УДК 539.3/.6(07)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Студенты – Ортюх П.И., 45 тс, 2 курс, ФТС;
Фурса А.Ю., 45 тс, 2 курс, ФТС
Научный руководитель – Мисуно О.И., к.т.н., доцент
УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье представлены сущность теоремы о взаимности работ и ее применение при решении практических задач.

Ключевые слова: упругая система, теорема, сила, перемещение, работа.

Внешние силы, приложенные к упругой конструкции совершают работу. Если нагружение производится медленно, скорость перемещения масс конструкции будет весьма малой. Такой процесс нагружения называют статическим. Работа статической силы на упругом перемещении определяется половиной произведения величины этой силы на перемещение.

Рассмотрим два состояния одной и той же упругой системы – балки (рисунок 1). Пускай в первом состоянии на балку приложена статически сила F1. В сечении в котором приложена эта сила по ее направлению возникает перемещение Δ11 (перемещение по направлению силы F1, вызванное силой F1).

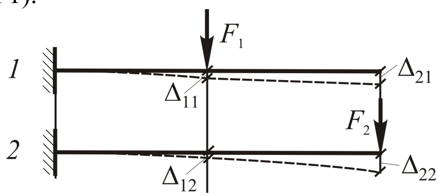

Рисунок 1 – Два состояния нагружения балки

Работа, совершаемая силой F1 в первом состоянии равна

$$W_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} . \qquad (1)$$

Во втором состоянии на балку приложена статически сила F2. В сечении в котором приложена эта сила по ее направлению возникает перемещение Δ22 (перемещение по направлению силы F2, вызванное силой F2). Работа, совершаемая силой F2 во втором состоянии равна

$$W_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} . \qquad (2)$$

Полагая, что к системе может быть применен принцип независимости действия сил, определим работу которую совершат силы F1 и F2 при прямом и обратном порядке приложения.

Прикладываем сначала к той же упругой системе силу F1, а затем F2 (рисунок 2).

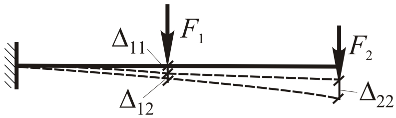

Рисунок 2 – Схема последовательного нагружения балки силами F1 и F2

После приложения силы F1 перемещения и внутренние силы в балке будут такими же как и в первом состоянии. Работа совершаемая силой F1 на перемещении Δ_{11} также будет равна W_{11} . После приложения силы F2 в балке дополнительно возникают перемещения и внутренние силы такие же как и во втором состоянии. Работа совершаемая силой F2 на перемещении Δ_{22} также будет равна W_{22} . При этом, в процессе нарастания силы F2 от нуля до конечного значения сила F1, оставаясь постоянной, перемещается на величину Δ12 и совершает работу, равную $W_{12} = F_1 \Delta_{12}$.

Тогда, при последовательном нагружении системы силами F1 и F2 будет совершена работа равная:

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12} . \qquad (3)$$

Теперь приложим к той же упругой системе сначала силу F2, а затем F1. Работа при последовательном нагружении системы силами F2 и F1 будет равна:

$$W = W_{22} + W_{11} + W_{21} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + F_2 \Delta_{21} . \qquad (4)$$

Величина работы не зависит от порядка приложения сил, поэтому приравнивая правые части выражений (3) и (4) получим:

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} . \qquad (5)$$

Полученный результат в виде равенства (5) может быть достигнут если в каждом из двух состояний рассмотренной упругой системы будет приложено произвольное число сил. Равенство (5) представляет теорему о взаимности работ (теорему Бетти), которая формулируется: для двух состояний одной и той же упругой системы работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Эта теорема приобретает большую общность если учесть, что здесь под F1 и F2 можно понимать не просто силы, а обобщенные силы, а под Δ_{12} и Δ_{21} – обобщенные перемещения.

Отмеченное может быть проиллюстрировано на примере балки, нагруженной неизвестной силой F1 (рисунок 3, а). При этом есть возможность произвести замер перемещения Δ_{21} в некотором сечении балки. Тогда балку следует нагрузить в этом же сечении известной силой F2 и замерить перемещение Δ_{12} по направлению силы F1 (рисунок 3, б). Величина силы F1 определится в виде

$$F_1 = F_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{12}} . \tag{6}$$

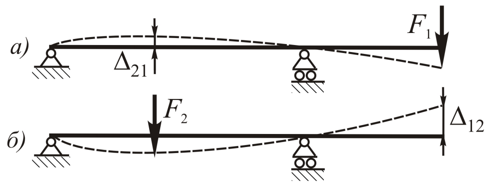

Рисунок 3 – Расчетные схемы балки к определению силы F_1

В некоторых случаях теорема о взаимности работ дает возможности весьма просто решать в общем виде такие задачи, которые другими методами могут быть решены только с большим трудом. Например, предстоит определить изменение объема упругого тела произвольной формы нагруженного двумя противоположно направленными силами F (рисунок 4, а). Расстояние между точками приложения (B и C) сил равно l. Физические постоянные материала тела известны. Одновременно с заданной нагрузкой рассматриваем случай нагружения тела равномерно распределенным давлением p, действующим по поверхности тела (рисунок 4, б). Тогда имеем две обобщенные силы: систему сил двух F в одном состоянии и давление p – в другом.

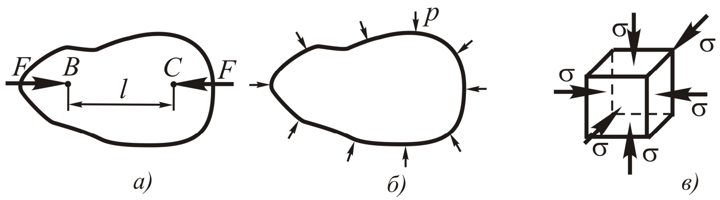

Рисунок 4 – Расчетные схемы к определению изменения объема тела

В соответствии с теоремой о взаимности работ можно записать

$$F\Delta l_p = p\Delta V_F, \quad (7)$$

где Δl_p – взаимное смещение точек приложения сил под действием давления р;

ΔV_F – искомое изменение объема тела под действием сил F.

При нагружении тела равномерно распределенным давлением р в любой площадке возникает нормальное напряжение, равное давлению, т.е. $\sigma = p$. Для элементарного прямоугольного параллелепипеда (рисунок 4, в) относительная линейная деформация в любом направлении, согласно обобщенному закону Гука, будет равна

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \mu\frac{\sigma}{E} - \mu\frac{\sigma}{E} = \frac{p}{E}(1-2\mu). \quad (8)$$

Расстояние между точками приложения сил F под действием давления р уменьшится на величину

$$\Delta l_p = l\,\frac{p}{E}(1-2\mu). \quad (9)$$

Тогда подставляя Δl_p в выражение (7) получим величину изменения объема тела

$$\Delta V_F = \frac{F\,l}{E}(1-2\mu). \quad (10)$$

Теорема о взаимности работ оказывается весьма полезной, так как позволяет в ряде случаев упростить решение многих практических задач.

Список использованных источников

1. Подскребко, М.Д. Сопротивление материалов: учебник / М.Д. Подскребко. – Минск: Выш. шк., 2007. – 797 с.: ил.