МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по аграрному техническому образованию в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений высшего образования по специальности 1-74 06 06 «Материально-техническое обеспечение агропромышленного комплекса»

Минск
БГАТУ
2022

УДК 519.8(07)
ББК 65.5я7
Э40

Составители:
кандидат экономических наук, доцент *Л. А. Лопатнюк*,
старший преподаватель *М. М. Кондровская*

Рецензенты:
кафедра бизнес-администрирования УО «Институт бизнеса БГУ»
(доктор экономических наук, профессор,
заведующий кафедрой *Г. А. Хацкевич*);
кандидат экономических наук, доцент, заведующий сектором
внешнеэкономической деятельности РНУП «Институт системных
исследований в АПК НАН Беларуси» *Н. В. Карпович*

Э40 **Экономико-математические** методы и модели. Практикум : учебно-методическое пособие / сост.: Л. А. Лопатнюк, М. М. Кондровская. – Минск : БГАТУ, 2022. – 68 с.
ISBN 978-985-25-0180-4.

Практикум содержит задания, в которых изложены цели практических занятий, краткая теория, методические указания по выполнению заданий и вопросы для контроля результатов обучения.

Для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-74 06 06 «Материально-техническое обеспечение агропромышленного комплекса».

УДК 519.8(07)
ББК 65.5я7

ISBN 978-985-25-0180-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебной дисциплины – формирование у студентов системы знаний, умений и профессиональных компетенций в области разработки и решения на основе эконометрического и экономико-математического моделирования задач обоснования экономически эффективных плановых и прогнозных программ развития объектов АПК.

Достижение данной цели обусловливает разработку и внедрение непосредственно в практику хозяйственной деятельности соответствующих методов, методик, приемов и средств эконометрического и экономико-математического моделирования. Это пособие позволит сформировать у будущих специалистов практические навыки, дающие возможность обосновывать плановые и прогнозные параметры развития объектов АПК, обеспечивать их сбалансированность, оптимальность и пропорциональность, выявлять и закреплять прогрессивные тенденции в экономике и социальной сфере, принимать эффективные управленческие решения.

Учебно-методическое пособие состоит практических занятий, каждое из которых определяет цель занятия, содержит теоретические сведения по теме занятия, методику выполнения работы, задания для самостоятельного решения, контрольные вопросы, а также список литературных источников. Рассмотрены задачи по следующим разделам учебной дисциплины: «Оптимальные методы принятия решений, методы исследования операций» и «Эконометрическое моделирование».

Сельскохозяйственную направленность имеют подобранные к каждому из разделов задачи, в процессе решения которых студенты получают более глубокие знания и получают возможность ориентироваться в вопросах практического применения методов оптимизации и моделирования. Тематика практических заданий связана с количественной оценкой закономерностей развития объектов АПК, поиском оптимальных вариантов их развития и механизмом реализации эффективных управленческих решений, с оценкой эффективности использования ресурсного потенциала АПК.

Практическое занятие № 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Цель занятия: отработать приемы нахождения оптимального решения задачи линейного программирования симплекс методом.

Теоретические сведения

Симплексный метод – простой метод рационального перебора угловых точек, в основу которого положена идея последовательного улучшения плана. Алгоритм симплекс-метода нахождения оптимального плана всегда начинается с некоторого допустимого базисного решения. Далее следует проверка возможности улучшить значение целевой функции, если увеличить одну из небазисных (нулевых) переменных, ввести ее в базис. Если такой переменной нет, то оптимальное решение найдено. Если есть, то необходимо перейти к новому, лучшему базисному решению.

Каждый цикл преобразования называют итерацией.

Переменную, имеющую наибольшую по абсолютной величине отрицательную оценку, называют перспективной, поскольку введение ее в базис обеспечивает переход к не худшему опорному плану. Столбец, содержащий перспективную переменную – разрешающий столбец. Симплексные отношения – результат деления свободного члена на соответствующий элемент разрешающего столбца.

Симплексные преобразования:

1. Элементы разрешающей строки новой таблицы получаются делением старых элементов этой строки на разрешающий элемент.

2. Элементы остальных строк разрешающего столбца обнуляются.

3. Все остальные элементы новой симплексной таблицы, включая значения базисных переменных, оценки свободных переменных и значение функционала, вычисляются по правилу прямоугольника (рис. 1). Для этого в исходной таблице выделяется такой прямоугольник, чтобы одна из его диагоналей определялась вычисляемым и разрешающим элементами. Эту диагональ называют *главной*, другую диагональ – *побочной*.

Чтобы получить элемент новой симплексной таблицы, нужно из произведения угловых элементов главной диагонали вычесть произведение угловых элементов побочной диагонали и разделить полученное число на разрешающий элемент.

Прежде, чем переходить к следующей итерации, следует для контроля правильности расчетов вычислить оценки. Оптимальный план найден, если все оценки переменных положительны.

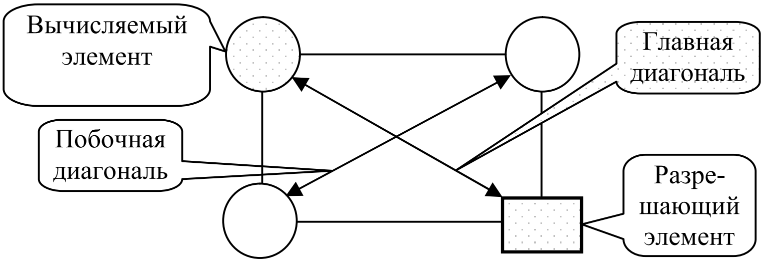


Рис. 1. Обозначения симплексного преобразования

Методика выполнения работы

Предприятие производит три вида сельскохозяйственного оборудования. Прибыль от производства каждого вида оборудования составляет 2, 3 и 8 усл. ден. ед. Известны ресурсы материалов производственного оборудования и труда (110, 110, 100), и коэффициенты расхода каждого ресурса на каждое изделие. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 110, \\ &x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100. \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

Определить оптимальный план производства оборудования, используя симплекс-метод.

1. Преобразовать модель к канонической форме:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 110, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 &= 110, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 &= 100. \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

2. Занести условия задачи в симплексную таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Заполнение симплексной таблицы

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_4	0	110	6	2	5	1	0	0	
	x_5	0	110	1	1	4	0	1	0	
	x_6	0	100	5	3	2	0	0	1	
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			0	–2	–3	–8	0	0	0	

3. Выбрать наибольшую по модулю отрицательную оценку – переменная x_3 будет вводиться в базис, соответствующий ей столбец является разрешающим.

4. Рассчитать симплексное отношение (табл. 2).

Таблица 2

Расчет симплексного отношения

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_4	0	110	6	2	5	1	0	0	110/5 = 22
	x_5	0	110	1	1	4	0	1	0	110/4 = 27,5
	x_6	0	100	5	3	2	0	0	1	100/2 = 50
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			0	–2	–3	–8	0	0	0	

5. Выбрать наименьшее симплексное отношение (разрешающую строку) – переменная x_4 будет выведена из базиса. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.

6. Выполнить симплексные преобразования. Элементы разрешающей строки новой таблицы получаются делением старых элементов этой строки на разрешающий элемент

7. Элементы остальных строк разрешающего столбца обнуляются.

8. Все остальные элементы новой симплексной таблицы, включая значения базисных переменных, оценки свободных переменных и значение функционала, вычисляются по правилу прямоугольника (табл. 3).

Таблица 3

Расчет по правилу прямоугольника

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_3	8	22	6/5	2/5	1	1/5	0	0	
	x_5	0	22*			0				
	x_6	0				0				
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
						0				

$$* - \frac{110 \cdot 5 - 110 \cdot 4}{5} = 22 \cdot$$

9. Результаты расчета представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты расчета 1-й итерации

Номер итерации	БП	$c_Б$	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Симплексные отношения
				2	3	8	0	0	0	
0	x_3	8	22	6/5	2/5	1	1/5	0	0	
	x_5	0	22	–19/5	–3/5	0	–4/5	1	0	
	x_6	0	56	13/5	11/5	0	–2/5	0	1	
	Оценки		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	
			176	38/5	1/5	0	8/5	0	0	

10. После выполнения первой итерации все оценки переменных положительны, следовательно, оптимальный по прибыли план найден: max$Z$ = 176; x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 22. Первый ресурс (материалы) использован полностью; 22 единицы ресурса 2 (производственное оборудование) и 56 единиц ресурса 3 (труд) не используются в оптимальном плане. После определения возможности приобретения материалов решить задачу повторно и проанализировать полученные результаты.

Задание для самостоятельного решения

Хлебозавод производит три вида хлебобулочных изделий. Ресурсы муки, труда и оборудования ограничены. Определить с помощью симплекс-метода оптимальный план производства согласно данным варианта задания.

Вариант 1 $\max Z = 8x_1 + 4x_2 + 3x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 5_2 + 2x_3 \le 180, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 120, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	Вариант 2 $\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 7x_1 + x_2 + 5x_3 \le 110, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	Вариант 3 $\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180, \\ 2x_2 + 4x_3 \le 200, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$
Вариант 4 $\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 110, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	Вариант 5 $\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 180, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$	Вариант 6 $\max Z = 2x_1 + 6x_2 + 5x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 7x_1 + x_2 + 5x_3 \le 180, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 50. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,3}.$

Тестовое задание для самоконтроля

Вопрос 1

Алгоритм симплекс-метода нахождения оптимального плана всегда начинается …

Варианты ответа:

- с определения целевой функции задачи;
- с определения технико-экономических коэффициентов задачи;
- с определения неизвестных задачи;
- с определения свободных членов задачи;
- с некоторого допустимого базисного решения (опорного плана).

Вопрос 2

Задачи линейного программирования решаются в Excel с помощью инструмента …

Варианты ответа:

- анализ данных. Корреляция;
- анализ данных. Регрессия;
- анализ данных. Описательная статистика;
- анализ данных. Ковариация;
- поиск решения.

Вопрос 3

Исходную информацию экономико-математической задачи составляют …

Варианты ответа:

- неизвестные задачи, технико-экономические коэффициенты и коэффициенты целевой функции;
- неизвестные задачи, свободные члены, технико-экономические коэффициенты;
- неизвестные задачи;
- неизвестные задачи и коэффициенты целевой функции;
- неизвестные задачи, свободные члены, технико-экономические коэффициенты и коэффициенты целевой функции.

Вопрос 4

Какой из столбцов будет разрешающим?

Номер итерации	Базисные переменные	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	y_1	105	9/2	–2	–1/2	–3	9/2
	y_2	15	1/10	8/5	–3/10	2/5	–11/10
	y_3	30	36/5	–14/5	–3/5	–36/5	4/5
	y_4	15	3/10	4/5	1/10	6/5	7/10
	y_5	70	22/5	–8/5	–1/5	18/5	23/5
	Fmax	150	-6	0	1	5	2

Варианты ответа:

- x_1;
- x_2;
- x_3;
- x_4;
- x_5.

Вопрос 5

Какая переменная будет выведена из базиса?

Номер итерации	Базисные переменные	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
1	y_1	105	9/2	–2	–1/2	–3	9/2	23,3
	y_2	15	1/10	8/5	–3/10	2/5	–11/10	150
	y_3	30	36/5	–14/5	–3/5	–36/5	4/5	216
	y_4	15	3/10	4/5	1/10	6/5	7/10	50
	y_5	70	22/5	–8/5	–1/5	18/5	23/5	15,9
	Fmax	150	–6	0	1	5	2	

Варианты ответа:

- y_1;
- y_2;
- y_3;
- y_4;
- y_5.

Вопрос 6

Какие дальнейшие действия с таблицей?

Номер итерации	Базисные переменные	Свободный член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексное отношение
1	y_1	105	9/2	–2	–1/2	–3	9/2	23,3
	y_2	15	1/10	8/5	–3/10	2/5	–11/10	150
	y_3	30	36/5	–14/5	–3/5	–36/5	4/5	216
	y_4	15	3/10	4/5	1/10	6/5	7/10	50
	$y5$	70	22/5	–8/5	–1/5	18/5	23/5	15,9
	Fmax	150	–6	0	1	5	2	

Варианты ответа:
- задача закончена, оптимальный план найден;
- выбирается разрешающий элемент (1,5);
- выбирается разрешающий элемент (1,1);
- выбирается разрешающий элемент (5,5);
- выбирается разрешающий элемент (5,1).

Вопрос 7

Какую переменную надо вывести из базиса при данной итерации?

Номер итерации	Базисные переменные	Свободный член	x_1	x_2	x_3
0	y_1	180	6	2	5
	y_2	60	0	2	4
	y_3	120	5	2	5
	Fmax	0	–9	–6	–7

Варианты ответа:
- x_1;
- x_2;
- x_3;
- задача не имеет решения;
- задача закончена, оптимальный план найден.

Контрольные вопросы

1. Как заполнить симплексную таблицу?
2. Как определить разрешающий элемент?
3. Как преобразуются разрешающая строка и разрешающий столбец?
4. В чем состоит правило прямоугольника?
5. Каков признак нахождения оптимального плана?

Практическое занятие № 2

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель занятия: отработка приемов построения двойственных задач.

Теоретические сведения

Исходную задачу линейного программирования называют прямой, а задачу, получаемую из нее по некоторым правилам, двойственной. В качестве прямой рассмотрена задача оптимального использования ресурсов. Ее математическая модель имеет вид:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,\\ &\mathbf{KKKKKKKKKKK}\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n},$$

где

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2,\\ &\mathbf{KKKKKKKKKKK}\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}.$$

где Z – суммарная прибыль;

x_j – объемы выпуска продукции;

c_j – прибыль от производства единицы j-го вида продукции;

a_{ij} – расход i-го ресурса на единицу j-й продукции;

b_i – объемы используемых ресурсов.

Если предположить, что на ресурсы есть покупатель, тогда естественным будет вопрос: какие обстоятельства необходимо учесть при продаже этих ресурсов? Если искомые цены ресурсов обозначить как y_i, затраты покупателя – величиной F, то его интересы будут учтены, если за функционал принять:

$$\min F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_n \,.$$

С другой стороны, чтобы не снижать доходы при продаже ресурсов, выручка при их продаже должна быть не меньше, чем прибыль от их использования в собственном производстве. Так как затраты ресурсов на производство единицы первого вида продукции определяются первым столбцом матрицы коэффициентов прямой задачи, то должно выполняться условие

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1 \,,$$

где c_1 – прибыль от производства единицы первого вида продукции.

Очевидно, что аналогичные условия должны выполняться и для других возможных видов продукции. Следовательно, модель двойственной задачи следующая:

$$\begin{array}{l}
\mathrm{F}\min = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_n; \\
\left.\begin{array}{l}
a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\
a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\
\mathbf{KKKKKKKKKK} \\
a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n.
\end{array}\right\} \\
y_i \geq 0, i = \overline{1, m}.
\end{array}$$

Значение расчета цен ресурсов состоит не в обосновании целесообразности их продажи, а в оценке их использования и влияния на объем и эффективность производства. Поэтому переменные $y_i \ \left(i = \overline{1,\, m}\right)$ называют *двойственными оценками*, или *объективно обусловленными оценками*. В зарубежной литературе их обычно называют *теневыми ценами*.

Правила перехода от прямой задачи к двойственной:

1. Если прямая задача – на максимум, то двойственная – на минимум, и наоборот.

2. Каждому из m ограничений прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи.

3. Каждой из n переменных прямой задачи соответствует ограничение двойственной.

4. Коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами ограничений двойственной.

5. Свободные члены b_i ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной.

6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи, и наоборот.

7. Для пары взаимно-двойственных симметричных задач все переменные неотрицательные; задаче на максимум соответствуют неравенства типа $\leq$, задаче на минимум – вида $\geq$.

Первая теорема двойственности

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций равны. Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции, то система ограничений другой задачи противоречива.

Экономическая интерпретация теоремы такова: если разрешима задача определения оптимального плана производства, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Чтобы план производства и вектор оценок ресурсов были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы доход и суммарная оценка ресурсов совпадали. Несовпадение – это сигнал о том, что система находится в нестабильном состоянии, поскольку стоимость потребляемых ресурсов превышает получаемый доход. Таким образом, двойственные оценки выступают как инструмент балансировки затрат и результатов. Второе утверждение теоремы можно интерпретировать так: предположим, что ресурсов недостаточно для обеспечения заданного плана производства, тогда для его выполнения пришлось бы приобретать ресурсы по любой (формально неограниченной) цене.

Малая теорема двойственности

Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

Теорема об оценках

Двойственные оценки численно равны изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу, точнее:

$$\frac{\partial Z(x^*)}{\partial b_i} = y_i, \ i = \overline{1, m}.$$

Экономический смысл очевиден: единичный прирост ресурса (при оптимальном его использовании) позволяет увеличить доход на величину, равную теневой цене этого ресурса.

Методика выполнения работы

Составить математическую модель двойственной задачи на основе следующей прямой задачи:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 110, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \le 110, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 100. \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

Определить решение двойственной задачи на основании прямой задачи. Дать экономическую интерпретацию решения.

1. Поскольку прямая задача – на максимум, то двойственная – поиск минимума.

2. В исходной задаче 3 ограничения, следовательно, в двойственной задаче будет 3 переменных: y_1, y_2, y_3.

3. В прямой задаче – 3 переменных, следовательно, в двойственной задаче будет 3 ограничения.

4. Коэффициенты целевой функции прямой задачи станут свободными членами ограничений двойственной.

5. Свободные члены ограничений прямой задачи станут коэффициентами целевой функции двойственной.

6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получится транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи.

7. $y_i \geq 0, i = \overline{1,3}$.

8. Модель согласно приведенным правилам примет вид:

$$\min F = 110y_1 + 110y_2 + 100y_3;$$

$$\left.\begin{aligned} &6y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 2,\\ &2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3,\\ &5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 8. \end{aligned}\right\}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Согласно первой теореме двойственности значение целевой функции $F\min = 176$.

Из симплексной таблицы можно определить, что решение двойственной задачи: $y_1 = 1{,}6$; $y_2 = 0$; $y_3 = 0$ (см. табл. 4: $x_4 = 8/5$, $x_5 = 0$; $x_6 = 0$).

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

Рацион коровы состоит из нескольких видов кормов. Требуется обеспечить количество питательных веществ в рационе не ниже заданного. На основании математической модели (согласно полученному варианту), составить двойственную задачу.

Вариант 1	Вариант 2
$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4;$ $\left.\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 12,\\ &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 16. \end{aligned}\right\}$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$	$\min Z = 7x_1 + 13x_2 + 8x_3;$ $\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \geq 3,\\ &x_1 + x_3 \geq 4,\\ &x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 2. \end{aligned}\right\}$ $x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

Вариант 3	Вариант 4
$\min Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3;$ $\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_2 + 6x_3 \ge 8. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$\min Z = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 6x_4;$ $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 16, \\ x_1 + x_2 + x_4 \ge 15. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$

Задание 2

Предприятие может выпускать 3 вида комбикормов. Имеющиеся ресурсы – оборудование и два вида сырья. Имеются дополнительные ограничения по обязательному выпуску комбикорма. На основании математической модели (согласно полученному варианту) составить двойственную задачу.

Вариант 1	Вариант 2
$\max Z = 2x_1 + 5x_2 + 10x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 150, \\ 4x_1 + 10x_3 \le 100, \\ 8x_1 + 3x_2 + 9x_3 \le 160, \\ x_3 \ge 20. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 60, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 120, \\ x_2 \ge 50. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$
Вариант 3	**Вариант 4**
$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 180, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 100, \\ 3x_2 + 1x_3 \le 100, \\ x_1 \ge 30. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$	$\max Z = 12x_1 + 4x_2 + 3x_3;$ $\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150, \\ x_1 + 3x_3 \le 120, \\ x_1 + 2x_2 \le 100, \\ x_3 \ge 40. \end{array}\right\}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$

Тестовое задание для самоконтроля

Вопрос 1

Базис в закрытой транспортной задаче называют вырожденным, если в переменных (m – количество строк и n – количество столбцов) в нем ...

Варианты ответа:

- $< m + n - 1$;
- $> m + n - 1$;
- $< n - 1$;
- $< m - 1$;
- $= 0$.

Вопрос 2

В случае вырожденного базиса нулевую переменную вводят в …

Варианты ответа:

- любую заполненную клетку, не образующую цикл;
- любую незаполненную клетку, образующую цикл;
- любую клетку;
- любую заполненную клетку, образующую цикл;
- любую незаполненную клетку, не образующую цикл.

Вопрос 3

Для решения транспортной задачи методом потенциалов необходимо …

Варианты ответа:

- привести закрытую задачу к открытому типу;
- привести открытую задачу к закрытому типу;
- использовать метод северо-западного угла;
- привести оптимизационную задачу к закрытому типу;
- привести оптимизационную задачу к открытому типу.

Вопрос 4

Если закрытая транспортная модель содержит m строк и n столбцов, то количество переменных должно быть …

Варианты ответа:

- $m - n - 1$;
- $m + n$;
- $m + n + 1$;
- $m + n - 1$;
- $m - n$.

Вопрос 5

Модели транспортной задачи могут быть …

Варианты ответа:
- открытыми и оптимизационными;
- оптимизационными и закрытыми;
- имитационными и эконометрическими;
- имитационными и инвестиционными;
- открытыми и закрытыми.

Вопрос 6

Представлена задача для решения методом потенциалов. Каково дальнейшее действие?

Предложение поставщиков	Спрос получателей			Потенциалы поставщиков
	90	30	40	
50	8	9	2	$u_1 =$
60	5	3	1	$u_2 =$
70	7	6	4	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3=$	

Варианты ответа:
- требуется ввести искусственную строку с максимальными тарифами (дополнительного поставщика);
- требуется ввести искусственный столбец с максимальными тарифами (дополнительного получателя);
- требуется ввести искусственный столбец с нулевыми тарифами (дополнительного получателя);
- промежуточные действия не нужны, можно сразу создавать начальный опорный план;
- требуется ввести искусственную строку с нулевыми тарифами (дополнительного поставщика).

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение математической модели задачи оптимального использования ресурсов.
2. Каковы правила перехода от прямой задачи к двойственной?
3. Какова суть значения расчета цен ресурсов?
4. Какова экономическая интерпретация первой теоремы двойственности?
5. В чем состоит экономический смысл теоремы об оценках?

Практическое занятие № 3

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Цель занятия: отработка приемов решения транспортной задачи методом потенциалов.

Теоретические сведения

Модель транспортной задачи называют открытой, если спрос и предложение не равны, и закрытой – в случае их равенства. Только к закрытой модели применим специальный алгоритм решения транспортной задачи. Открытые модели просто преобразуются в закрытые. Для этого достаточно в ситуации, когда предложение больше спроса, ввести фиктивного получателя с объемом спроса, равным разнице между спросом и предложением, а в ситуации дефицита – ввести фиктивного поставщика с соответствующим объемом поставки. Тарифы фиктивных перевозок считать нулевыми, результаты интерпретировать так: поставки к фиктивному получателю – грузы, оставшиеся у поставщика; поставки от фиктивного поставщика – недовыполнение заказа получателя.

Методы построения начального опорного плана

1. Метод северо-западного угла: таблица заполняется, начиная с верхнего левого угла.
2. Метод минимального элемента, использующий следующую последовательность действий:

1) выбрать в транспортной таблице ячейку с минимальной стоимостью перевозок. Если таких ячеек несколько, то любую из них;
2) переменной в выбранной ячейке присвоить максимально возможное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение;
3) корректировать значения спроса и предложения, уменьшая их на величину значения занесенной переменной. При этом одно из этих значений обязательно будет равно нулю.

4) вычеркнуть строку (или столбец) с обнуленной величиной ограничения, чтобы не присваивать значения остальным переменным. Если одновременно обнуляются значения и спроса и предложения, то вычеркивается только что-то одно.

5) если осталось больше одной ячейки, то вернуться к первому шагу. Иначе занести в оставшуюся ячейку еще нераспределенный груз, для которого спрос и предложение всегда будут совпадать. Построение опорного плана закончено.

Метод потенциалов основан на соотношениях теории двойственности и состоит в том, что каждому поставщику ставятся в соответствие числа (потенциалы) u_i, каждому получателю – v_j, удовлетворяющие условиям $u_i + v_j = c_{ij}$ в тех клетках таблицы, которые вошли в опорный план, где c_{ij} – тарифы на перевозку. Таких клеток $m+n$, потенциалов $m+n-1$, где m – количество поставщиков, n – количество получателей. Потенциалы можно интерпретировать как выплаты за единицу груза, получаемые транспортной организацией как при погрузке, так после доставки груза. Величины потенциалов могут быть как со знаком «+», так и со знаком «–», но выплаты за перевозку по тому опорному плану, для которого они определены, будут точно соответствовать заданным тарифам.

Для незаполненных клеток значение разности $c_{ij} - (u_i + v_j)$ может оказаться с любым знаком. Если $c_{ij} - (u_i + v_j) > 0$, то включение такой клетки в базис только увеличит суммарные затраты. Следовательно, если во всех незаполненных клетках тарифы превышают суммы потенциалов, то план оптимален. Рассматриваемые разности являются оценками переменных, поэтому, если план еще не является оптимальным, то нужно выбрать для включения в базис ту клетку, для которой абсолютное значение отрицательной оценки $c_{ij} - (u_i + v_j) < 0$ является наибольшим, и занести в нее максимально возможную величину перевозимого груза. При этом балансы по строкам и столбцам необходимо сохранить, а все переменные должны оставаться неотрицательными.

Методика выполнения работы

Требуется минимизировать транспортные издержки на доставку картофеля (т) получателям (магазинам) со складов фирмы-поставщика (табл. 1), учитывая тарифы на перевозку единицы продукции (усл. ден. ед.), объем заказа (т) и количество продукции (т), хранящейся на каждом складе.

Таблица 1

Исходные данные

Предложение поставщиков	Спрос получателей		
	40	50	60
30	4	12	9
70	11	10	7
70	1	4	5

Определить начальный опорный план транспортной задачи:

1) методом северо-западного угла;

2) методом минимального элемента.

Рассчитать значение стоимости перевозки при начальном опорном плане для каждого метода.

1. Определение начального опорного плана методом северо-западного угла.

1.1. Проанализировать условие задачи. Запасы – 170 ед. Потребности – 150 ед. Для приведения задачи к закрытому виду ввести фиктивного получателя (табл. 2).

Таблица 2

Подготовленная к решению задача

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4	2	9	0
70	11	10	7	0
70	1	4	5	0

1.2. Решение задачи – графическое. Записать в северо-западный угол транспортной таблицы требуемое количество груза в зависимости от возможностей поставщиков: 30 ед. Когда первый ресурс распределен, транспортная таблица преобразуется следующим образом (табл. 3).

Таблица 3

Начало расчета по методу северо-западного угла

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
0 (30)	4 **30**	2 ~	9 ~	0 ~
70	11	10	7	0
70	1	4	5	0

1.3. Северо-западным углом становится следующая ячейка.

Продолжить расчет по алгоритм до окончательного заполнения транспортной таблицы. Начальный опорный план по методу северо-западного угла найден (табл. 4).

Таблица 4

Начальный опорный план по методу северо-западного угла

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4 **30**	12 ~	9 ~	0 ~
70	11 **10**	10 **50**	7 **10**	0 ~
70	1	4	5 **50**	0 **20**

2. Определить начальный опорный план методом минимального элемента. Исходные данные – в табл. 2.

Выбрать в транспортной таблице ячейку с минимальной стоимостью перевозок и записать в нее максимально возможное значение, допускаемое ограничениями на спрос и предложение. Корректировать значения спроса и предложения. Вычеркнуть столбец с обнуленной величиной ограничения (табл. 5).

Таблица 5

Начало расчета по методу минимального элемента

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	0 (40)	50	60	20
30	4 ~	12	9	0
70	11 ~	10	7	0
30 (70)	1 **40**	4	5	0

Использовать алгоритм с оставшимися ячейками до окончательного заполнения транспортной таблицы. Нераспределенные грузы будут записаны в столбец фиктивного получателя. Начальный опорный план по методу минимального элемента найден (табл. 6).

Таблица 6

Начальный опорный план по методу минимального элемента

Предложение поставщиков	Спрос получателей			
	40	50	60	20
30	4	12 **10**	9	0 **20**
70	11	10 **10**	7 **60**	0
70	1 **40**	4 **30**	5	0

3. Используя данные табл. 4, рассчитать значение целевой функции – суммы произведений количества груза на стоимость перевозки единицы груза, по методу северо-западного угла:

$$Z = 30 \cdot 4 + 10 \cdot 11 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 50 \cdot 5 = 1050.$$

4. Используя данные табл. 6, рассчитать значение целевой функции по методу минимального элемента:

$$Z = 40 \cdot 1 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 10 + 30 \cdot 4 + 60 \cdot 7 = 800.$$

5. Продолжить расчет по методу минимального элемента.

6. Определить потенциалы для заполненных клеток. Расчет начать с присвоения u_1 значения 0. Тогда можно определить v_2 и v_4 по формуле $u_i + v_j = c_{ij}$ (табл. 7).

Таблица 7

Определение потенциалов

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4	12 10	9	0 20	$u_1 = 0$
70	11	10 10	7 **60**	0	$u_2 =$
70	1 40	4 30	5	0	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 =$	$v_2 = 12$	$v_3 =$	$v_4 = 0$	

7. Теперь можно определить u_2 и u_3, затем – оставшиеся потенциалы (табл. 8).

Таблица 8

Рассчитанные потенциалы

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4	12 10	9	0 20	$u_1 = 0$
70	11	10 10	7 **60**	0	$u_2 = -2$
70	1 40	4 30	5	0	$u_3 = -2$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 9$	$v_2 = 12$	$v_3 = 9$	$v_4 = 0$	

8. С помощью рассчитанных потенциалов проанализировать пустые клетки транспортной таблицы. Перспективной для ввода в базис является переменная (1,1): $c_{11} - (u_i + v_j) = 4 - (0 + 9)$.

9. Построить замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в этой ячейке и состоит из последовательности вертикальных и горизонтальных отрезков (диагональные недопустимы), соединяющих заполненные клетки. Его можно обходить как по часовой стрелке, так и против нее. Важно то, что если вводимую в базис переменную пометить знаком «+» и изменять знак в каждой угловой точке цикла, то в любой строке и любом столбце каждому знаку «+» будет соответствовать знак «–». Следовательно, если всем участвующим в цикле переменным дать некоторое приращение Δ с соответствующими знаками, то все балансовые соотношения по строкам и столбцам будут сохранены. Чтобы объемы перевозок оставались неотрицательными, это приращение Δ нужно взять равным минимальному по абсолютной величине значению переменной из числа помеченных знаком «–» (табл. 9).

Таблица 9

Построение цикла

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4 –5	12 10	9	0 20	$u_1 = 0$
70	11	10 10	7 **60**	0	$u_2 = –2$
70	1 40	4 30	5	0	$u_3 = –2$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 9$	$v_2 = 12$	$v_3 = 9$	$v_4 = 0$	

10. Определить потенциалы для полученного решения (табл. 10).

Таблица 10

Определение потенциалов

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4 10	12	9	0 20	$u_1 = 0$
70	11	10 10	7 60	0	$u_2 = 3$

Окончание таблицы 10

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
70	1 30	4 40	5	0	$u_3 = -3$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

11. Перспективной для ввода в базис является переменная (2,4). Построить цикл (табл. 11).

Таблица 11

Построение цикла

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4 10	12	9	0 20	$u_1 = 0$
70	11	10 10	7 60	0 –3	$u_2 = 3$
70	1 30	4 40	5	0	$u_3 = -3$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 4$	$v_4 = 0$	

12. Определить потенциалы для полученного решения (табл. 12).

Таблица 12

Определение потенциалов

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	40	50	60	20	
30	4 20	12	9	0 10	$u_1 = 0$
70	11	10	7 60	0 10	$u_2 = 0$
70	1 20	4 50	5	0	$u_3 = -3$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 4$	$v_2 = 7$	$v_3 = 7$	$v_4 = 0$	

13. В базис нельзя ввести ни одной клетки. Оптимальное решение получено. Затраты на перевозку составят 720 усл. ден. ед. (сумма произведений грузов на тарифы).

Задание для самостоятельного решения

Поставщик комбикормов имеет 3 склада. Три свинокомплекса сделали заказ на покупку (т). Известны транспортные тарифы (усл. ден. ед.) на перевозку 1 т комбикорма каждому заказчику с каждого склада.

Определить методом потенциалов оптимальный план доставки комбикорма на свинокомплексы, который минимизирует транспортные издержки поставщика.

Вариант 1

Предложение	Спрос		
	40	50	60
30	4	12	9
70	11	0	7
70	1	4	5

Вариант 2

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	7	8	1
60	4	5	9
50	5	13	3

Вариант 3

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	5	7	4
60	11	12	10
50	6	9	10

Вариант 4

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	3	1	2
60	8	11	7
50	5	4	10

Вариант 5

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	8	5	3
60	5	3	2
50	6	7	11

Вариант 6

Предложение	Спрос		
	30	80	40
70	3	2	4
60	9	7	10
50	5	7	3

Тестовое задание для самоконтроля

Вопрос 1

Чему равно $v1$?

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 =$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 =$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- 0;
- 2;
- 8;
- 9;
- при имеющихся данных определить пока невозможно.

Вопрос 2

На данный момент можно определить …

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 = 0$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 =$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 8$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- u_2 и u_3;

- u_1 и u_3;
- u_1;
- u_2;
- u_3.

Вопрос 3

Чему равно u_2?

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 = 0$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 =$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 8$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- 5;
- –5;
- 3;
- –3;
- при имеющихся данных определить пока невозможно.

Вопрос 4

Чему равно u_3?

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 = 0$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 =$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 8$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- 7;
- –7;
- 8;
- –8;
- при имеющихся данных определить пока невозможно.

Вопрос 5

На данный момент можно определить …

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 = 0$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 = -3$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 8$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- v_2, v_3, v_4;
- v_3, v_4;
- v_3;
- v_4;
- v_2.

Вопрос 6

Чему равно v_2?

Предложение поставщиков	Спрос получателей				Потенциалы поставщиков
	90	**30**	**40**	**20**	
50	8 **50**	9	2	2	$u_1 = 0$
60	5 **40**	3 **20**	1	1	$u_2 = -3$
70	7	6 **10**	4 **40**	4 **20**	$u_3 =$
Потенциалы покупателей	$v_1 = 8$	$v_2 =$	$v_3 =$	$v_4 =$	

Варианты ответа:

- 9;
- –9;
- 6;
- –6;
- 0.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение понятиям открытой и закрытой транспортной задачи. Как привести транспортную задачу к закрытому виду?
2. Опишите алгоритм определения начального опорного плана по методу северо-западного угла.
3. Опишите алгоритм определения начального опорного плана по методу минимального элемента.
4. Как определить перспективные клетки для ввода в базис?
5. Как построить цикл?

Практическое занятие № 4

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

Цель занятия: отработать приемы принятия решений с использованием теории статистических игр.

Теоретические сведения

Чаще всего при решении экономических задач в АПК существует проблема выбора оптимального решения в условиях неопределенности. При этом моделируется игровая схема, где существует неизвестность поведения противоположной стороны под влиянием случайных факторов. Такие модели называют «игры с природой», или статистическими играми. При постановке модели статистических решений необходимо учитывать несколько особенностей.

1. Имеется m возможных линий поведения (стратегий) лица, принимающего решения (ЛПР), как сознательного игрока А, т. е. A_1, $A_2, \dots, A_m$ (табл. 1).

Таблица 1

	$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
A_1	a_1	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

2. Природа обладает множеством состояний П, т. е. $П_1, П_2, \dots, П_n$. Из прежнего опыта ЛПР могут быть известны возможные состояния природы, а также вероятности Q_j, с которыми природа их реализует.

3. Если лицо, принимающее решения, имеет возможность оценить последствия применения каждой своей стратегии A_i в зависимости от любого состояния $П_j$ природы, то статистическую игру можно задать платежной матрицей.

Сформулированы ряд критериев, которые реализуют логическую схему принятия решения.

Максиминный критерий Вальда $\max_i(\min_j a_{ij})$ основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решения, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших.

Максимаксный критерий $\max_i(\max_j a_{ij})$. Выбирается стратегия, при которой возможно получение максимального выигрыша.

Критерий Гурвица – это промежуточный выбор между минимаксным и максиминным критериями. Стратегия выбирается в соответствии со значением:

$$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент пессимизма $(0 \le \lambda \le 1)$. При крайних значениях этого коэффициента можно получить, соответственно, минимаксный и максимаксный критерии. При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0{,}5$ или $\lambda = 0{,}6$.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Строится матрица рисков, элементы которой есть разности между максимально возможным выигрышем при j-м состоянии природы и выигрышем при использовании i-й стратегии. Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях. Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска.

Если известны вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1,n}$, то пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$, где $\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$.

Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*.

Методика выполнения работы

Сельскохозяйственное предприятие должно принять один из четырех производственных планов по выращиванию сельхозпродукции. Прибыль (тыс. усл. ден. ед.), указанная в табл. 2, зависит от того, каким будет лето: дождливым ($П_1$), жарким ($П_2$) или умеренным ($П_3$). Вероятность наступления дождливого, жаркого или умеренного лета взята из статистических данных наблюдения за погодой.

Таблица 2

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	5	1	8
A_2	3	5	4
A_3	6	2	4
A_4	2	7	6
q	0,3	0,4	0,3

Определить наилучшую стратегию по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

1. При выполнении задания произвести расчеты по заданным формулам, численно проверяя приведенное решение.
2. Критерий Вальда – оптимальной будет стратегия A_2.
3. Максимаксный критерий – оптимальной будет стратегия A_1.
4. Критерий Гурвица. Принять $\lambda = 0,5$ – оптимальны стратегии A_1 и A_4. При $\lambda = 0,6$ (более пессимистическом подходе) – A_4 (табл. 3).

Таблица 3

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу $\lambda = 0,5$	По Гурвицу $\lambda = 0,6$
A_1	5	1	8	1	**8**	**4,5**	3,8
A_2	3	5	4	**3**	5	4	3,8

Окончание таблицы 3

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу $\lambda = 0,5$	По Гурвицу $\lambda = 0,6$
A_3	6	2	4	2	6	4	3,6
A_4	2	7	6	2	7	**4,5**	**4**
q	0,3	0,4	0,3				

5. *Критерий Сэвиджа*. Построить матрицу рисков. Для этого по каждому столбцу определить максимум и значение элемента матрицы – разность между максимальным и текущим значениями. Оценить максимальный риск (максимум по каждой строке) и выбрать наименьший риск (стратегии A_2 и A_4) (табл. 4).

Таблица 4

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	1	6	0	6
A_2	3	2	4	**4**
A_3	0	5	4	5
A_4	4	0	2	**4**

6. Критерий Байеса. Рассчитать для каждой стратегии $\overline{a_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Выбрать стратегию A_4 (табл. 5).

Таблица 5

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$\overline{a_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
A_1	5	1	8	4,3
A_2	3	5	4	4,1
A_3	6	2	4	3,8
A_4	2	7	6	**5,2**
q	0,3	0,4	0,3	

7. *Принцип недостаточного основания Лапласа*. Рассматриваются три возможных состояния природы, следовательно, вероятность наступления каждого равна 0,33. Далее расчет аналогичен критерию Байеса. Выбрать стратегию $А_4$.

8. *Итог*: стратегия $А_3$ бесперспективна и может быть исключена из рассмотрения. Согласно полученным расчетам наиболее перспективной будет стратегия $А_4$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

Фермер может выращивать один из трех сортов моркови. Предполагаемая урожайность каждого сорта зависит от погодных условий. Лето может быть умеренным ($П_1$), жарким ($П_2$) или дождливым ($П_3$). Коэффициент вероятности наступления умеренного, жаркого или дождливого лета взят из статистических данных наблюдения за погодой и составляет 0,3; 0,4 и 0,2 соответственно (табл. 6).

Таблица 6

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
$А_1$	266	260	262
$А_2$	265	268	260
$А_3$	250	230	285

Определить наилучшую стратегию по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

Задание 2

Перерабатывающее предприятие может принять одну из 5 возможных стратегий развития производства. Прибыль зависит от закупок на экспорт и от поведения потребителей на внутреннем рынке. Эксперты проанализировали 4 предполагаемые ситуации и оценили прибыль (балл). Коэффициент вероятности наступления каждой ситуации, по их мнению, составляет 0,4; 0,2 и 0,4 соответственно (табл. 7).

Таблица 7

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$А_1$	6	1	13	8	1
$А_2$	12	0	8	9	6
$А_3$	10	4	2	15	7
$А_4$	4	7	8	9	5
q	0,2	0,1	0,2	0,1	0,3

Определить наилучшую стратегию развития предприятия по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

Задание 3

Завод изучает перспективы производства теплиц. Проект может быть реализован на большой или малой производственной базе. Возможно, что заводу может быть вообще не выгодно производить теплицы. При благоприятной рыночной ситуации большое производство позволило бы получить чистую прибыль 200 тыс. усл. ден. ед. Если рынок окажется неблагоприятным, то при большом производстве она понесет убытки в размере 180 тыс. усл. ден. ед. Малое производство дает 100 тыс. усл. ден. ед. прибыли при благоприятной рыночной ситуации и 20 тыс. усл. ден. ед. убытков – при неблагоприятной.

Согласно полученным оценкам коэффициент вероятности наступления благоприятного состояния среды – 0,6.

Какое решение следует принять: создавать большую или малую производственную базу или отказаться от проекта?

Определить наилучшую стратегию по критерию Вальда, максимаксному критерию, критерию Гурвица, критерию Сэвиджа, критерию Байеса и принципу недостаточного основания Лапласа.

Тестовое задание для самоконтроля

Вопрос 1

Какая стратегия доминирует над стратегией А5?

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	3	1	7	5	6
A2	1	–6	3	–8	–6
A3	4	3	7	9	0
A4	–5	–1	2	5	5
A5	2	0	0	5	3

Варианты ответа:

- такой стратегии нет;
- A4;
- A2;
- A3;
- A1.

Вопрос 2

Какая стратегия доминирует над стратегией A5?

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	0	9	–6	–2	–4
A2	–4	–8	–1	–5	–3
A3	–4	–2	–6	5	9
A4	5	5	6	–3	7
A5	–8	–8	0	–7	–6

Варианты ответа:

- такой стратегии нет;
- A4;
- A2;
- A3;
- A1.

Вопрос 3

Какая стратегия доминирует над стратегией A5?

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	8	4	0	–9	6
A2	2	8	9	9	2
A3	6	–3	–2	–7	–4
A4	0	2	–7	–7	8
A5	–1	–8	–2	–6	–9

Варианты ответа:

- такой стратегии нет;
- A4;
- A2;
- A3;
- A1.

Вопрос 4

Какая стратегия доминирует над стратегией A4?

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	–2	5	–9	6	–4
A2	–2	–3	–1	–7	–5
A3	0	–3	3	0	4
A4	–9	–1	–2	5	2
A5	–2	–9	–2	2	–7

Варианты ответа:

- такой стратегии нет;
- A5;
- A2;
- A3;
- A1.

Вопрос 5

Какая стратегия доминирует над стратегией A3?

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	1	–9	–7	0	–6
A2	–9	–7	5	4	–2
A3	–5	4	–2	–2	–7
A4	–6	–6	2	–7	–3
A5	–2	4	3	5	6

Варианты ответа:

- такой стратегии нет;
- A5;
- A2;
- A4;
- A1.

Вопрос 6
Какая стратегия доминирует над стратегией А1?

	В1	В2	В3	В4	В5
А1	–1	–4	0	8	–3
А2	4	6	1	9	–4
А3	–7	–9	6	9	4
А4	–2	4	1	7	–2
А5	–9	8	–3	–2	–7

Варианты ответа:
- такой стратегии нет;
- А5;
- А2;
- А4;
- А3.

Контрольные вопросы

1. Какова суть критерия Вальда? максимаксного критерия?
2. Какова суть критерия Гурвица?
3. Какова суть критерия Сэвиджа?
4. Какова суть критерия Байеса?
5. Какова суть принципа недостаточного основания Лапласа?

Практическое занятие № 5

ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВОГО ГРАФИКА, НАХОЖДЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ

Цель занятия: отработка приемов расчета критического пути и временных параметров сетевого графика.

Теоретические сведения

Сетевой график можно рассматривать как ориентированный граф (орграф), т. е. конечное непустое множество вершин, часть которых соединена дугами (линиями со стрелками). Обычно при построении сетевых графиков под вершинами орграфа понимают события, под дугами – выполняемые работы.

Работа – любое действие, требующее затрат времени и ресурсов. Изображается стрелкой с указанием направления. Рядом со стрелкой записывают временные (числовые) характеристики работы.

Событие – состояние проекта, которому соответствует окончание всех входящих в него работ и возможность начала следующих за ним операций. Изображается кружком, в котором может быть записан порядковый номер события, и после расчета – время его наступления.

Различают три вида событий: исходное (то, с которого начинается выполнение комплекса операций); завершающее (обозначающее, что конечная цель проекта достигнута) и промежуточные (все остальные события).

Построение сетевого графика удобно начинать с составления полного списка операций, которые необходимо выполнить. Порядок операций произвольный, но для каждой операции указываются предшествующие ей и задается длительность выполнения. Чтобы управлять ходом выполнения работ, представленных сетевой моделью, необходимо знать:

– продолжительность выполнения всего проекта;

– время свершения событий;

– сроки начала и окончания отдельных операций;

– выявление операций, задержка выполнения которых увеличит длительность выполнения всего проекта;

– определение допустимых задержек для времени выполнения некритических операций, не влияющих на конечный срок проекта.

Путь – последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей.

Длина пути – сумма продолжительностей работ, образующих путь.

Полный путь – путь от исходного события до завершающего.

Критический путь – полный путь, имеющий наибольшую продолжительность. Находящиеся на нем операции и события называют критическими и выделяют на графике жирной линией или цветом. Длину критического пути часто называют критическим временем выполнения проекта.

Ранний срок свершения события – срок завершения всех предшествующих j-му событию работ, или, иными словами, самый длинный предшествующий событию путь.

Поздний срок свершения события – такой срок, увеличение которого приведет к увеличению критического времени выполнения проекта.

Резерв времени события – это разность между поздним и ранним сроками свершения события. Очевидно, что для критических событий, и только для них, резервы времени будут равны нулю. Поэтому если рассчитать резервы времени для каждого события, то критический путь может проходить только через события с нулевым резервом времени.

Для расчета удобно использовать четырехсекторную схему (рис. 1).

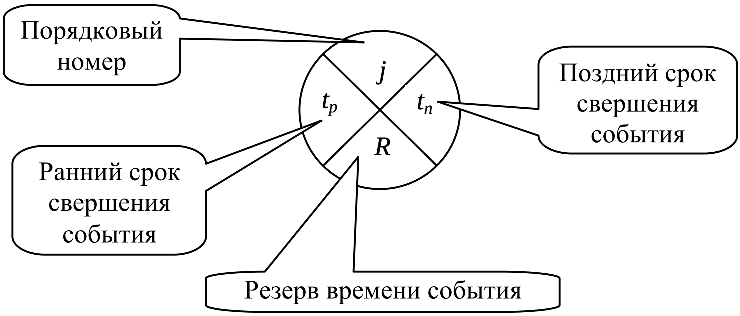


Рис. 1. Четырехсекторная схема события

Вычисления выполняются в два прохода. При проходе вперед (в порядке возрастания номеров событий) определяются самые ранние времена наступления событий. Для исходного события ранний срок можно принять равным нулю. Для j-го события достаточно найти наибольшую сумму ранних сроков наступления каждого предшествующего события и продолжительности операции, связывающей предшествующее событие с j-м.

Второй этап – проход назад (в порядке убывания номеров событий) – позволяет определить самые поздние сроки наступления тех же самых событий. Очевидно, что для завершающего события поздний и ранний сроки совпадают и равны критическому времени проекта. Для *j*-го события выбирается минимальная из разностей, уменьшаемым в которых является поздний срок непосредственно следующего события, а вычитаемым – продолжительность операции, связывающей *j*-е событие со следующим. Для исходного события поздний и ранний сроки всегда совпадут, если в расчете не допущено ошибок.

Резервы времени событий находятся вычитанием, и остается показать критический путь (выделен жирной линией). Он может проходить только через события с нулевым значением резерва, но должен состоять только из таких операций (их называют критическими), продолжительность которых не может быть увеличена без увеличения времени выполнения всего проекта.

Методика выполнения работы

Найти критический путь и временные параметры сетевого графика (для задания уже подготовлена четырехсекторная схема, в остальных заданиях ее надо будет рисовать) (рис. 2).

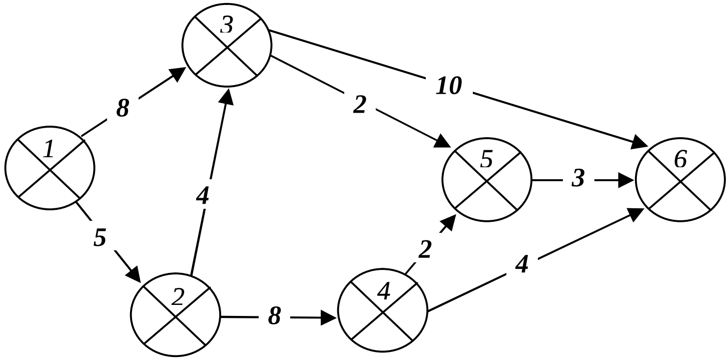


Рис. 2. Условие задачи

1. Выполнить первый этап расчета. Ранний срок свершения исходного события *1* равен 0.

2. Ранний срок свершения события *2* равен 5 (сроку свершения предшествующих работ).

3. Ранний срок свершения события *3* равен 5 + 4 (самому длинному предшествующему событию пути).

4. Записать все ранние сроки свершения событий (рис. 3).

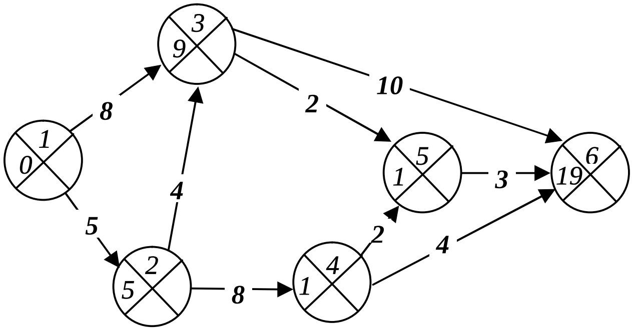


Рис. 3. Ранние сроки свершения событий

5. Для завершающего события поздний и ранний сроки совпадают и равны критическому времени проекта *19*.

6. Резерв времени события – это разность между поздним и ранним сроками свершения события. Для события *6* он равен нулю.

7. Поздний срок свершения события *5*: 19 – 3 = 16, резерв времени события *5* равен 1.

8. Для события *4* поздний срок свершения события равен наименьшему из двух возможных: 16 – 2 = 14.

9. Записать все поздние сроки свершения событий и резервы времени (рис. 4).

10. Критический путь: 1–2–3–6.

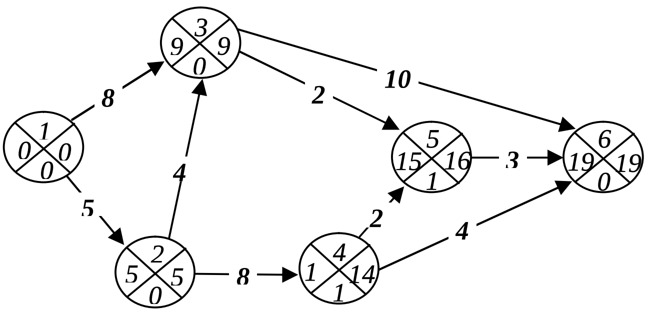
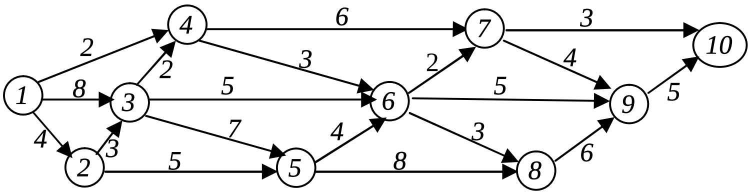


Рис. 4. Решение задачи

Задания для самостоятельного решения

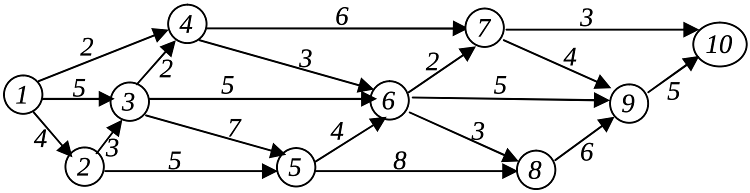
Задание 1

Найдите критический путь сетевого графика:



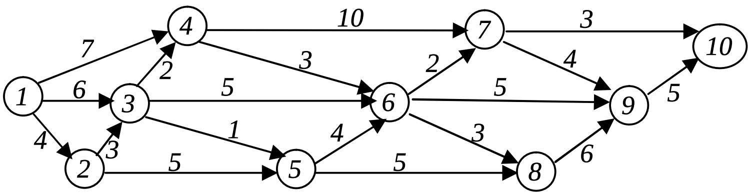
Задание 2

Найдите критический путь сетевого графика:



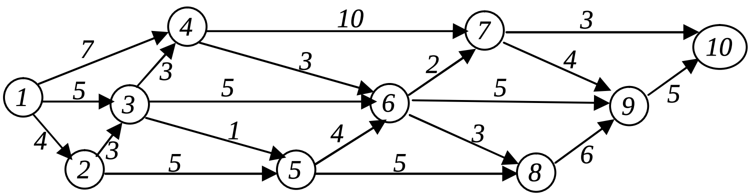
Задание 3

Найдите критический путь сетевого графика:



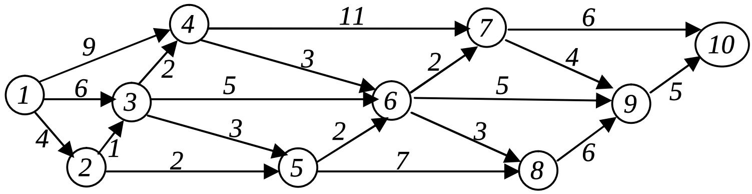
Задание 4

Найдите критический путь сетевого графика:



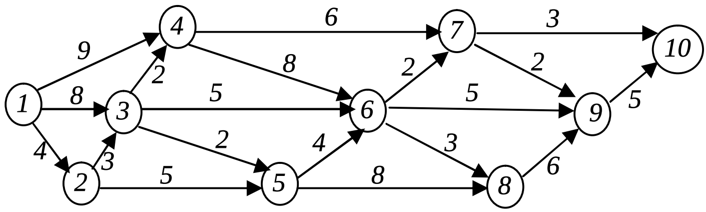
Задание 5

Найдите критический путь сетевого графика:



Задание 6

Найдите критический путь сетевого графика:



Тестовое задание для самоконтроля

Вопрос 1

В сетевом планировании выделяют следующие виды событий …

Варианты ответа:

- исходные, завершающие;
- исходные, промежуточные;
- промежуточные;
- исходные, промежуточные;
- исходное, завершающее, промежуточные.

Вопрос 2

Если для перехода от одного события к другому параллельно выполняются несколько работ, то следует использовать рисунки …

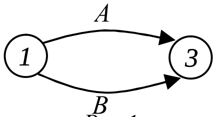


Рис.1

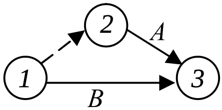


Рис. 2

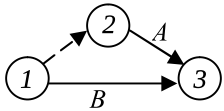


Рис. 3

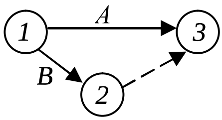


Рис. 4

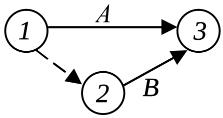
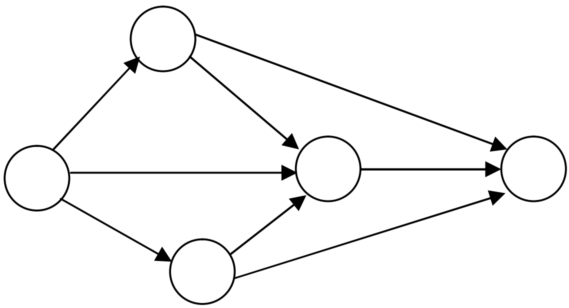


Рис. 5

Варианты ответа:

- 1, 4, 5;
- 1, 2, 3, 4, 5;
- 1, 2, 3;
- 2, 3, 4, 5;
- 1, 2, 3.

Вопрос 3



Варианты ответа:

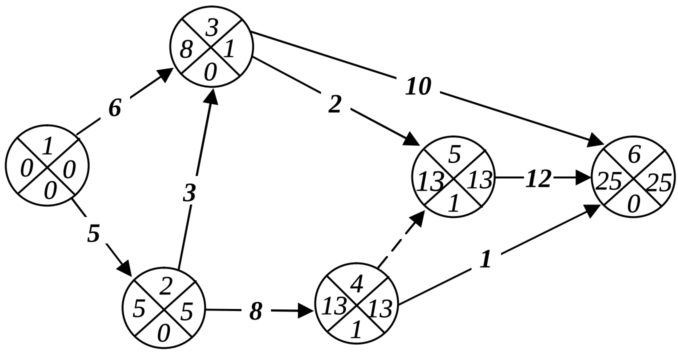
- стрелка обозначает работу, кружок – событие;
- обозначения назначаются каждым разработчиком графика;
- стрелка обозначает работу, кружок – исходное событие;

• стрелка обозначает работу, кружок – исходное и завершающее события;

• стрелка обозначает событие, кружок – работу.

Вопрос 4

Критический путь …



Варианты ответа:

• 1–2–4–6;

• 1–3–6;

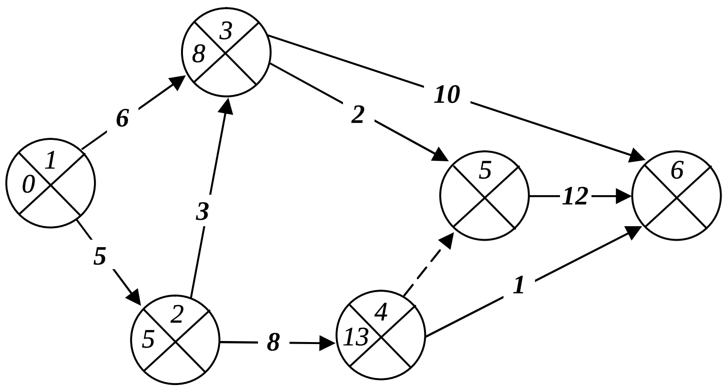
• 1–2–3–4–5–6;

• 1–2–4–5–6;

• 2–4–5.

Вопрос 5

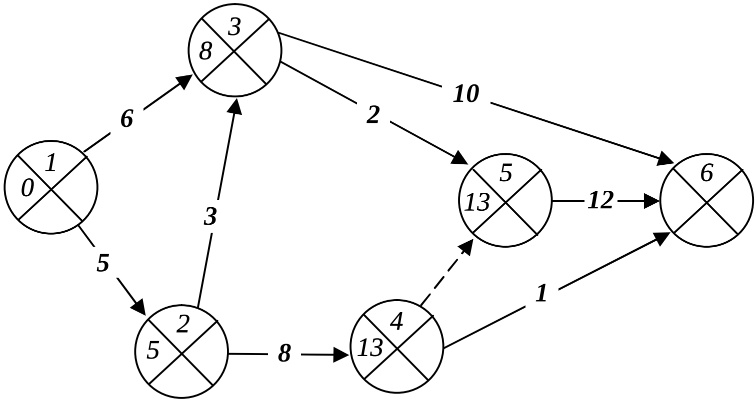
Ранний срок свершения события 5 равен …



Варианты ответа:
- 13;
- 8;
- 17;
- 10;
- 5.

Вопрос 6

Ранний срок свершения события *6* равен …



Варианты ответа:
- 0;
- 12;
- 14;
- 18;
- 25.

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите правила нумерации операций сетевого графика.
2. Какова методика определения раннего срока свершения события?
3. Какова методика определения позднего срока свершения события?
4. Какова методика определения резерва времени события?
5. Опишите механизм нахождения критического пути.

Практическое занятие № 6

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

Цель работы: освоить методику построения однофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

Эконометрическая (корреляционная) модель (КМ) – математическое выражение типа уравнения, в котором выражается взаимосвязь между результативным показателем и каким-то (какими-то) факторными показателями. В общем виде однофакторная линейная модель имеет вид

$$y_x = a_0 + a_1 x,$$

где y_x – ожидаемое значение результативного показателя, который формируется под воздействием вектора-фактора x;

x – значение факторного показателя;

a_0 – свободный член, который выражает влияние на результативный показатель неучтенных факторов;

a_1 – коэффициент регрессии, который показывает, на сколько единиц изменяется результативный показатель при изменении фактора на 1.

Методика выполнения работы

На результативный показатель оказывают влияние многие факторы, например, на продуктивность коровы влияет количество и качество корма, порода скота и т. д. Выбрав факторный показатель, приступают к построению уравнения регрессии. На практике связь между двумя переменными, если она есть, является вероятностной и графически выглядит как облако рассеивания эллипсоидной формы. Этот эллипсоид можно представить (аппроксимировать) в виде линии регрессии.

Пример расчета

Используя данные табл. 1, построить эконометрическую модель зависимости настрига шерсти от живой массы овцы (данные проверены на соответствие требованиям закона нормального распределения).

Таблица 1

Зависимость настрига шерсти от живой массы овцы

№ наблюдения	Живая масса *x*, кг	Настриг шерсти *y*, кг
1	50,2	5,3
2	50,3	5,8
3	50,4	5
4	51	5,7
5	51,2	6,1
6	51,4	6,3
7	51,6	6,8
8	51,9	7,3
9	52,3	6,6
10	52,4	6,8
11	52,9	6,6
12	53	6,7
13	53,2	7,8
14	53,5	7,5
15	53,6	7,6

Достроить исходную таблицу (см. табл. 1), заполнив следующие столбцы (табл. 2):

Таблица 2

Предварительные расчеты для анализа однофакторной модели

t	x_t	y_t	x_t^2	$x_t - \bar{x}$	$(x_t - \bar{x})^2$	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - \bar{y})^2$	$(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$
1	50,2	5,3						
2	50,3	5,8						
…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…
15	53,6	7,6						

Окончание таблицы 2

	t	x_t	y_t	x_t^2	$x_t-\overline{x}$	$(x_t-\overline{x})^2$	$y_t-\overline{y}$	$(y_t-\overline{y})^2$	$(x_t-\overline{x})(y_t-\overline{y})$
Сумма	–								
Среднее	–								

На основе данных полученной таблицы рассчитать коэффициенты модели $\tilde{a}_1 = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\overline{x})\,(y_t-\overline{y})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\overline{x})^2}$, где $T=15$ и $\tilde{a}_0 = \overline{y} - \tilde{a}_1 \cdot \overline{x}$.

По полученным значениям дать оценку следующим характеристикам модели $\tilde{y}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot \tilde{x}_t$:

– знак и значение $\tilde{a}_0$;

– знак и значение $\tilde{a}_1$.

Достроить табл. 2, заполнив следующие столбцы в табл. 3:

Таблица 3

Расчет несмещенной оценки дисперсии случайных переменных

	t	…	…	$\tilde{y}_t$	e_t	e_t^2	s_t^2
	1	…	…				
	2	…	…				
	…	…	…	...	…		…
	…	…	…	…	…		…
	15						
Сумма	–						
Среднее	–						

Примечание: $\tilde{y}_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cdot x_t$ – прогнозное значение модели;

$e_t = y_t - \tilde{y}_t$ – ошибка модели;

$s_t^2 = \dfrac{e_t^2}{T-2}$ – несмещенная оценка дисперсии случайных переменных.

Рассчитать несмещенную оценку дисперсии случайных переменных (ε) $s^2 = \sum_{t=1}^{T} s_t^2$.

Рассчитать несмещенную дисперсию оценки $\tilde{a}_1$:

$$s_{\tilde{a}_1}^2 = \frac{s^2}{T\ (\overline{x^2} - (\overline{x})^2)}.$$

Рассчитать несмещенную дисперсию оценки $\tilde{a}_0$:

$$s_{\tilde{a}_0}^2 = s_{\tilde{a}_1}^2 \cdot \overline{x^2}\ .$$

С помощью таблицы распределения *t*-критерия Стьюдента определить квантиль распределения *t*-критерия $t_{\gamma,T-2}$ для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Рассчитать наблюдаемое значение статистики *t*-критерия Стьюдента для параметра $\tilde{a}_1$, $t_{\tilde{a}_1} = \frac{\tilde{a}_1}{s_{\tilde{a}_1}}$ и проверить гипотезу о статистической значимости параметра для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Рассчитать наблюдаемое значение статистики *t*-критерия Стьюдента для параметра $\tilde{a}_0$, $t_{\tilde{a}_0} = \frac{\tilde{a}_0}{s_{\tilde{a}_0}}$ и проверить гипотезу о статистической значимости параметра для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Рассчитать доверительные интервалы для параметра $\tilde{a}_1$, $(\tilde{a}_1 - t_{\gamma,T-2} \cdot s_{\tilde{a}_1};\ \tilde{a}_1 + t_{\gamma,T-2} \cdot s_{\tilde{a}_1})$ для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Рассчитать доверительные интервалы для параметра $\tilde{a}_0$, $(\tilde{a}_0 - t_{\gamma,T-2} \cdot s_{\tilde{a}_0};\ \tilde{a}_0 + t_{\gamma,T-2} \cdot s_{\tilde{a}_0})$ для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Рассчитать коэффициент детерминации модели по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}{\sum_{t=1}^{T} (y_t - \overline{y})^2}.$$

Дать предварительное заключение об адекватности модели.

С помощью таблицы значений F-критерия Фишера определить квантиль распределения F-критерия для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$ ($M = 2$, $m = 1$).

Рассчитать наблюдаемое значение статистики Фишера для коэффициента детерминации

$$F_{R^2} = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{(T - m - 1)}{M}.$$

Проверить гипотезу о статистической значимости коэффициента детерминации для уровней $\gamma = 0,90;\ 0,95;\ 0,99$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1

Построить однофакторные модели и изобразить графически динамику изменения продуктивности и поголовья коров в Республике Беларусь (табл. 2).

Таблица 4

Продуктивность и поголовье коров в Республике Беларусь (на конец года)

Показатели	Годы												
	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Удой на 1 гол./г., кг	4438	4690	4630	4479	4638	4506	4508	4722	4813	4942	4962	5005	5268
Поголовье коров, тыс. гол.	1452	1445	1478	1477	1519	1525	1533	1512	1502	1500	1498	1495	1485

Задание 2

Используя данные табл. 3, выбрать наиболее существенный фактор, влияющий на урожайность зерновых, и построить однофакторную эконометрическую модель линейного типа.

Таблица 5

Информация для изучения урожайности зерновых

№ наблюдения	Урожайность зерновых, ц с 1 га	Внесение удобрений, ц д. в. на 1 га	Плодородие 1 га пашни, балл
1	38,2	3,0	53
2	39,0	3,4	54
3	43,0	5,0	47
4	49,0	4,7	63
5	42,0	4,6	38
6	46,0	4,8	46
7	45,0	5,5	52
8	42,0	3,3	54
9	42,5	3,7	51
10	44,0	3,9	53
11	45,5	4,1	55
12	43,5	4,0	50
13	45,5	4,5	47
14	39,8	3,7	49
15	39,0	3,4	41
16	36,4	3,6	36
17	38,0	3,5	39
18	40,5	3,6	47
19	40,8	4,0	40
20	42,0	3,8	50
21	36,0	3,5	35
22	39,0	3,5	33
23	42,5	4,0	39
24	44,1	4,2	45
25	46,8	4,8	52
26	39,2	4,1	46

Контрольные вопросы

1. Что определяют с помощью корреляционной матрицы?
2. Что означает выражение «выбрать форму связи между результативным и факторным показателями»?
3. Что определяет коэффициент парной корреляции?
4. Что показывает коэффициент регрессии?
5. Какая эконометрическая модель называется однофакторной?

Практическое занятие № 7

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Цель работы: отработать практические навыки оценки качества многофакторной эконометрической модели.

Теоретические сведения

Качество уравнения регрессии характеризуют следующие показатели:

1. *Коэффициент парной корреляции* (r) – для однофакторных линейных моделей; *коэффициент множественной корреляции* (R) – для многофакторных линейных моделей; *корреляционное отношение* (η) – для нелинейных моделей.

Данные показатели изменяются в пределах $-1 \leq r \leq 1$ и $0 \leq R(\eta) \leq 1$ и показывают силу влияния учтенных в уравнении факторных признаков на результативный. Чем ближе показатель к 1 (или –1), тем связь сильнее. Кроме этого, коэффициент парной корреляции показывает направление связи (знак «плюс» говорит о прямой связи, знак «минус» – об обратной связи).

2. *Коэффициент детерминации* (r^2, R^2, η^2), выраженный в процентах, показывает, на сколько процентов учтенные в уравнении регрессии факторные признаки объясняют вариацию (влияние) результативного показателя.

3. *Критерий Фишера* (F) дает общую оценку адекватности (правдивости) уравнения. Полученное значение критерия ($F_{расч}$) сравнивают с критическим (табличным) ($F_{табл}$) для принятого уровня значимости и числа степеней свободы ($n_1 = m - 1$ и $n_2 = n - m$, где n – число наблюдений, m – число факторов уравнения, включая результативный). Если оно окажется больше соответствующего табличного значения, то данное уравнение статистически значимо, т. е. доля вариации, обусловленная регрессией, намного превышает случайную ошибку.

4. *t-критерий Стьюдента* служит для проверки значимости (существенности) каждого коэффициента регрессии. Расчетные значения данного показателя сравнивают с критическими, которые

определяют с учетом принятого уровня значимости (α = 0,10; α = 0,05 или α = 0,01). При изучении социально-экономических явлений достаточным считаются: уровень значимости, равный 0,05, и числа степеней свободы, которые рассчитываются следующим образом: $n = n - m - 1$ (где n – число наблюдений; m – число факторов уравнения, включая результативный). Параметр признается значимым, если $t_{расч} \geq t_{табл}$. В учебных целях принимается значение $t_{табл}$ = 1,96.

Из уравнения исключают тот фактор, коэффициент при котором незначим и имеет наименьшее значение t-критерия. После этого уравнение регрессии строится без исключенного фактора и снова проверяется значимость коэффициентов регрессии. Такой процесс длится до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся значимыми, что свидетельствует о наличии в уравнении только существенных (действительно влияющих на результативный показатель) факторов.

В некоторых случаях $t_{расч}$ находится вблизи $t_{табл}$, поэтому с точки зрения содержательности уравнения такой фактор можно оставить для последующей проверки его значимости.

Поскольку в большинстве случаев факторные признаки выражены в разных единицах измерения, коэффициенты регрессии не позволяют сравнить силу их воздействия на результативный. В этом случае необходимо рассчитать коэффициенты эластичности и β-коэффициенты.

Коэффициент эластичности рассчитывается по формуле

$$Э_{x_t} = a_j \frac{\overline{x_j}}{\overline{y}};$$

где a_j – коэффициент регрессии при j-м факторном признаке;

$\overline{x_j}$ – среднее значение j-го факторного признака;

$\overline{y}$ – среднее значение результативного признака.

Коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов относительно среднего значения изменится результативный признак, если соответствующий факторный увеличится на 1 % относительно своего среднего значения.

Недостаток данного показателя связан с тем, что факторные признаки изменяются в разных пределах. В частности, цена реализации при среднем значении 27,8 усл. ден. ед. изменяется в пределах от 19,5 до 35,9 усл. ден. ед., т. е. в интервале ± 30 %. В то же время затраты по стимулированию сбыта отклоняются от своего среднего значения более чем в 2 раза. Поэтому рассчитывается β-коэффициент, который определяется по формуле

$$\beta_{x_t} = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y},$$

где a_j – коэффициент регрессии при j-м факторном признаке;

σ_{x_j} – стандартное (среднее квадратическое) отклонение j-го факторного признака;

σ_y – стандартное (среднее квадратическое) отклонение результативного признака.

β-коэффициент показывает, на какую часть стандартного отклонения изменяется зависимая переменная с изменением фактора x_j на величину своего стандартного отклонения.

Рост цены и затрат по стимулированию сбыта на одно свое стандартное отклонение ведет в первом случае к снижению объема продаж на 0,86 стандартных отклонений, во втором – к росту на 0,68. Несмотря на то, что цена и в этом случае в большей степени оказывает влияние на объем реализации, чем расходы по продвижению товара, разница является не столь существенной, как у коэффициента эластичности.

Выборочным коэффициентом (линейной) корреляции называется величина, рассчитываемая по формуле:

$$r = r_{xy} = r_B = r(x, y) = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}.$$

Выборочные средние квадратические отклонения получены по наблюдаемым значениям x и y соответственно.

Величина

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

называется *выборочной ковариацией*, формула $\mathrm{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ – это упрощенная формула для расчета ковариации.

Ковариация характеризует зависимость признаков и зависит от единиц измерения x и y. Чтобы получить безразмерную характеристику зависимости, ковариацию делят на произведение средних квадратических отклонений признаков и в результате получают коэффициент линейной корреляции:

$$r = r(x, y) = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Выборочный коэффициент линейной корреляции r является показателем тесноты связи признаков в линейной форме (на фоне влияния остальных признаков, входящих в модель).

Вариацию $\sum (y_i - \bar{y})^2$ можно разбить на две части:

$$\begin{aligned} \sum (y_i - \bar{y})^2 &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2, \\ TSS &= \quad RSS \quad + \quad ESS. \end{aligned}$$

Это представление справедливо только в случае, если уравнение множественной линейной регрессии содержит свободный член β_0.

Коэффициент детерминации – это величина, определяемая по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = \frac{RSS}{TSS}.$$

Чтобы не допустить возможного преувеличения на основе R^2 тесноты связи y с факторными переменными, при возрастании их числа используют *скорректированный коэффициент детерминации*, который содержит поправку на число факторов:

$$R^2_{\text{кор}} = 1 - \frac{ESS/(n-m-1)}{TSS/(n-1)}.$$

Методика выполнения работы

Задание

По 15 наблюдениям была оценена следующая зависимость цены $\hat{y}$ квадратного метра помещений под СТО (усл. ден. ед.) от площади x_1 (м^2), времени x_2 в пути пешком до ближайшей станции метро (мин):

$$\hat{y} = -77{,}654568 + 7{,}2204557x_1 + 2{,}6318103x_2.$$
$$(-1{,}0815) \qquad (6{,}9471) \qquad (2{,}6633)$$

Расчеты по наблюдениям показали следующие результаты:

$\overline{y} = 77{,}467$; $\overline{x_1} = 8{,}4587$; $\overline{x_2} = 35{,}7267$;

$\overline{x_1 y} = 684{,}3862$; $\overline{x_2 y} = 2745{,}1173$; $\overline{x_1^2} = 77{,}5943$; $\overline{x_2^2} = 1283{,}082$;

$\overline{y^2} = 6172{,}7847$.

$$ESS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = 309{,}9605;$$

$$TSS = \sum (y_i - \overline{y})^2 = 2621{,}9774.$$

1. Рассчитать парные коэффициенты корреляции и на их основе построить матрицу. Сделать вывод.

2. Проверить значимость коэффициентов регрессии.

3. Рассчитать коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации. Сделать вывод.

Рассчитать по формуле все парные коэффициенты корреляционной матрицы:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,901\,06 & -0,637\,44 \\ 0,90106 & 1 & -0,858\,08 \\ -0,637\,44 & -0,858\,08 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $r_{yx_1} = 0,901\,06$, $r_{yx_2} = -0,637\,44$, то годовое потребление мяса в большей степени определяется доходом на душу населения, причем наблюдается прямая, достаточно тесная линейная зависимость. Между годовым потреблением мяса и рыбы на душу населения наблюдается умеренная обратная линейная зависимость, т. е. чем больше потребление рыбы, тем меньше потребление мяса. Кроме того, так как $r_{x_1x_2} = -0,858\,08$, то между доходом на душу населения и потреблением рыбы наблюдается достаточно тесная обратная линейная зависимость.

По таблице *t*-распределения для значений $\alpha = 0,05$, и $n = 12$ определить $t_{\text{кр}} = t_{0,05;12} = 2,179$. Так как $\left|t_{\hat{\beta}_0}\right| < t_{\text{кр}}$, то коэффициент β_0 статистически незначим; так как $\left|t_{\hat{\beta}_1}\right| > t_{\text{кр}}$, то коэффициент b_1 статистически значим; так как $\left|t_{\hat{\beta}_2}\right| > t_{\text{кр}}$, то коэффициент β_2 статистически значим.

Свободный член в уравнении регрессии оказался незначимым.

Коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{309,9605}{2621,9774} = 0,881\,784\,.$$

Скорректированный коэффициент детерминации

$$R^2_{\text{кор}} = 1 - \frac{ESS\,/\,(n-m-1)}{TSS\,/\,(n-1)} = 1 - \frac{309,9605\,/\,(15-2-1)}{2621,9774\,/\,(15-1)} = 0,862\,081\,.$$

Высокие значения коэффициента детерминации и скорректированного коэффициента детерминации говорят о хорошем качестве подгонки регрессионной модели к наблюдаемым значениям y_i. Зависимость y от x_1, x_2 характеризуется как тесная, в которой 88 % вариации годового потребления мяса на душу населения определяется вариацией учтенных в модели факторов: доходом на душу населения за год и годовым потреблением рыбы на душу населения. Прочие факторы, не включенные в модель, обусловливают, соответственно, почти 12 % от общей вариации y.

Задание для самостоятельного решения

Использовать данные таблицы согласно варианту.

Вариант	Коэффициенты уравнения	Значения t-критерия Стьюдента	Средние значения	ESS	TSS
1	$a0 = 1861{,}97$ $a1 = 3{,}2073$ $a2 = 0{,}222$ (при $n = 15$)	$t_{\hat\beta_0} = 3{,}6385$ $t_{\hat\beta_1} = 4{,}7654$ $t_{\hat\beta_2} = 2{,}7657$	$\overline{y} = 42{,}9333$; $\overline{x}_1 = 4{,}1067$; $\overline{x}_2 = 50{,}2$; $\overline{x_1 y} = 177{,}774$; $\overline{x_2 y} = 2161{,}5533$; $\overline{x_1^2} = 17{,}3467$ $\overline{x_2^2} = 2553{,}9333$; $\overline{y^2} = 1851{,}952$.	38,9460	130,2127
2	$a0 = 17{,}4704$ $a1 = 2{,}8975$ $a2 = 0{,}2780$ (при $n = 15$)	$t_{\hat\beta_0} = 4{,}8908$ $t_{\hat\beta_1} = 4{,}5784$ $t_{\hat\beta_2} = 4{,}5606$	$\overline{y} = 42{,}0333$; $\overline{x}_1 = 4{,}0133$; $\overline{x}_2 = 46{,}5333$; $\overline{x_1 y} = 169{,}81$; $\overline{x_2 y} = 1967{,}5067$; $\overline{x_1^2} = 16{,}448$; $\overline{x_2^2} = 2202{,}1333$; $\overline{y^2} = 1774{,}859$.	24,1809	120,8732

Продолжение таблицы

Вариант	Коэффициенты уравнения	Значения t-критерия Стьюдента	Средние значения	ESS	TSS
3	*a*0 = 11,6083 *a*1 = 4,6921 *a*2 = 0,2605 (при *n* = 15)	$t_{\hat{\beta}_0} = 3,2163$ $t_{\hat{\beta}_1} = 4,6419$ $t_{\hat{\beta}_2} = 5,9951$	$\overline{y} = 40,9667;$ $\overline{x}_1 = 3,74;$ $\overline{x}_2 = 45,3333;$ $\overline{x_1 y} = 153,85;$ $\overline{x_2 y} = 1873,84;$ $\overline{x_1^2} = 14,0807;$ $\overline{x_2^2} = 2105,4667;$ $\overline{y^2} = 1686,893.$	15,0064	124,8732
4	*a*0 = 17,0211 *a*1 = 2,9441 *a*2 = 0,2835 (при *n* = 17)	$t_{\hat{\beta}_0} = 5,99$ $t_{\hat{\beta}_1} = 5,1149$ $t_{\hat{\beta}_2} = 5,9172$	$\overline{y} = 42,4412;$ $\overline{x}_1 = 4,0412;$ $\overline{x}_2 = 47,7059;$ $\overline{x_1 y} = 172,7676;$ $\overline{x_2 y} = 2041,1529;$ $\overline{x_1^2} = 16,6618;$ $\overline{x_2^2} = 2323,5882;$ $\overline{y^2} = 1811,052.$	24,4390	166,5817
5	*a*0 = 21,5604 *a*1 = 5,0385 *a*2 = 0,2055 (при *n* = 17)	$t_{\hat{\beta}_0} = 3,2655$ $t_{\hat{\beta}_1} = 4,2615$ $t_{\hat{\beta}_2} = 3,0597$	$\overline{y} = 41,3294;$ $\overline{x}_1 = 3,8941;$ $\overline{x}_2 = 44,5294;$ $\overline{x_1 y} = 161,9106;$ $\overline{x_2 y} = 1855,9353;$ $\overline{x_1^2} = 15,3012;$ $\overline{x_2^2} = 2025,3529;$ $\overline{y^2} = 1718,034.$	31,1879	168,5353

Окончание таблицы

Вариант	Коэффициенты уравнения	Значения t-критерия Стьюдента	Средние значения	ESS	TSS
6	$a0 = 19{,}4353$ $a1 = 3{,}2021$ $a2 = 0{,}2045$ (при $n = 17$)	$t_{\hat{\beta}_0} = 6{,}5228$ $t_{\hat{\beta}_1} = 5{,}3349$ $t_{\hat{\beta}_2} = 4{,}1468$	$\overline{y} = 41{,}45;$ $\overline{x}_1 = 3{,}95;$ $\overline{x}_2 = 45{,}8;$ $\overline{x_1 y} = 165{,}22;$ $\overline{x_2 y} = 1913{,}7;$ $\overline{x_1^2} = 16{,}01;$ $\overline{x_2^2} = 2158{,}0;$ $\overline{y^2} = 1728{,}42.$	48,197	206,35

1. На основе известных коэффициентов a_0, a_1, a_2 составить уравнение множественной регрессии.
2. Рассчитать парные коэффициенты корреляции и на их основе построить матрицу. Сделать вывод.
3. Проверить значимость коэффициентов регрессии.
4. Рассчитать коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации. Сделать вывод.

Контрольные вопросы

1. Какие вы знаете характеристики эконометрической модели?
2. Что показывает коэффициент множественной корреляции?
3. Для чего рассчитывают существенность коэффициента регрессии?
4. Что показывает коэффициент детерминации?
5. Что означает выражение: «Проверка эконометрической модели на адекватность»?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И. Л. Акулич. – 3 изд., испр. – СПб. : Лань, 2011. – 352 с.
2. Белько, И. В. Эконометрика. Практикум / И. В. Белько, Е. А. Криштапович. – Минск : Изд-во Гревцова, 2011. – 221 с.
3. Гармаш, А. Н. Математические методы в управлении : учебное пособие / А. Н Гармаш, И. В Орлова. – М. : Вузовский учебник; Инфра-М, 2013. – 272 с.
4. Колеснев, В. И. Экономико-математические методы и модели. Практикум : учебное пособие для студентов сельскохозяйственных вузов по экономическим специальностям / В. И. Колеснев. – Минск : ИВЦ Минфина, 2010. – 296 с.
5. Костюнин, В. И. Эконометрика : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. И. Костюнин. – М. : Юрайт, 2014. – 285 с.
6. Леньков, И. И. Экономико-математические методы в экономике АПК : учебное пособие / И. И. Леньков. – Минск : БГАТУ, 2009. – 168 с.
7. Невежин, В. П. Исследование операций и принятие решений в экономике : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Экономика» (уровень подготовки – бакалавр) / под общ. ред. В. П. Невежина. – М. : ФОРУМ, 2012. – 400 с.
8. Орлова, И. В. Экономико-математическое моделирование : практическое пособие по решению задач / И. В. Орлова. – М. : Вузовский учебник; Инфра-М, 2013. – 140 с.
9. Орехов, С. А. Эконометрика в схемах и таблицах / С. А. Орехов. – М. : Эксмо, 2008. – 224 с.
10. Тимофеев, В. С. Эконометрика : учебник и практикум для бакалавриата / В. С. Тимофеев, А. В. Фаддеенков, В. Ю. Щеколдин. – 2 изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2015. – 328 с.
11. Хацкевич, Г. А. Эконометрика : учебник / Г. А. Хацкевич, Т. В. Русилко. – Минск : РИВШ, 2021. – 452 с.
12. Хуснутдинов, Р. М. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / Р. М. Хуснутдинов. – М. : Инфра-М, 2013. – 224 с.
13. Ширяев, В. И. Исследование операций и численные методы оптимизации : учебное пособие для студентов экономических специальностей университетов / В. И. Ширяев. – 4-е изд. – М. : ЛЕНАНД, 2015. – 211 с.

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ. ПРАКТИКУМ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Лопатнюк Людмила Анатольевна,
Кондровская Мария Михайловна

Ответственный за выпуск *О. Л. Сапун*
Редактор *Т. В. Каркоцкая*
Компьютерная верстка *Д. А. Пекарского*
Дизайн обложки *А. А. Покало*

Подписано в печать 09.11.2022. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 3,09. Тираж 99 экз. Заказ 273.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99–1, 220023, Минск.