 - j2,94 \text{ А;}\end{aligned}$$

$$I_2 = \sqrt{1,77^2 + 2,94^2} = 3,43 \text{ А;}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_3 &= \dot{U}_{ab} / \underline{Z}_3 = \frac{17,04 - j1,74}{-j10} = \frac{(17,04 - j1,74)j10}{(-j10)j10} = \frac{17,4 + j170,4}{100} = \\ &= 0,17 + j1,7 \text{ А;}\end{aligned}$$

$$I_3 = \sqrt{0,17^2 + 1,7^2} = 1,71 \text{ А.}$$

Проверка:

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$1,94 - j1,23 - 1,77 + j2,94 - 0,17 - j1,7 = 0 + j0,01 \approx 0.$$

Построить векторную диаграмму, откладывая в масштабе на комплексной плоскости векторы токов и напряжений (рис. 3.12).

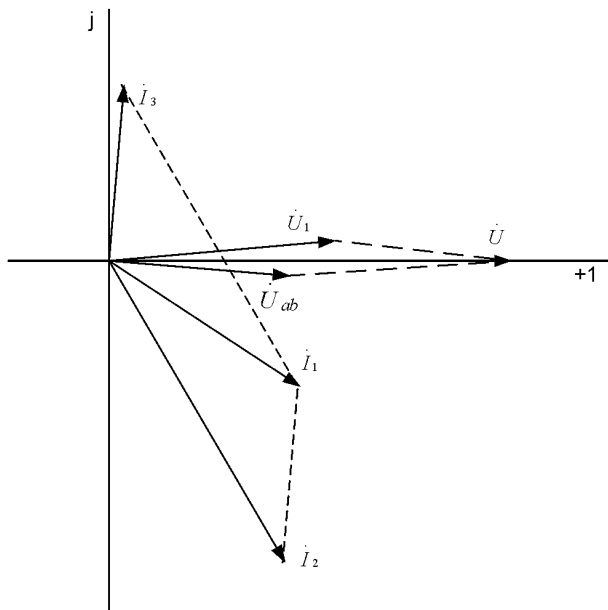


Рис. 3.12

Пример 5. Определить показания вольтметра PV1 (рис. 3.13), если амперметр PA1 показывает ток $I_3 = 10$ А, а $X_C = 5$ Ом, $R_1 = 6$ Ом, $X_L = 8$ Ом, $R_2 = 10$ Ом.

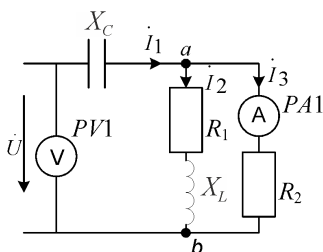


Рис. 3.13

Решение

Принять начальную фазу тока $\psi_{I_3} = 0$, тогда $\dot{I}_3 = I_3 e^{j0} = 10$ А.
 Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = -jX_C = -j5 \text{ Ом}; \underline{Z}_2 = R_1 + jX_L = 6 + j8 \text{ Ом}; \underline{Z}_3 = R_2 = 10 \text{ Ом}.$$

Напряжение на участке с параллельным соединением ветвей

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_3 Z_3 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ В.}$$

По закону Ома значение тока

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_{ab} / Z_2 = \frac{100}{6 + j8} = \frac{100(6 - j8)}{(6 + j8)(6 - j8)} = \frac{600 - j800}{6^2 + 8^2} = 6 - j8 \text{ А.}$$

По первому закону Кирхгофа значение тока на неразветвленном участке

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 6 - j8 + 10 = 16 - j8 \text{ А.}$$

Тогда значения напряжений:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_1 = (16 - j8)(-j5) = -40 - j80 \text{ В;}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab} = -40 - j80 + 100 = 60 - j80 \text{ В.}$$

Действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ В.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить показание амперметра в цепи (рис. 3.14), построить векторную диаграмму тока и напряжений, если $u = 311,1 \sin 314t$ В; $R = 60$ Ом; $L = 318$ мГн; $C = 159$ мкФ. Задачу решить комплексным методом.

Ответ: $I = 2,2$ А.

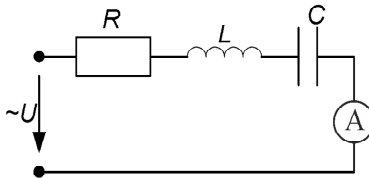


Рис. 3.14

2. В цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора ($C = 50$ мкФ) и катушки ($L = 10$ мГн, $R = 10$ Ом), значение тока $i = 0,2\sin 1000t$ А. Найти мгновенные значения напряжения на конденсаторе, катушке и всей цепи. Задачу решить комплексным методом.

Ответ: $u_C = 4\sin(1000t - 90^\circ)$ В; $u_K = 2,83\sin(1000t + 45^\circ)$ В; $u = 2,83\sin(1000t - 45^\circ)$ В.

3. В цепи (рис. 3.15) протекающий ток отстает от приложенного к цепи напряжения на 45° ; $R = 50$ Ом; $C = 3,18$ мкФ; $f = 500$ Гц. Определить значения индуктивности L , приложенного напряжения \dot{U}_{ac} и тока в цепи \dot{I} , если $\dot{U}_{av} = 315$ В. Записать выражение для комплексного сопротивления цепи.

Ответ: $L = 47,6$ мГн; $\dot{U}_{ac} = 141e^{-j26,5^\circ}$ В; $\underline{Z} = 50\sqrt{2}e^{j45^\circ}$ Ом.

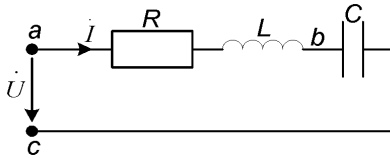


Рис. 3.15

4. В цепи (рис. 3.16) при разомкнутом выключателе сдвиг фаз между напряжением \dot{U} и током \dot{I} составляет $\varphi_1 = 60^\circ$. Найти сдвиг фаз между ними при замкнутом выключателе.

Ответ: $\varphi_2 = 41^\circ$.

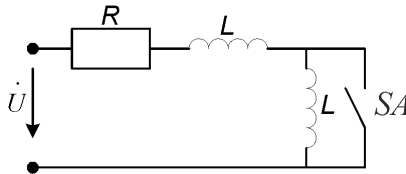


Рис. 3.16

5. Определить значения комплексных токов в цепи (рис. 3.17) и построить векторную диаграмму токов и напряжений, если $U = 100$ В; $R_1 = 6$ Ом; $X_1 = 8$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $X_2 = 7$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $X_3 = 2$ Ом.

Ответ: $\dot{I}_1 = 7,1 - j5,5$ А; $\dot{I}_2 = -2,36 - j3,05$ А; $\dot{I}_3 = 9,38 - j2,66$ А.

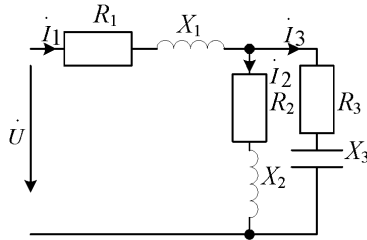


Рис. 3.17

6. В цепи (рис. 3.18) $R = 10$ Ом; $L = 5,97$ мГн; $C = 33,2$ мкФ. На входе цепи приложено напряжение $U = 100$ В, частота 400 Гц. Считая начальную фазу напряжения на входе равной нулю, определить комплексные токи ветвей.

Ответ: $\dot{I}_1 = 9,88e^{j46,78^\circ}$ А; $\dot{I}_2 = 8,32e^{j80,47^\circ}$ А; $\dot{I}_3 = 5,49e^{-j9,53^\circ}$ А.

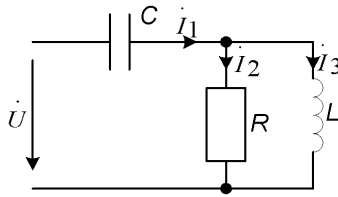


Рис. 3.18

7. Амперметр, включенный в неразветвленную часть цепи (рис. 3.19), показал ток $I = 2,4$ А, а вольтметр – напряжение $U = 120$ В. Определить индуктивное сопротивление X_{L1} , если $R_1 = 7$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $X_{L2} = 30$ Ом; $R_3 = 10$ Ом; $X_C = 20$ Ом.

Ответ: $X_{L1} = 51$ Ом.

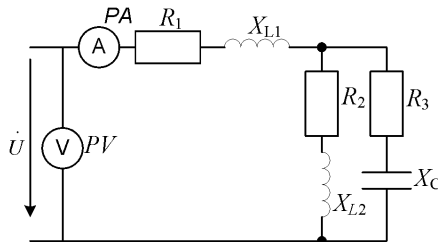


Рис. 3.19

Индивидуальные задания

1. Для заданной цепи определить указанные величины согласно варианту (табл. 3.2) и построить векторную диаграмму тока и напряжений. Расчет выполнить комплексным методом.

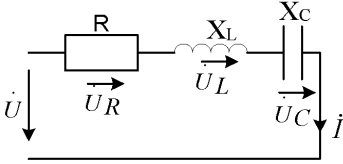


Рис. 3.20

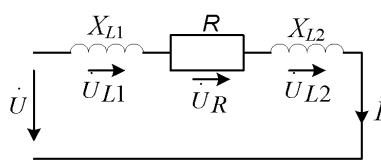


Рис. 3.21

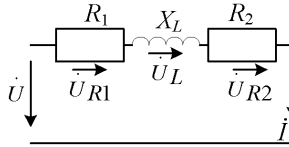


Рис. 3.22

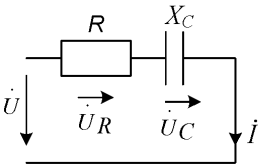


Рис. 3.23

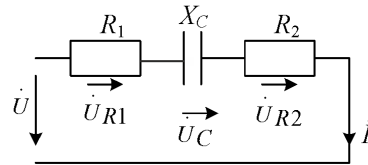


Рис. 3.24

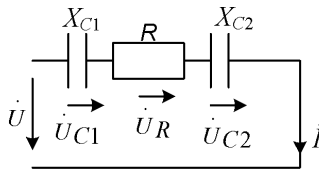


Рис. 3.25

Таблица 3.2

| Но- мер вари- анта | Дано | Рису- нок | Определить |
|-----------------------------|---|--------------|--------------------------|
| 1 | $U = 100 \text{ В}; R = 8 \text{ Ом}; X_L = 10 \text{ Ом}; X_C = 4 \text{ Ом}$ | 3.20 | $I; U_R; U_L; U_C$ |
| 2 | $I = 8 \text{ А}; X_{L1} = 2 \text{ Ом}; X_{L2} = 4 \text{ Ом}; R = 8 \text{ Ом}$ | 3.21 | $U; U_R; U_{L1}; U_{L2}$ |

| Номер варианта | Дано | Рисунки | Определить |
|----------------|---|---------|-----------------------------|
| 3 | $U = 100 \text{ В}; R_1 = 2 \text{ Ом}; R_2 = 4 \text{ Ом}; X_L = 8 \text{ Ом}$ | 3.22 | $I; U_{R1}; U_{R2}; U_L$ |
| 4 | $U_R = 100 \text{ В}; R = 20 \text{ Ом}; X_C = 15 \text{ Ом}$ | 3.233 | $I; U; U_C$ |
| 5 | $U = 40 \text{ В}; R_1 = 11 \text{ Ом}; R_2 = 5 \text{ Ом}; X_L = 12 \text{ Ом}$ | 3.24 | $I; U_{R1}; U_{R2}; U_C$ |
| 6 | $I = 2 \text{ А}; R = 8 \text{ Ом}; X_L = 12 \text{ Ом}; X_C = 6 \text{ Ом}$ | 3.20 | $U; U_R; U_L; U_C$ |
| 7 | $I = 2 \text{ А}; R = 12 \text{ Ом}; X_{C1} = 10 \text{ Ом}; X_{C2} = 6 \text{ Ом}$ | 3.25 | $U; U_R; U_{C1}; U_{C2}$ |
| 8 | $U = 60 \text{ В}; R = 3 \text{ Ом}; X_{L1} = 1 \text{ Ом}; X_{L2} = 3 \text{ Ом}$ | 3.21 | $I; U_R; U_{L1}; U_{L2}$ |
| 9 | $I = 5 \text{ А}; R_1 = 7 \text{ Ом}; R_2 = 5 \text{ Ом}; X_L = 16 \text{ Ом}$ | 3.22 | $U; U_{R1}; U_{R2}; U_L$ |
| 10 | $U_C = 40 \text{ В}; R = 6 \text{ Ом}; X_C = 8 \text{ Ом}$ | 3.23 | $I; U; U_R$ |
| 11 | $I = 10 \text{ А}; R_1 = 5 \text{ Ом}; R_2 = 3 \text{ Ом}; X_C = 6 \text{ Ом}$ | 3.24 | $U; U_{R1}; U_{R2}; U_C$ |
| 12 | $U = 50 \text{ В}; R = 8 \text{ Ом}; X_{C1} = 2 \text{ Ом}; X_{C2} = 4 \text{ Ом}$ | 3.25 | $I; U_R; U_{C1}; U_{C2}$ |
| 13 | $U = 80 \text{ В}; R = 8 \text{ Ом}; X_{L1} = 2 \text{ Ом}; X_{L2} = 4 \text{ Ом}$ | 3.21 | $I; U; U_{L1}; U_{L2}$ |
| 14 | $U_R = 20 \text{ В}; R = 4 \text{ Ом}; X_L = 7 \text{ Ом}; X_C = 4 \text{ Ом}$ | 3.20 | $I; U; U_L; U_C$ |
| 15 | $U_{C2} = 60 \text{ В}; R = 12 \text{ Ом}; X_{C1} = 10 \text{ Ом}; X_{C2} = 6 \text{ Ом}$ | 3.25 | $I; U; U_R; U_{C1}; U_{C2}$ |

2. К источнику с синусоидальным напряжением U подключена цепь со смешанным соединением сопротивлений Z_1, Z_2, Z_3 (табл. 3.3). Нарисовать схему цепи, обозначить токи и напряжения в ней. Определить значение тока в неразветвленной части цепи.

Таблица 3.3

| Номер варианта | $U, \text{ В}$ | $Z_1, \text{ Ом}$ | $Z_2, \text{ Ом}$ | $Z_3, \text{ Ом}$ |
|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | 50 | $2,8 + j2,1$ | $1 + j2$ | 3 |
| 2 | 400 | $8 - j29$ | $10 + j20$ | 30 |
| 3 | 10 | $0,4 - j0,8$ | 1 | $1 - j$ |
| 4 | 80 | $0,9 + j0,3$ | j | $1 + j2$ |
| 5 | 100 | $2,6 + j2,8$ | $2 + j2$ | $j2$ |
| 6 | 200 | $0,2 + j0,6$ | $1 + j$ | 2 |
| 7 | 20 | $0,8 + j0,4$ | $1 + j$ | j |
| 8 | 200 | $9 + j3$ | $j10$ | $10 + j20$ |
| 9 | 100 | $1 - j3$ | $-j5$ | $4 + j2$ |
| 10 | 500 | $10 - j30$ | $40 + j20$ | $-j50$ |

| Номер варианта | U , В | Z_1 , Ом | Z_2 , Ом | Z_3 , Ом |
|----------------|---------|--------------|------------|------------|
| 11 | 100 | $2,6 - j2,8$ | $2 - j2$ | $-j2$ |
| 12 | 50 | $1 - j3$ | $4 + j2$ | $-j5$ |
| 13 | 80 | $0,9 + j0,3$ | j | $1 + j2$ |
| 14 | 200 | $10 - j30$ | $-j30$ | $40 + j20$ |
| 15 | 500 | $26 - j28$ | $20 - j20$ | $-j20$ |

Контрольные вопросы

1. Чему равно индуктивное сопротивление?
2. Чему равно емкостное сопротивление?
3. Что означает реактивное сопротивление?
4. Что такое комплексное сопротивление?
5. Что означает полное сопротивление?
6. Что такое треугольник сопротивлений?
7. Что такое угол φ ? Как он определяется?
8. Как записывается закон Ома в комплексной форме?
9. Какой угол сдвига по фазе между напряжением и током на R , L , C ?
10. Как строится векторная диаграмма тока и напряжений?
11. Каков порядок расчета цепи переменного тока со смешанным соединением?
12. Почему расчет цепи переменного тока ведут в комплексной форме?

3.3. Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока.

Мощности в цепи синусоидального тока

Цель: научиться составлять уравнения по законам Кирхгофа в дифференциальной и комплексной формах; приобрести практические навыки по расчету сложных цепей методами уравнений Кирхгофа, контурных токов, двух узлов, эквивалентного генератора, по определению мощности цепи.

А. Расчет сложных электрических цепей синусоидального тока методом уравнений Кирхгофа

Методические рекомендации

С помощью уравнений Кирхгофа проводят расчет сложных цепей как постоянного, так и синусоидального токов.

Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме: алгебраическая сумма мгновенных токов в узле равна нулю ($\sum i = 0$).

Второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме: алгебраическая сумма мгновенных ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме мгновенных напряжений на остальных элементах этого контура ($\sum e = \sum u$).

Для цепей синусоидального тока законы Кирхгофа записываются в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю ($\sum \dot{I} = 0$).

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексных ЭДС замкнутого контура равна алгебраической сумме комплексных напряжений на пассивных элементах этого контура ($\sum \dot{E} = \sum \dot{U}$).

Порядок составления системы уравнений по законам Кирхгофа:

1. Произвольно задать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме. Эти направления нельзя менять до окончания расчета.

2. Произвольно задать положительные направления обхода контуров и указать их на схеме. Направления обхода всех контуров рекомендуется принять одинаковыми.

3. Записать уравнения по первому закону Кирхгофа. Число уравнений должно быть на единицу меньше, чем число узлов.

4. Составить уравнения по второму закону Кирхгофа. Число этих уравнений вместе с уравнениями, составленными по первому закону Кирхгофа, должно равняться числу ветвей. Чтобы уравнения были независимыми, каждый контур, для которого составляется уравнение по второму закону Кирхгофа, должен отличаться от предыдущих хотя бы одной новой ветвью. Это условие является достаточным, но не всегда необходимым.

5. Решить систему уравнений и найти значения токов в ветвях.

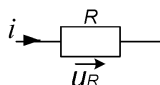
Примечания:

1. При составлении независимых уравнений по второму закону Кирхгофа не включают ветви, содержащие источники тока.

2. При составлении уравнений по законам Кирхгофа в дифференциальной форме соотношения между мгновенными значениями токов и напряжений на элементах цепи R, L, C следующие:

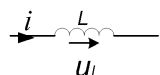
а) $u_R = iR;$

$i = \frac{u_R}{R};$



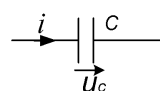
б) $u_L = L \frac{di}{dt};$

$i = \frac{1}{L} \int u_L dt;$



в) $u_C = \frac{1}{C} \int idt;$

$i = C \frac{du_C}{dt}.$



Расчет методом уравнений Кирхгофа

Пример 1. Определить значения токов в ветвях электрической цепи синусоидального тока (рис. 3.26), используя законы Кирхгофа, если $\dot{E}_1 = 100 \text{ В}; \dot{E}_2 = 200 \text{ В}; R_1 = X_{C1} = 10 \text{ Ом}; R_2 = X_{C2} = 5 \text{ Ом}.$

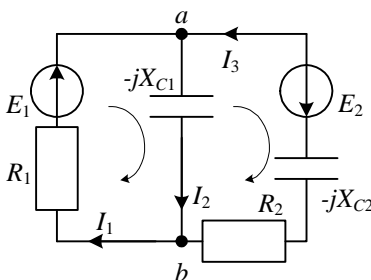


Рис. 3.26

Решение

1. Обозначить токи на схеме.
2. Задать направление обхода по контурам.
3. Составить систему уравнений, используя два закона Кирхгофа, в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_3 - \dot{I}_2 = 0 & \text{для узла } a; \\ \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_2 (-jx_{C1}) = \dot{E}_1; \\ -\dot{I}_2 (-jx_{C1}) - \dot{I}_3 (R_2 - jx_{C2}) = \dot{E}_2. \end{cases}$$

4. Подставить в систему уравнений известные величины:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ 10\dot{I}_1 + \dot{I}_2 (-j10) = 100; \\ -\dot{I}_2 (-j10) - \dot{I}_3 (5 - j5) = 200. \end{cases}$$

Упростить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ \dot{I}_1 - j\dot{I}_2 = 10; \\ j2\dot{I}_2 + \dot{I}_3 (j-1) = 40. \end{cases}$$

5. Решить полученную систему уравнений методом определителей:

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 2j & (j-1) \end{vmatrix} = -j(j-1) + j-1 + 2j = 4j.$$

Раскрыть определитель:

$$\underline{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 10 & -j & 0 \\ 40 & 2j & j-1 \end{vmatrix} = 10(j-1) + 20j + 40j = 70j - 10;$$

$$\underline{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 40 & j-1 \end{vmatrix} = 10(j-1) + 40 = 30 + 10j;$$

$$\underline{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -j & 10 \\ 0 & 2j & 40 \end{vmatrix} = -j40 - j20 + 40 = 40 - 60j \text{ В} \cdot \text{Ом}^2;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{70j-10}{4j} = \frac{(70j-10)(-j)}{4} = \frac{70+10j}{4} = 17,5 + 2,5j \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{30+10j}{4j} = \frac{-30j+10}{4} = 2,5 - 7,5j \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{40-60j}{4j} = -10j - 15 \text{ А}.$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{17,5^2 + 2,5^2} = 17,6 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{2,5^2 + 7,5^2} = 7,9 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{10^2 + 15^2} = 18,03 \text{ А}.$$

Систему уравнений можно решить методом исключения переменных. Из второго уравнения системы

$$\dot{I}_1 = 10 + j\dot{I}_2.$$

Выражение \dot{I}_1 подставить в первое уравнение системы уравнений:

$$10 + j\dot{I}_2 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0;$$

откуда

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_2 - j\dot{I}_2 - 10.$$

Выражение тока \dot{I}_3 подставить в третье уравнение системы и получить уравнение с одним неизвестным \dot{I}_2 :

$$j2\dot{I}_2 + (j-1)(\dot{I}_2 - j\dot{I}_2 - 10) = 40;$$

$$j2\dot{I}_2 + j\dot{I}_2 - \dot{I}_2 + \dot{I}_2 + \dot{I}_2 j - 10j + 10 = 40;$$

$$4j\dot{I}_2 - 10j = 30;$$

$$\dot{I}_2 = \frac{30 + j10}{4j} = 2,5 - 7,5j \text{ A.}$$

Следовательно:

$$\dot{I}_1 = 10 + j(2,5 - 7,5j) = 10 + 2,5j + 7,5 = 17,5 + 2,5j \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= 2,5 - 7,5j - j(2,5 - 7,5j) - 10 = \\ &= 2,5 - 7,5j - 2,5j - 7,5 - 10 = -15 - 10j \text{ A.} \end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения

Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.27), используя законы Кирхгофа, если $e_1 = e_2 = 141\sin\omega t$ В; $X_1 = 5$ Ом; $X_2 = 20$ Ом; $R = 3$ Ом.

Ответ: $I_1 = 16$ А; $I_2 = 4$ А; $I_3 = 20$ А.

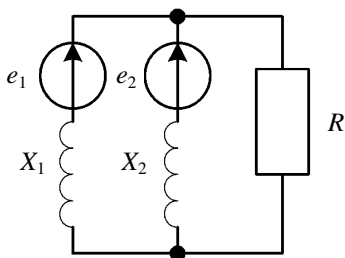


Рис. 3.27

Б. Расчет методом контурных токов

Методические рекомендации

Метод контурных токов основан на предположении, что в каждом независимом контуре протекает свой контурный ток. Контурный ток – это искусственный ток. Для определения контурных токов составляются уравнения по второму закону Кирхгофа.

Порядок определения токов методом контурных токов:

1. Произвольно задать положительные направления токов в ветвях и обозначить их на схеме.

2. Произвольно задать положительные направления контурных токов и обозначить их на схеме. Направление контурных токов соответствует направлению обхода по контуру.

3. Составить систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контуров.

4. Решив систему, определить значения контурных токов.

5. Определить действительные значения токов в ветвях алгебраической суммой соответствующих значений контурных токов, проходящих по данной ветви.

Положительными считаются контурные токи, направление которых совпадают с выбранным в начале расчета положительным направлением тока данной ветви.

Примечание. Если электрическая цепь содержит источник тока, подсоединенный к каким-либо узлам (m и n), то считают, что ток источника тока – контурный ток, проходящий по ветвям, соединяющим узлы m и n .

В уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа для контуров, включающих эти ветви, должно быть учтено падение напряжения от тока источника тока.

Пример 2. В цепи (рис. 3.28) определить значения токов в ветвях методом контурных токов, если $R_1 = R_2 = 5 \text{ Ом}$; $X_{C1} = 5 \text{ Ом}$; $X_{C2} = 10 \text{ Ом}$; $X_{L3} = 10 \text{ Ом}$; $E_1 = 100 \text{ В}$; $E_3 = 200 \text{ В}$.

Решение

Воспользовавшись изложенной методикой расчета, представить, что по ветвям двух независимых контуров циркулируют контурные

токи I_{11} и I_{22} , как показано на рис. 3.28. Задав направление обхода контуров по часовой стрелке, т. е. аналогичное направлению контурных токов, составить систему уравнений по второму закону Кирхгофа в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(R_1 - jX_{C1} - jX_{C2}) - \dot{I}_{22}(-jX_{C2}) = \dot{E}_1; \\ -\dot{I}_{11}(-jX_{C2}) + \dot{I}_{22}(R_3 + jX_{L3} - jX_{C2}) = \dot{E}_3. \end{cases}$$

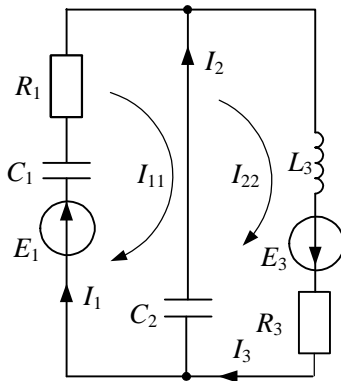


Рис. 3.28

Подставить известные величины сопротивлений и ЭДС:

$$\begin{cases} (5 - j5)\dot{I}_{11} + j10\dot{I}_{22} = 100; \\ j10\dot{I}_{11} + 5\dot{I}_{22} = 200. \end{cases}$$

Решив систему, получить значения контурных токов:

$$\dot{I}_{11} = 10 - j10 \text{ A}; \quad \dot{I}_{22} = 20 - j20 \text{ A}.$$

Для нахождения действительных значений токов в ветвях задать им положительные направления и обозначить их на схеме (см. рис. 3.28). Тогда

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} = 10 - j10 \text{ A}; \quad I_1 = 14,14 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{11} = 20 - j20 - 10 + j10 = 10 - j10 \text{ A}; \quad I_2 = 14,14 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{22} = 20 - j20 \text{ A}; \quad I_3 = 28,28 \text{ A}.$$

Задача для самостоятельного решения

Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.29) методом контурных токов, если $e_1 = 141 \sin \omega t$ В, $e_2 = 141 \sin \omega t$ В, $X_1 = 5$ Ом, $X_2 = 20$ Ом, $R = 3$ Ом.

Ответ: $I_1 = 16$ А; $I_2 = 4$ А; $I_3 = 20$ А.

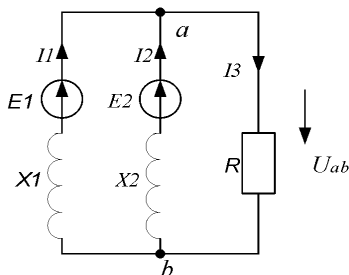


Рис. 3.29

В. Расчет методом двух узлов

Методические рекомендации

Метод двух узлов применяется в том случае, если электрическая цепь содержит только два узла.

Порядок расчета:

1. Задать условное положительное направление напряжения между узлами a и b (от a к b).
2. Определить напряжение между двумя узлами согласно формуле

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k Y_k \pm \sum I_k}{\sum Y_k}.$$

Если ЭДС в какой-либо ветви будет отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе отсутствует, но проводимость этой ветви в знаменателе остается.

Если направление ЭДС в ветви совпадает с заданным направлением напряжения между двумя узлами, то она войдет в формулу со знаком минус, в противном случае – со знаком плюс.

Если направление тока источника тока \dot{J}_k совпадает с заданным положительным направлением напряжения \dot{U}_{ab} , то в формулу его значение войдет со знаком минус, в противном случае – со знаком плюс.

3. Задать положительное направление токов в ветвях и обозначить их на схеме.

4. Определить значения токов в ветвях по закону Ома для участка цепи с ЭДС

$$\dot{I}_k = \frac{\pm \dot{U}_{ab} \pm \dot{E}_k}{\underline{Z}} = (\pm \dot{U}_{ab} \pm \dot{E}_k) \underline{Y}_k.$$

Знак плюс перед \dot{U}_{ab} и перед \dot{E}_k ставится в том случае, если направление напряжения и ЭДС и положительное направление тока \dot{I}_k совпадают.

Пример 3. Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.30, а) методом двух узлов, если $e_1 = 141 \cos(\omega t - 120^\circ)$ В, $e_2 = 169,2 \sin \omega t$ В, $X_L = 5$ Ом, $X_C = 10$ Ом, $R = 2$ Ом.

Решение

Записать ЭДС и сопротивления ветвей в комплексной форме:

$$\dot{E}_1 = 100e^{-j30^\circ} \text{ В}; \quad \dot{E}_2 = 120 \text{ В}; \quad \underline{Z}_1 = j5 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = 2 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_3 = -j10 \text{ Ом}.$$

Положительные направления токов в ветвях направить к узлу a . Определить комплексные проводимости ветвей:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{j5} = -j0,2 \text{ См}; \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-j10} = j0,1 \text{ См}.$$

Значение напряжения между узлами a и b схемы

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \frac{\sum \dot{E}_k \underline{Y}_k}{\sum \underline{Y}_k} = \frac{\dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \\ &= \frac{100e^{-j30^\circ} \cdot 0,2e^{-j90^\circ} + 100 \cdot 0,5}{-j0,2 + 0,5 + j0,1} = 104e^{-j8^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Значения токов:

$$I_1 = \frac{-\underline{U}_{ab} + \dot{E}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{-104e^{-j8} + 100e^{-j30^\circ}}{j5} = 7,82e^{j155^\circ 30'}$$
 А;

$$I_2 = \frac{-\underline{U}_{ab} + \dot{E}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{-104e^{-j8} + 120}{2} = 11,17e^{j40^\circ 25'}$$
 А;

$$I_3 = \frac{-\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{-104e^{-j8}}{-10e^{j90^\circ}} = 10,4e^{-j98^\circ}$$
 А.

Задача для самостоятельного решения

Определить значения токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.30, б), если $e_1 = 141\sin\omega t$ В, $e_2 = 282\sin\omega t$ В, $L = 10$ мГн, $\omega = 100$ рад/с, $C = 100$ мкФ, $R = 10$ Ом.

Ответ: $I_1 = 31,6$ А; $I_2 = 10$ А; $I_3 = 22,7$ А.

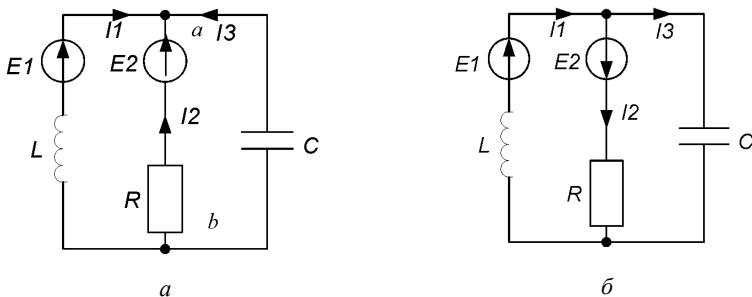


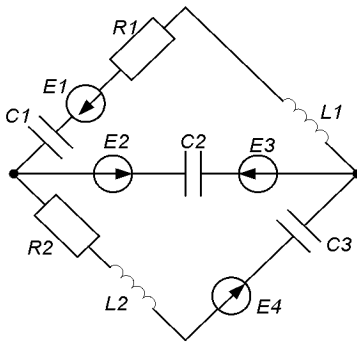
Рис. 3.30

Индивидуальное задание

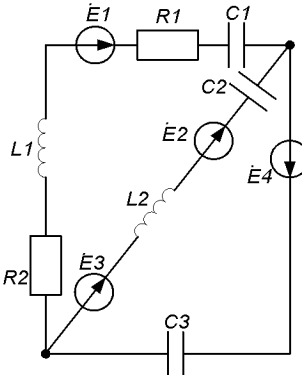
В электрических цепях синусоидального тока (рис. 3.31–3.36) заданы комплексы ЭДС и параметры цепи R , L , C .

1. Вычертить схему электрической цепи согласно заданному варианту с учетом примечания (табл. 3.4).

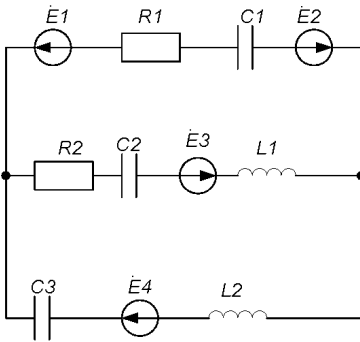
2. Определить выражения токов ветвей через заданные величины, используя метод двух узлов.



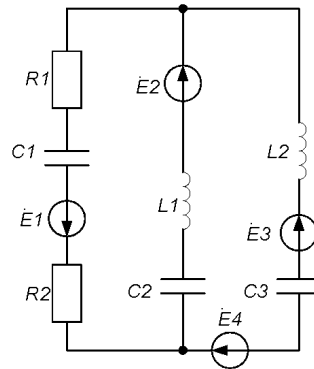
Puc. 3.31



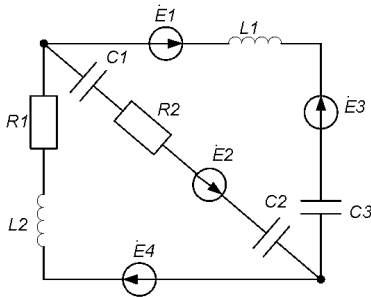
Puc. 3.32



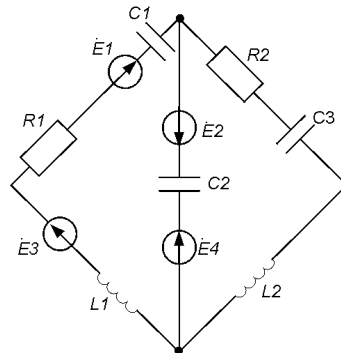
Puc. 3.33



Puc. 3.34



Puc. 3.35



Puc. 3.36

Таблица 3.4

| | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|---------|------|--------------------|------|------|--------------------|------|--------------------|-------------------------------|------|--------------------|------|--------------------|--------------------|
| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| Рисунок | 3.31 | 3.32 | 3.33 | 3.34 | 3.35 | 3.36 | 3.31 | 3.32 | 3.33 | 3.34 | 3.35 | 3.36 | 3.31 | 3.32 |
| Примечание | $E_1=0$ | | $E_3=0$ $L_2=0$ | | | $E_1=0$ $L_1=0$ | | $E_4=0$ $L_1=0$ | $E_2=0$ $L_1=0$ $R_1=0$ | | $E_2=0$ $E_3=0$ | | $E_4=0$ $R_1=0$ | $E_1=0$ $L_2=0$ |

Г. Расчет методом эквивалентного генератора

Методические рекомендации

Метод эквивалентного генератора применяют в том случае, когда необходимо определить значение тока в одной ветви электрической цепи. Суть метода заключается в том, что часть схемы, за исключением ветви ab , где необходимо определить значение тока I , заменяют эквивалентным генератором (активным двухполюсником) с ЭДС U_{abxx} и внутренним сопротивлением $Z_{вх}$.

Порядок расчета:

1. Определить входное сопротивление $Z_{вх}$ всей цепи относительно узлов a и b , к которым подключена ветвь ab с искомым током I . Саму ветвь ab с сопротивлением Z_{ab} удалить из схемы, а источники ЭДС закоротить, оставив их внутренние сопротивления.

При определении входного сопротивления $Z_{вх}$ может встретиться соединение сопротивлений по схеме «звезда» или «треугольник». Для эквивалентного преобразования нужно использовать формулы перехода от трехлучевой звезды к треугольнику

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3};$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1};$$

$$Z_{13} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}.$$

и формулы перехода от треугольника к трехлучевой звезде

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{13} \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{13} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}}.$$

2. Определить значение напряжения на зажимах разомкнутой ветви ab . Для этого рассчитать значения токов в цепи с разомкнутой ветвью ab любым из методов и затем записать уравнение по второму закону Кирхгофа для контура, проходящего через узлы a и b . Из этого уравнения найти напряжение U_{abxx} (напряжение холостого хода).

3. Определить значение тока в ветви ab согласно формулам (положительное направление тока I такое же, как и напряжение U_{abxx} – от узла a к узлу b):

$$I = \frac{U_{abxx}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bx}};$$

$$I = \frac{U_{abxx} \pm E}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bx}}.$$

Знак плюс ставят в том случае, если направление ЭДС совпадает с направлением напряжения U_{abxx} , знак минус – если направление не совпадает.

Пример 4. Определить показание амперметра методом эквивалентного генератора для электрической цепи (рис. 3.37), если $E_1 = 100$ В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $X_{C1} = 10$ Ом, $E_2 = 200$ В, $X_L = 10$ Ом, $X_{C2} = 10$ Ом.

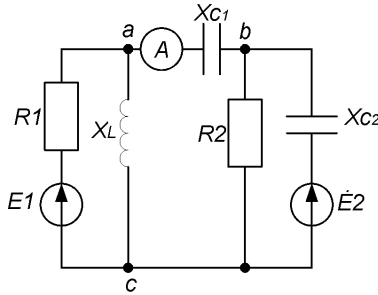


Рис. 3.37

Решение

1. Определить значение $\underline{Z}_{\text{вх}}$ относительно узлов a и b :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{R_1 jX_L}{R_1 + jX_L} + \frac{R_2 (-jX_{C2})}{R_2 - jX_{C2}} = \frac{10(+j10)}{10 + j10} + \frac{10(-j10)}{10 - j10} = \\ &= \frac{10j}{1+j} + \frac{-j10}{1-j} = \frac{10j(1-j)}{2} + \frac{-10j(1+j)}{2} = 5j + 5 - 5j + 5 = 10 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Определить значения $\dot{I}_{1\text{xx}}$ и $\dot{I}_{2\text{xx}}$ (рис. 3.38):

$$\dot{I}_{1\text{xx}} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + jX_L} = \frac{100}{10 + j10} = \frac{10(1-j)}{2} = 5 - 5j \text{ A};$$

$$\dot{I}_{2\text{xx}} = \frac{\dot{E}_{21}}{R_2 - jX_{C2}} = \frac{200}{10 - j10} = \frac{20(1+j)}{2} = 10 + j10 \text{ A.}$$

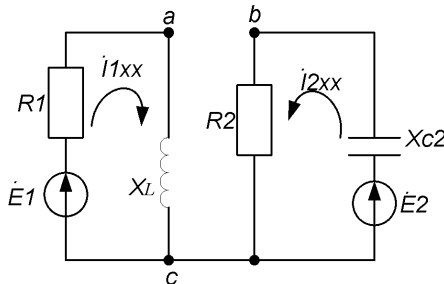


Рис. 3.38

2. Определить значение U_{abxx} , используя второй закон Кирхгофа:

$$-I_{1xx} jX_L + \dot{U}_{abxx} + I_{2xx} R_2 = 0;$$

$$\dot{U}_{abxx} = I_{1xx} jX_L - I_{2xx} R_2 = (5 - j5)j10 - (10 + j10)10 = -50 - 50j \text{ В.}$$

Определить показание амперметра, т. е. значение тока I :

$$I = \frac{\dot{U}_{abxx}}{\underline{Z}_{BX} + \underline{Z}_{ab}} = \frac{-50 - 50j}{10 - j10} = \frac{(-5 - 5j)(1 + j)}{2} = \frac{-5 - 5j - 5j + 5}{2} = -5j \text{ А};$$

$$I = 5 \text{ А.}$$

Задача для самостоятельного решения

Определить значение тока в ветви ab (рис. 3.39), если $R_1 = R_2 = X_1 = X_2 = X_3 = 10 \text{ Ом}$; $E = 100 \text{ В}$.

Ответ: $I_{ab} = 10 \text{ А}$.

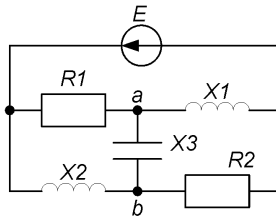


Рис. 3.39

Д. Расчет мощностей в цепи синусоидального тока

Методические рекомендации

Активную P , реактивную Q и полную S мощности рассчитывают по формулам:

$$P = UI \cos \varphi = I^2 R;$$

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 X;$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2 Z.$$

Комплексная мощность $\underline{S} = \dot{U} I^* = P + jQ$.

Коэффициент мощности $\cos\varphi = \frac{P}{S}$.

Треугольник мощностей (рис. 3.40):

$$P = S \cos\varphi;$$

$$Q = S \sin\varphi = P \operatorname{tg}\varphi.$$

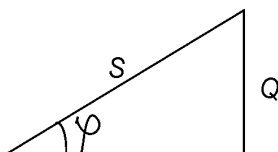


Рис. 3.40

Пример 5. К последовательно соединенным реостату с сопротивлением 120 Ом и конденсатору $C = 30$ мкФ подведено напряжение $u = 311 \sin 314t$ (рис. 3.41). Определить активную, реактивную и полную мощности и коэффициент мощности в данной цепи.

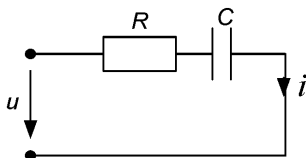


Рис. 3.41

Решение

Действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ В.}$$

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ Ом.}$$

Действующее значение тока

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{160} = 1,37 \text{ А.}$$

Из треугольника сопротивлений коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{120}{160} = 0,75.$$

Активная мощность

$$P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 1,37 \cdot 0,75 = 226 \text{ Вт.}$$

Из треугольника сопротивлений

$$\sin \varphi = \frac{X}{Z} = -\frac{106}{160} = -0,66.$$

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 1,37(-0,66) = -198,9 \text{ вар.}$$

Значение реактивной мощности отрицательное, т. к. отрицательно значение реактивного сопротивления для данной цепи $X = X_L - X_C$ ($X_L = 0$).

Полная мощность

$$S = UI = 220 \cdot 1,37 = 301,4 \text{ ВА.}$$

Пример 6. В цепи установлены сварочный аппарат мощностью $P_1 = 6$ кВт при $\cos \varphi_1 = 0,5$, электрический двигатель $P_2 = 12$ кВт при $\cos \varphi_2 = 0,8$ и батарея конденсаторов мощностью $Q_C = 10$ квар при $\cos \varphi_3 = 0$. Напряжение цепи $U = 220$ В. Определить $\cos \varphi$ всей цепи и значение общего тока I .

Решение

Для определения коэффициента мощности всей цепи использовать выражение $\cos \varphi = \frac{P}{S}$, где активная мощность всей цепи $P = P_1 + P_2 = 6 + 12 = 18$ кВт, полная мощность всей цепи $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Рассчитать значения реактивных мощностей потребителей:

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1;$$

$$\varphi_1 = \arccos 0,5 = 60^\circ;$$

$$Q_1 = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6 \cdot 1,73 = 10,4 \text{ квар};$$

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 12 \operatorname{tg} 37^\circ = 12 \cdot 0,75 = 9 \text{ квар};$$

$$\varphi_2 = \arccos 0,8 = 37^\circ.$$

Реактивная мощность всей цепи

$$Q = Q_1 + Q_2 - Q_C = 10,4 + 9 - 10 = 9,4 \text{ квар}.$$

Значение реактивной мощности батареи конденсаторов взято со знаком минус, т. к. для емкости $\varphi = -90^\circ$ и $Q = UI \sin \varphi < 0$.

Полная мощность всей цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{18^2 + 9,4^2} = 20,3 \text{ кВА}.$$

Коэффициент мощности всей цепи

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{18}{20,3} = 0,886.$$

Значение общего тока найти из выражения полной мощности $S = UI$:

$$I = \frac{S}{U} = \frac{20 \cdot 300}{220} = 92,2 \text{ А}.$$

Пример 7. Определить показание ваттметра в электрической цепи (рис. 3.42), если $U = 100 \text{ В}$; $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 20 \text{ Ом}$; $X_1 = 14 \text{ Ом}$; $X_2 = 20 \text{ Ом}$; $X_3 = 30 \text{ Ом}$.

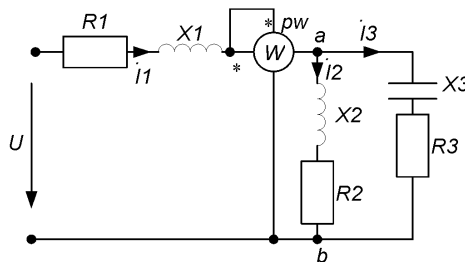


Рис. 3.42

Решение

Показание ваттметра $P_w = U_w I_w \cos \angle(\dot{U}_w \dot{I}_w)$, где U_w – напряжение, к которому подключен ваттметр; I_w – ток, проходящий через ваттметр; $\angle(\dot{U}_w \dot{I}_w)$ – угол сдвига фаз напряжения и тока. Следовательно, для определения показания ваттметра, включенного по схеме рис. 3.42, нужно определить значения напряжения U_{ab} , тока I_1 и сдвиг фаз между ними.

Так как электрическая цепь имеет смешанное соединение сопротивлений, расчет ведется в комплексной форме.

Сопротивление ветвей, соединенных параллельно:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{(R_2 + jX_2)(R_3 - jX_3)}{R_2 + jR_2 + R_3 - jX_3} = \frac{(10 + j20)(20 - j30)}{10 + j20 + 20 - j30} = 23 + j11 \text{ Ом.}$$

Общее сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{\text{эКВ}} = R_1 + jX_1 + \underline{Z}_{23} = 2 + j14 + 23 + j11 = 25 + j25 \text{ Ом.}$$

Значение тока на входе цепи, проходящего через ваттметр:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{\text{эКВ}}} = \frac{100}{25 + j25} = 2 - j2 \text{ А.}$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,82 \text{ А.}$$

Начальная фаза тока

$$\psi_{i_1} = \arctg \frac{-2}{2} = -45^\circ.$$

Напряжение на ваттметре определить по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = 100 - (2 - j2)(2 + j14) = 68 - j24 \text{ В.}$$

Действующее значение напряжения

$$U_{ab} = \sqrt{68^2 + 24^2} = 72,11 \text{ В.}$$

Начальная фаза напряжения

$$\psi_u = \text{arctg} \frac{-24}{68} = -19,4^\circ.$$

Показание ваттметра

$$P_w = U_{ab} I_1 \cos(\psi_u - \psi_{i_1}) = 72,11 \cdot 2,82 \cos(-19,4^\circ + 45^\circ) = 183,45 \text{ Вт.}$$

Показание ваттметра можно рассчитать более просто, используя комплексную мощность $\underline{S} = \dot{U}_{ab} \dot{I}_1^*$, где \dot{I}_1^* – сопряженный комплекс тока \dot{I}_1 :

$$\underline{S} = (68 - j24)(2 + j2) = 184 + j88.$$

Показание ваттметра равно действительной части комплексной мощности: $P_w = 184 \text{ Вт.}$

Задачи для самостоятельного решения

1. Известны мгновенные значения напряжения и тока электрической цепи: $u = 141 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ В}$; $i = 14,1 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ А}$. Определить активную, реактивную и полную мощности цепи.

Ответ: $P = 500 \text{ Вт}$; $Q = 866 \text{ вар}$; $S = 1000 \text{ ВА}$.

2. Для определения параметров индуктивной катушки была собрана цепь (рис. 3.43). Приборы показали: $U = 100 \text{ В}$; $I = 5 \text{ А}$; $P = 300 \text{ Вт}$. Определить активное сопротивление R и индуктивность L катушки, если частота $f = 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $R = 12 \text{ Ом}$; $L = 0,051 \text{ Гн}$.

3. В электрической цепи (рис. 3.44) действующее значение синусоидальной ЭДС $E = 100 \text{ В}$; $R_0 = 4 \text{ Ом}$; $R_1 = 6 \text{ Ом}$; $X_L = 5 \text{ Ом}$; $X_C = 10 \text{ Ом}$. Определить показания ваттметра (рис. 3.44).

Ответ: $P = 300 \text{ Вт}$.

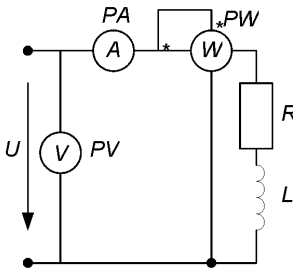


Рис. 3.43

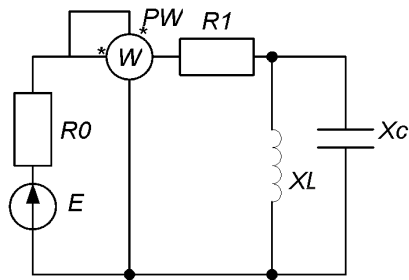


Рис. 3.44

Индивидуальное задание

К источнику с синусоидальным напряжением U подключена цепь со смешанным соединением сопротивлений \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 . (табл. 3.5). Нарисовать схему цепи. На входе цепи включить ваттметр для измерения активной мощности всей цепи. Определить показание ваттметра.

Таблица 3.5

| Номер варианта | U, B | $\underline{Z}_1, \text{Ом}$ | $\underline{Z}_2, \text{Ом}$ | $\underline{Z}_3, \text{Ом}$ |
|----------------|--------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1 | 100 | $2,6 - j2,8$ | $2 - j2$ | $-j2$ |
| 2 | 50 | $0,6 + j0,1$ | $1 + j2$ | 3 |
| 3 | 200 | $9 + j3$ | $j10$ | $10 + j20$ |
| 4 | 50 | $1 - j3$ | $4 + j2$ | $-j5$ |
| 5 | 100 | $2,6 + j2,8$ | $2 + j2$ | $j2$ |
| 6 | 400 | $18 + j1$ | 30 | $10 + j20$ |
| 7 | 10 | $0,2 + j0,6$ | $1 + j1$ | 2 |
| 8 | 40 | $0,8 + j2,9$ | 3 | $1 - j2$ |
| 9 | 80 | $0,9 + j0,3$ | $1 + j2$ | $j1$ |
| 10 | 50 | $0,2 + j0,4$ | 4 | $j2$ |
| 11 | 100 | $0,8 + j0,6$ | 2 | $2 + j2$ |
| 12 | 200 | $1,8 + j2,6$ | $1 + j2$ | $-j4$ |
| 13 | 100 | $2 - j4$ | $-j5$ | $3 + j1$ |
| 14 | 200 | $5 + j5$ | 10 | $j10$ |
| 15 | 75 | $3j$ | $2 + j2$ | $-j4$ |

| Номер варианта | $U, В$ | $Z_1, Ом$ | $Z_2, Ом$ | $Z_3, Ом$ |
|----------------|--------|--------------|-----------|-----------|
| 16 | 200 | $-j10$ | $10j$ | $5 - j5$ |
| 17 | 10 | $0,1 + j0,7$ | 1 | $j3$ |
| 18 | 80 | $0,4 + j1,2$ | 2 | $j4$ |

Контрольные вопросы

1. Что такое узел, ветвь, контур?
2. Как формулируются первый и второй законы Кирхгофа в комплексной форме?
3. Каково соотношение между мгновенными значениями напряжений и токов на элементах R, L, C ?
4. Как записываются выражения законов Кирхгофа в дифференциальной и комплексной форме?
5. Каков порядок составления системы уравнений по законам Кирхгофа?
6. Каков порядок определения значений токов в ветвях электрических цепей методом контурных токов?
7. Когда используется метод двух узлов?
8. Каков порядок определения значений токов в ветвях методом двух узлов?
9. Как определить напряжение между двумя узлами?
10. В каком случае используют метод эквивалентного генератора?
11. Что понимают под активной, реактивной и полной мощностями? В каких единицах они измеряются?
12. Какие значения тока и напряжения входят в формулы P, Q, S ?
13. Что такое угол φ , чем вызвано его появление? В каких пределах он может находиться?
14. Почему значение $\cos\varphi$ названо коэффициентом мощности? Что оно показывает?
15. Почему стремятся повысить значение $\cos\varphi$ электроустановок?
16. Сколько обмоток у ваттметра? Как они называются и как включаются?
17. Как рассчитывается комплексная мощность?

3.4. Расчет электрических цепей при резонансных явлениях

Цель: получить навыки расчета электрических цепей при резонансе напряжений, токов.

Методические рекомендации

Под *резонансным режимом* двухполюсника, содержащего индуктивность и емкость, понимают режим, при котором входное сопротивление двухполюсника является чисто активным.

Ток и напряжение на входе двухполюсника, находящегося в резонансном режиме, совпадают по фазе, реактивная мощность двухполюсника при этом равна нулю.

Резонанс при последовательном соединении R , L , C называют резонансом напряжений. Он наступает при условии

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Напряжения $U_L = U_C$ могут превышать напряжение на входе цепи при условии $\omega_0 L > R$.

Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}.$$

Характеристическое сопротивление

$$\rho = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Резонанс в цепи с параллельным соединением ветвей, содержащих индуктивность и емкость, называется резонансом токов. Для цепи на рис. 3.45 условие резонанса $b_L = b_C$, или

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

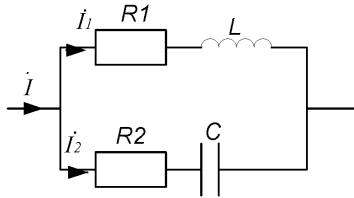


Рис. 3.45

Пример 1. В электрической цепи (рис. 3.46) $R = 100$ Ом; $L = 5,05$ мГн; $C = 0,05$ мкФ; $U = 10$ В. Вычислить резонансную частоту, добротность контура, значения напряжения U_R , U_L , U_C . Построить векторную диаграмму.

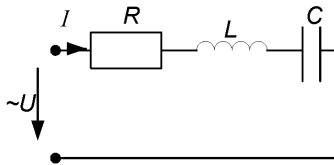


Рис. 3.46

Решение

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5,05 \cdot 10^{-3} \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}}} = 6,29 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{6,29 \cdot 10^4 \cdot 5,05 \cdot 10^{-3}}{100} = \frac{318}{100} = 3,18.$$

Емкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{6,29 \cdot 10^4 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6}} = 318 \text{ Ом.}$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right)^2} = \sqrt{100^2 + (318 - 318)^2} = 100 \text{ Ом} = R,$$

т. е. чисто активное. Значит, резонансная частота определена верно.
Значение тока цепи

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ А.}$$

Значения напряжений:

$$U_R = IR = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ В};$$

$$U_L = I\omega_0 L = 0,1 \cdot 318 = 31,8 \text{ В};$$

$$U_C = I \frac{1}{\omega_0 C} = 0,1 \cdot 318 = 31,8 \text{ В.}$$

Векторную диаграмму напряжений (рис. 3.47) построить на основании уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

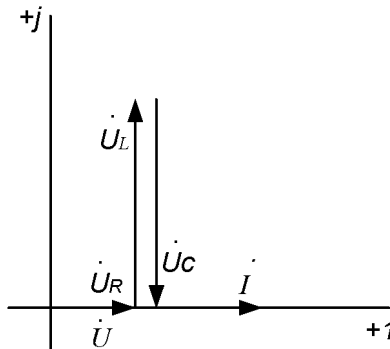


Рис. 3.47

На действительной оси с учетом выбранного масштаба отложить вектор тока \dot{I} , т. к. он одинаков на всех элементах цепи. Векторы

напряжений на элементах цепи отложить с учетом выбранного масштаба и угла сдвига фаз между током и напряжением.

На резисторе вектор напряжения \dot{U}_R совпадает по фазе с вектором тока \dot{I} , вектор напряжения на катушке индуктивности \dot{U}_L опережает ток по фазе на 90° , вектор напряжения на конденсаторе \dot{U}_C отстает от вектора тока на 90° . Общее комплексное напряжение равно сумме комплексных напряжений на элементах R, L, C . Так как сумма $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$, то $\dot{U}_R = \dot{U}$.

Пример 2. В электрической цепи (рис. 3.48) $R_1 = 80$ Ом; $R_2 = 60$ Ом; $L = 0,191$ Гн; $f = 50$ Гц; $U = 120$ В. Определить емкость C , при которой наступит резонанс. Рассчитать значения токов при резонансе и построить векторную диаграмму.

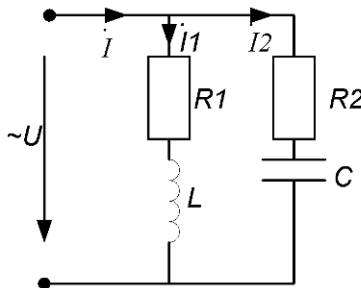


Рис. 3.48

Решение

Условием резонанса токов является равенство $b_L = b_C$, или

$$\frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

Индуктивное сопротивление

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,191 = 60 \text{ Ом}.$$

Подставить известные величины в уравнение условия резонанса токов:

$$\frac{60}{80^2 + 60^2} = \frac{X_C}{60^2 + X_C^2};$$

$$0,006 = \frac{X_C}{60^2 + X_C^2}.$$

Решить квадратное уравнение:

$$0,006 \cdot 60^2 + 0,006 X_C^2 = X_C;$$

$$X_C^2 - 166,6 X_C + 3600 = 0;$$

$$X_{C1, C2} = 83,3 \pm \sqrt{83,3^2 - 3600} = 83,3 \pm 57,44;$$

$$X_{C1} = 140,74 \text{ Ом}; \quad X_{C2} = 25,86 \text{ Ом}.$$

Резонанс токов в заданной схеме возможен при двух разных значениях емкости:

$$C_1 = \frac{1}{\omega X_{C1}} = \frac{1}{314 \cdot 140,74} = 2,26 \cdot 10^{-5} \text{ Ф} = 22,6 \text{ мкФ};$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega X_{C2}} = \frac{1}{314 \cdot 25,86} = 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} = 123 \text{ мкФ}.$$

Комплексное сопротивление первой ветви

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 80 + j60 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление второй ветви:

– при $C_1 = 22,6 \text{ мкФ}$:

$$\underline{Z}'_2 = R_2 - jX_{C1} = 60 - j140,74 \text{ Ом};$$

– при $C_2 = 123 \text{ мкФ}$:

$$\underline{Z}''_2 = R_2 - jX_{C2} = 60 - j25,86 \text{ Ом}.$$

Принимается $\dot{U} = U = 120 \text{ В}$, тогда значение тока в ветви с резистором R_1 и индуктивностью L

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{120}{80 + j60} = 0,96 - j0,72 \text{ А.}$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{0,96^2 + 0,72^2} = 1,2 \text{ А.}$$

Значение тока в ветви с резистором R_2 и емкостью C при $X_{C1} = 140,74 \text{ Ом}$

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}'_2} = \frac{120}{60 - j140,74} = 0,3 + j0,72 \text{ А;}$$

$$I'_2 = \sqrt{0,3^2 + 0,72^2} = 0,78 \text{ А.}$$

Значение тока в неразветвленной части цепи

$$\dot{I} = \dot{I}'_1 + \dot{I}'_2 = 0,96 - j0,72 + 0,3 + j0,72 = 1,26 \text{ А.}$$

Получено значение тока, выраженное в комплексной форме действительным числом. Это означает, что ток на входе цепи совпадает по фазе с напряжением, т. е. емкость, при которой наступит резонанс, определена правильно.

Значение тока в ветви с резистором R_2 и емкостью C при $X_{C2} = 25,86 \text{ Ом}$

$$\dot{I}''_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}''_2} = \frac{120}{60 - j25,86} = 1,68 + j0,72 \text{ А;}$$

$$I''_2 = \sqrt{1,68^2 + 0,726^2} = 1,83 \text{ А.}$$

Значение тока в неразветвленной части цепи

$$\dot{I} = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_2 = 0,96 - j0,72 + 1,68 + j0,72 = 2,64 \text{ А.}$$

Получен ток, совпадающий с напряжением по фазе. Векторную диаграмму токов (рис. 3.49) построить в масштабе на основании уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для каждого решения:

$$\dot{I} = \dot{I}'_1 + \dot{I}'_2;$$

$$\dot{I} = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_2.$$

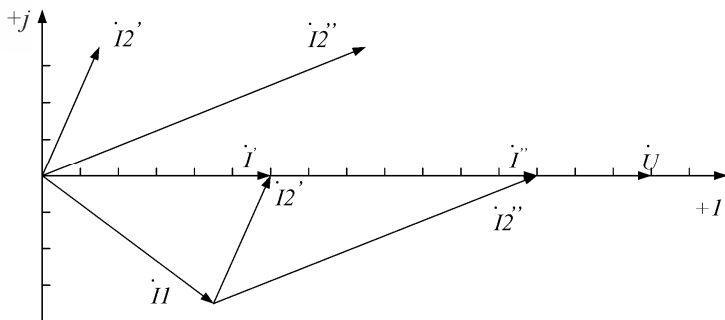


Рис. 3.49

Пример 3. В электрической цепи (рис. 3.50) $U = 30$ В; $R_1 = 2,7$ Ом; $X_L = 0,9$ Ом; $X_C = 1$ Ом. Определить, при каком сопротивлении R_2 в цепи наступит резонанс. Построить векторную диаграмму напряжений и токов.

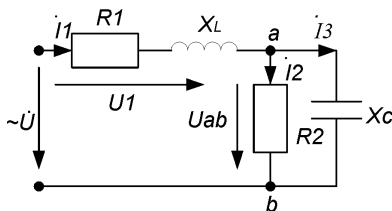


Рис. 3.50

Решение

В цепи на рис. 3.50 резонанс наступит при условии, что реактивная составляющая эквивалентного комплексного сопротивления будет равна нулю:

$$\underline{Z}_s = R_1 + jX_L + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = R_1 + jX_L + \frac{-R_2^2 jX_C + R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2}.$$

Реактивное эквивалентное сопротивление состоит из слагаемых, содержащих множитель j , т. е. это мнимая часть комплексного сопротивления:

$$X_s = X_L - \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

Необходимо подставить известные величины и приравнять X_3 к нулю:

$$0,9 - \frac{R_2^2}{R_2^2 + 1} = 0,$$

откуда $R_2 = 3 \text{ Ом}$.

При найденном значении R_2 комплексное сопротивление цепи Z_3 имеет только действительную составляющую, т. е. чисто активное сопротивление

$$R_3 = R_1 + \frac{R_2 X_C^2}{R_2^2 + X_C^2} = 2,7 + \frac{3}{9 + 1} = 3 \text{ Ом}.$$

Принимается $U = \dot{U} = 30 \text{ В}$.

Значение тока в неразветвленной части цепи

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{R_3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ А}.$$

Значение напряжения на участке с параллельным соединением ветвей

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{I}_1 Z_1 = 30 - j10(2,7 + j0,9) = 3 - j9 \text{ В}.$$

Значения токов в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_2} = \frac{3 - j9}{3} = 1 - j3 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{-jX_C} = \frac{3 - j9}{-j} = 9 + j3 \text{ А}.$$

Векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 3.51) построить в масштабе на основании уравнений, составленных по законам Кирхгофа: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$; $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{ab}$. Ток на входе цепи I_1 совпадает с напряжением \dot{U} по фазе.

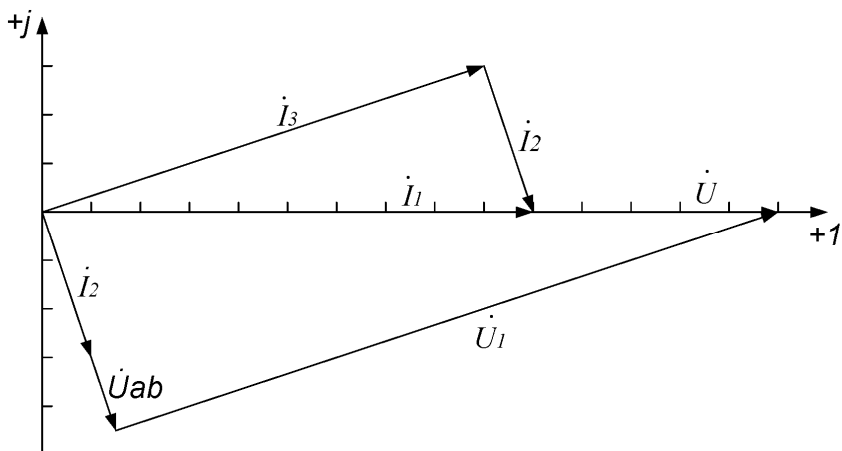


Рис. 3.51

Задачи для самостоятельного решения

1. В электрической цепи (рис. 3.52) при частоте $\omega_0 = 500$ рад/с имеет место резонанс. Определить R , C , U при $P = 10$ Вт; $I = 1$ А; $L = 0,4$ Гн. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

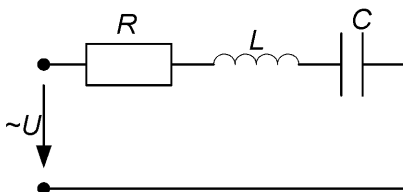


Рис. 3.52

Ответ: $C = 10$ мкФ; $R = 10$ Ом; $U = 10$ В.

2. Приборы в электрической цепи (рис. 3.53) показали $I_1 = 5$ А; $U = 100$ В; $P = 400$ Вт. Определить величину подключаемой емкости для получения коэффициента мощности всей цепи $\cos\varphi = 1$, если $f = 50$ Гц. Определить значения токов после включения емкости, построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Ответ: $C = 95,5$ мкФ; $I = 4$ А; $I_2 = 3$ А.

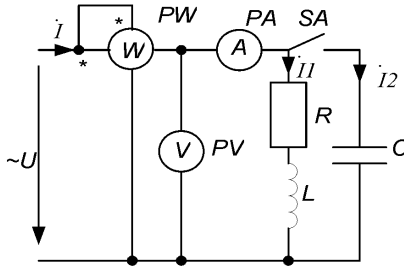


Рис. 3.53

3. Цепь состоит из индуктивной катушки R, L , соединенной последовательно с конденсатором C без потерь. Приложенное ко всей цепи напряжение $U = 35$ В. Определить напряжение на катушке при резонансе, если напряжение на конденсаторе при этом равно 120 В.

Ответ: 125 В.

Индивидуальное задание

В электрических цепях (рис. 3.54–3.59) имеет место резонанс. Действующее значение синусоидального напряжения источника питания $U = 100$ В. По данным табл. 3.6 определить указанную величину согласно своему варианту, значения токов и напряжений на участках цепи, построить векторную диаграмму напряжений и токов.

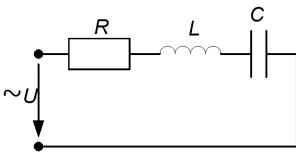


Рис. 3.54

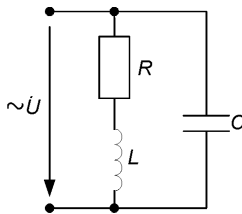


Рис. 3.55

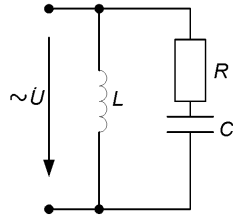


Рис. 3.56

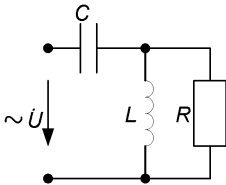


Рис. 3.57

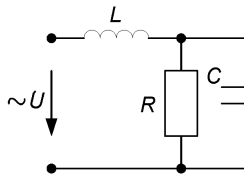


Рис. 3.58

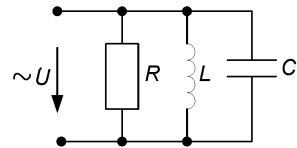


Рис. 3.59

Таблица 3.6

| Номер варианта | Рисунок | R , Ом | X_L , Ом | X_C , Ом | ω , рад/с | L , мГн | C , мкФ | Искомая величина |
|----------------|---------|----------|------------|------------|------------------|-----------|-----------|------------------|
| 1 | 3.54 | 5 | – | – | – | 10 | 100 | f |
| 2 | 3.55 | 10 | 10 | – | – | – | – | X_C |
| 3 | 3.56 | 20 | – | 20 | 100 | – | – | L |
| 4 | 3.57 | 20 | – | 10 | – | – | – | X_L |
| 5 | 3.58 | 10 | – | 20 | – | – | – | X_L |
| 6 | 3.59 | 10 | – | – | 1000 | 20 | – | C |
| 7 | 3.54 | 40 | – | – | 500 | 400 | – | C |
| 8 | 3.55 | 20 | 10 | – | – | – | – | X_C |
| 9 | 3.56 | 10 | – | 10 | – | – | – | X_L |
| 10 | 3.57 | 20 | 10 | – | 200 | – | – | C |
| 11 | 3.58 | 10 | – | 10 | – | – | – | X_L |
| 12 | 3.59 | 20 | – | – | – | 20 | 50 | ω |
| 13 | 3.54 | 50 | – | – | 1000 | – | 10 | L |
| 14 | 3.55 | 10 | 30 | – | – | – | – | X_C |
| 15 | 3.56 | 30 | – | 30 | – | – | – | X_L |
| 16 | 3.57 | 3 | 4 | – | – | – | – | X_C |
| 17 | 3.58 | 8 | – | 6 | – | – | – | X_L |
| 18 | 3.59 | 40 | – | – | 500 | – | 200 | L |

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение резонансного режима работы двухполюсника.
2. Запишите условие резонансного режима работы двухполюсника.
3. При каком условии наступает резонанс напряжений?
4. Чему равна и что показывает добротность последовательного контура?
5. В каких цепях и при каком условии наступает резонанс токов?
6. Что называется компенсацией сдвига фаз?
7. Докажите, используя векторные диаграммы напряжения и токов, что с помощью параллельно включенного конденсатора можно достичь компенсации угла сдвига фаз.

3.5. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индукции

Цель: усвоить особенности расчета электрических цепей при наличии в них индуктивно связанных катушек.

Методические рекомендации

Взаимоиндукцией называют наведение ЭДС в катушке при изменении тока в соседней катушке.

Значения ЭДС взаимной индукции, наведенных в первой и второй катушках, составляют соответственно:

$$e_{1M} = \pm M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{2M} = \pm M \frac{di_1}{dt},$$

где M – взаимная индуктивность катушек, Гн (генри). Знак выбирается в зависимости от того, согласно или встречно включены катушки.

Согласным называется включение, при котором магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции двух катушек совпадают; встречным – когда магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции противоположны по направлению.

Положительное направление тока и создаваемого им магнитного потока согласуется по правилу правоходного винта. Чтобы не загромождать чертеж, сердечники катушек и направление намотки витков катушек в электрических схемах обычно не изображают, лишь отмечают одноименные зажимы (например, начала катушек) одинаковыми значками (например, звездочками).

Если в электрической схеме токи двух магнитосвязанных катушек одинаково ориентированы относительно зажимов, обозначенных одноименно (звездочками), например оба направлены к звездочкам или оба направлены от звездочек, то имеет место согласное включение, в противном случае – встречное.

Для расчета электрических цепей при наличии в них индуктивно связанных катушек используют только методы уравнений Кирхгофа и контурных токов, другие методы непригодны. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ЭДС взаимной индукции должны быть учтены значения падений напряжения взаимной индукции, которые равны по модулю ЭДС взаимной индукции.

В цепи источников синусоидального тока падения напряжения взаимной индукции в комплексной форме имеют вид:

$$\dot{U}_{1M} = \pm j\omega M \dot{I}_2; \quad \dot{U}_{2M} = \pm j\omega M \dot{I}_1,$$

где $j\omega M = \underline{Z}_M$ – комплексное сопротивление взаимной индукции;
 $\omega M = X_M$ – сопротивление взаимной индукции.

Если индуктивно связанные катушки включены согласно, то значение падения напряжения взаимной индукции первой катушки $j\omega M \dot{I}_2$ в уравнении Кирхгофа для контура первой катушки записывают с тем же знаком, что и значение падения напряжения самоиндукции $j\omega L_1 \dot{I}_1$ этой катушки. Для контура второй катушки аналогично.

Если включение катушек встречное, то значение падения напряжения взаимной индукции катушек записывают со знаком, противоположным знаку падений напряжения самоиндукции.

Пример 1. Две индуктивно связанные катушки с выводами ab и cd соединены (рис. 3.60). Катушки имеют следующие параметры: $R_1 = 2$ Ом; $\omega L_1 = 6$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $\omega L_2 = 4$ Ом; $\omega M = 1$ Ом. Напряжение питания $U = 100$ В. Определить значения тока и напряжений на выводах катушек U_{ab} и U_{cd} и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

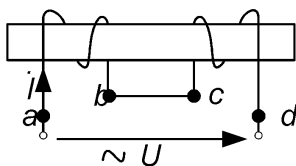


Рис. 3.60

Решение

Проследить по рис. 3.61 прохождение тока по виткам обеих катушек и применить правило правоугового винта. Сделать вывод, что магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции катушек направлены навстречу друг другу, таким образом катушки включены встречно. Заданная цепь может быть представлена схемой, показанной на рис. 3.61.

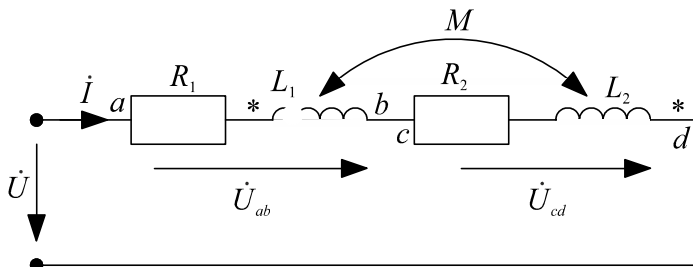


Рис. 3.61

Записать уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\dot{R}_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} + \dot{R}_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = \dot{U}.$$

Искомое значение тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - j2\omega M} = \frac{100}{6 + j10 - j2} = \frac{100}{6 + j8} = 6 - j8 \text{ A};$$

$$I = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}.$$

Значение напряжения на первой катушке по второму закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{R}_1 + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} \\ &= (6 - j8)(2 + j6 - j) = (6 - j8)(2 + j5) = 52 + j14 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$U_{ab} = \sqrt{52^2 + 14^2} = 53,9 \text{ В}.$$

Значение напряжения на второй катушке

$$\begin{aligned} \dot{U}_{cd} &= \dot{R}_2 + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} \\ &= (6 - j8)(4 + j4 - j) = (6 - j8)(4 + j3) = 48 - j14 \text{ В}; \end{aligned}$$

$$U_{cd} = \sqrt{48^2 + 14^2} = 50 \text{ В}.$$

На рис. 3.62 представлена векторная диаграмма. По действительной оси отложен вектор напряжения \dot{U} , вектор тока \dot{I} отстает от напряжения. Падение напряжения на активном сопротивлении первой катушки \dot{R}_1 совпадает по фазе с током \dot{I} , падение напря-

жения на индуктивности первой катушки $j\omega L_1 \dot{I}$ опережает ток \dot{I} по фазе на 90° , падение напряжения взаимоиндукции $j\omega M \dot{I}$ отстает от тока \dot{I} по фазе на 90° . Сумма векторов этих напряжений дает напряжение на первой катушке \dot{U}_{ab} . Аналогично проводятся векторы падений напряжений второй катушки.

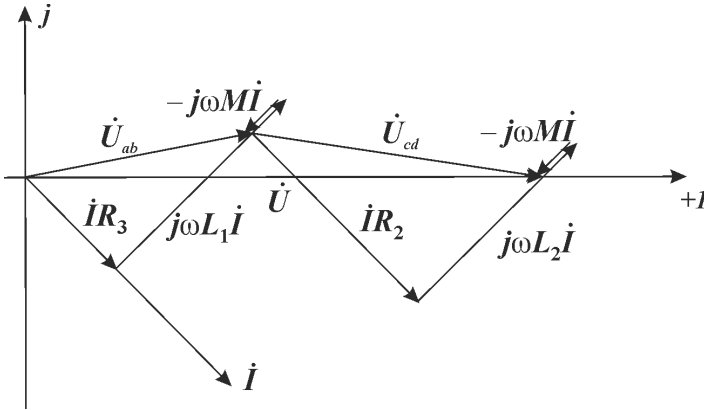


Рис. 3.62

Пример 2. Даны две параллельно соединенные катушки (рис. 3.63), параметры которых $R_1 = 20$ Ом, $\omega L_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $\omega L_2 = 20$ Ом, сопротивления взаимоиндукции $\omega M = 10$ Ом. К цепи приложено напряжение $U = 150$ В. Определить значения всех токов и построить векторную диаграмму.

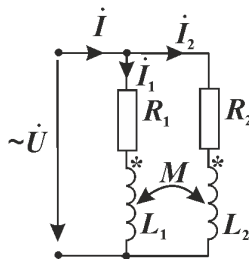


Рис. 3.63

Решение

Из рис. 3.63 видно, что катушки включены согласно, т. к. токи в обеих катушках направлены одинаково относительно зажимов, отмеченных звездочками.

Ввести обозначения:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 20 + j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 20 + j20 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M = 10 \text{ Ом}.$$

Составить уравнения по законам Кирхгофа:

$$\dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0;$$

$$\dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \underline{Z}_M = \dot{U};$$

$$\dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{I}_1 \underline{Z}_M = \dot{U}.$$

Решить уравнения совместно:

$$\dot{I}_1 = \dot{U} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = 4 - j3 \text{ А};$$

$$I_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{U} \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = 2 - j4 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,47 \text{ А};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 6 - j7 \text{ А}; \quad I = \sqrt{6^2 + 7^2} = 9,22 \text{ А}.$$

На рис. 3.64 построена векторная диаграмма. Вектор $j\omega L_1 \dot{I}_1$ перпендикулярен вектору тока I_1 , а вектор $j\omega M \dot{I}_2$ перпендикулярен вектору тока I_2 .

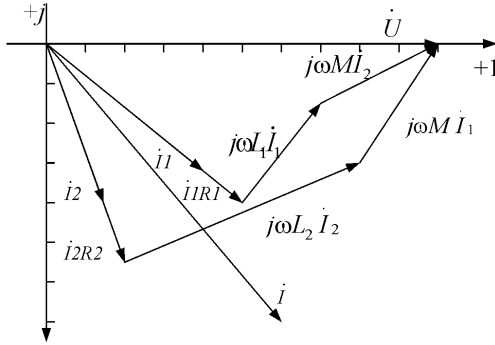


Рис. 3.64

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить значения тока и напряжения на емкости, если в схеме (рис. 3.65) приложенное к цепи напряжение $U = 100$ В; $R_1 = 5$ Ом; $R_2 = 3$ Ом; $\omega L_1 = 4$ Ом; $\omega L_2 = 2$ Ом; $\omega M = 2$ Ом; $\frac{1}{\omega C} = 4$ Ом.

Ответ: $I = 10$ А; $U_C = 40$ В.

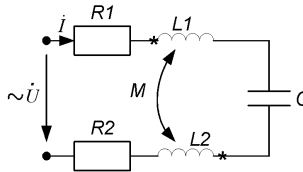


Рис. 3.65

2. Определить вид включения катушек (рис. 3.66) и значение X_M тока $I_3 = 0$, если $U = 10$ В; $X_1 = 2$ Ом; $X_2 = 1$ Ом; $X_C = 3$ Ом.

Ответ: $X_M = 1$ Ом.

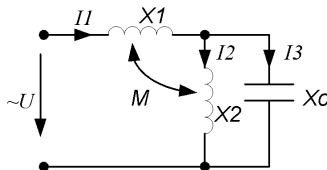


Рис. 3.66

Индивидуальное задание

На схеме (рис. 3.67) разметить зажимы индуктивно связанных катушек в соответствии с заданным видом включения и определить величину, указанную в табл. 3.7, согласно варианту. Построить векторную диаграмму тока и напряжений.

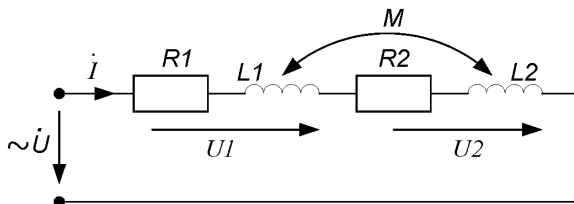


Рис. 3.67

Таблица 3.7

| Номер варианта | Вид включения | R_1 , Ом | R_2 , Ом | ωL_1 , Ом | ωL_2 , Ом | ωM , Ом | I , А | U , В | Искомая величина |
|----------------|---------------|------------|------------|-------------------|-------------------|-----------------|---------|---------|------------------|
| 1 | Согласно | 10 | 5 | 6 | 10 | 2,0 | – | 50 | I |
| 2 | Встречно | 4 | 2 | 7 | 5 | 3,0 | – | 60 | U_1 |
| 3 | Согласно | 1 | 5 | 2 | 4 | 1,0 | 10 | – | U_2 |
| 4 | Встречно | 4 | 6 | 5 | 10 | 2,5 | – | 100 | I |
| 5 | Согласно | 2 | 6 | 2 | 6 | 2,0 | 10 | – | U_2 |
| 6 | Встречно | 4 | 4 | 6 | 4 | 2,0 | – | 50 | I |
| 7 | Согласно | 5 | 5 | 5 | 7 | 2,0 | 10 | – | U_1 |
| 8 | Встречно | 4 | 4 | 6 | 8 | 3,0 | 5 | – | U_2 |
| 9 | Согласно | 1 | 2 | 4 | 4 | 2,0 | 10 | – | U |
| 10 | Встречно | 2 | 5 | 4 | 5 | 2,0 | – | 40 | U_1 |
| 11 | Согласно | 4 | 4 | 8 | 6 | 3,0 | 2 | – | U_2 |
| 12 | Встречно | 5 | 5 | 7 | 5 | 2,0 | 4 | – | U_1 |
| 13 | Согласно | 4 | 6 | 5 | 10 | 2,5 | – | 500 | I |
| 14 | Встречно | 2 | 6 | 2 | 2 | 1,5 | 10 | – | U_2 |
| 15 | Согласно | 2 | 4 | 6 | 4 | 1,0 | – | 120 | I |
| 16 | Встречно | 10 | 5 | 6 | 10 | 2,0 | – | 50 | I |
| 17 | Согласно | 4 | 8 | 6 | 8 | 1,0 | – | 100 | U_1 |
| 18 | Встречно | 1 | 5 | 2 | 4 | 1,0 | 10 | – | U_2 |

Контрольные вопросы

1. Что называют явлением взаимной индукции?
2. Чему равна ЭДС взаимной индукции?
3. От чего зависит взаимная индуктивность M катушек, связанных индуктивно?
4. Что понимают под согласным и встречным включением катушек?
5. Как по электрической схеме определяют вид включения?
6. Какие методы расчета применяют при наличии в цепях катушек, связанных магнитно?
7. Как в расчете учитывают ЭДС взаимной индукции?
8. Как записывают уравнение по второму закону Кирхгофа для последовательно соединенных катушек, связанных магнитно, в дифференциальной форме?

3.6. Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических ЭДС и напряжениях

Цель: освоить методику расчета электрических цепей при несинусоидальных ЭДС, напряжениях, токах.

Методические рекомендации

Расчет токов в цепях при действии несинусоидальных периодических ЭДС производится следующим образом:

1. Разложить несинусоидальную периодическую ЭДС в ряд Фурье, представив источник несинусоидальной периодической ЭДС в виде последовательного соединения ряда источников с синусоидальными ЭДС и источника постоянной ЭДС:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k + \dots ,$$

где $e_0 = E_0$ – постоянная составляющая ЭДС (0-я гармоника);

$e_k = E_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ – синусоидальная составляющая ЭДС (k -я гармоника).

2. Используя принцип наложения, рассчитать значения токов в цепи от каждой ЭДС в отдельности. Значение тока постоянной

составляющей определить методом расчета цепей постоянного тока. Иметь в виду, что индуктивность L не оказывает сопротивления постоянному току, а емкость C представляет собой бесконечно большое сопротивление постоянному току. Расчет значений токов гармоник произвести комплексным методом. При этом индуктивные и емкостные сопротивления для k -й гармоники равны соответственно $k\omega_1 L$ и $\frac{1}{k\omega_1 C}$, где ω_1 – угловая частота 1-й гармоники.

В простейшем случае неразветвленной RLC -цепи сопротивление для тока k -й гармоники $\underline{Z}_k = R + j\left(k\omega_1 L - \frac{1}{k\omega_1 C}\right)$.

Результирующее мгновенное значение тока в цепи равно сумме мгновенных значений составляющих

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \dots = I_0 + \sum_1^{\infty} I_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k - \phi_k).$$

3. Рассчитать действующее значение результирующего тока по формуле

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots},$$

где I_k – действующее значение тока k -й гармоники;

I_0 – значение постоянного тока.

4. Найти мощность при несинусоидальных ЭДС, равную сумме мощностей отдельных гармоник:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots = \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + \dots + U_k I_k \cos \phi_k + \dots \end{aligned}$$

Пример. В электрической цепи (рис. 3.68) $u = 30 + 100 \sin \omega_1 t + 40 \sin(3\omega_1 t + 20^\circ)$ В; $R_1 = 6$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $\omega_1 L = 12$ Ом; $\frac{1}{\omega_1 C} = 30$ Ом. Определить действующее и мгновенное значения тока в неразветвленной части. Вычислить мощность, расходуемую в цепи.

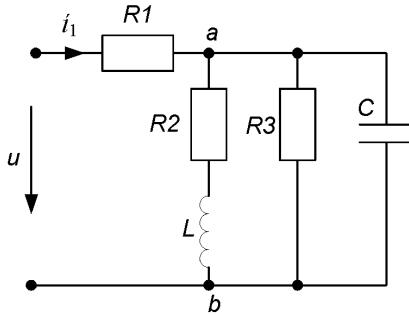


Рис. 3.68

Решение

Расчет значения тока постоянной составляющей (нулевой гармоники):

$$R_{(0)} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_{(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А.}$$

Расчет значения тока первой гармоники:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ae(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(1)}};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ae(1)} &= \frac{\underline{Z}_{2(1)} \underline{Z}_{3(1)} \underline{Z}_{4(1)}}{\underline{Z}_{2(1)} \underline{Z}_{3(1)} + \underline{Z}_{2(1)} \underline{Z}_{4(1)} + \underline{Z}_{3(1)} \underline{Z}_{4(1)}} = \\ &= \frac{(5 + j12) 20 (-j30)}{(5 + j12)20 + (5 + j12)(-j30) + 20(-j30)} = \\ &= 10,25 + j4,83 = 11,4e^{j25^\circ 30'} \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_{1(1)} + \underline{Z}_{ae(1)} = 6 + 10,25 + j4,83 = 16,25 + j4,83 = 17e^{j16^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$\underline{\mathcal{I}}_{m1(1)} = \frac{\underline{\mathcal{U}}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{100}{17e^{j16^\circ 30'}} = 5,88 e^{-j16^\circ 30'} \text{ А};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{m1}}{\sqrt{2}} = 4,17 e^{-j16^\circ 30'} \text{ A.}$$

Расчет значения тока третьей гармоники:

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 = 6 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = R_3 = 20 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega_1 L = (5 + j36) \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{4(3)} = -\frac{j}{3\omega_1 C} = -j10 \text{ Ом;}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ab(3)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(3)}};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab(3)} &= \frac{\underline{Z}_{2(3)} \underline{Z}_{3(3)} \underline{Z}_{4(3)}}{\underline{Z}_{2(3)} \underline{Z}_{3(3)} + \underline{Z}_{2(3)} \underline{Z}_{4(3)} + \underline{Z}_{3(3)} \underline{Z}_{4(3)}} = \\ &= \frac{(5 + j36) 20 (-j10)}{(5 + j36)20 + (5 + j36)(-j10) + 20(-j10)} = \\ &= 6,56 - j8,9 = 11,05 e^{-j53^\circ 35'} \text{ Ом;} \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{ab(3)} = 6 + 6,56 - j8,9 = 12,56 - j8,9 = 15,35 e^{-j35^\circ 5'} \text{ Ом;}$$

$$\underline{U}_{m1(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{40 e^{j20^\circ}}{15,35 e^{-j35^\circ 5'}} = 2,6 e^{j55^\circ 5'} \text{ A;}$$

$$\underline{I}_{1(3)} = \frac{\underline{U}_{m1(3)}}{\sqrt{2}} = 1,84 e^{j55^\circ 5'} \text{ A.}$$

Мгновенное значение тока в неразветвленной части цепи

$$i_1 = 3 + 5,88 \sin(\omega_1 t - 16^\circ 30') + 2,6 \sin(3\omega_1 t + 55^\circ 5') \text{ A.}$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{3^2 + 4,17^2 + 1,84^2} = 5,45 \text{ A.}$$

Мощность, расходуемая в цепи:

$$P = U_{(0)}I_{1(0)} + U_{(1)}I_{1(1)} \cos \varphi_{(1)} + U_{(3)}I_{1(3)} \cos \varphi_{(3)};$$

$$\varphi_{(1)} = \psi_{U(1)} - \psi_{I_1(1)} = 0 - (-16^\circ 30') = 16^\circ 30';$$

$$\varphi_{(3)} = \psi_{U(3)} - \psi_{I_1(3)} = 20 - 55^\circ 5' = -35^\circ 5';$$

$$P = 30 \cdot 3 + \frac{100}{\sqrt{2}} 4,17 \cos 16^\circ 30' + \frac{40}{\sqrt{2}} 1,84 \cos 35^\circ 5' = 415 \text{ Вт.}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Значения напряжения и тока на входе цепи:

$$u = 100 + 50 \sin \omega_1 t - 20 \sin \left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{6} \right) + 10 \sin \left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ В;}$$

$$i = 2 + 10 \sin \left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin 5\omega_1 t \text{ А.}$$

Определить действующие значения приложенного к цепи напряжения, тока в цепи, активную и полную мощности.

Ответ: $U = 107,2 \text{ В}$; $I = 7,87 \text{ А}$; $P = 210 \text{ Вт}$; $S = 855 \text{ ВА}$.

2. В цепи (рис. 3.69) $u = 150 + 50\sqrt{2} \sin(\omega_1 t + 45^\circ) \text{ В}$; $\omega_1 L = \frac{1}{\omega_1 C}$.

Определить показания вольтметров электромагнитной системы.

Ответ: $U_1 = 50 \text{ В}$; $U_2 = 150 \text{ В}$.

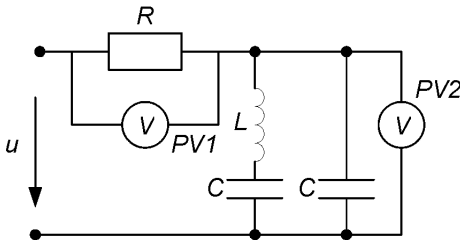


Рис. 3.69

Индивидуальное задание

Напряжение на входе цепи (рис. 3.70–3.78) $u = 20 + 100\sin\omega_1 t + 30\sin 3\omega_1 t$ В. Значения сопротивлений указаны в табл. 3.8. Определить действующее значение тока в неразветвленной части цепи.

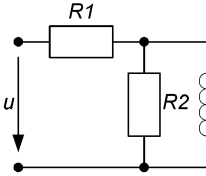


Рис. 3.70

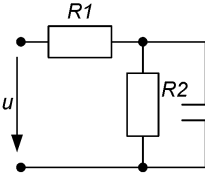


Рис. 3.71

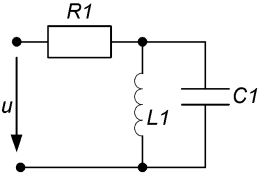


Рис. 3.72

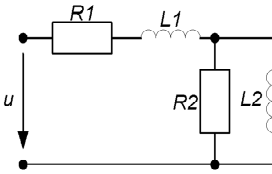


Рис. 3.73

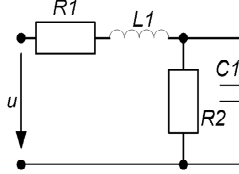


Рис. 3.74

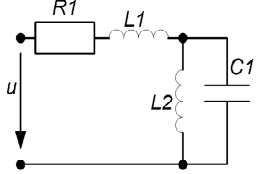


Рис. 3.75

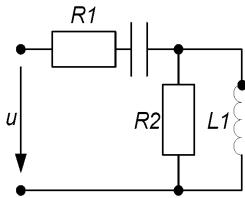


Рис. 3.76

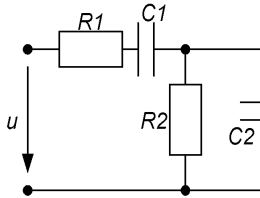


Рис. 3.77

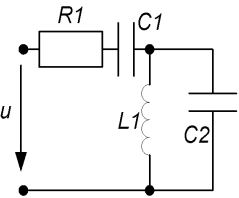


Рис. 3.78

Таблица 3.8

| Номер варианта | Рисунок | R_1 , Ом | R_2 , Ом | $\omega_1 L_1$, Ом | $\omega_2 L_2$, Ом | $\frac{1}{\omega_1 C_1}$, Ом | $\frac{1}{\omega_2 C_2}$, Ом |
|----------------|---------|------------|------------|---------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1 | 3.70 | 1 | 1 | 1 | – | – | – |
| 2 | 3.71 | 1 | 1 | – | – | 3 | – |
| 3 | 3.72 | 1 | – | 1 | – | 9 | – |
| 4 | 3.73 | 1 | 1 | 1 | 1 | – | – |

| Номер варианта | Рисунок | R_1 , Ом | R_2 , Ом | $\omega_1 L_1$, Ом | $\omega_2 L_2$, Ом | $\frac{1}{\omega_1 C_1}$, Ом | $\frac{1}{\omega_2 C_2}$, Ом |
|----------------|---------|------------|------------|---------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 5 | 3.74 | 1 | 1 | 1 | – | 3 | – |
| 6 | 3.75 | 1 | – | 3 | 3 | 3 | – |
| 7 | 3.76 | 1 | 1 | 1 | – | 3 | – |
| 8 | 3.77 | 1 | 1 | – | – | 3 | 3 |
| 9 | 3.78 | 1 | – | 1 | – | 9 | 9 |
| 10 | 3.70 | 2 | 2 | 2 | – | – | – |
| 11 | 3.71 | 2 | 2 | – | – | 3 | – |
| 12 | 3.72 | 1 | – | 3 | – | 3 | – |
| 13 | 3.73 | 2 | 2 | 2 | 2 | – | – |
| 14 | 3.74 | 2 | 1 | 2 | – | 3 | – |
| 15 | 3.75 | 1 | – | 2 | 3 | 3 | – |
| 16 | 3.76 | 2 | 1 | 1 | – | 3 | – |
| 17 | 3.77 | 1 | 1 | – | – | 6 | 3 |
| 18 | 3.78 | 3 | – | 3 | – | 3 | 3 |

Контрольные вопросы

1. Какова методика определения тока при несинусоидальной ЭДС?
2. Как определяется сдвиг по фазе между напряжением k -й гармоники и током k -й гармоники?
3. Каково условие резонанса k -й гармоники?
4. Можно ли определить мощность в цепи с несинусоидальными токами по закону Джоуля–Ленца?
5. Как определяется полная мощность в цепи с несинусоидальными токами?

3.7. Расчет коэффициентов четырехполюсника

Цель: освоить методику определения параметров четырехполюсника расчетным путем.

Методические рекомендации

Электротехническое устройство, служащее для передачи энергии и имеющее клеммы 1, 1' на входе и клеммы 2, 2' на выходе (рис. 3.95), называют четырехполюсником. Для любого пассивного четырехполюсника напряжение U_1 и ток I_1 на входе можно выразить через напряжение U_2 и ток I_2 на выходе двумя уравнениями (форма А записи уравнений).

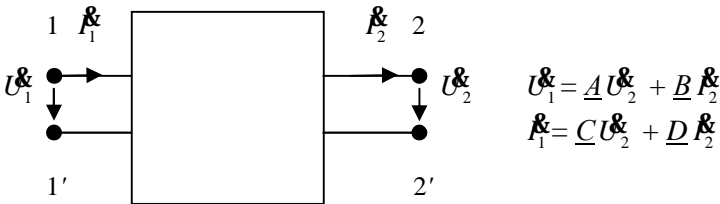


Рис. 3.79

Коэффициенты четырехполюсника (\underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D}) определяются расчетным или экспериментальным путем. Они связаны между собой соотношением $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$.

При определении коэффициентов расчетным путем должны быть известны значения внутренних сопротивлений четырехполюсника и схема их соединений.

Расчет коэффициентов может быть произведен различными способами. Наиболее простыми являются следующие два.

Способ 1

Составить уравнения по законам Кирхгофа и представить решение полученной системы уравнений в виде уравнений четырехполюсника. Исходные уравнения могут быть составлены по методу контурных токов и узловых потенциалов.

Для четырехполюсника, содержащего сопротивления Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 (рис. 3.80), определить коэффициенты \underline{A} , \underline{C} , \underline{B} , \underline{D} , используя уравнения Кирхгофа.

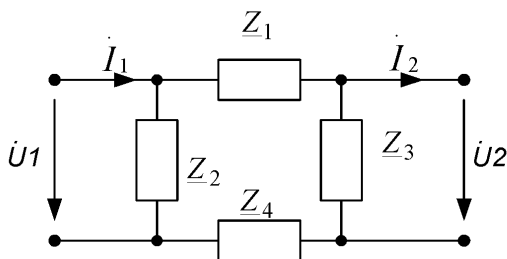


Рис. 3.80

Согласно второму закону Кирхгофа

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \left(\underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} \right) (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4);$$

$$\underline{U}_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{I}_2.$$

Согласно первому закону Кирхгофа

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} + \underline{I}_2,$$

откуда

$$\underline{I}_1 = \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2} \right) \underline{I}_2.$$

Из уравнений следует:

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4;$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2}.$$

Способ 2

Получить выражения напряжения и тока на входе \underline{U}_1 и \underline{I}_1 через напряжение и ток на выходе \underline{U}_2 и \underline{I}_2 для режимов:

– холостого хода, $\underline{I}_2 = 0$:

$$\underline{U}_{10} = \underline{A} \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_{10} = \underline{C} \underline{U}_2;$$

– короткого замыкания, $\underline{U}_2 = 0$:

$$\underline{U}_{1к} = \underline{B} \underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_{1к} = \underline{D} \underline{I}_2.$$

Найти значения коэффициентов \underline{A} , \underline{C} , \underline{B} , \underline{D} для четырехполюсника (рис. 3.80), используя режимы:

– холостого хода, $\underline{I}_2 = 0$:

$$\underline{U}_{10} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) + \underline{U}_2; \quad \underline{U}_{10} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2;$$

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{I}_{10} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3} \right) \underline{U}_2,$$

откуда

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_3}; \quad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3};$$

– короткого замыкания, $\underline{U}_2 = 0$:

$$\underline{U}_{1к} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{I}_2;$$

$$\underline{I}_{1к} = \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{1к} = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2} \right) \underline{I}_2,$$

откуда

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4; \quad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2}.$$

Любой пассивный четырехполюсник может быть представлен Т-образной (рис. 3.81) или П-образной (рис. 3.82) схемами замещения.

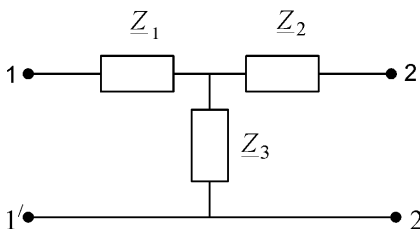


Рис. 3.81

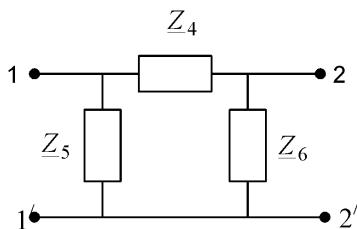


Рис. 3.82

Сопротивления в схемах замещения определяются значениями коэффициентов четырехполюсника:

– для Т-образной схемы: $\underline{Z}_1 = \frac{A-1}{\underline{C}}$; $\underline{Z}_2 = \frac{D-1}{\underline{C}}$; $\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{C}}$;

– для П-образной схемы: $\underline{Z}_4 = \underline{B}$; $\underline{Z}_5 = \frac{\underline{B}}{\underline{D}-1}$; $\underline{Z}_6 = \frac{\underline{B}}{\underline{A}-1}$.

Пример 1. Найти значения коэффициентов четырехполюсника (рис. 3.83) при $\frac{1}{\omega C} = 35$ Ом; $\omega L_1 = 20$ Ом; $\omega L_2 = 60$ Ом; $\omega M = 10$ Ом.

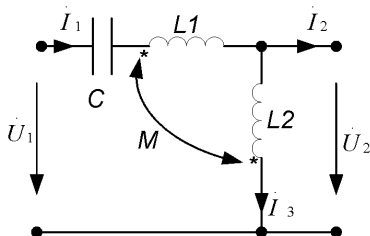


Рис. 3.83

Решение

Согласно законам Кирхгофа

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3; \\ \left(-j\frac{1}{\omega C} + j\omega L_1\right)\underline{I}_1 - j\omega M\underline{I}_3 + j\omega L_2\underline{I}_3 - j\omega M\underline{I}_1 = \underline{U}_1; \\ -j\omega L_2\underline{I}_3 + j\omega M\underline{I}_1 + \underline{U}_2 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\underline{U}_1 = \frac{-\frac{1}{\omega C} + \omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M}{\omega L_2 - \omega M} \underline{U}_2 + \frac{j\left(-\frac{1}{\omega C} \omega L_2 + \omega L_1 \omega L_2 - \omega^2 M^2\right)}{\omega L_2 - \omega M} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{j\omega L_2 - j\omega M} \underline{U}_2 + \frac{\omega L_2}{\omega L_2 - \omega M} \underline{I}_2.$$

Подставить числовые значения сопротивлений:

$$\underline{U}_1 = 0,5 \underline{U}_2 - j20 \underline{I}_2; \quad \underline{I}_1 = -j0,02 \underline{U}_2 + 1,2 \underline{I}_2.$$

Полученные уравнения четырехполюсника:

$$\underline{A} = 0,5; \quad \underline{B} = -j20 \text{ Ом}; \quad \underline{C} = -j0,02 \text{ См}; \quad \underline{D} = 1,2.$$

Пример 2. Составить П-образную схему замещения (рис. 3.82) для мостового четырехполюсника (рис. 3.84) при $\underline{Z}_1 = R_1 = 20 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_2 = R_2 = 60 \text{ Ом}$.

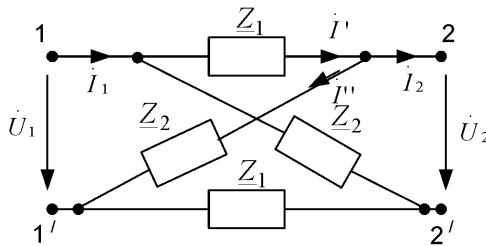


Рис. 3.84

Решение

Определить значение коэффициентов четырехполюсника способом 2 исходя из режимов:

– холостого хода:

$$\underline{I}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{10};$$

$$\frac{1}{2} \underline{Z}_1 \underline{I}_{10} + \underline{U}_2 + \frac{1}{2} \underline{Z}_1 \underline{I}_{10} - \underline{U}_{10} = 0;$$

$$U_{10}^{\&} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} U_2^{\&}; \quad I_{10}^{\&} = \frac{2}{Z_2 - Z_1} U_2^{\&};$$

$$A = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{20 + 60}{60 - 20} = 2; \quad C = \frac{2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2}{60 - 20} = 0,005 \text{ См};$$

– короткого замыкания:

$$I_{1к}^{\&} = \frac{U_{1к}^{\&}}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2} U_{1к}^{\&}.$$

Напряжения:

$$U_{12}^{\&} = U_{21'}^{\&} = \frac{U_{1к}^{\&}}{2};$$

$$I_2^{\&} = I^{\&} - I^{\&} = \frac{U_{12}^{\&}}{Z_1} - \frac{U_{21'}^{\&}}{Z_2} = \frac{Z_2 - Z_1}{2Z_1 Z_2} U_{1к}^{\&},$$

или

$$U_{1к}^{\&} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} I_2^{\&}; \quad I_{1к}^{\&} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} I_2^{\&};$$

$$B = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 60}{60 - 20} = 60 \text{ Ом}; \quad D = A = 2.$$

Для П-образной схемы замещения (рис. 3.98)

$$Z_4 = B = 60 \text{ Ом}; \quad Z_5 = Z_6 = \frac{B}{D-1} = \frac{60}{2-1} = 60 \text{ Ом}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти значения коэффициентов четырехполосника (рис. 3.85) при $R = \omega L = 20 \text{ Ом}$; $\frac{1}{\omega C} = 40 \text{ Ом}$ и проверить справедливость уравнения $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$, связывающего коэффициенты четырехполосника.

Ответ: $\underline{A} = 0,5 + j0,5$; $\underline{B} = (20 + j20) \text{ Ом}$; $\underline{C} = (-1,25 + j3,75) 10^{-2} \text{ См}$; $\underline{D} = 0,5 + j0,5$.

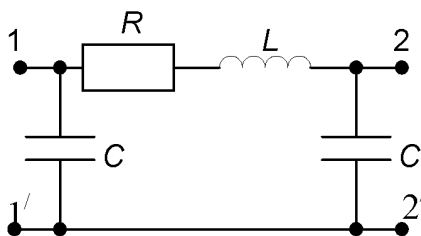


Рис. 3.85

2. Определить значения коэффициентов четырехполюсника (трансформатора), представленного на рис. 3.86.

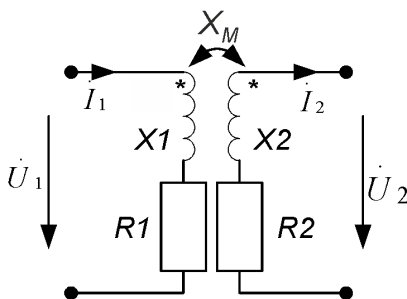


Рис. 3.86

Ответ: $\underline{A} = \frac{R_1 + jX_1}{jX_M}$; $\underline{B} = \frac{(R_1 - jX_1)(R_2 + jX_2) - (jX_M)^2}{jX_M}$; $\underline{C} = \frac{1}{jX_M}$;

$$\underline{D} = \frac{R_2 + jX_2}{jX_M}.$$

Индивидуальное задание

Для четырехполюсника (рис. 3.87–3.95) определить коэффициенты любым способом. Номер рисунка и значения сопротивлений указаны в табл. 3.9.

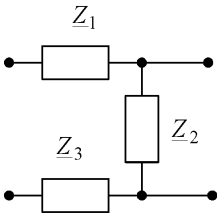


Рис. 3.87

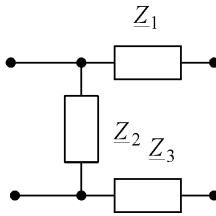


Рис. 3.88

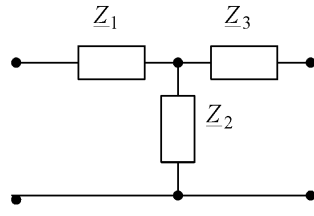


Рис. 3.89

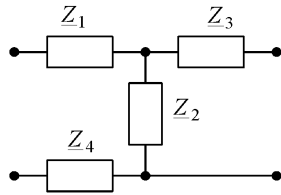


Рис. 3.90

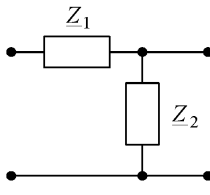


Рис. 3.91

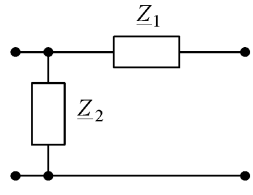


Рис. 3.92

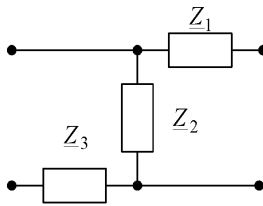


Рис. 3.93

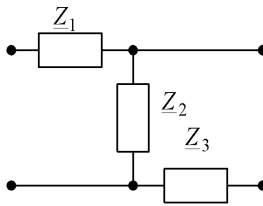


Рис. 3.94

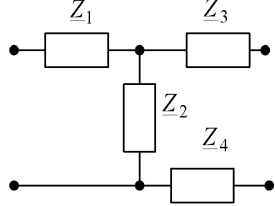


Рис. 3.95

Таблица 3.9

| Номер варианта | Рисунок | $\underline{Z}_1, \text{Ом}$ | $\underline{Z}_2, \text{Ом}$ | $\underline{Z}_3, \text{Ом}$ | $\underline{Z}_4, \text{Ом}$ |
|----------------|---------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1 | 3.87 | 3 | 1 | 2 | — |
| 2 | 3.88 | 3 | 1 | 2 | — |
| 3 | 3.89 | 3 | 1 | 2 | — |
| 4 | 3.90 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 5 | 3.91 | 3 | 1 | 2 | — |
| 6 | 3.92 | 3 | 1 | — | — |
| 7 | 3.93 | 3 | 1 | 2 | — |
| 8 | 3.94 | 3 | 1 | 2 | — |
| 9 | 3.95 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| 10 | 3.87 | 2 | 2 | 4 | — |
| 11 | 3.88 | 2 | 2 | 4 | — |

| Номер варианта | Рисунок | Z_1 , Ом | Z_2 , Ом | Z_3 , Ом | Z_4 , Ом |
|----------------|---------|------------|------------|------------|------------|
| 12 | 3.89 | 2 | 1 | 2 | – |
| 13 | 3.90 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| 14 | 3.91 | 4 | 1 | 4 | – |
| 15 | 3.92 | 4 | 1 | – | – |
| 16 | 3.93 | 4 | 1 | 4 | – |
| 17 | 3.94 | 4 | 1 | 4 | – |
| 18 | 3.95 | 4 | 1 | 4 | 2 |

Контрольные вопросы

1. Что называется четырехполосником?
2. Каким уравнением связаны между собой коэффициенты четырехполосника?
3. Какой четырехполосник называется симметричным?
4. Как записываются уравнения четырехполосника, если вход будет со стороны клемм 2, 2'?
5. Какие существуют схемы замещения четырехполосника?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – 12-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2016. – 702 с.

2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : учебное пособие / Л. А. Бессонов [и др.] ; под. ред. Л. А. Бессонова. – М. : Высшая школа, 2003. – 528 с.

3. Теоретические основы электротехники : учебно-методический комплекс для студентов вузов : в 3 ч. / сост.: А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – Минск : БГАТУ, 2008. – Ч. 1. – 353 с.

4. Теоретические основы электротехники : учебно-методический комплекс для студентов вузов : в 3 ч. / сост.: А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – Минск : БГАТУ, 2010. – Ч. 2. – 276 с.

5. Теоретические основы электротехники : учебно-методический комплекс для студентов вузов : в 3 ч. / сост.: А. В. Крутов [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2011. – Ч. 3. – 321 с.

6. Теоретические основы электротехники : методические указания к практическим занятиям : в 3 ч. / сост.: А. В. Крутов [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2006. – Ч. 3. – 84 с.

7. Теоретические основы электротехники [Электронный ресурс] : электронный учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Теоретические основы электротехники» для направлений специальностей 1-74 06 05-1 «Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика)», 1-74 06 05-2 «Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (теплоэнергетика)», 1-53 01 01-09 «Автоматизация технологических процессов и производств (сельское хозяйство)» / Минсельхозпрод РБ, БГАТУ, АЭФ, кафедра электротехники ; сост.: А. В. Крутов [и др.]. – Электронные данные (137 882 041 байт). – Минск : БГАТУ, 2018.

8. Сборник задач по электротехнике и электронике : учебное пособие / Ю. В. Бладыко [и др.] ; под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск : Высшэйшая школа, 2012. – 478 с.

9. Крутов, А. В. Теоретические основы электротехники : учебное пособие / А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – 2-е изд., стер. – Минск : РИПО, 2016. – 375 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Кривые намагничивания и мощность удельных потерь

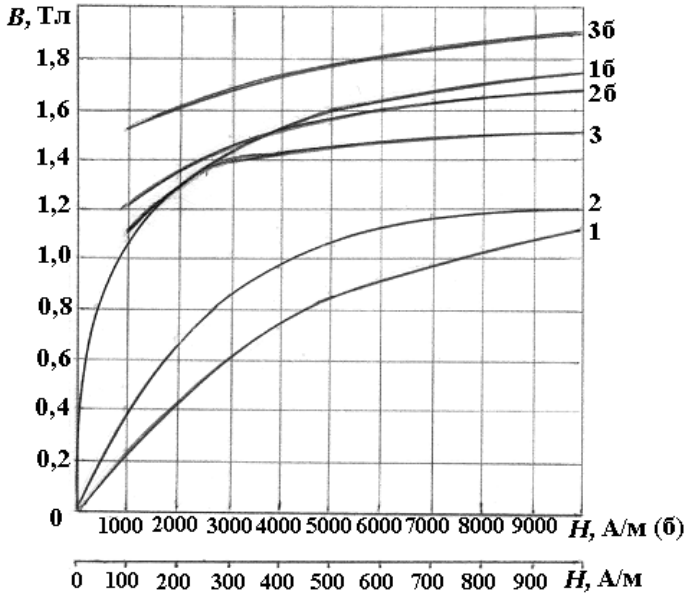


Рис. А.1. Кривые намагничивания $B(H)$ различных марок сталей:
1 – литая сталь; 2 – листовая электротехническая сталь 1512 (горячекатаная);
3 – листовая электротехническая сталь 3411 (холоднокатаная)

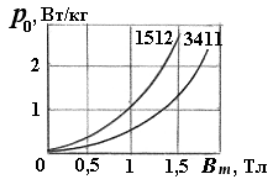


Рис. А.2. Мощность удельных потерь в электротехнической стали

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Элементарная математика

1. Умножение многочленов:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

2. Действия с дробями:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

3. Пропорция:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad ad = bc; \quad a = \frac{bc}{d}; \quad c = \frac{da}{b}.$$

4. Действия со степенями и корнями:

$$a^m a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

5. Действия с нулем и бесконечностью:

$$a \cdot 0 = 0; \quad \frac{a}{0} = \infty; \quad \frac{0}{\infty} = 0; \quad a \cdot \infty = \infty.$$

6. Неопределенности:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0 \cdot \infty; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad 1^\infty.$$

7. Формулы тригонометрии:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta;$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

8. Раскрытие определителя третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Комплексные числа

Комплексное число, соответствующее точке, в которой лежит конец вектора \dot{A} (рис.), может быть записано в следующих формах:

$\dot{A} = a + jb$ – алгебраической;

$\dot{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ – тригонометрической;

$\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ – показательной;

$\dot{A} = A \angle \alpha$ – полярной (здесь $a = A \cos \alpha$ – действительная часть комплексного числа, A);

$jb = jA \sin \alpha$ – мнимая часть комплексного числа;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

$A = |\dot{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа;

$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ – угол (аргумент) комплексного числа.

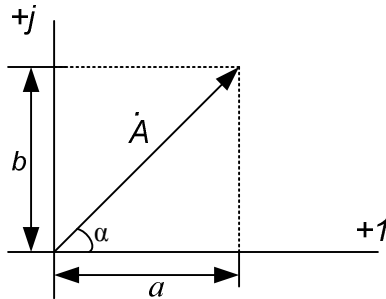


Рис. Вектор на комплексной плоскости

Комплексное число $\dot{A}^* = a - jb = Ae^{-j\alpha}$ называется сопряженным комплексному числу $\dot{A} = a + jb = Ae^{j\alpha}$. Произведение комплексного и комплексно-сопряженного чисел – вещественное число, равное квадрату их модуля:

$$\dot{A}\dot{A}^* = Ae^{j\alpha} Ae^{-j\alpha} = A^2.$$

где $e^{j\varphi}$ – оператор поворота на угол φ .

Умножение комплексного числа \dot{A} на число $e^{j\varphi}$ сводится к повороту вектора \dot{A} в комплексной плоскости на угол φ :

$$\dot{A} e^{j\varphi} = A e^{j\alpha} e^{j\varphi} = A e^{j(\alpha+\varphi)},$$

где $\varphi > 0$ – поворот против часовой стрелки;
 $\varphi < 0$ – поворот по часовой стрелке.

Вычисления над комплексными числами производятся так же, как и над обыкновенными двучленами, полагая, что $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$.

При делении одного комплексного числа, записанного в алгебраической форме, на другое уничтожают мнимость в знаменателе, для чего умножают числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac - jad + jbc + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Возведение в степень:

$$\dot{A}^n = (A e^{j\alpha})^n = A^n e^{jn\alpha}.$$

Извлечение корня:

$$\sqrt[n]{\dot{A}} = \sqrt[n]{A e^{j\alpha}} = \sqrt[n]{A} e^{j \frac{\alpha + 2k\pi}{n}},$$

где k – целое число.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Методика использования калькуляторов для выполнения расчетов с комплексными числами

Подготовка: включить калькулятор (ON/C), нажатием на клавишу DRG установить угловую единицу DEG (градусы), войти в программу расчета с помощью клавиш 2ndF и \leftrightarrow (cplx).

1. Деление комплексного числа на комплексное число.

Пример 1

$$\frac{40 - j10}{5 - j5} = 5 + j3.$$

Порядок действий: 40 \boxed{a} 10 $\boxed{+/-}$ \boxed{b} \div 5 \boxed{a} 5 $\boxed{+/-}$ \boxed{b} = \boxed{a} \boxed{b} – просмотр результата.

Клавиша \boxed{a} дает величину вещественной части, клавиша \boxed{b} – величину мнимой части комплексного числа.

Пример 2

$$\frac{40 - j10}{j4} = -2,5 - j10.$$

Порядок действий: 40 \boxed{a} 10 $\boxed{+/-}$ \boxed{b} \div 4 \boxed{b} = \boxed{a} \boxed{b} – просмотр результата.

Умножение, сложение и вычитание производят аналогично.

2. Переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной.

Пример 3

$$-110 - j190 = 220e^{-j120^\circ}.$$

Порядок действий: 110 $\boxed{+/-}$ \boxed{a} 190 $\boxed{+/-}$ \boxed{b} 2ndF \boxed{a} = \boxed{a} \boxed{b} – просмотр результата.

Клавиша \boxed{a} дает модуль комплексного числа, клавиша \boxed{b} – аргумент в градусах.

3. Переход от показательной формы комплексного числа к алгебраической.

Пример 4

$$220e^{j120^\circ} = -110 + j190.$$

Порядок действий: 220 \boxed{a} 120 \boxed{b} 2ndF \boxed{b} = \boxed{a} \boxed{b} – просмотр результата.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Единицы электрических и магнитных величин

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|--------------------------------------|---------------------------|-------------------|---|
| Электрическое сопротивление | $R = \frac{U}{I}$ | Ом | Ом равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А |
| Электрическая проводимость | $G = \frac{1}{R}$ | См | Сименс равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом |
| Удельное электрическое сопротивление | $\rho = \frac{RS}{l}$ | Ом·м | Ом·метр равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м ² и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом |
| Удельная электрическая проводимость | $\gamma = \frac{1}{\rho}$ | См/м | Сименс на метр равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 м ² и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См |

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|---|------------------------|-------------------|--|
| Электрический заряд (количество электричества) | $Q = It$ | Кл | Кулон равен электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при величине постоянного тока 1 А за время 1 с |
| Объемная плотность электрического заряда | $\rho = \frac{Q}{V}$ | Кл/м ³ | Кулон на кубический метр равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 м ³ равномерно распределен заряд 1 Кл |
| Поверхностная плотность электрического заряда | $\sigma = \frac{Q}{S}$ | Кл/м ² | Кулон на квадратный метр равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд в 1 Кл равномерно распределен на поверхности площадью 1 м ² |
| Линейная плотность электрического заряда | $\tau = \frac{Q}{l}$ | Кл/м | Кулон на метр равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд в 1 Кл равномерно распределен на нити длиной 1 м |

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------|---|
| Электрический потенциал | $\varphi = \frac{A}{Q}$ | В 1 В = = 1 Дж/Кл | Вольт равен потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж |
| Напряженность электрического поля | $E = \frac{F}{Q}$ | Н/Кл = = В/м | Ньютон на кулон равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н. Вольт на метр равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля |
| Плотность электрического тока | $j = \frac{I}{S}$ | А/м ² | Ампер на квадратный метр равен плотности электрического тока, при которой ток 1 А равномерно распределен по поперечному сечению проводника площадью 1 м ² |

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|-------------------------------|---|-------------------|--|
| Электрическая емкость | $C = \frac{Q}{\phi}$ | Ф | Фарад равен электрической емкости такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл |
| Электрическое смещение | D | Кл/м ² | Кулон на квадратный метр равен электрическому смещению, при котором поток электрического смещения сквозь поперечное сечение площадью 1 м ² равен 1 Кл |
| Поток электрического смещения | $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n Q_i$ | Кл | Кулон равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл |
| Электрический момент диполя | $p = Q l$ | Кл·м | Кулон·метр равен электрическому моменту диполя, заряды которого, равные 1 Кл каждый, расположены на расстоянии 1 м один от другого |

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|-----------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| Поляризованность | $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{V}$ | Кл/м ² | Кулон на квадратный метр равен поляризованности диэлектрика, при которой диэлектрик объемом 1 м ³ имеет электрический момент 1 Кл·м |
| Магнитная индукция | $B = \frac{F}{Il}$ | Тл 1 Тл = = 1 Н/(А·м) | Тесла равна магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А |
| Магнитный поток | $\Phi = BS$ | Вб 1 Вб = = 1 Тл·м ² | Вебер равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 м ² , расположенную перпендикулярно направлению однородного магнитного поля, индукция которого равна 1 Тл |

| Наименование величины | Определяющее уравнение | Единица измерения | Определение единицы измерения |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|--|
| Напряженность магнитного поля | $H = \frac{B}{\mu_0}$ | А/м | Ампер на метр равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл |
| Магнитный момент контура с током | $p = IS$ | А·м ² | Ампер·квадратный метр равен моменту контура площадью 1 м ² , если по нему течет ток 1 А |
| Индуктивность | $L = \frac{\Phi}{I}$ | Гн 1 Гн = = 1 Вб/А | Генри равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе 1 А составляет 1 Вб |
| Намагниченность | $M = \frac{\sum p_a}{V}$ | А/м | Ампер на метр равен намагниченности, при которой вещество объемом 1 м ³ имеет магнитный момент 1 А·м ² |

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Десятичные приставки к названиям единиц

| Приставка | Обозначение | Множитель | Приставка | Обозначение | Множитель | Приставка | Обозначение | Множитель |
|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|-----------|-----------|-------------|------------|
| тера | Т | 10^{12} | деци | д | 10^{-1} | нано | н | 10^{-9} |
| гига | Г | 10^9 | санτι | с | 10^{-2} | пико | п | 10^{-12} |
| мега | М | 10^6 | милли | м | 10^{-3} | фемто | ф | 10^{-15} |
| кило | к | 10^3 | микро | мк | 10^{-6} | атто | а | 10^{-18} |

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ.
ПРАКТИКУМ

В двух частях

Часть 1

Электрические и магнитные поля постоянного тока.
Теория цепей постоянного тока.
Цепи однофазного синусоидального тока

Учебно-методическое пособие

Составители:

Крутов Анатолий Викторович,
Крылова Нина Георгиевна,
Дворник Геннадий Михайлович и др.

Ответственный за выпуск *В. М. Збродыга*
Корректор *Д. А. Значёнок*
Компьютерная верстка *Д. А. Пекарского*
Дизайн обложки *А. А. Покало*

Подписано в печать 02.11.2022. Формат 60×84¹/₁₆.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 10,00. Уч.-изд. л. 7,82. Тираж 99 экз. Заказ 271.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99–1, 220023, Минск.