

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УДК 621.01+531.8](075.8)  
ББК 34.41я7  
О-65

*Авторы:*

доктор технических наук, профессор *А. Н. Орда*,  
старший преподаватель *В. А. Шкляревич*,  
старший преподаватель *В. Н. Бобко*,  
кандидат технических наук, доцент *А. С. Воробей*

*Рецензенты:*

кафедра теоретической механики  
Белорусского национального технического университета;  
ответственный за цикл дисциплин по технической механике  
Белорусского государственного университета информатики  
и радиоэлектроники, доктор технических наук, профессор *В. М. Сурин*

## ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего образования  
по специальностям «Техническое обеспечение процессов сельскохозяйственного  
производства», «Техническое обеспечение процессов хранения и переработки  
сельскохозяйственной продукции», «Ремонтно-обслуживающее производство  
в сельском хозяйстве», «Проектирование и производство сельскохозяйственной  
техники»*

**В двух частях**

**Часть 2**

**Синтез механизмов**

Минск  
БГАТУ  
2015

**Теория механизмов и машин** : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 2.  
О-65 Синтез механизмов / А. Н. Орда [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2015. –  
140 с.  
ISBN 978-985-519-707-3.

Во второй части изложены основы синтеза рычажных, зубчатых и кулачковых механизмов, рассмотрены вопросы уравнивания и виброзащиты механизмов машин.

Содержание учебного пособия соответствует современному уровню развития машин и механизмов в области сельскохозяйственного машиностроения.

Может быть использовано для самостоятельной работы студентов, выполнения лабораторных работ и курсового проекта.

Первая часть издана в 2012 году.

Для студентов учреждений высшего образования по агроинженерным специальностям.

УДК 621.01+531.8](075.8)  
ББК 34.41я7

ISBN 978-985-519-707-3 (ч. 2)  
ISBN 978-985-519-519-2

© БГАТУ, 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	6
1.1. Постановка задачи, виды и способы синтеза .....	6
1.2. Решение задач оптимального синтеза стержневых механизмов .....	6
1.3. Условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырехзвеннике .....	7
1.4. Учет углов давления в стержневых механизмах .....	8
1.5. Синтез четырехзвенника по трем заданным положениям шатуна .....	9
1.6. Синтез кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода .....	10
1.7. Синтез кривошипно-ползунного механизма по заданным размерам .....	11
1.8. Понятие о синтезе механизма по заданному закону движения выходного звена .....	12
1.9. Понятие о синтезе механизма по заданной траектории .....	13
1.10. Общий порядок проектирования рычажного механизма .....	14
2. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	15
2.1. Общие положения .....	15
2.2. Передачи с неподвижными осями колес .....	17
2.3. Планетарные передачи .....	20
2.4. Коэффициент полезного действия планетарного механизма .....	22
2.5. Геометрический синтез планетарных передач .....	28
2.6. Дифференциальные механизмы .....	30
2.7. Основные геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи .....	32
2.8. Основная теорема зацепления .....	34
2.9. Эвольвента и ее свойства .....	37
2.10. Построение картины зацепления колес эвольвентой цилиндрической передачи .....	39
2.11. Коэффициент перекрытия .....	44
2.12. Способы нарезания зубчатых колес .....	47
2.13. Явление подрезания зубьев. Минимальное число зубьев колеса .....	52
2.14. Графический синтез зубчатых механизмов .....	54
2.15. Пространственные зубчатые передачи .....	60
2.16. Гиперболоидные передачи .....	62
3. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ .....	66
3.1. Общие сведения о кулачковых механизмах .....	66
3.2. Основные параметры кулачкового механизма .....	69
3.3. Кинематический анализ кулачкового механизма и выбор закона движения выходного звена .....	72
3.4. Построение кинематических диаграмм движения выходного звена кулачкового механизма .....	77
3.5. Динамический анализ кулачкового механизма .....	81
3.6. Определение основных размеров кулачкового механизма .....	85
3.7. Построение профиля кулачка .....	92
4. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ. ВИБРОАКТИВНОСТЬ И ВИБРОЗАЩИТА МАШИН .....	99
4.1. Уравновешивание механизмов .....	99
4.1.1. Уравновешивание роторов .....	99
4.1.2. Уравновешивание масс .....	106
4.2. Колебания в механизмах .....	110
4.3. Виброзащита машин .....	127
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	139

## ВВЕДЕНИЕ

Проектирование механизмов представляет собой сложную комплексную проблему, решение которой можно разбить на несколько самостоятельных этапов.

Первым этапом проектирования является установление кинематической схемы механизма, обеспечивающей требуемые вид и закон движения. Именно этот этап проектирования в основном рассматривается в теории механизмов и машин. Раздел теории механизмов, посвященный методам проектирования по заданным кинематическим условиям схем механизмов, получил название синтеза механизмов.

Синтез кинематической схемы механизма состоит в определении некоторых постоянных его параметров, удовлетворяющих заданным структурным, кинематическим и динамическим условиям. При этом одна часть параметров может быть задана, а другая должна быть определена.

В общем случае задачи синтеза механизмов являются многопараметрическими, так как число параметров механизма никогда не бывает однозначным.

В настоящее время существует ряд способов решения таких задач с использованием метода параметрической оптимизации. При использовании этого метода обычно одно условие принимается за основное. Тогда все остальные условия будут дополнительными.

Основное условие обычно выражается в виде некоторой функции, экстремум которой должен определить требуемые параметры синтезируемого механизма. Эту функцию обычно называют целевой функцией или критерием оптимизации. Например, для кулачкового механизма это может быть заданный закон движения толкателя, для зубчатого механизма – его передаточное отношение, для рычажного механизма – оценка отклонения траектории движения заданной точки от требуемой траектории или заданный закон движения выходного звена и т. д.

## 1. СИНТЕЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 1.1. Постановка задачи, виды и способы синтеза

Задачи синтеза рычажных механизмов включают в себя этапы структурного, кинематического и динамического расчетов. Поэтому для того чтобы упростить решения рассматриваются частные задачи, в которых учитываются только некоторые (основные) условия проектирования.

В зависимости от исходных данных различают следующие виды синтеза:

- геометрический, когда заданы отдельные положения звеньев или траектории отдельных точек;
- кинематический, когда заданы некоторые скорости, ускорения или их соотношения;
- динамический, когда заданы действующие силы или наложены некоторые ограничения на динамические параметры.

К способам синтеза относятся:

- а) опытный, когда экспериментальным путем подбираются размеры звеньев для реализации заданной траектории движения;
- б) графический;
- в) аналитический.

Возможны различные комбинации перечисленных выше видов и способов синтеза.

### 1.2. Решение задач оптимального синтеза стержневых механизмов

При решении задачи синтеза стержневых механизмов необходимо различать входные и выходные параметры.

Входные – это изначально заданные параметры (размеры звеньев, скорости, ускорения или их соотношения).

Выходные – это параметры, определяемые в результате решения задачи.

При синтезе необходимо учитывать ряд требований кинематического, конструктивного, технологического характера и т. д., среди которых одно, как правило, является главным, а остальные – второ-

степенными (дополнительными). Если главное требование записать математически в виде функции  $\lambda = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1, x_2$  – выходные параметры, то такая функция называется функцией цели (целевой), при этом дополнительные условия, выраженные в виде  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq, =, \geq b_i$  при  $(i = 1, 2, \dots, m)$ , называются ограничениями.

Задачей оптимального синтеза является обеспечение экстремального значения  $\lambda$  при соблюдении всех ограничений.

Например, выразив вес механизма в виде функции  $\lambda$  его параметров (длин звеньев), можно решать задачу минимизации  $\lambda$  при соблюдении условий его существования. К таким условиям относятся условия проворачивания кривошипа в шарнирном четырехзвеннике, условие соблюдения заданного угла давления и ряд других.

При малом числе выходных параметров решение задачи оптимизации может быть получено в аналитической форме. В противном случае используются численные методы направленного, случайного или комбинированного поиска оптимальных решений.

### 1.3. Условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырехзвеннике

При проектировании (синтезе) четырехшарнирного механизма одним из учитываемых условий может быть проворачиваемость звеньев, то есть наличие одного или двух кривошипов. Это зависит от соотношения длин звеньев. Например, для того чтобы звено  $AB$  четырехзвенника (рис. 1.1) могло стать кривошипом, оно должно последовательно пройти через два крайних положения. Используя три положения механизма, получим следующие условия для положений 1, 2, 3, предварительно обозначив длины звеньев:  $l_{AB} = a$ ;  $l_{BC} = b$ ;  $l_{AD} = d$ .

При этом:

$a + d < b + c$  – положение 1;

$a + b < d + c$  – положение 2;

$c < b + d - a$  или  $a + c < b + d$  – положение 3,

то есть сумма длин кривошипа и любого другого звена меньше суммы остальных звеньев.

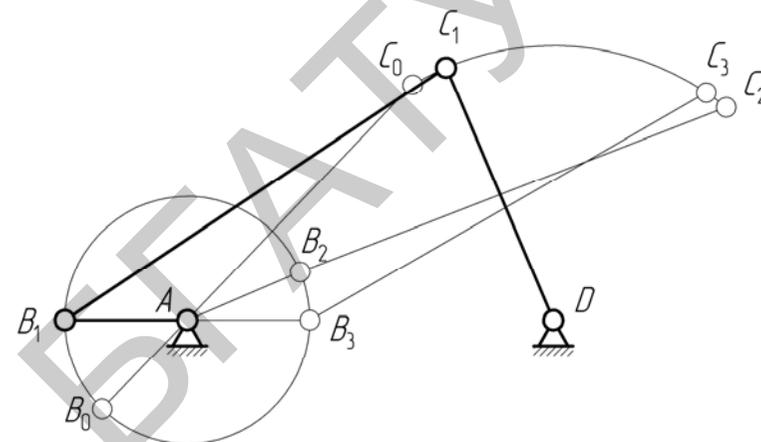


Рис. 1.1. Схема к определению условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырехзвеннике

Сложим попарно полученные неравенства и получим:

$$a < c; a < d; a < b,$$

то есть кривошип является самым коротким звеном. Если данные условия не выполняются, то механизм будет либо двухкривошипным, либо двухкоромысловым. Эти условия используются при геометрическом синтезе.

### 1.4. Учет углов давления в стержневых механизмах

Углы давления во многом определяют условия работы механизма. Так как угол давления  $\alpha$  (рис. 1.2), измеряемый между вектором силы и вектором скорости в точке ее приложения, влияет на трение и износ в кинематических парах, то этот угол, в частности его максимальное значение при синтезе ограничивают для исключения возможности заклинивания и уменьшения коэффициента полезного действия. Для упрощения расчетов, связанных с определением углов давления, обычно пренебрегают тангенциальными составляющими реакций, что позволяет находить наихудшие положения с точки зрения риска заклинивания и назначать длины звеньев  $l_{\min}$ , обеспечивающие приемлемые условия работы при заданном предельном угле  $\alpha_{\text{доп}}$  (рис. 1.2), то есть при  $\alpha_{\text{max}} \leq \alpha_{\text{доп}}$  длина звена будет равна:

$$l \geq l_{\min} = \frac{r}{\sin \alpha_{\text{доп}}} \quad (1.1)$$

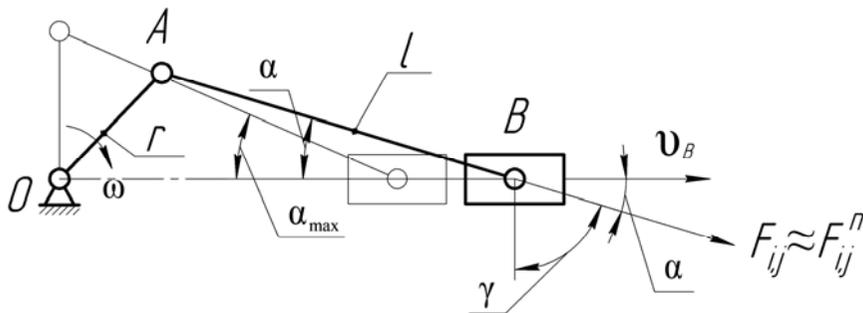


Рис. 1.2. Схема к учету углов давления в стержневых механизмах

Угол  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  называется углом передачи движения и при проектировании ограничивается минимальной величиной  $\gamma_{\min}$ .

### 1.5. Синтез четырехзвенника по трем заданным положениям шатуна

Рассмотрим шарнирный четырехзвенник (рис. 1.3).

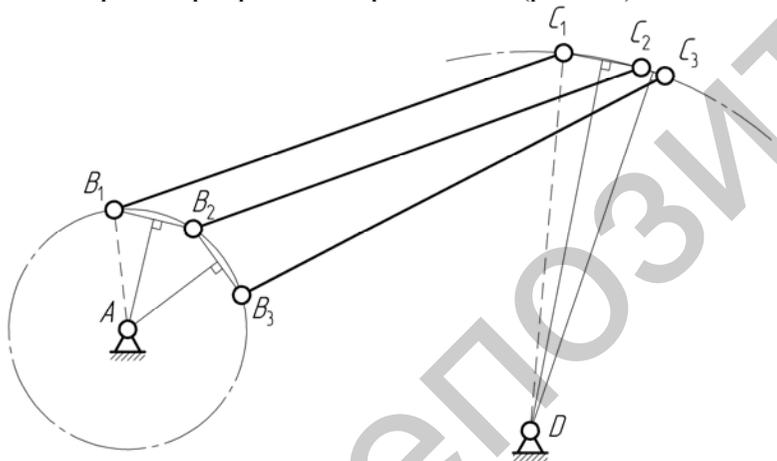


Рис. 1.3. Схема к синтезу четырехзвенника по трем заданным положениям шатуна

Так как точки  $B$  и  $C$  шарнирного четырехзвенника описывают дуги окружностей, то проведя перпендикуляры через середины хорд, соединяющих концы шатуна в трех положениях, получим центры вращения звеньев  $AB$  и  $CD$  (точки  $A$  и  $D$ ). Вид синтеза – геометрический; способ синтеза – графический.

### 1.6. Синтез кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода

Одной из кинематических характеристик стержневого механизма может служить коэффициент изменения скорости хода  $k_v$ , представляющий собой отношение средней скорости холостого хода  $v_{x.x}$  к средней скорости рабочего хода  $v_{p.x}$ .

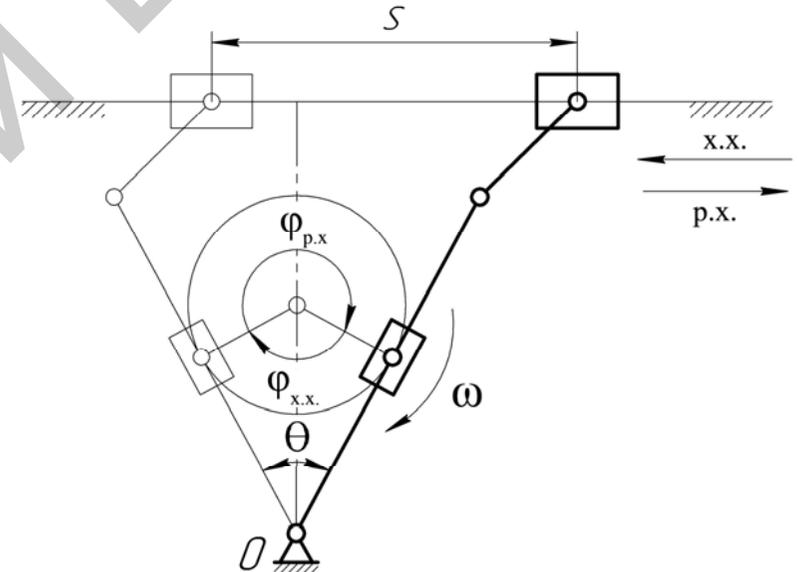


Рис. 1.4. Схема к синтезу кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода

При равномерном движении кривошипа коэффициент  $k_v$  равен:

$$k_v = \frac{v_{x.x}}{v_{p.x}} = \frac{S}{t_{x.x}} \cdot \frac{t_{p.x}}{S} = \frac{180^\circ + \theta}{\omega} \cdot \frac{\omega}{180^\circ - \theta} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta}, \quad (1.2)$$

где  $S$  – ход ползуна;  $t_{р.х}$  и  $t_{х.х}$  – время рабочего и холостого хода;  
 $\omega$  – угловая скорость кривошипа;  
 $\theta$  – угол размаха кулисы.

При заданном  $k_0$ , можно определить  $\theta$  или наоборот. Используя дополнительные конструктивные соображения, можно определить размеры всех звеньев механизма.

Вид синтеза – кинематический; способ – графо-аналитический.

### 1.7. Синтез кривошипно-ползунного механизма по заданным размерам

Кривошипно-ползунный механизм характеризуется пятью параметрами:  $a$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $r = l_{OA}$ ,  $l = l_{AB}$  (рис. 1.5), при этом можно записать два аналитических выражения, связывающие эти параметры:

$$\sin \varphi_1 = \frac{a}{l+r}; \quad (1.3)$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{a}{l-r}; \quad (1.4)$$

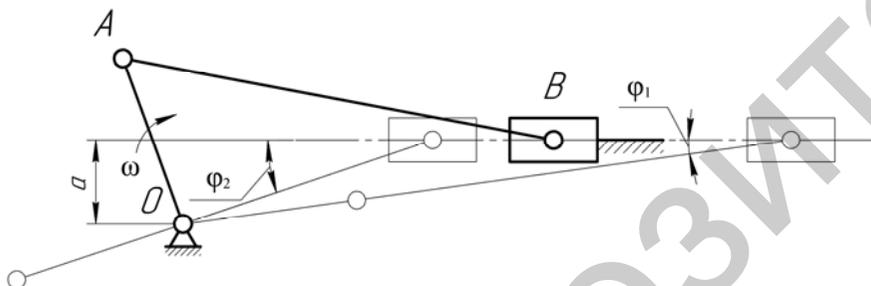


Рис. 1.5. Схема к синтезу кривошипно-ползунного механизма по заданным размерам

Таким образом, задавая три параметра из пяти, можно определить два оставшиеся из указанных выражений. Например, задав величины  $a$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  можно определить  $r$  и  $l$ .

Вид синтеза – геометрический; способ – аналитический.

### 1.8. Понятие о синтезе механизма по заданному закону движения выходного звена

Пусть задан закон движения ведомого звена (угла поворота коромысла –  $\psi$ ) в зависимости от угла поворота кривошипа  $\varphi$ , например, в шарнирном четырехзвенном механизме (рис. 1.6).

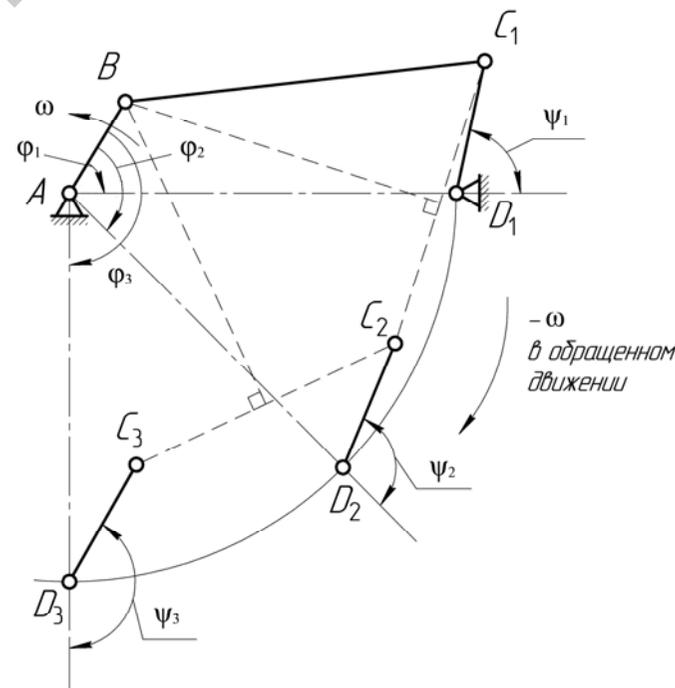
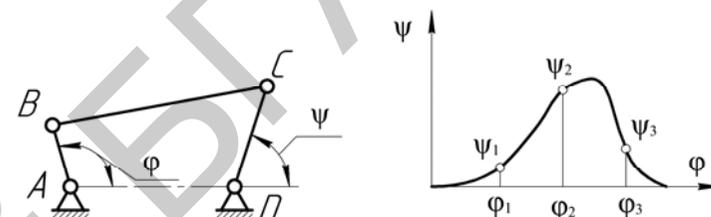


Рис. 1.6. Схема к синтезу механизма по заданному закону движения выходного звена

Приближенный синтез включает разбивку всего интервала по оси графика  $\psi(\varphi)$  по оси абсцисс  $\varphi$  на участки, соответствующие трем произвольным значениям  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Используется метод обращения движения, когда механизму условно задается движение, обратное движению кривошипа. Если заданы длина коромысла и межцентровое расстояние, то по трем положениям в обращенном движении можно найти размеры шатуна и кривошипа согласно рис. 1.6, где точку  $B$  находят как центр вращения точки  $C$  в обращенном движении. Существует постановка задачи, когда отыскивается оптимальный закон движения с точки зрения различных параметров: скорости, ускорения, работы динамических сил и т. д.

### 1.9. Понятие о синтезе механизма по заданной траектории

Часто требуется спроектировать механизм с заданной траекторией движения ведомого звена. Например, четырехшарнирный механизм стрелы портального крана позволяет перемещать груз горизонтально при вращении стрелы в вертикальной плоскости (рис. 1.7).

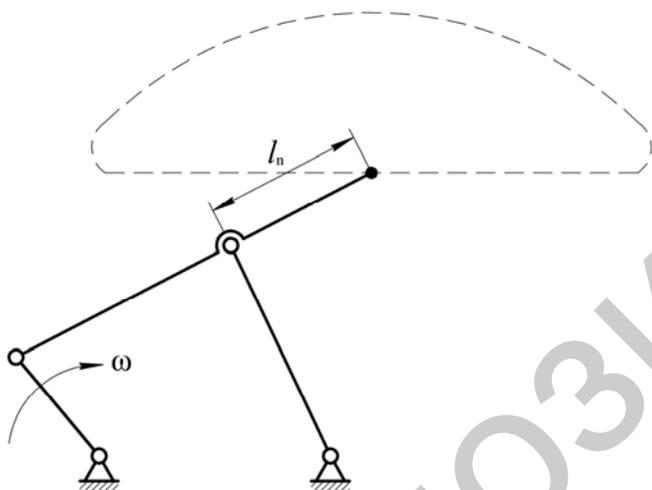


Рис. 1.7. Схема к синтезу механизма по заданной траектории

Синтез таких механизмов осуществляется графическими и аналитическими методами с использованием теории функций с наибольшим приближением к заданной траектории. В этой области

имеются работы Чебышева, который первым предложил решение задачи для лямбдаобразного прявила Чебышева, положенного в основу конструкции стрелы портального крана (рис. 1.7).

Искомymi параметрами являются длины звеньев, включая и длину  $l_n$ .

### 1.10. Общий порядок проектирования рычажного механизма

Процесс проектирования рычажного механизма включает следующие основные этапы:

1. Производится синтез кинематической схемы (определяются длины звеньев по заданным условиям).
2. Принимается упрощенный закон движения входного звена, определяются скорости и ускорения звеньев, производится приближенный силовой расчет (определяются реакции в кинематических парах).
3. По найденным усилиям подбираются сечения звеньев и определяются их массы.
4. Производится приведение сил и масс, подбор маховика и определение истинного закона движения звена приведения.
5. При найденном законе движения звена приведения находятся уточненные значения скоростей и ускорений, определяются более точные величины реакций и производится проверка прочности и жесткости звеньев. Размеры сечений и массы звеньев последовательно уточняются.

Иногда используют более простую последовательность, в которой расчет ведется при заданных длинах и массах звеньев, а также при упрощенном законе движения входного звена.

#### Вопросы для самопроверки

1. Назовите виды и способы синтеза рычажных механизмов.
2. Что такое входные и выходные параметры синтеза рычажных механизмов?
3. Укажите условия проворачиваемости кривошипа шарнирного четырехзвенника.
4. Объясните зависимость между углом давления и углом передачи движения.
5. Каков порядок проектирования рычажного механизма?

## 2. СИНТЕЗ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 2.1. Общие положения

Зубчатые механизмы – это самый распространенный вид механизмов. Трудно найти такую машину, в которой нет зубчатого механизма. Они применяются в станках, в грузоподъемных машинах, автомобилях, разнообразных технологических машинах и т. д. Основные достоинства зубчатых механизмов, определившие их широкое применение, – строго постоянное передаточное отношение, большая передаваемая мощность на единицу массы, компактность, долговечность, высокий к. п. д. Недостаток – сложность изготовления и высокая стоимость.

Зубчатые механизмы предназначены для передачи вращательного движения и преобразования его параметров. Обычно двигатели обладают скоростью и моментом, как правило, не подходящим для использования в технологическом процессе. Преобразование параметров вращательного движения возможно посредством прижатых друг к другу гладких дисков, образующих фрикционные передачи. Их недостаток – ограниченная мощность из-за большой нагрузки на подшипники, неизбежное проскальзывание, износ поверхностей, потери мощности. Практически передаваемая мощность в таких механизмах не превышает 10–20 кВт.

Чтобы устранить отмеченные недостатки, диски снабжаются чередующимися выступами и впадинами, располагающимися с определенным интервалом. Такие выступы называются зубьями.

Зубчатым колесом называется звено с замкнутой системой зубьев, обеспечивающей непрерывность движения. Различают также зубчатый сектор, зубчатую рейку.

Зубчатые передачи предназначены для передачи вращательного движения от одного вала к другому, а также для изменения величины и направления угловой скорости валов. Пару зубчатых колес, находящихся в зацеплении друг с другом, называют ступенью, а передачи – одноступенчатыми.

Две или более зубчатые передачи образуют зубчатый механизм. Зубчатые колеса, зубчатые передачи и зубчатые механизмы чрезвычайно разнообразны. Поэтому целесообразно ознакомиться с их простейшей классификацией.

Зубчатые колеса бывают:

- а) цилиндрические и конические;
- б) прямозубые, винтовые, шевронные;
- в) эвольвентные, циклоидальные, цевочные, трохoidalные, круговинтовые;
- г) с внешним и с внутренним зацеплением.

Винтовые колеса могут быть с левым и правым наклонами зуба. Винтовые колеса с винтовой линией постоянного шага называют косозубыми.

Зубчатые передачи бывают:

- а) с постоянным и переменным передаточным отношением (некруглые колеса);
- б) плоские и пространственные;
- в) с параллельными, пересекающимися и скрещивающимися осями колес.

По последнему признаку различают цилиндрические, конические и гиперболические передачи.

В цилиндрических передачах (рис. 2.1, а) оси валов параллельны.

В конических передачах (рис. 2.1, б) оси валов пересекаются. Наиболее распространены конические передачи с прямым углом между осями валов.

В гиперболических передачах (рис. 2.1, в) оси валов перекрещиваются. В свою очередь эти передачи подразделяются на гипоидные, винтовые и червячные. Последние являются частным случаем винтовых передач и состоят из червяка и червячного колеса.

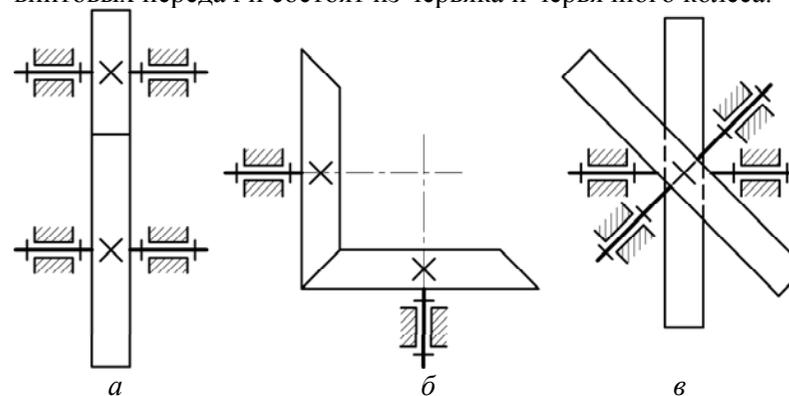


Рис. 2.1. Кинематические схемы зубчатых передач:  
а – цилиндрическая; б – коническая; в – гиперболическая

В гиперболических передачах звенья выполняются в форме гиперболического вращения. Гиперболический – линейчатая поверхность, образуемая при вращении произвольно расположенной в пространстве прямой линии относительно некоторой оси. Таким образом, образующей поверхности гиперболического является прямая линия. Два сопряженных гиперболического перекачиваются друг по другу без скольжения и касаются по прямой линии. Если их снабдить зубьями, образуется точная гиперболическая передача. На практике используется приближенная гиперболическая передача, образованная из цилиндрических и конических колес. В таком случае касание их происходит не по линии, а в точке. Различают винтовые, червячные и гипоидные передачи. Различают также понижающие и повышающие частоту вращения передачи (редукторы и мультипликаторы), передачи внешнего, внутреннего зацепления, реечные передачи.

Зубчатые механизмы бывают:

- а) с неподвижными осями колес (рядовые) и с подвижными осями (планетарные);
- б) предназначенные для передачи большой мощности (силовые) и для преобразования параметров движения (кинематические);
- в) с одной степенью подвижности и зубчатые дифференциалы.

## 2.2. Передачи с неподвижными осями колес

Рядный зубчатый механизм – это соединенные последовательно несколько ступеней цилиндрических зубчатых колес (рис. 2.2).

Согласно определению, передаточное отношение равно отношению угловых скоростей входного и выходного валов:  $U_{14} = -\frac{\omega_1}{\omega_4}$ ,

а передаточные отношения ступеней –  $U_{12} = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ ,  $U_{23} = -\frac{\omega_2}{\omega_3}$ ,

$$U_{34} = -\frac{\omega_3}{\omega_4}.$$

Перемножим левые и правые части этих выражений и приравняем их друг к другу:

$$U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} = -\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot -\frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot -\frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{\omega_1}{\omega_4} = U_{14}.$$

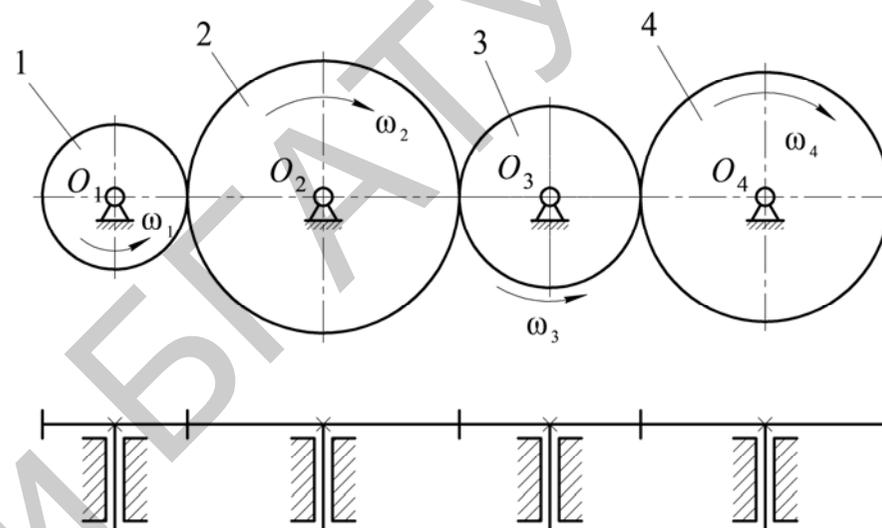


Рис. 2.2. Рядный зубчатый механизм

Запишем обобщенную формулу вычисления передаточного отношения:

$$U_{1n} = (-1)^\phi \cdot U_{12} \cdot U_{23} \cdot \dots \cdot U_{(n-1)n}, \quad (2.1)$$

где  $n$  – количество валов;

$\phi$  – количество ступеней.

Так как  $U_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}$ , то формула расчета общего передаточного отношения рядового механизма выглядит как

$$U_{1n} = (-1)^\phi \cdot \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^\phi \cdot \frac{z_n}{z_1}.$$

Отсюда следует, что его величина зависит только от количества зубьев входного и выходного колес. Промежуточные колеса служат всего лишь для увеличения межосевого расстояния и изменения направления вращения.

Передаточное отношение ступенчатого зубчатого механизма рассчитывается по формуле (2.1).

На рис. 2.3 представлена двухступенчатая зубчатая передача, образованная колесами 1-2 и 2'-3. Передаточное отношение для этого механизма определится по формуле

$$U_{13} = U_{12} \cdot U_{23} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( -\frac{z_3}{z_{2'}} \right). \quad (2.2)$$

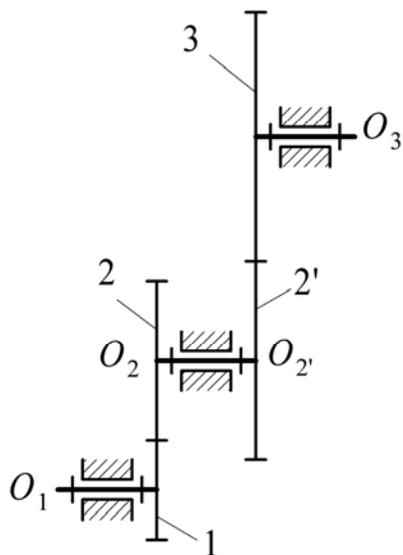


Рис. 2.3. Многоступенчатая передача

Ступенчатые механизмы (как и рядовые) применяются для изменения направления вращения выходного вала по отношению к входному и получения больших передаточных отношений.

Например, с помощью двухступенчатого механизма можно получить  $U \leq 25$ , трехступенчатого –  $U \leq 100$ , четырехступенчатого –  $U \leq 500$ .

Для определения числа ступеней в многоступенчатой передаче можно руководствоваться следующим правилом: число ступеней равно числу неподвижных осей вращения зубчатых колес минус 1.

### 2.3. Планетарные передачи

В некоторых многоступенчатых зубчатых передачах оси отдельных колес являются неподвижными. Такие зубчатые механизмы с одной степенью свободы называются планетарными механизмами, основным условием синтеза которых является обеспечение заданного передаточного отношения. В этих механизмах колеса с подвижными осями вращения называются планетарными колесами или сателлитами, а звено, на котором располагаются оси сателлитов, – водилом. На схемах водило принято обозначать буквой  $H$  (от заглавной буквы слова *Hedel* – рычаг). Зубчатые колеса с неподвижными осями вращения называются солнечными или центральными; неподвижное колесо – опорным.

На рис. 2.4 изображены схемы планетарных механизмов наиболее часто встречаемых в машиностроении.

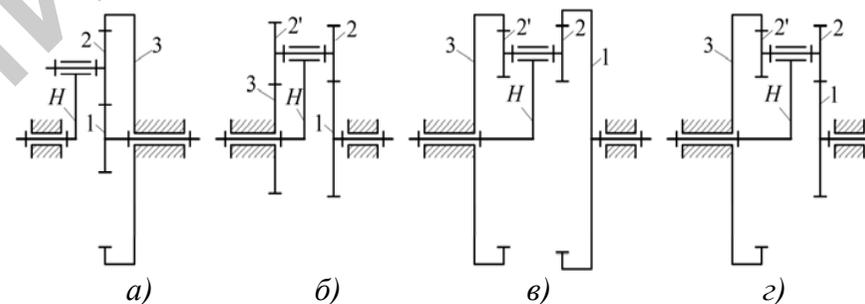


Рис. 2.4. Схемы основных планетарных механизмов:

1 – центральное колесо; 2 и 2' – сателлиты; 3 – опорное (неподвижное) колесо;  $H$  – водило

Преимущества планетарных передач:

- компактность при больших передаточных отношениях  $U$ ;
- возможность передачи больших крутящих моментов (при их передаче используется несколько сателлитов).

Недостатки планетарных передач:

- сложность изготовления;
- необходимость высокой точности изготовления и сборки.

Передаточное отношение планетарного механизма можно определить аналитически и графически.

При аналитическом методе используется метод обращенного движения, когда всему механизму, в том числе неподвижному колесу, условно сообщается угловая скорость  $\omega_H$  (т. е. все звенья в таком механизме уменьшают скорость на величину угловой скорости водила  $\omega_H$ ). Тогда в этом так называемом обращенном механизме водило  $H$  станет неподвижным, а все остальные колеса – подвижными, и мы получим простой ступенчатый механизм с неподвижными осями. Угловые скорости исходного планетарного и обращенного механизмов сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Угловые скорости планетарного механизма		
Номера звеньев	Угловые скорости в механизме	
	планетарном	обращенном
1	$\omega_1$	$\omega_1 - \omega_H$
2	$\omega_2$	$\omega_2 - \omega_H$
3	$\omega_3 = 0$	$\omega_3 - \omega_H = -\omega_H$
$H$	$\omega_H$	$\omega_H - \omega_H = 0$

Вычисляем передаточные отношения обращенного механизма (см. рис. 2.4, з):  
через угловые скорости

$$U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - U_{1H}; \quad (2.3)$$

через числа зубьев колес

$$U_{13}^H = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( \frac{z_3}{z_2} \right). \quad (2.4)$$

Из уравнений (2.3) и (2.4) получим:  $U_{1H}^H = 1 - U_{13}^{(H)} = 1 - \frac{z_3}{z_1}$ .

Для других схем планетарных механизмов (см. рис. 2.4) выводы формул расчета передаточных отношений аналогичны предыдущему.

Общая формула имеет вид

$$U_{kH}^l = 1 - U_{kl}^H, \quad (2.5)$$

где  $l$  – индекс неподвижного колеса;

$k$  – индекс подвижного колеса.

Формула (2.5) носит название формулы Виллиса для планетарных механизмов.

#### 2.4. Коэффициент полезного действия планетарного механизма

При проектировании планетарных механизмов необходимо получение максимального коэффициента полезного действия (к. п. д.). Существуют несколько способов определения к. п. д. В данном пособии рассмотрим метод, при котором требуется знать к. п. д. зубчатого механизма с неподвижными осями (к. п. д. обращенного механизма), экспериментальные значения которого определены с достаточной точностью.

Для определения к. п. д. планетарного механизма примем, что все подвижные звенья уравновешены и движутся равномерно. Постоянные моменты внешних сил, действующие на звенья 1,  $H$  и 3, обозначим  $M_1$ ,  $M_H$  и  $M_3$  (опорный момент, действующий со стороны основания или фундамента на стойку). Моменты сил движущих сил будем считать положительными, а моменты сил сопротивления – отрицательными. Или же момент сил считается положительным, если его направление совпадает с направлением угловой скорости.

Из условия равновесия, пренебрегая моментами сил трения в подшипниках центральных колес, имеем

$$M_1 + M_H + M_3 = 0. \quad (2.6)$$

Если ведущим звеном является колесо 1, т. е.  $M_1 > 0$ , то искомым к. п. д., равный мгновенному к. п. д.  $\eta_{1H}$  (первый индекс означает ведущее звено), определится из условия

$$\eta_{1H} = -\frac{M_H \omega_H}{M_1 \omega_1}. \quad (2.7)$$

С учетом соотношения (2.6) получим

$$\eta_{1H} = \frac{1}{U_{1H}} \left( 1 + \frac{M_3}{M_1} \right). \quad (2.8)$$

Отношение  $M_3 / M_1$  связано с к. п. д. обращенного механизма  $\eta^H$ , причем эта связь зависит от того, какое звено в обращенном движении является ведущим.

Звено 1 остается ведущим и в обращенном движении, если совпадают знаки  $\omega_1$  и  $\omega_1 - \omega_H$ . Это условие выполняется при  $U_{1H} > 1$  и  $U_{1H} < 0$ . Тогда к. п. д. обращенного механизма

$$\eta^H = -\frac{M_3 (-\omega_H)}{M_1 (\omega_1 - \omega_H)}. \quad (2.9)$$

Если же в обращенном механизме ведущим звеном будет звено 3 (при  $0 < U_{1H} < 1$ ), то

$$\eta^H = -\frac{M_1 (\omega_1 - \omega_H)}{M_3 (-\omega_H)}. \quad (2.10)$$

Подставляя в формулу (2.8) отношение  $M_3 / M_1$ , из формул (2.9) и (2.10) получим:

$$\eta_{1H} = \eta^H + \frac{1 - \eta^H}{U_{1H}} \text{ при } U_{1H} > 1 \text{ и } U_{1H} < 0; \quad (2.11)$$

$$\eta_{1H} = \frac{U_{1H} - 1 + \eta^H}{\eta^H U_{1H}} \text{ при } 0 < U_{1H} < 1. \quad (2.12)$$

При ведущем водиле к. п. д. планетарного механизма определяется по условию

$$\eta_{H1} = -\frac{M_1 \omega_1}{M_H \omega_H}, \text{ или } \eta_{H1} = \frac{U_{1H}}{1 + \frac{M_3}{M_1}}.$$

Отношение  $M_3 / M_1$  определяется в этом случае по формуле (2.10), если звено 1 остается ведомым и в обращенном движении, т. е. при  $U_{1H} > 1$  и при  $U_{1H} < 0$ . В интервале  $0 < U_{1H} < 1$  отношение  $M_3 / M_1$  определяется по формуле (2.9). Следовательно,

$$\eta_{H1} = \eta^H \frac{U_{1H}}{U_{1H} - 1 + \eta^H} \text{ при } U_{1H} > 1 \text{ и } U_{1H} < 0; \quad (2.13)$$

$$\eta_{H1} = \frac{U_{1H}}{U_{1H} \eta^H + 1 - \eta^H} \text{ при } 0 < U_{1H} < 1. \quad (2.14)$$

При ведущем колесе 1 к. п. д.  $\eta_{1H}$  становится равным нулю, если передаточное отношение  $U_{1H}$  принимает значения

$$U_{1H} = 1 - \eta^H \text{ и } U_{1H} = -\left( \frac{1 - \eta^H}{\eta^H} \right).$$

Между указанными значениями  $U_{1H}$  к. п. д. становится отрицательным (самоторможение). Например, при  $\eta^H = 0,98$  самоторможение будет при  $U_{1H}$ , находящемся в пределах от  $-0,02$  до  $0,02$ .

При ведущем водиле самоторможения нет ( $\eta_{H1} > 0$ ), но при  $U_{1H} \rightarrow 0$  к. п. д. также стремится к нулю.

Одно и то же заданное передаточное отношение можно получить, применяя различные по схеме механизмы (рис. 2.4).

По знаку передаточного отношения в обратном движении  $U_{13}^H$  все указанные передачи можно разделить на передачи с положительным значением  $U_{13}^H$  (рис. 2.4, б и в) и с отрицательным (рис. 2.4, а и г).

Для передач с положительным передаточным отношением

$$U_{13}^H = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}$$

передаточное отношение  $U_{1H}^3$ , выраженное через числа зубьев, находится по формуле

$$U_{1H}^3 = \frac{z_1 z_2' - z_2 z_3}{z_1 z_2'} \quad (2.15)$$

Из этой формулы следует, что можно подобрать такие числа зубьев, при которых передаточное отношение  $U_{1H}^3$  будет мало отличаться от нуля. Например, при  $z_3 = 101$ ,  $z_2 = 99$ ,  $z_2' = z_1 = 100$

$$U_{13}^H = \frac{9999}{10000}, \quad U_{1H}^3 = \frac{1}{10000}.$$

Однако механизм с указанными числами зубьев при ведущем колесе 1 практически не может быть приведен в движение вследствие самоторможения, которое при  $\eta^H = 0,98$ , как было показано ранее, наступает уже при  $U_{1H}^3 = 0,02$ .

При ведущем водиле движение возможно, но с очень низким к. п. д. Принимая  $\eta^H = 0,98$ , по формуле (2.14) получим

$$\eta_{H1} = \frac{0,0001}{0,0001 \cdot 0,98 + 0,02} \approx 0,005.$$

Поэтому, несмотря на возможность получения очень малых (или очень больших) передаточных отношений, планетарные передачи по схемам (рис. 2.4, б и в) применяются только в маломощных передачах. Обычно ведущим (и входным) звеном является водило, а передаточное отношение  $U_{1H}$  выбирается в пределах от 30 до 100 (в редких случаях до 1500). Преимущество при этом отдается схеме (рис. 2.4, в), как более компактной и имеющей несколько больший к. п. д.

В передачах с отрицательным передаточным отношением (рис. 2.4, а и г) нельзя получить очень малые (или очень большие) передаточные отношения, так как  $U_{1H}^3$  отличается от  $U_{13}^H$  по модулю только на единицу:

$$U_{13}^H = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'};$$

$$U_{1H}^3 = \frac{z_1 z_2' + z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (2.16)$$

К. п. д. этих передач достаточно высок, а возможность установки нескольких сателлитов уменьшает нагрузки на зубья и приводит к уменьшению габаритов передачи по сравнению с обычной передачей, имеющей только неподвижные оси вращения колес. Особенно распространена однорядная передача (рис. 2.4, а) как более компактная в осевом направлении.

Практические диапазоны передаточных отношений в однорядной передаче определяются ограничениями на максимальные и минимальные значения числа зубьев. Кроме того, эти диапазоны зависят от того, какое звено принято за стойку.

Пусть, например, минимальное число зубьев колес 1 и 2 равно 10, а максимальное число зубьев колеса 3 равно 90. Тогда минимальное число зубьев колеса 3 равно 30, а максимальное число зубьев колеса 1 равно 70. При этих числах зубьев передаточное отношение обратного механизма

$$U_{13}^H = -\frac{z_3}{z_1}$$

изменяется в пределах от  $-9$  до  $-1,29$ .

В таблице 2.2 указаны соответствующие диапазоны изменения передаточных отношений однорядной планетарной передачи. Из этой таблицы видно, что в пределах от 0,1 до 10 не все передаточные отношения могут быть воспроизведены при помощи однорядной передачи. Например, выпадают диапазоны от 0,9 до 1,1, от 1,78 до 2,29 и др. По табл. 2.2 можно определить также, какое звено должно быть неподвижным, чтобы получить передаточное отношение в заданном интервале.

Таблица 2.2

Диапазоны изменения передаточных отношений

Передаточное отношение	От	До
$U_{H1}^3 = \frac{z_1}{(z_1 + z_3)}$	0,1	0,44
$U_{H3}^1 = \frac{z_3}{(z_1 + z_3)}$	0,56	0,9
$U_{3H}^1 = \frac{(z_1 + z_3)}{z_3}$	1,11	1,78
$U_{1H}^3 = \frac{(z_1 + z_3)}{z_1}$	2,29	10

## 2.5. Геометрический синтез планетарных передач

Для создания работоспособной ступени планетарного механизма необходимо соблюдать три условия: соосность, соседство, собираемость.

Условие соосности обеспечивает достаточное и постоянное межосевое расстояние между колесами.

Для рис. 2.4, б межосевые расстояния между осями валов 1 и 2, а также осями 2 и 3 равны:

$$a_{12} = a_{32}, \text{ или } \frac{m}{2}(z_1 + z_2) = \frac{m}{2}(z_3 + z_2),$$

откуда

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_2. \quad (2.17)$$

Для рис. 2.4, а это условие выглядит как  $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$ , для рис. 2.4, в –  $z_1 - z_2 = z_3 - z_2$ , для рис. 2.4, г –  $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$ .

Условие соседства обеспечивает размещение на одной окружности нескольких сателлитных колес с некоторым зазором  $\Delta$  между ними (рис. 2.5).

Пусть  $\sigma$  – количество сателлитов, тогда условие соседства можно выразить неравенством

$$r_{a_2} < \frac{1}{2} O_2 O_2',$$

где  $r_{a_2}$  – радиус окружности выступов сателлита.

Так как

$$r_{a_2} = \frac{mz_2'}{2} + m, \quad \frac{1}{2} O_2 O_2' = O_2 A = O_1 O_2 \cdot \sin \frac{\pi}{\sigma},$$

то

$$\frac{mz_2'}{2} + m < \frac{m}{2}(z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{\sigma},$$

или

$$z_2' + 2 < (z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{\sigma}. \quad (2.18)$$

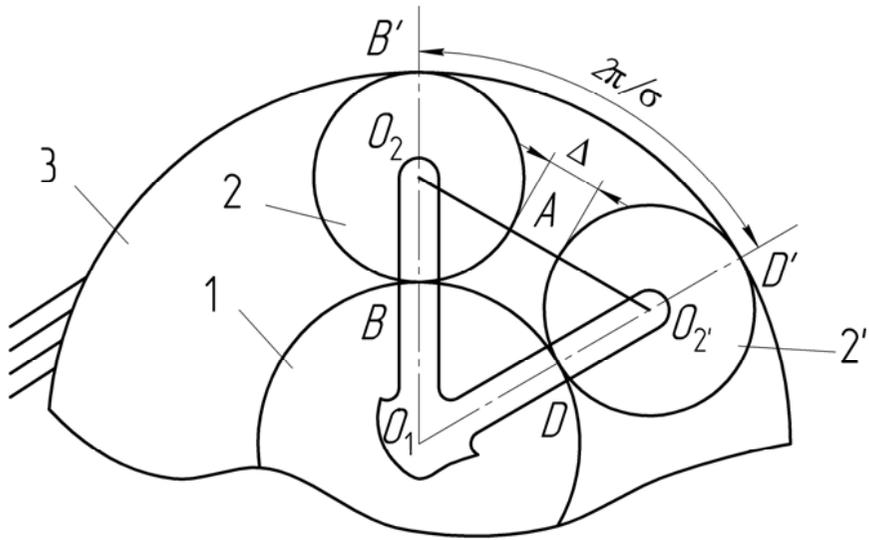


Рис. 2.5. Размещение соседних сателлитов планетарной передачи

Неравенство (2.18) представляет собой условие соседства.

Условие собираемости обеспечивает возможность зацепления всех сателлитных колес с центральными колесами при постоянстве угла между сателлитами. При этом следует обеспечить такое условие, чтобы колеса вошли в зацепление строго в точках  $B$  и  $B'$ ,  $D$  и  $D'$  (см. рис. 2.5).

Выведем условие собираемости. Пусть колесо 1 повернется на угловой шаг  $\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1} = \varphi_1$ .

Так как  $U_{1H} = \frac{\varphi_1}{\varphi_H}$ , то водило повернется на угол

$$\varphi_H = \frac{\varphi_1}{U_{1H}} = \frac{2\pi}{z_1 \cdot U_{1H}}. \quad (2.19)$$

В пределах угла  $\frac{2\pi}{\sigma}$  угол  $\varphi_H$  должен располагаться целое число раз, т. е.  $\frac{2\pi}{\sigma} = g \cdot \varphi_H$ , где  $g$  – целое число. Так как  $\frac{2\pi}{\sigma} = g \cdot \varphi_H = g \cdot \frac{2\pi}{z_1 \cdot U_{1H}}$ , то

$$\sigma \cdot g = z_1 \cdot U_{1H}. \quad (2.20)$$

Равенство (2.20) представляет собой условие собираемости планетарной передачи.

## 2.6. Дифференциальные механизмы

Дифференциальные механизмы служат для разложения или сложения движения. Степень их подвижности  $W \geq 2$ .

Например, если звено 3 планетарного механизма (см. рис. 2.4,  $z$ ) сделать подвижным (дать ему возможность вращаться) (рис. 2.6), то число низших кинематических пар  $p_5$  будет равно 4 (они образованы звеньями 0 и 1, 2 и  $H$ ,  $H$  и 3, 3 и 0), а число высших кинематических пар  $p_4$  будет равно 2 (они образованы звеньями 1 и 2, 2 и 3). Количество подвижных звеньев  $n$  равно 4 (это звенья 1, 2, 3 и  $H$ ). Тогда

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2. \quad (2.21)$$

Если ведущим является центральное колесо 1, то мощность с него будет передаваться и распределяться на два звена одновременно – на водило  $H$  и колесо 3, которые будут выходными. И наоборот, любые два из этих звеньев, будучи ведущими, могут передавать мощность на одно ведомое.

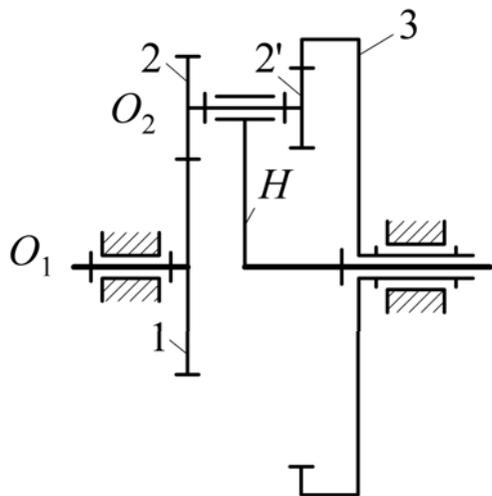


Рис. 2.6. Дифференциальный механизм

Если в дифференциальном механизме два основных звена соединить дополнительной кинематической цепью, то получится замкнутый дифференциальный механизм (рис. 2.7).

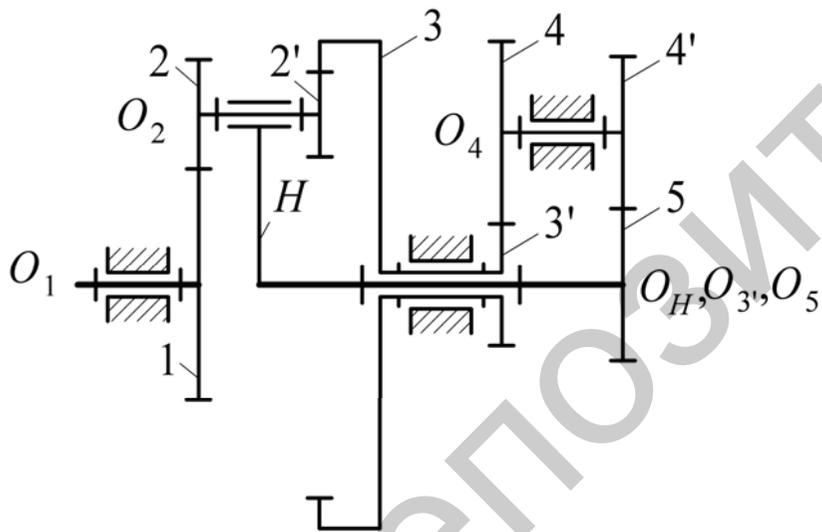


Рис. 2.7. Замкнутый дифференциальный механизм

Замыкающая цепь 3'-4-4'-5 налагает на движение звеньев дифференциального механизма дополнительное условие связи. Поэтому для замкнутого дифференциального механизма  $W = 1$ .

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 4 = 1. \quad (2.22)$$

Отличительные признаки замкнутого дифференциального механизма: 1) число степеней свободы  $W = 1$ ; 2) все основные звенья подвижны.

Часто встречаются механизмы, состоящие из последовательно соединенных ступеней с неподвижными и с подвижными осями колес. Общее передаточное соотношение малого комбинированного механизма следует определить как произведение передаточных отношений отдельных ступеней.

## 2.7. Основные геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи

Рассмотрим геометрические параметры зубчатого колеса цилиндрической передачи в плоскости, перпендикулярной оси его вращения (рис. 2.8).

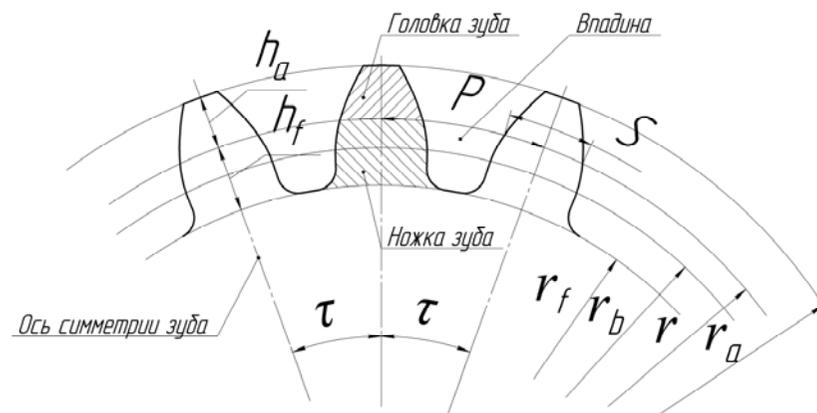


Рис. 2.8. Геометрические параметры зубчатого колеса

Каждый зуб колеса имеет ось симметрии, проходящую через ось вращения колеса  $O$ . Угол между осями симметрии называется угловым шагом  $\tau$ . Число зубьев колеса  $z = 2\pi/\tau$  (если  $\tau$  измеряется в радианах) или  $z = 360^\circ/\tau$  (если  $\tau$  измеряется в градусах). Внешняя граница зуба очерчивается окружностью выступов радиусом  $r_a$ , а внутренняя часть впадины – окружностью впадин радиусом  $r_f$ .

Окружность радиусом  $r$  делит зуб по высоте на головку и ножку. Расстояние между одноименными профилями соседних зубьев по дуге этой окружности (или между соседними осями симметрии зубьев) называется окружным шагом  $P$ .

Длина окружности диаметром  $d = 2r$  равна:

$$L = Pz = \pi d,$$

откуда

$$d = \left(\frac{P}{\pi}\right)z.$$

Величину  $P/\pi = m$  называют модулем. На него введен ГОСТ 9563-60, в соответствии с которым при расчетах геометрических параметров зубчатых колес его выбирают из стандартного ряда в пределах  $m = 0,05 \dots 100$  мм.

Окружность, по которой модуль  $m$  является стандартной величиной, называется делительной окружностью с диаметром  $d = mz$  или радиусом  $r = (mz)/2$ .

Все остальные геометрические параметры зубчатого колеса в соответствии с ГОСТом пропорциональны модулю  $m$ :

высота головки зуба  $h_a = m$ ;

высота ножки зуба  $h_f = 1,25m$ ;

высота зуба  $h = h_a + h_f = 2,25m$ ;

радиус окружности вершин

$$r_a = r + m = \frac{mz}{2} + m = \frac{m}{2}(z + 2);$$

радиус окружности впадин

$$r_f = r - 1,25m = \frac{mz}{2} - 1,25m = \frac{m}{2}(z - 2,5);$$

окружной шаг  $P = \pi m$ ;

толщина зуба по делительной окружности

$$S = \frac{P}{2} = \frac{\pi m}{2}.$$

Ширину колеса принимают в пределах  $b = (10 \dots 30)m$ . Межосевое расстояние двух зацепляющихся колес

$$a = r_1 + r_2 = \frac{mz_1}{2} + \frac{mz_2}{2} = \frac{m}{2}(z_1 + z_2),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы делительных окружностей зацепляющихся колес;  $z_1$  и  $z_2$  – число их зубьев.

В зацепление друг с другом могут входить только зубчатые колеса, имеющие одинаковые модуль  $m$  и окружной шаг  $P$ .

## 2.8. Основная теорема зацепления

Вывод теоремы и ее формулировка определяют условие, которому должны отвечать боковые профили зубьев, находящихся друг с другом в зацеплении.

Рассмотрим картину касания двух боковых профилей зубьев. Пусть эти профили будут очерчены какими-то кривыми (рис. 2.9), касающимися друг друга в точке  $M$ .

Прямая  $n-n$  является общей нормалью к этим кривым. Представим вращение профилей зубьев вокруг осей  $O_1$  и  $O_2$  с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Тогда векторы окружных скоростей  $\vec{v}_{M_1}$

и  $\bar{v}_{M_2}$  точек  $M_1$  и  $M_2$ , принадлежащих этим профилям, будут направлены перпендикулярно радиусам  $O_1M$  и  $O_2M$ , а их величины равны:

$$v_{M_1} = \omega_1 \cdot O_1M;$$

$$v_{M_2} = \omega_2 \cdot O_2M.$$

Спроектируем эти скорости на нормаль  $n-n$  и получим векторы  $\bar{v}_{M_1}^n$  и  $\bar{v}_{M_2}^n$ .

Для соблюдения нормальной работы зацепления необходимо обеспечить равенство этих векторов:

$$\bar{v}_{M_1}^n = \bar{v}_{M_2}^n.$$

В противном случае будет или «убегание» левого профиля (если  $\bar{v}_{M_2}^n > \bar{v}_{M_1}^n$ ), или «набегание» правого на левый ( $\bar{v}_{M_1}^n > \bar{v}_{M_2}^n$ ), что в принципе невозможно.

Рассмотрим подобие треугольников:

$$\Delta O_1K_1M_1 \sim \Delta O_1v_{M_1}^n.$$

Из свойства соотношения сторон составим уравнение пропорции:

$$\frac{v_{M_1}}{O_1M} = \frac{v_{M_1}^n}{O_1K_1},$$

откуда

$$v_{M_1}^n = v_{M_1} \cdot \frac{O_1K_1}{O_1M} = \omega_1 \cdot O_1M \cdot \frac{O_1K_1}{O_1M} = \omega_1 \cdot O_1K_1.$$

Из аналогичного подобия  $\Delta O_2K_2M$  и  $\Delta M_2v_{M_2}^n$  получим:

$$v_{M_2}^n = \omega_2 \cdot O_2K_2.$$

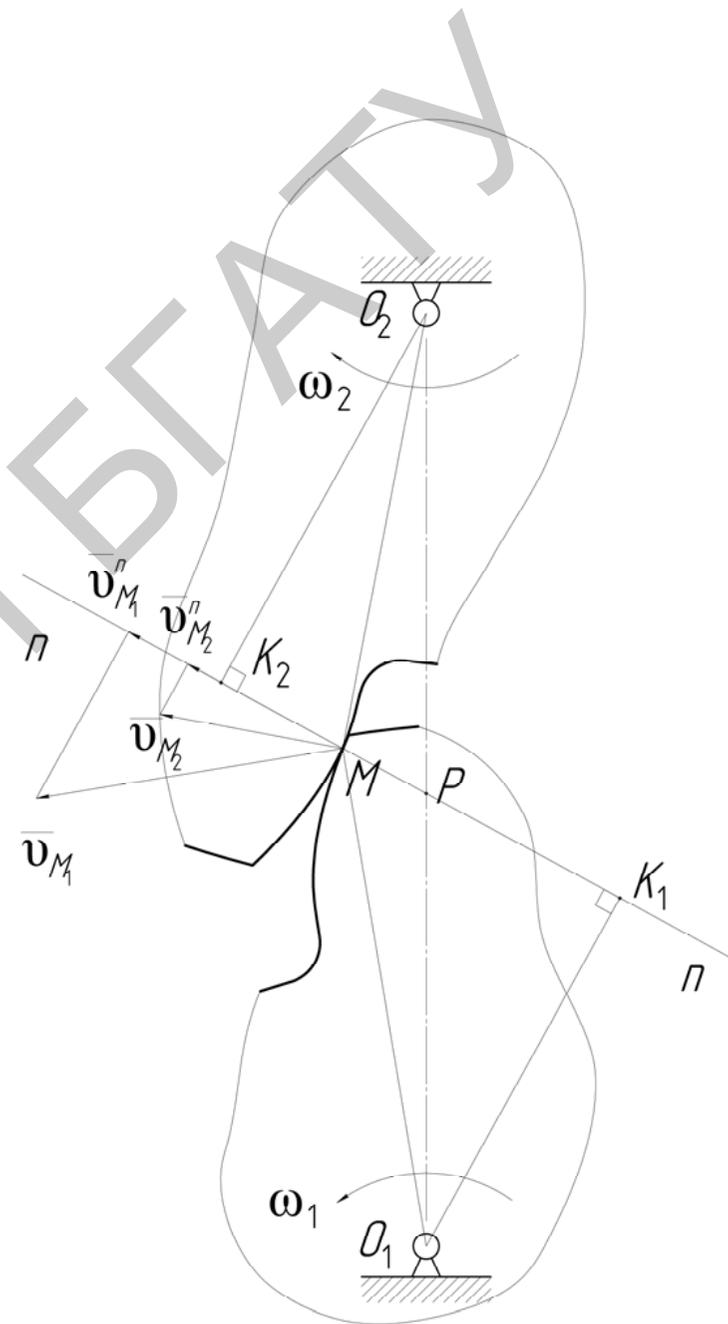


Рис. 2.9. Картина зацепления двух соприкасающихся боковых профилей зубьев

Так как  $\overline{v}_{M_1}^n = \overline{v}_{M_2}^n$ , то

$$\omega_1 \cdot O_1K_1 = \omega_2 \cdot O_2K_2,$$

или

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2K_2}{O_1K_1}. \quad (2.23)$$

Поскольку  $\Delta O_1K_1P \sim \Delta O_2K_2P$ , тогда  $\frac{O_2K_2}{O_1K_1} = \frac{O_2P}{O_1P}$ , а уравнение (2.23) запишем в виде

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (2.24)$$

Равенство (2.24) называется основной теоремой зацепления. Эту теорему можно сформулировать следующим образом: нормаль  $n-n$  к профилям зубьев, образующим высшую кинематическую пару, проведенная к точке их касания, делит межосевое расстояние  $O_1O_2$  на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям, с которыми эти профили вращаются.

## 2.9. Эвольвента и ее свойства

Наибольшее распространение получили зубчатые колеса, у которых боковые профили зубьев очерчены кривой под названием эвольвента. Таким образом профиль зуба и само зубчатое зацепление называются эвольвентными.

Эвольвента – кривая, которую очерчивает точка, принадлежащая прямой, перекатывающейся по основной окружности без скольжения.

Координаты любой точки эвольвенты определяются углом  $\theta$  и длиной  $y$  (рис. 2.10).

Исходя из свойств эвольвенты,  $M_1M'_1 = \cup M M'_1$ ,  $M_2M'_2 = \cup M M'_2$  и т. д.

Из соотношения углов и дуг окружности радиуса  $r_b$  следует, что

$$(\theta + \alpha) \cdot r_e = \cup MM'_3,$$

а из треугольника  $OM'_3M_3$  –

$$r_e \cdot \operatorname{tg} \alpha = M_3M'_3.$$

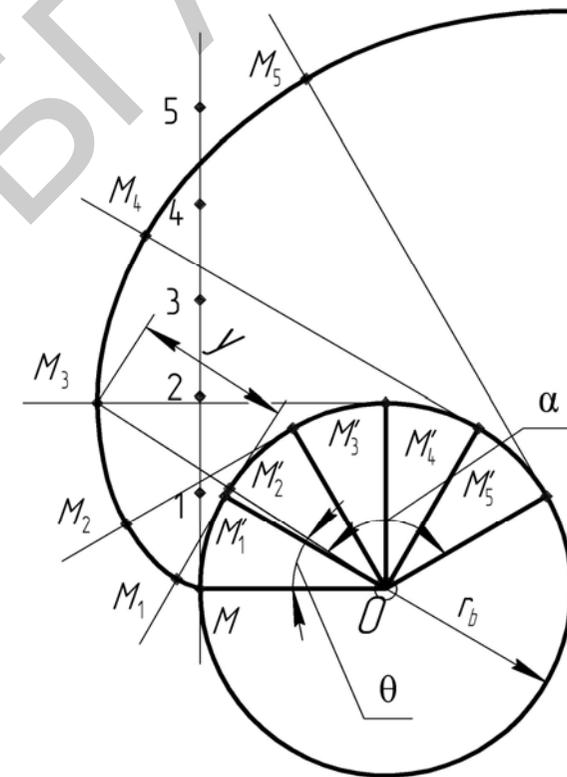


Рис. 2.10. Построение эвольвенты

Отсюда

$$(\theta + \alpha) \cdot r_e = \operatorname{tg} \alpha \cdot r_e,$$

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (2.25)$$

Функция угла  $\alpha$  называется инволютой угла  $\alpha$ :

$$\text{inv}\alpha = \text{tg } \alpha - \alpha. \quad (2.26)$$

Для определения ее численного значения в учебниках и справочниках по расчету зубчатых передач имеются таблицы.

Определим зависимость  $y$  от других геометрических параметров:

$$r_g = (y + r_g) \cdot \cos \alpha.$$

Отсюда

$$y = \frac{r_g}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha). \quad (2.27)$$

Окружность, по которой перекачивается прямая, называется основной, а ее радиус  $r_g = r \cos \alpha 20^\circ$ , где  $20^\circ$  – угол наклона бокового профиля зуба инструментальной рейки, служащей для нарезания зубьев.

Свойства эвольвенты:

- все точки эвольвенты лежат вне основной окружности радиуса  $r_b$ ;
- нормаль, проведенная к любой точке эвольвенты, является касательной к основной окружности;
- центры кривизны эвольвенты лежат на основной окружности.

### 2.10. Построение картины зацепления колес эвольвентой цилиндрической передачи

Для построения картины зацепления необходимо знать числа зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$ , модуль  $m$  и угол зацепления  $\alpha_w = 20^\circ$ . Зацепление стандартное.

Вычисляем все необходимые геометрические параметры для заданного зацепления зубчатых колес.

Радиусы начальных и делительных окружностей зубчатых колес определяются по следующей зависимости:

$$r_w = r = \frac{mz}{2}, \quad (2.28)$$

где  $m, z$  — соответственно модуль и число зубьев зубчатого колеса.

Радиусы основных окружностей зубчатых колес:

$$r_b = r \cos \alpha_w. \quad (2.29)$$

Радиусы окружностей вершин зубьев:

$$r_a = r + h_a = r + h_a^* m, \quad (2.30)$$

где  $h_a = h_a^* m$  – высота головки зуба (расстояние, измеренное по радиусу между делительной окружностью и окружностью вершин), мм;

$h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба (для колес с нормальной высотой головки зуба  $h_a^* = 1$ , а с укороченной –  $h_a^* = 0,8$ ).

Радиусы окружностей впадин зубчатых колес определяются по следующей зависимости:

$$r_f = r - h_f = r - (h_a + c) = r - (h_a^* + c^*) \cdot m, \quad (2.31)$$

где  $h_f = h_a + c$  – высота ножки зуба, мм;

$c = c^* m$  – радиальный зазор, мм;

$c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора.

Высота зуба определяется как

$$h = h_a + h_f = h_a^* m + (h_a^* + c^*) \cdot m. \quad (2.32)$$

При  $h_a^* = 1$  и  $c^* = 0,25$

$$h = 2,25m. \quad (2.33)$$

Шаг по делительной окружности определяется по формуле

$$P = \pi m. \quad (2.34)$$

Окружная толщина зуба по делительной окружности

$$S_w = \frac{\pi m}{2}. \quad (2.35)$$

Межосевое расстояние определяется как

$$a_w = a = r_{w_1} + r_{w_2}, \quad (2.36)$$

где  $a = r_1 + r_2$  – делительное межосевое расстояние, мм.

Построение картины эвольвентного зацепления проводится в следующем порядке (рис. 2.11):

- 1) откладываем межосевое расстояние  $a_w$  (на чертеже  $O_1O_2$ );
- 2) радиусами  $r_{w_1}$  и  $r_{w_2}$  проводим начальные окружности зубчатых колес. Точка  $P$  их касания является полюсом зацепления;
- 3) проводим основные окружности колес (радиусами  $r_{b_1}$  и  $r_{b_2}$ ), окружности вершин зубьев (радиусами  $r_{a_1}$  и  $r_{a_2}$ ) и окружности впадин (радиусами  $r_{f_1}$  и  $r_{f_2}$ );
- 4) через полюс зацепления  $P$  проводим общую касательную  $t-t$  к начальным окружностям зубчатых колес и линию зацепления  $n-n$ , касающуюся в точках  $A$  и  $B$  основных окружностей. Положение точек касания  $A$  и  $B$  определим, если из центров  $O_1$  и  $O_2$  опустим перпендикуляры на прямую  $n-n$ . Часть  $(ab)$  линии  $n-n$ , заключенная между окружностями вершин зубьев, называется активной линией зацепления, т. е. геометрическим местом действительного касания профилей зубьев; линия  $AB$  называется *теоретической линией зацепления*;

5) строим эвольвенты профилей зубьев, соприкасающихся в полюсе зацепления  $P$ . Профили зубьев получают, обкатывая линию зацепления как по одной, так и по другой основным окружностям. При обкатывании точка  $P$  линии зацепления описывает эвольвенты  $f_1e_1$  и  $f_2e_2$ , которые являются искомыми профилями. Для построения эвольвентного профиля зуба первого колеса отрезок  $AP$  делим на равные части (в нашем случае на 4) и получаем точки 1, 2, 3. Такие же отрезки откладываем от точки  $A$  влево и получаем точки 5, 6, 7.

На основной окружности первого зубчатого колеса с помощью измерителя вправо и влево от точки  $A$  откладываем дуги, длины которых равны этим отрезкам, получаем точки  $1', 2', 3', 4', 5'/6'$  и  $7'$ . Через эти точки проводим касательные к основным окружностям радиусом

$r_{b_3}$ , (перпендикуляры к соответствующим радиусам). На касательной, проведенной через точку  $1'$ , отложим  $1/4$  отрезка  $(AP)$ , т. е. длину  $1P$ . На касательной, проведенной через точку  $2'$ , отложим  $2/4$  отрезка  $(AP)$ , т. е. длину  $2P$ . На касательной, проведенной через точку  $3'$ , отложим  $3/4$  отрезка  $(AP)$ , т. е. длину  $3P$ , и т. д. Проведя аналогичные построения на каждой из касательных, получим ряд точек  $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6''$  и  $7''$ . Плавная кривая, проведенная через полученные точки, является эвольвентным профилем правой части зуба первого колеса. Таким же способом строится эвольвентный профиль второго колеса (для этого используется отрезок  $(BP)$ );

6) профиль ножки зуба, лежащий внутри основной окружности, очерчивается по радиальной прямой, соединяющей начало эвольвенты с центром колеса, и сопрягается с окружностью впадин закруглением радиусом  $\rho = 0,4 m$ .

7) по начальной окружности в масштабе откладываем половину толщины зуба  $\frac{S_w}{2}$ , проводим ось симметрии зуба (радиальную прямую) и по законам симметрии строим левый профиль зуба;

8) на каждом колесе справа и слева от построенного по точкам зуба с помощью лекал или шаблонов строим еще два зуба.

При вращении первого колеса (допустим, в направлении вращения часовой стрелки) ножка зуба войдет в зацепление в точке  $a$  с головкой зуба второго колеса. В точке  $b$  головка зуба первого колеса выйдет из зацепления с ножкой зуба второго колеса. Таким образом, точка зацепления (соприкосновения зубьев) перемещается по профилю зуба первого колеса от его основания к вершине, а по профилю зуба второго – наоборот, от вершины к основанию.

Участки профилей зубьев, которые в процессе передачи вращения входят в соприкосновение друг с другом, называют *активными профилями*. Определим эти участки. Точку  $f_1$  на профиле зуба первого колеса получим, если из центра  $O_1$  опишем дугу радиусом  $O_1a$ . Точно так же находим точку  $f_4$ , описав дугу радиусом  $O_2b$  из центра  $O_2$ .

В точке  $a$  встретятся точки  $f_1$  и  $e_2$ , а в точке  $b$  выйдут из зацепления точки  $f_2$  и  $e_1$ . Активными профилями являются части эвольвент  $e_1f_1$  и  $e_2f_2$ .

Чтобы построить дугу зацепления на первом зубчатом колесе, профиль зуба этого колеса повернем вокруг точки  $O_1$  и совместим последовательно с началом и концом активной линии зацепления, т. е. с точками  $a$  и  $b$ . На начальной окружности первого колеса получим дугу  $c'd'$ . Если повернем профиль второго колеса вокруг точки  $O_2$  и совместим с точками  $a$  и  $b$ , то на начальной окружности второго колеса получим дугу  $c''d''$ . Дуги  $c'd'$  и  $c''d''$  являются дугами зацепления по начальным окружностям, дуги  $ab'$  и  $a'b$  – дугами зацепления по основным окружностям.

Длина дуги зацепления по основной окружности колеса равна длине  $g_a$  активной линии зацепления  $ab$ .

Углы  $\varphi_{\alpha_1}$  и  $\varphi_{\alpha_2}$  называются углами перекрытия. Отношение угла перекрытия зубчатого колеса к его угловому шагу  $\tau = \frac{2\pi}{z}$  называется коэффициентом перекрытия. Т. е.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_{\alpha_1}}{\tau_1} = \frac{\varphi_{\alpha_2}}{\tau_2} = \frac{g_a z}{2\pi r_b} \quad (2.37)$$

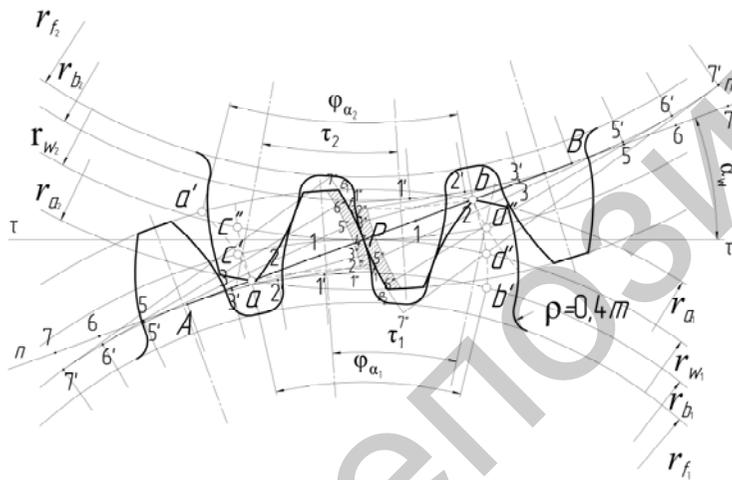


Рис. 2.11. Построение картины зацепления колес

## 2.11. Коэффициент перекрытия

Изобразим касание боковых профилей зубьев в начале (точка  $a$ ) и конце зацепления (точка  $b$ ) (рис. 2.12).

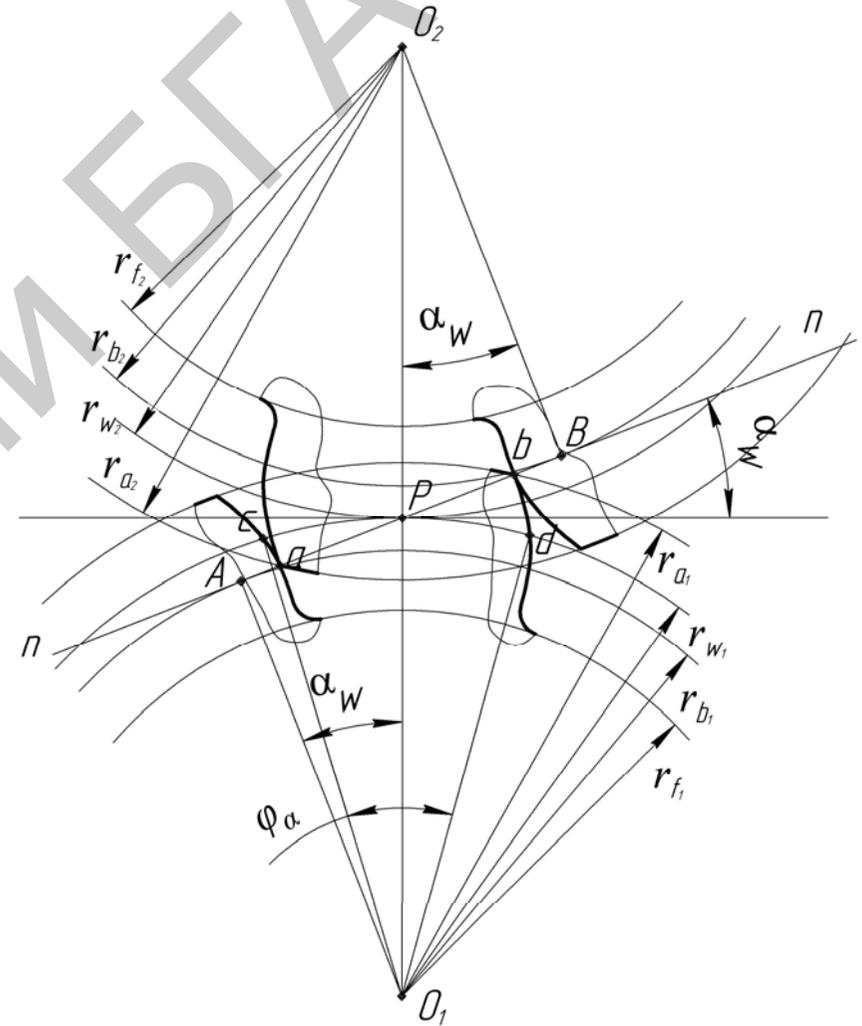


Рис. 2.12. Положение зубьев в начале и в конце зацепления

Условием непрерывности зацепления является  $\varphi_\alpha > \tau$ , где  $\tau$  – угловой шаг. Отношение

$$\frac{\varphi_\alpha}{\tau} = \varepsilon_\alpha \quad (2.38)$$

называется коэффициентом перекрытия.

Коэффициент перекрытия показывает среднее число пар зубьев, одновременно находящихся в зацеплении (если  $\varepsilon_\alpha = 1$ , то в зацеплении находится 1 пара зубьев, если  $\varepsilon_\alpha = 2$ , то 2 пары, а если  $\varepsilon_\alpha = 1,53$ , то 53 % времени в зацеплении находится 2 пары зубьев, а 47 % – 1 пара).

Выведем формулу для расчета  $\varepsilon_\alpha$ .

Угол зацепления:

$$\varphi_\alpha = \frac{\cup cd}{r_b} = \frac{ab}{r \cdot \cos \alpha_w}, \quad (2.39)$$

где  $\cup cd = ab$  по свойству эвольвенты.

Угловой шаг  $\tau = \frac{2\pi}{z}$ . Тогда (2.38) можно записать в виде:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau} = \frac{ab}{\frac{2\pi}{z} \cdot r \cos \alpha_w} = \frac{ab}{\frac{2\pi}{z} \cdot \frac{mz}{2} \cdot \cos \alpha_w} = \frac{ab}{\pi m \cos \alpha_w} = \frac{ab}{p \cos \alpha_w};$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ab}{p \cos \alpha_w}. \quad (2.40)$$

Величину  $ab$  можно взять с чертежа или вычислить аналитически. Для вывода формулы расчета  $ab$  произведем преобразования (см. рис. 2.9):

$$ab = aP + Pb = (ab - Pb) + (Ab - AP),$$

$$aB = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}, \quad PB = O_2P \cdot \sin \alpha_w,$$

$$Ab = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2}, \quad AP = O_1P \cdot \sin \alpha_w,$$

$$AP + PB = (O_1P + O_2P) \cdot \sin \alpha_w = a_w \sin \alpha_w,$$

$$ab = \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - (PB + AP) =$$

$$= \sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_w \sin \alpha_w.$$

Тогда

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a_1}^2 - r_{b_1}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - a_w \sin \alpha_w}{P \cdot \cos 20^\circ}. \quad (2.41)$$

В прямоугольных зацеплениях  $1 < \varepsilon_\alpha < 2$ . Для увеличения коэффициента зацепления  $\varepsilon_\alpha$  используют косозубые колеса.

На развертке венца косозубого зубчатого колеса (рис. 2.13) указаны размеры:  $\beta$  – угол наклона зубьев;  $P_t$  – торцевой шаг;  $P_n$  – нормальный шаг;  $B$  – ширина колеса.

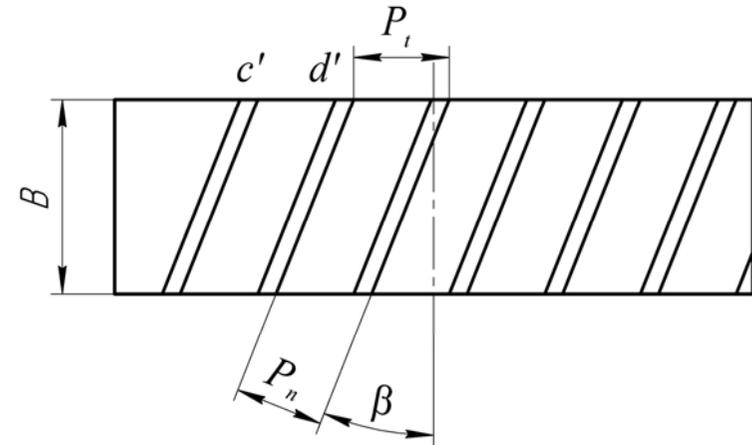


Рис. 2.13. Развертка венца косозубого колеса

Длина дуги зацепления в косозубом зацеплении (по сравнению с прямоугольным) увеличена на длину  $c'd' = B \cdot \operatorname{tg} \beta$ .

Тогда величина коэффициента перекрытия для косозубого зацепления:

$$\varepsilon_{\beta} = \varepsilon_{\alpha} + \frac{c' d'}{P_t} = \varepsilon_{\alpha} + \frac{\beta \cdot \operatorname{tg} \beta}{P_t}. \quad (2.42)$$

При этом  $m_n = m_t \cdot \cos \beta$  – нормальный модуль,  $m_t$  – торцевой.

К преимуществам косозубых колес можно отнести возможность передачи больших крутящих моментов при тех же габаритах, повышенную надежность и бесшумность.

Недостатками являются сложность изготовления, появление осевого усилия, что требует усложнения конструкции подшипникового узла.

Для снятия осевого усилия используют шевронные колеса, представляющие собой два косозубых колеса с противоположными углами наклона зубьев. Однако такие колеса более сложны в изготовлении, нежели косозубые.

## 2.12. Методы нарезания зубчатых колес

Существуют два отличных друг от друга метода изготовления зубчатых колес с эвольвентным профилем зубьев.

1. *Метод копирования.* При этом методе профиль инструмента (дисковая или пальцевая фреза) повторяет профиль впадины нарезаемого колеса.

Указанный метод нарезания колес обладает несколькими недостатками: относительно низкой производительностью; необходимостью иметь большое количество типоразмеров инструмента для нарезания различных колес (при этом сам инструмент имеет сложную форму); необходимостью иметь на станке дополнительное делительное устройство и др. Поэтому данный метод при нарезании зубчатых колес используется редко (в основном в ремонтном производстве).

2. *Метод обкатки (огибания).* При этом методе инструмент (долбяк) представляет собой некоторое подобие эвольвентного зубчатого колеса, обладающего режущей кромкой (и выполненное из соответствующей инструментальной стали).

При нарезании колеса, помимо движения резания, инструменту и заготовке дают движение обкатки, т. е. движение, имитирующее работу двух зубчатых находящихся в зацеплении колес. В этом случае на заготовке колеса автоматически формируется нужное число зубьев эвольвентного профиля.

При этом профиль зуба формируется не как копия профиля инструмента, а как огибающая ко многим положениям профиля зуба инструмента в его движении относительно нарезаемого колеса. Данный метод существенно повышает производительность (т. к. процесс непрерывен) и точность (т. к. нет дополнительного делительного устройства). Значительно снижается количество необходимого инструмента, т. к. одним и тем же инструментом можно нарезать колесо данного модуля с любым числом зубьев.

Зубчатая рейка с прямолинейным профилем зуба является частным случаем эвольвентного колеса, поэтому при методе обкатки наиболее часто используется инструмент реечного типа (инструмент, который в осевом сечении имеет форму зубчатой рейки). Это может быть зубчатая гребенка или червячная фреза. При этом упрощается форма инструмента и его изготовление. Стандартная зубчатая рейка называется производящим исходным контуром (рис. 2.14, а).

Имеется несколько стандартов на исходные контуры, учитывающие специфику некоторых видов передач (мелкомодульных, конических и т. д.). Чаще всего используются параметры, определенные ГОСТ 13 755–81.

В соответствии с этим стандартом исходный контур имеет следующие параметры:

$\alpha = 20^\circ$  – угол профиля исходного контура (основной параметр, который определяет ряд эвольвент, используемых для зубчатых передач в соответствии с этим стандартом);

$h_a^* = 1$  – коэффициент высоты головки зуба;

$c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора (согласно другим стандартам в зависимости от модуля и типа инструмента  $c^*$  может быть равен 0,2; 0,3; 0,35).

Приведенные коэффициенты являются безразмерными величинами. По высоте зуб исходного контура делится на головку и ножку. Это деление осуществляется делительной прямой. Делительная прямая рейки – это прямая, на которой толщина зуба равна ширине впадины (рис. 2.14, б).



зацеплении со стандартной рейкой в качестве начальной окружности всегда выступает делительная окружность колеса, а угол зацепления равен стандартному углу профиля исходного контура ( $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$ ).

Положение инструмента характеризуется коэффициентом смещения "x". Смещение считается нулевым ( $x = 0$ ), если при нарезании делительная прямая рейки касается делительной окружности колеса (совпадает с начальной прямой рейки); смещение положительное ( $x > 0$ ), если делительная прямая проходит вне делительной окружности нарезаемого колеса (инструмент отодвигается от центра заготовки, см. рис. 2.15); при отрицательном смещении инструмент приближается к центру заготовки и делительная прямая рейки пересекает делительную окружность колеса.



Рис. 2.16. Изменение формы зуба в зависимости от коэффициента смещения

Из рисунка 2.16 видно, что во всех случаях формируется одна и та же эвольвента. При изменении положения инструмента изменяется используемый для профиля зуба участок этой эвольвенты. С увеличением коэффициента смещения зуб становится более толстым, более жестким, более прочным на изгиб.

Увеличение радиусов кривизны эвольвенты на более высоких участках приводит также к увеличению контактной прочности зубьев. Применение отрицательного смещения позволяет уменьшить габариты нарезаемых колес.

### 2.13. Явление подрезания зубьев. Минимальное число зубьев колеса

Когда происходит наложение боковых профилей зуба инструментальной рейки и зуба колеса (интерференция), то часть ножки зуба будет подрезана головкой зуба инструментальной рейки (рис. 2.17). При этом часть рабочего участка зуба не будет являться эвольвентой и основная теорема зацепления не будет соблюдена, а основание зуба – ослаблено.

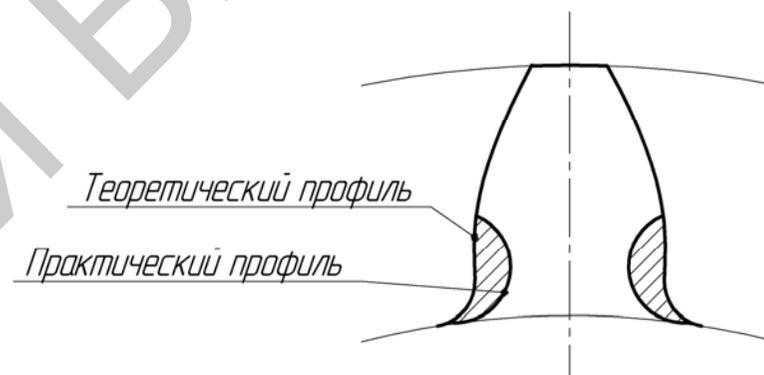


Рис. 2.17. Подрезание ножки зуба

В этом случае активная линия зацепления  $ab$  будет выходить за пределы теоретической линии  $AB$  (см. рис. 2.12). Для устранения подрезания необходимо совместить точки  $a$  и  $A$  на линии зацепления. С этой целью производится коррекция, при которой рейку отодвигают от заготовки нарезаемого колеса на некоторое расстояние, достаточное для того, чтобы не происходило подрезание ножки зуба (рис. 2.18).

Определим величину смещения рейки, необходимую для устранения подрезания ножки зуба, для чего необходимо совместить точки  $A$  и  $a$  – точки теоретической и практической линий зацепления. При этом

$$OP = OD + m - x \cdot m,$$

где  $OP = \frac{mz}{2}$ ;

$OD = OA \cdot \cos 20^\circ$ ;

$OA = r_b = \frac{mz}{2} \cos 20^\circ$ ;

$xm$  – абсолютный сдвиг рейки;  
 $x$  – относительное смещение рейки.

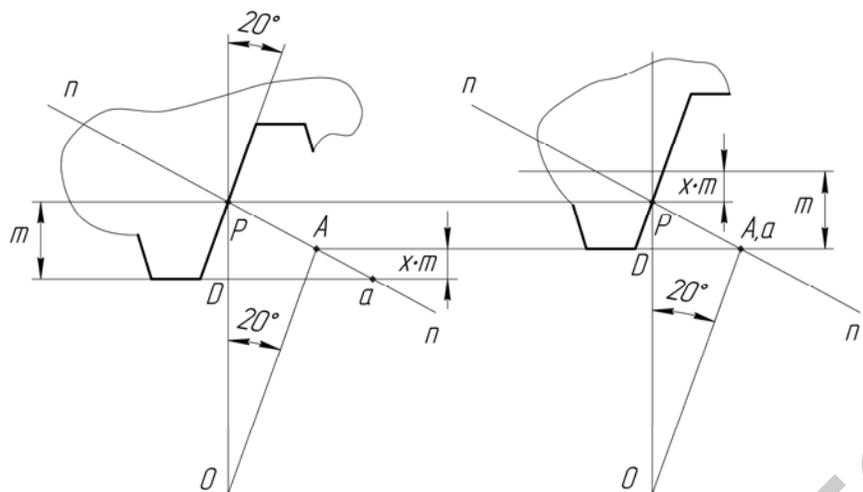


Рис. 2.18. Смещение инструментальной рейки при нарезании положительного колеса

Тогда

$$\frac{mz}{2} = \frac{mz}{2} \cdot \cos^2 20^\circ + m - x \cdot m,$$

откуда

$$x = 1 - \frac{z}{2}(1 - \cos^2 20^\circ) = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 20^\circ,$$

или в общем виде (если  $20^\circ = \alpha_w$ )

$$x = 1 - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha_w.$$

Для условия  $x = 0$  определим минимальное число зубьев нулевого колеса, при котором не будет подрезания:  $z_{\min} = \frac{2}{\sin^2 \alpha_w}$ .

Если  $\alpha_w = 20^\circ$ , то  $z_{\min} \approx \frac{2}{\sin^2 20^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{17}} = 17$ .

Используя это условие, можно записать для случая  $\alpha_w = 20^\circ$ :

$$x = 1 - \frac{z}{2} \cdot \frac{2}{17} = \frac{17 - z}{17}. \quad (2.43)$$

Если  $x = 0$ , то будет нарезано нулевое колесо, если  $x > 0$ , то положительное (рейка отодвинута от колеса), если  $x < 0$ , то отрицательное (при этом рейка будет придвинута к колесу).

## 2.14. Графический синтез зубчатых механизмов

Графический синтез зубчатых механизмов заключается в построении картины скоростей звена, которая представляет собой прямую линию, проведенную через концы векторов скоростей каких-либо двух точек звена.

Рассмотрим вначале наиболее простой зубчатый механизм, состоящий из двух цилиндрических колес. На рис. 2.19, а в масштабе построена кинематическая схема такого механизма, составленного звеньями 1 и 2.

Проведем прямую  $uu$  параллельно линии центров колес  $O_1O_2$  и спроектируем на нее все характерные точки: получим точки  $o_1, o_2, c'$ . Из точки  $c'$  отложим перпендикулярно линии  $uu$  отрезок ( $c'c$ ) (рис. 2.19, б), который в некотором масштабе  $\mu_v$  будет изображать векторы скоростей точки  $C$  обоих колес (скорости точек касания начальных окружностей двух колес всегда одинаковы):

$$v_{c_1} = v_{c_2} = \mu_v (c'c). \quad (2.44)$$

Далее, проведя через точки  $c$  и  $o_1$  прямую 1 ( $c - o_1 - a$ ), получим картину скоростей звена 1 (скорость точки  $O_1$  – оси вращения колеса равна нулю, поэтому точка  $o_1$  лежит на прямой  $yy$ ). Аналогично, проведя через точки  $c$  и  $o_2$  прямую 2 ( $c - o_2 - b$ ), получим картину скоростей звена 2. Таким образом, картина скоростей механизма построена. Векторы  $\overline{a'a}$  и  $\overline{b'b}$  изображают соответственно скорости точек  $A$  и  $B$  зубчатых колес. Для определения скорости какой-либо точки, например, точки  $D$  колеса 2, нужно спроектировать эту точку на прямую 2 картины скоростей. Вектор  $\overline{d'd}$  будет изображать скорость этой точки.

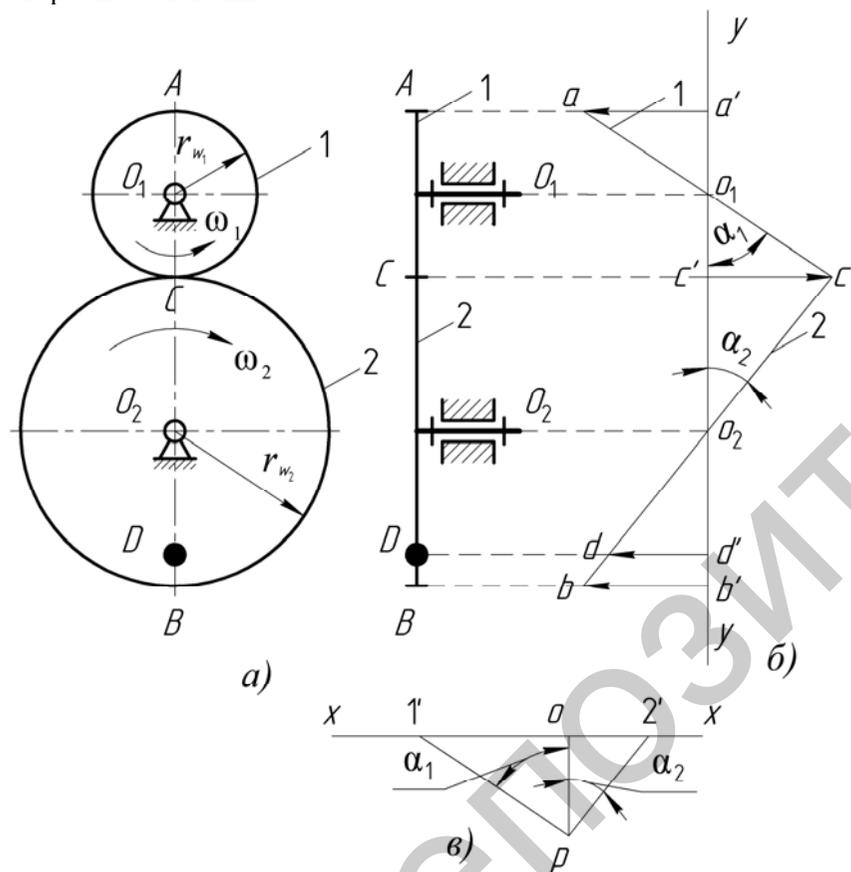


Рис. 2.19. Графический синтез простого одноступенчатого зубчатого механизма

Угловые скорости звеньев пропорциональны углам между соответствующими прямыми и линией  $yy$ :

$$\omega_1 = \frac{v_{C_1}}{r_{w_1}} = \frac{\mu_v(c'c)}{\mu_l(r_{w_1})} = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \alpha_1; \quad (2.45)$$

$$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{r_{w_2}} = \frac{\mu_v(c'c)}{\mu_l(r_{w_2})} = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \alpha_2, \quad (2.46)$$

где  $(r_{w_1})$  и  $(r_{w_2})$  – масштабные величины радиусов начальных окружностей колес.

Выберем точку  $p$  и на произвольном расстоянии  $H$  от этой точки проведем прямую  $xx$ , перпендикулярную к  $yy$  (рис. 2.19, в). Из точки  $p$  опустим на эту линию перпендикуляр  $po$ . Далее из точки  $p$  проведем линии  $p1'$  и  $p2'$ , параллельные соответственно линиям 1 и 2 картины скоростей. Тогда отрезки  $(o1')$  и  $(o2')$  на линии  $xx$  будут изображать в определенном масштабе соответственно угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Действительно:

$$\omega_1 = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\mu_v(o1')}{\mu_l H} = \mu_\omega(o1'); \quad (2.47)$$

$$\omega_2 = \frac{\mu_v}{\mu_l} \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\mu_v(o2')}{\mu_l H} = \mu_\omega(o2'), \quad (2.48)$$

где  $\mu_\omega = \frac{\mu_v}{\mu_l H}$  – масштаб угловых скоростей.

Необходимо отметить, что масштабы  $\mu_v$  и  $\mu_\omega$  при построении картины линейных и угловых скоростей могут быть произвольными и их определять не следует.

Передаточное отношение механизма определяется из картины угловых скоростей

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(o1')}{(o2')}. \quad (2.49)$$

Так как отрезки  $(o1')$  и  $(o2')$  расположены по разные стороны от прямой  $po$ , то это значит, что угловые скорости звеньев направлены в противоположные стороны, то есть передаточное отношение имеет знак «минус».

Рассмотрим графический синтез планетарного редуктора.

На рис. 2.20, *a* в масштабе изображена кинематическая схема планетарного механизма. Проводим линию  $yy$ , параллельную линии центров, и проектируем на нее все характерные точки (рис. 2.20, *б*).

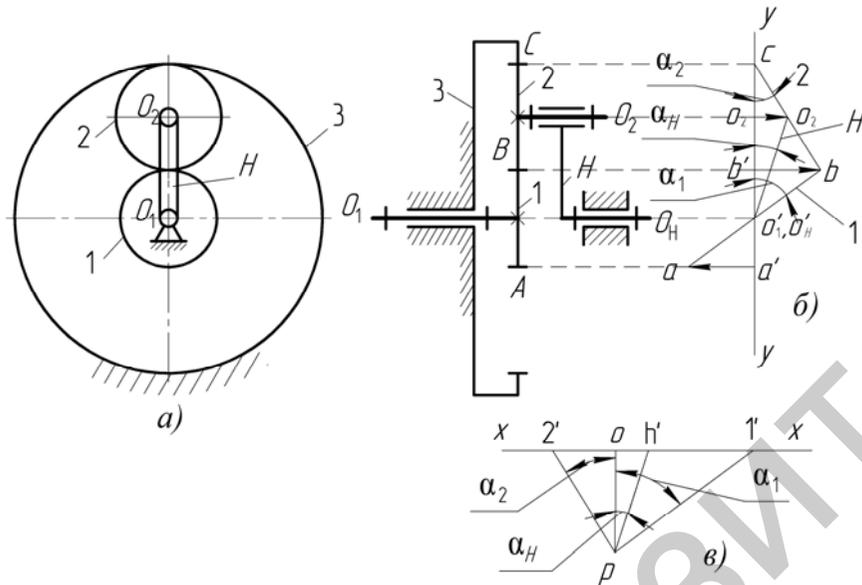


Рис. 2.20. Графический синтез планетарного редуктора

От точки  $b'$  откладываем произвольный отрезок  $(b'b)$ , изображающий вектор скорости точки  $B$  колеса 1. Соединив точку  $b$  с точкой  $o_1$  (скорость точки  $O_1$  равна нулю), получим прямую 1, которая является картиной скоростей колеса 1.

У колеса 2 известны скорость точки  $B$  (она такая же, как и скорость точки  $B$  колеса 1) и скорость точки  $C$  (ее скорость равна нулю).

Поэтому, соединяя точки  $b$  и  $c$ , получим прямую 2, которая является картиной скоростей колеса 2.

У водила  $H$  известны также скорости двух точек: точки, совпадающей с центром  $O_2$  колеса 2 – скорость этой точки определяется отрезком  $(o'_2 o_2)$ , и точки, совпадающей с осью вращения водила  $O_1$ . Поэтому, соединяя точки  $o_2$  и  $o_1$ , получим прямую  $H$ , которая является картиной скоростей водила.

Для построения картины угловых скоростей проводим прямую  $xx$  перпендикулярную линии центров и оси  $yy$ , из произвольно выбранной точки  $p$  проводим лучи, параллельные прямым 1, 2 и  $H$ , до пересечения с прямой  $xx$  (рис. 2.20, *в*). Полученные отрезки  $(p1')$ ,  $(p2')$ ,  $(ph')$  пропорциональны соответствующим угловым скоростям  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_H$ .

Тогда передаточные отношения определяются аналогично предыдущим:

$$U_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{(o1')}{(oh')}; \quad (2.50)$$

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(o1')}{(o2')}. \quad (2.51)$$

Рассмотрим графический синтез зубчатого механизма с планетарной ступенью (звенья  $H$ , 3', 4 и 5) и не планетарной (звенья 1, 2, 2' и 3) (рис. 2.21, *a*). Механизм вычерчен в масштабе  $\mu$ .

Строим план скоростей. Проводим линию  $yy$ , параллельную линии центров, и проектируем на нее все характерные точки (рис. 2.21, *б*).

Скорость точки  $A$  изображаем отрезком произвольной длины  $(p_1a)$ , перпендикулярным оси  $yy$ . Соединив точку  $a$  с точкой  $O_1$ , получим прямую 1, которая является картиной скоростей колеса 1.

Так как скорость точки  $A$  колеса 2 равна скорости точки  $A$  колеса 1, а колеса 2 и 2' являются одним звеном, из точки  $a$  проводим прямую до точки  $b$  через  $O_2$ .

Так как скорость точки  $B$  колеса 2' равна скорости точки  $B$  колеса 3, то из точки  $b$  проводим прямую до точки  $o_3$ .

Скорость точки  $C$  колеса 3' равна скорости точки  $C$  колеса 4, а скорость точки  $d$  равна нулю, то из точки  $c$  проводим прямую до точки  $d$ .

Точка  $o_4$  принадлежит колесу 4 и одновременно водилу  $H$ , поэтому проведем прямую из точки  $o_4$  до центра вращения водила  $o_H$ . Таким образом, мы получим картину распределения скоростей водила  $H$ .

План угловых скоростей построим, если перпендикулярно линии  $yy$  проведем прямую  $xx$  и из произвольно выбранного полюса  $p$  проведем лучи, параллельные прямым 1, 2, 3 и  $H$  до пересечения с прямой  $xx$  (рис. 2.21, в).

Полученные отрезки  $(p1')$ ,  $(p2')$ ,  $(p3')$ ,  $(ph')$  пропорциональны соответствующим угловым скоростям  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_H$ .

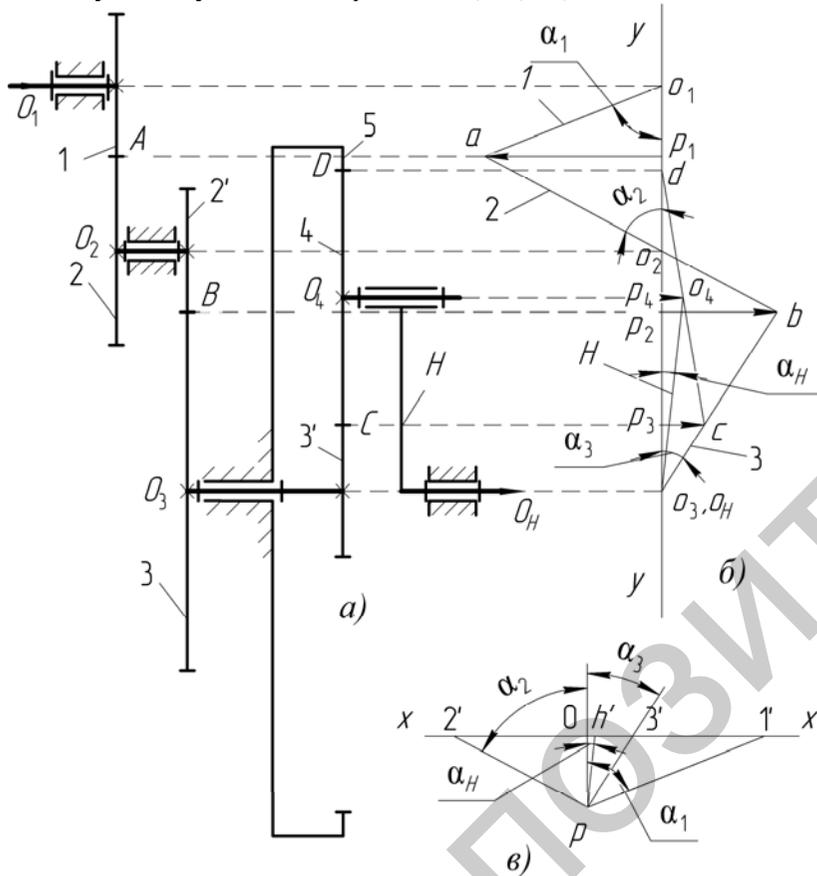


Рис. 2.21. Графический синтез зубчатого механизма с планетарной и не планетарной ступенями

Тогда передаточные отношения равны:

$$U_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{(o1')}{(oh')}; \quad (2.52)$$

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(o1')}{(o2')}; \quad (2.53)$$

$$U_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{(o1')}{(o3')}. \quad (2.54)$$

### 2.15. Пространственные зубчатые передачи

К пространственным зубчатым передачам можно отнести конические, винтовые, гиперболоидные и червячные передачи.

Коническая передача образована качением двух конусов  $OP_1P$  и  $OP_2P$  (рис. 2.22). Они называются начальными конусами. В точке  $P$  окружные скорости обоих конусов равны  $v_{p_1} = v_{p_2}$ , или  $O_1P \cdot \omega_1 = O_2P \cdot \omega_2$ ;  $OP \cdot \sin \delta_1 \cdot \omega_1 = OP \cdot \sin \delta_2 \cdot \omega_2$ . Передаточное отношение конической передачи имеет выражение

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (2.55)$$

Для расчета геометрических параметров конических зубчатых колес используют те же формулы, что и для цилиндрических, однако вводится понятие эквивалентных цилиндрических колес. Для них числа зубьев:

$$z'_1 = \frac{z_1}{\cos \delta_1},$$

$$z'_2 = \frac{z_2}{\cos \delta_2}. \quad (2.56)$$

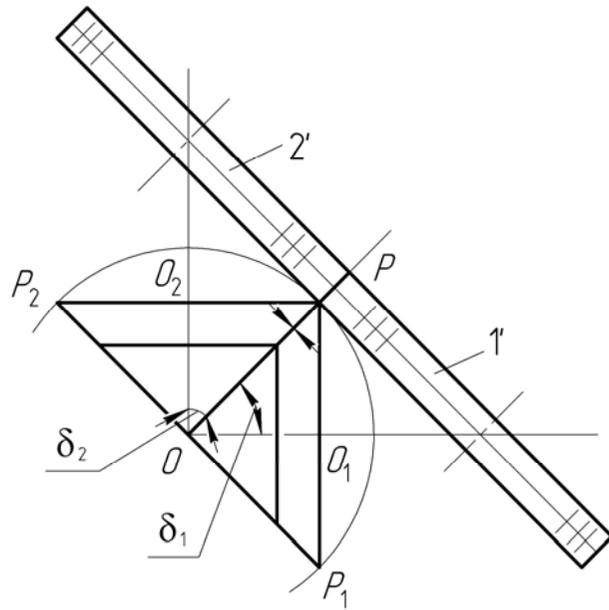


Рис. 2.22. Геометрические параметры конической передачи

Различают геометрические параметры конических зубчатых колес (рис. 2.23):

- делительная окружность  $r = \frac{mz}{2}$ ;
- основная окружность  $r_b = r \cdot \cos 20^\circ$ ;
- окружность выступов  $r_a = r + m \cdot \cos \delta$ ;
- окружность впадин  $r_f = r - 1,2m \cdot \cos \delta$ ;
- высота головки зуба  $h_a = m$ ;
- высота ножки зуба  $h_f = 1,2m$ ;
- конусное расстояние  $L = OP$ ;
- ширина колеса  $B = 4 \dots 12m$ .

Достоинства конической передачи:

- возможность передачи вращательного движения между осями под различными углами;
- больший коэффициент перекрытия, чем у цилиндрической (см. размеры эквивалентной цилиндрической передачи, у которой ра-

диусы колес больше, чем у конической, значит, и возрастает величина практической линии зацепления  $ab$ ).

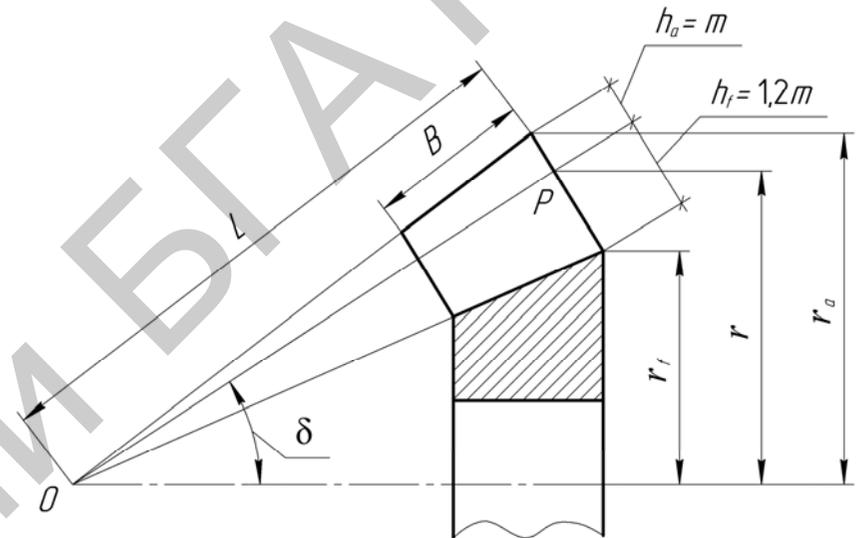


Рис. 2.23. Основные геометрические параметры конического колеса

Недостатки конической передачи:

- сложность изготовления зубчатых колес (по сравнению с цилиндрическими);
- повышенная чувствительность к изменению конусного расстояния;
- пониженная нагрузочная способность по сравнению с цилиндрической из-за консольного расположения одного из колес и несимметричного расположения второго относительно опор.

## 2.16. Гиперboloидные передачи

Гиперboloидные передачи образуются условным качением двух гиперboloидов (рис. 2.24, а)  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  друг по другу при вращении их вокруг перекрещивающихся осей  $O_1$  и  $O_2$ , где  $\gamma$  – угол между осями. Прямая  $\tau - \tau$  является общей касательной гиперboloидов. Углы между нею и осями вращения  $O_1$  и  $O_2$  равны соответственно  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

Если условно «вырезать» средние части гиперboloидов (горло) и нарезать на них зубья, то получится винтовая передача (рис. 2.24, б).

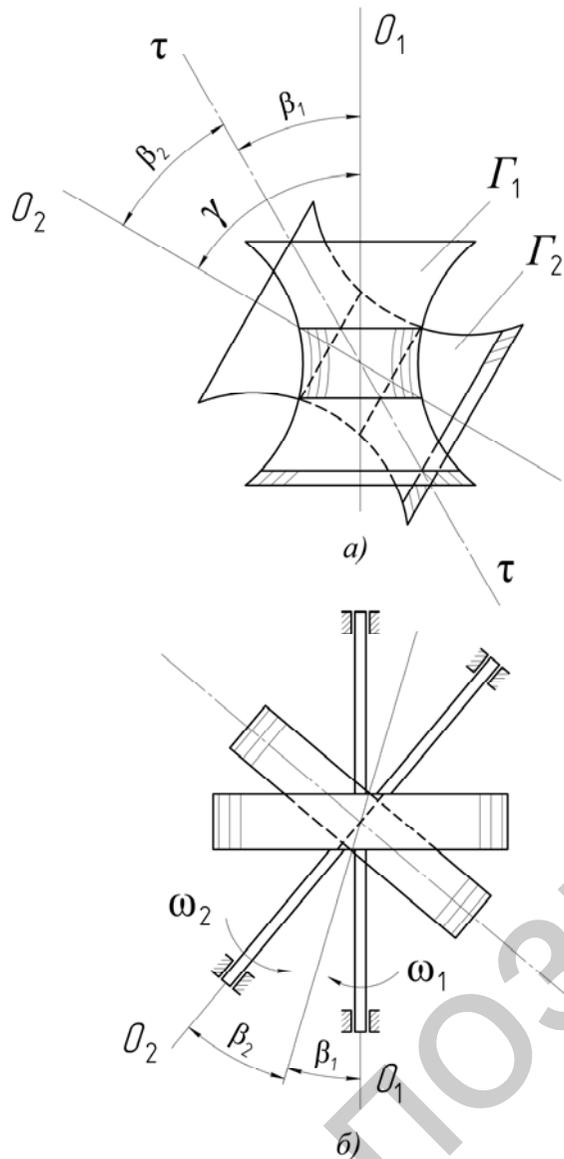


Рис. 2.24. Принципиальные схемы отдельных разновидностей гиперболических передач: а – зацепление двух гиперболических; б – винтовая передача

Если же «вырезать» другие части, то получится гиперболическая передача.

Чем дальше от горлового сечения выбраны части гиперболических, тем меньше будет отношение скорости скольжения к окружной скорости колеса и соответственно выше механический коэффициент полезного действия.

Передаточное отношение гиперболической передачи вычисляется по формуле

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2 \cos \beta_2}{r_1 \cos \beta_1}, \quad (2.57)$$

где  $z_1$  и  $z_2$ ,  $r_1$  и  $r_2$  – числа зубьев и радиусы делительных окружностей зацепляющихся колес.

Из формулы следует, что в отличие от цилиндрических в гиперболических передачах можно воспроизводить необходимое передаточное отношение, подбирая не две, а четыре величины ( $r_1$  и  $r_2$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ).

Недостатком таких передач является то, что сопряженные профили зубьев соприкасаются в точке, а не по линии. Следовательно, возникают значительные удельные давления, которые в совокупности с большими скоростями скольжения зубьев друг по другу вызывают их быстрый износ.

Червячная передача (рис. 2.25) является одной из разновидностей винтовой передачи. Чаще всего угол между осями  $\gamma = 90^\circ$ .

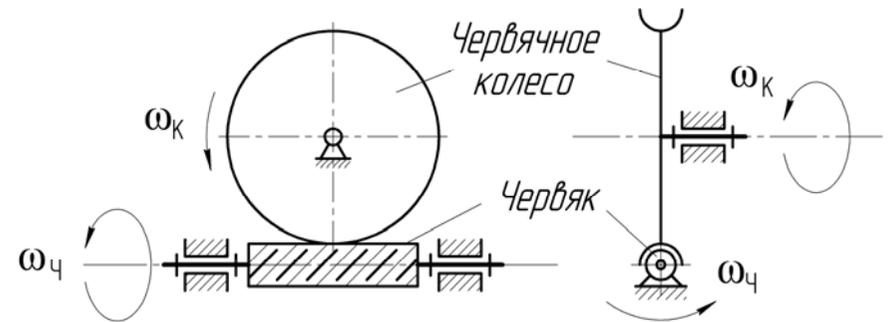


Рис. 2.25. Кинематическая схема червячной передачи

Как правило, ведущим звеном является червяк. При этом передаточное отношение

$$U_{\text{чк}} = \frac{\omega_{\text{ч}}}{\omega_{\text{к}}} = \frac{z_{\text{к}}}{z_{\text{ч}}}, \quad (2.58)$$

где  $z_{\text{к}}$  – число зубьев колеса;

$z_{\text{ч}}$  – число заходов червяка.

Величина передаточного отношения может составлять  $U_{\text{чк}} = 10 \dots 100$ , что дает преимущество по сравнению с другими зубчатыми передачами.

Недостатком гиперболоидных передач является невысокий механический к. п. д. В ряде случаев для его увеличения используют разные материалы, из которых изготовлены зубчатые колеса или их венцы. Это снижает коэффициент трения скольжения в месте контакта зубьев. Например, в червячной передаче червяк изготавливают из стали или чугуна, а венец зубчатого колеса – из бронзы.

### Вопросы для самопроверки

1. Как подразделяются зубчатые механизмы в зависимости от расположения осей вращения колес?
2. Что такое передаточное отношение и как оно определяется по величине и по знаку?
3. Перечислите типы и охарактеризуйте отличительные признаки зубчатых механизмов с подвижными осями.
4. Что является основным условием синтеза планетарных механизмов?
5. Сформулируйте основную теорему зацепления.
6. Что такое эвольвента? Перечислите ее свойства.
7. Что показывает коэффициент перекрытия?
8. Какие бывают методы нарезания зубчатых колес?
9. Из-за чего происходит подрезание зубьев?
10. Как проводится графический синтез зубчатых механизмов?
11. Назовите основные виды пространственных зубчатых передач.

## 3. СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 3.1. Общие сведения о кулачковых механизмах

Кулачковым называется механизм, в состав которого входит кулачок – звено, рабочая поверхность которого имеет переменную кривизну. Совокупность кривых, очерчивающих рабочую поверхность, носит название профиля кулачка.

Кулачковые механизмы предназначены для преобразования вращательного или поступательного движения кулачка 1 в возвратно-поступательное движение толкателя 2 (рис. 3.1, а, в) или возвратно-вращательное движение коромысла 4 (рис. 3.1, б, г). Основным преимуществом кулачковых механизмов является то, что при небольшом количестве звеньев (фактически механизм имеет три основных звена: входное – кулачок, выходное – толкатель или коромысло и неподвижное – стойку) можно получить практически любой закон движения выходного звена, для чего необходимо лишь правильно спрофилировать кулачок. К достоинствам кулачковых механизмов относятся также простота их конструкции и синтеза. Благодаря этому кулачковые механизмы получили широкое распространение в управляющих кинематических цепях различных машин и приборов (например, газораспределительный механизм двигателя внутреннего сгорания) и особенно в машинах-автоматах.

К недостатку кулачковых механизмов следует отнести наличие высшей кинематической пары «кулачок – толкатель (коромысло)», повышающей износ звеньев. Поэтому зачастую для замены в высшей кинематической паре трения скольжения трением качения и уменьшения износа как кулачка, так и толкателя (коромысла), в схему механизма включают дополнительное звено – ролик 3 и вращательную кинематическую пару (рис. 3.1).

Кулачковые механизмы классифицируются по следующим признакам:

- а) по расположению звеньев в пространстве:
  - плоские;
  - пространственные;
- б) по движению кулачка:
  - вращательное;
  - поступательное;

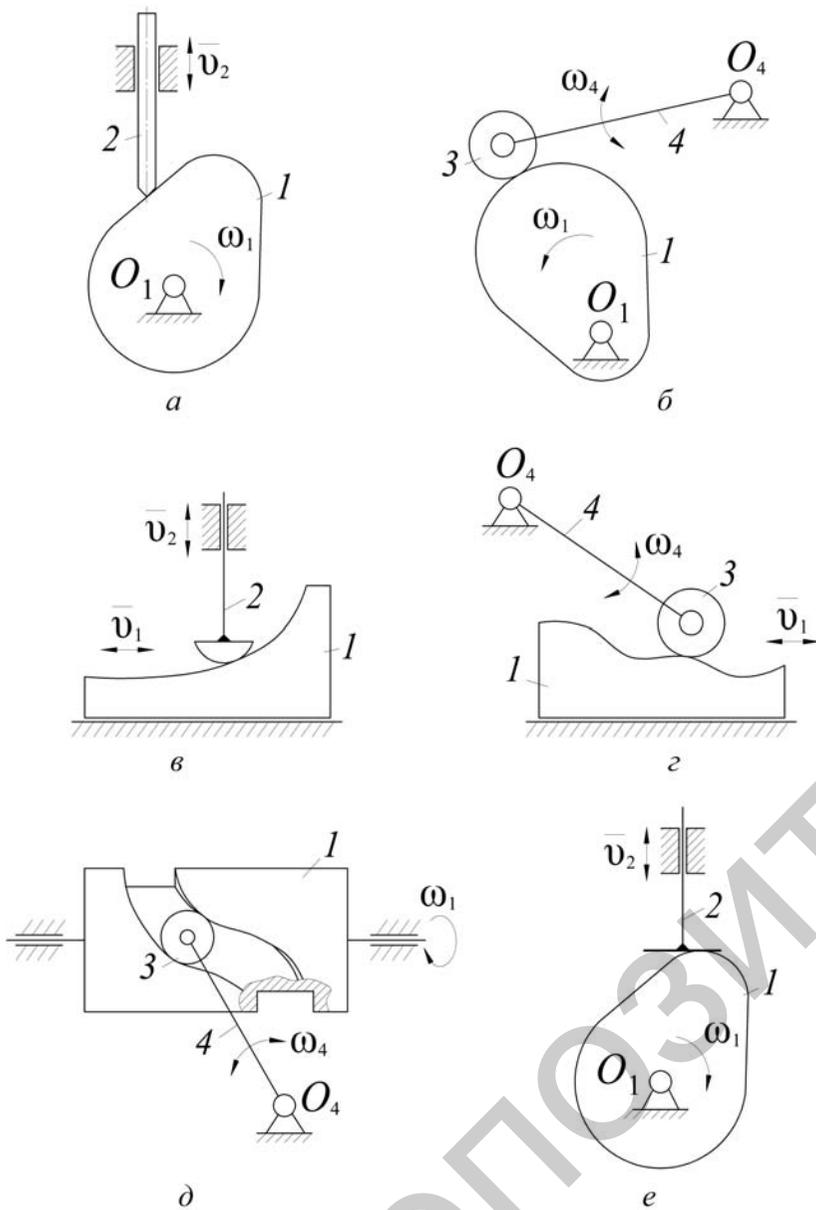


Рис. 3.1. Схемы кулачковых механизмов:  
1 – кулачок; 2 – толкатель; 3 – ролик; 4 – коромысло

- винтовое;
- в) по движению выходного звена:
  - возвратно-поступательное (с толкателем);
  - возвратно-вращательное (с коромыслом);
- г) по наличию ролика:
  - с роликом;
  - без ролика;
- д) по виду кулачка:
  - дисковый (плоский);
  - цилиндрический;
  - коноид (сложный пространственный);
- е) по форме рабочей поверхности выходного звена (толкателя или коромысла):
  - плоская;
  - заостренная;
  - цилиндрическая;
  - сферическая;
  - эвольвентная;
- ж) по способу замыкания элементов высшей пары:
  - силовое (рис. 3.2, а);
  - геометрическое (рис. 3.2, б).

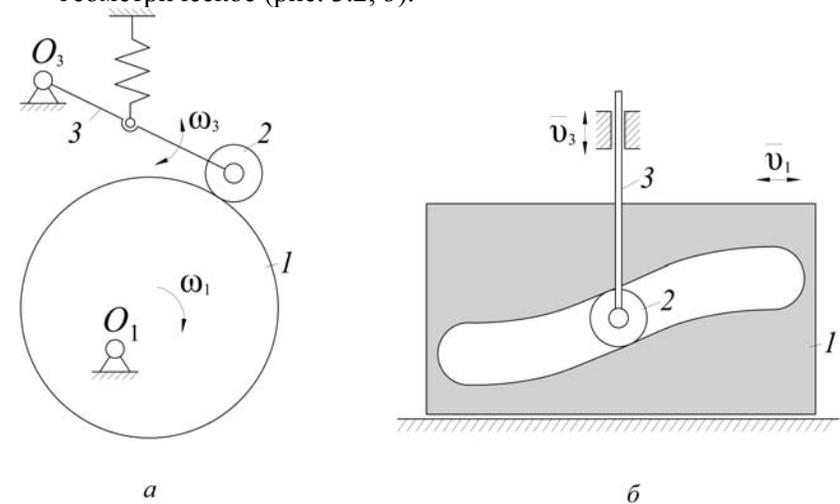


Рис. 3.2. Примеры замыкания высшей кинематической пары кулачковых механизмов:

а – силовое замыкание; б – геометрическое замыкание

Эта простая классификация позволяет уже по названию механизма представить его конструкцию.

Этапы проектирования кулачкового механизма:

- выбор структурной схемы механизма;
- выбор закона движения выходного звена;
- определение основных размеров звеньев;
- построение профиля кулачка.

Выбор схемы кулачкового механизма определяется, в первую очередь, из конструктивных соображений для обеспечения требуемого по условиям технологического процесса закона движения выходного звена  $S = S(\varphi)$ .

В задании на выполнение курсового проекта при проектировании кулачкового механизма в качестве исходных данных, как правило, задаются:

- структурная схема механизма;
- ход выходного звена, равный  $h = S_{\max}$ ;
- фазовые углы поворота кулачка;
- допустимый угол передачи движения  $\gamma_{\min}$  или угол давления  $\alpha_{\max}$ ;
- законы движения выходного звена (вид диаграммы аналогов ускорения  $S'' = S''(\varphi)$ ).

### 3.2. Основные параметры кулачкового механизма

При анализе и синтезе кулачковых механизмов различают *практический* и *теоретический профили* кулачка. Практический профиль – это профиль, по которому действительно выполнен кулачок. В механизмах с роликовым толкателем (коромыслом) круглый ролик ставится для уменьшения трения между звеньями высшей кинематической пары (трение скольжения заменяется трением качения). Наличие ролика дает лишнюю степень свободы, поэтому для ее устранения при анализе и синтезе механизма практический профиль заменяется теоретическим.

Круглый ролик не изменяет закона движения толкателя, поэтому его радиус может выбираться произвольно, но не больше минимального радиуса кривизны теоретического профиля кулачка  $r_{\min}$  (рис. 3.3). Выбирая различные радиусы ролика, можно получить

бесчисленное количество эквидистантных профилей, обеспечивающих тот же самый закон движения толкателя, что и теоретический профиль кулачка.

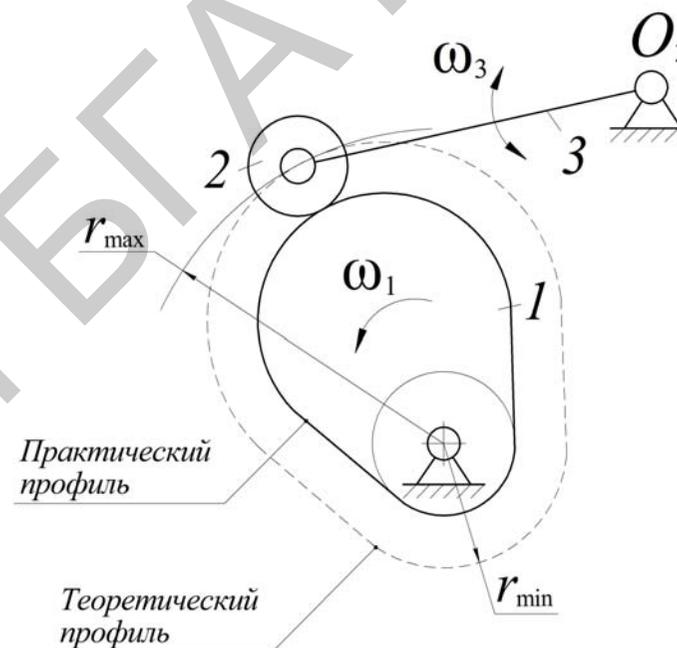


Рис. 3.3. Практический и теоретический профили кулачка кулачкового механизма

Теоретический профиль проходит через центр ролика и является эквидистантным практическому (рис. 3.3). Именно он определяет закон движения выходного звена кулачкового механизма.

Несмотря на чрезвычайное разнообразие профилей кулачков можно указать общие для всех их элементы. Для всякого кулачка можно найти точки наиболее и наименее удаленные от центра вращения и указать соответствующие им максимальный радиус  $r_{\max}$  и минимальный радиус  $r_{\min}$  (рис. 3.3). Окружность радиусом  $r_{\min}$  называется окружностью минимального радиуса – окружность, центр которой совпадает с осью вращения кулачка, а сама она касается его теоретического профиля в наиболее близких к оси враще-

ния точках. Она играет важную роль при последующем анализе кулачковых механизмов.

В моменты, когда толкатель (коромысло) контактирует с точками теоретического профиля кулачка, соответствующими  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , он неподвижен. Если такая точка одна, то толкатель совершает мгновенную остановку, если таких точек много, так, что они образуют дугу радиуса  $r_{\min}$  или  $r_{\max}$ , имеет место его ближнее и дальнее стояние (рис. 3.4). Между периодами остановок лежат периоды удаления и возвращения толкателя.

Большинство кулачковых механизмов относится к цикловым механизмам с периодом цикла равным  $2\pi$ . В цикле движения толкателя (коромысла) в общем случае можно выделить четыре периода (фазы): удаления, дальнего стояния, возвращения и ближнего стояния. В соответствии с этим, углы поворота кулачка или фазовые углы делятся на угол удаления  $\varphi_y$ ; угол дальнего стояния  $\varphi_{д.с.}$ ; угол возвращения  $\varphi_v$  и угол ближнего стояния  $\varphi_{б.с.}$  (рис. 3.4).

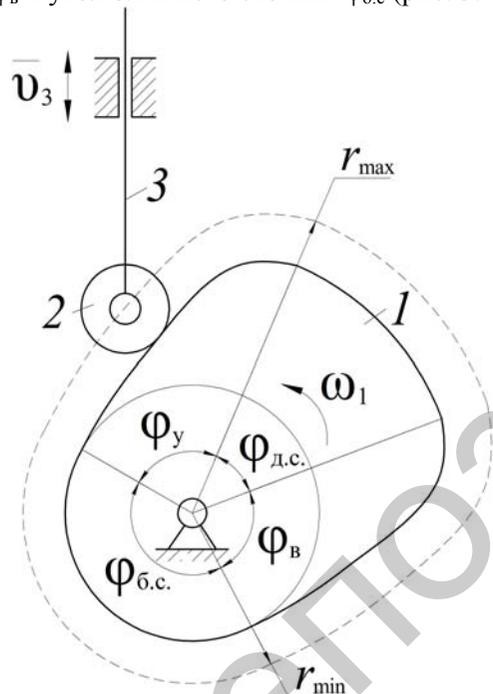


Рис. 3.4. Фазовые углы кулачкового механизма

Сумма трех углов образует угол, который называется рабочим углом  $\varphi_p$ :

$$\varphi_p = \varphi_y + \varphi_{д.с.} + \varphi_v.$$

Разнообразие законов движения выходного звена кулачкового механизма достигается за счет различного сочетания длительностей фаз и законов его удаления и возвращения.

Проектирование кулачкового механизма включает следующие стадии:

- выбор структурной схемы механизма;
- выбор законов движения выходного звена;
- определение основных размеров звеньев механизма;
- построение профиля кулачка.

Выбор схемы кулачкового механизма определяется в первую очередь из конструктивных соображений для обеспечения требуемого по условиям технологического процесса закона движения выходного звена.

### 3.3. Кинематический анализ кулачкового механизма и выбор закона движения выходного звена

Выходное звено кулачкового механизма должно перемещаться по заранее заданному закону движения. Это обеспечивается подбором или проектированием и изготовлением профиля кулачка соответствующей формы. Теоретически кулачковыми механизмами можно осуществить самые различные законы движения, но на практике пользуются только теми, которые обеспечивают более простую технологию изготовления профиля кулачка и удовлетворяют кинематическим и динамическим требованиям к кулачковому механизму.

Закон движения толкателя или коромысла должен выбираться таким, чтобы его ускорения, следовательно, и инерционные нагрузки (силы и моменты сил инерции) были минимальными. Поэтому при проектировании кулачков очень часто вначале задаются *законом изменения ускорения на фазе удаления и возвращения*. Диаграмму перемещения выходного звена получают двукратным интегрированием диаграммы ускорений. И наоборот, если задан закон

перемещения выходного звена, то двукратное его дифференцирование дает возможность оценить ускорение толкателя (коромысла) с точки зрения минимизации инерционных нагрузок.

Законы движения ведомого звена отличаются большим разнообразием и зависят от заданных условий его работы. При выборе закона движения следует обеспечить:

- требуемые технологические условия процесса, для выполнения которого предназначен кулачковый механизм;
- высокую производительность;
- технологичность изготовления, надежность и долговечность.

Рассмотрим наиболее характерные законы движения выходного звена кулачкового механизма.

Наиболее простым законом движения выходного звена кулачкового механизма  $S = S(\varphi)$  является линейный закон его движения на фазах удаления и возвращения (рис. 3.5).

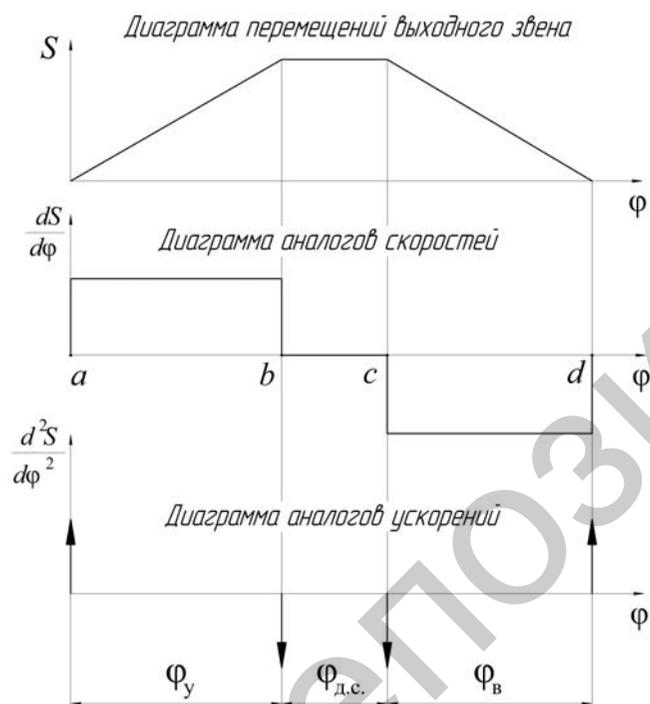


Рис. 3.5. Линейный закон движения выходного звена кулачкового механизма

Аналоги ускорения на всех фазах равны нулю, кроме положений  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , где функция  $v = v(\varphi)$  имеет разрывы. В этих положениях ускорение теоретически равно бесконечности, т. к. в них происходит мгновенное изменение скорости. Однако, в действительности звенья механизма обладают некоторой упругостью, и ускорения будут иметь, хотя и большую, но конечную величину. Возникающие в результате этого значительные силы инерции влекут за собой жесткие удары и вибрацию звеньев. Поэтому в линейный закон движения вводят переходные кривые, позволяющие осуществлять плавный переход на участках сопряжения.

Жестких ударов можно избежать, используя закон постоянного ускорения (параболический закон движения выходного звена), представленный на рис. 3.6.

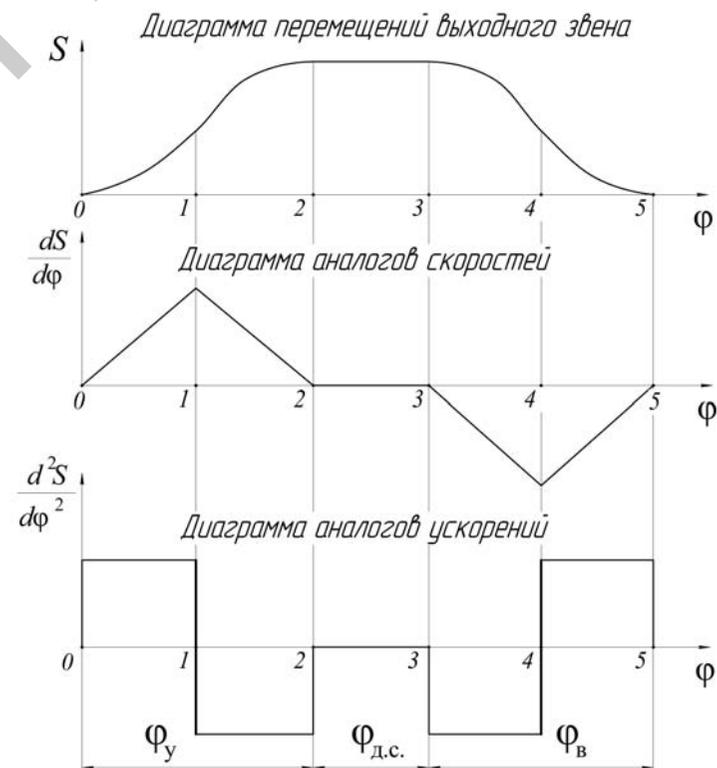


Рис. 3.6. Закон постоянного ускорения движения выходного звена

Во время фазы удаления толкатель (коромысло) на участке 0-1 движется равноускоренно, а на участке 1-2 – равнозамедленно. Аналогично при фазе возвращения. Однако, при переходе от равноускоренного к равнозамедленному движению (положения 1 и 4) направление ускорения также изменится мгновенно, но оно имеет конечную величину. Благодаря чему и силы инерции уменьшаются по сравнению с линейным законом.

Удары, при которых ускорение имеет конечное значение, называются *мягкими ударами*. Но и мягкие удары приводят к упругим колебаниям механизма.

Наиболее предпочтительными законами движения выходного звена при проектировании кулачкового механизма являются такие, в которых нет скачков изменения скоростей и ускорений. Такими законами являются: трапецеидальный, треугольный, синусоидальный и косинусоидальный.

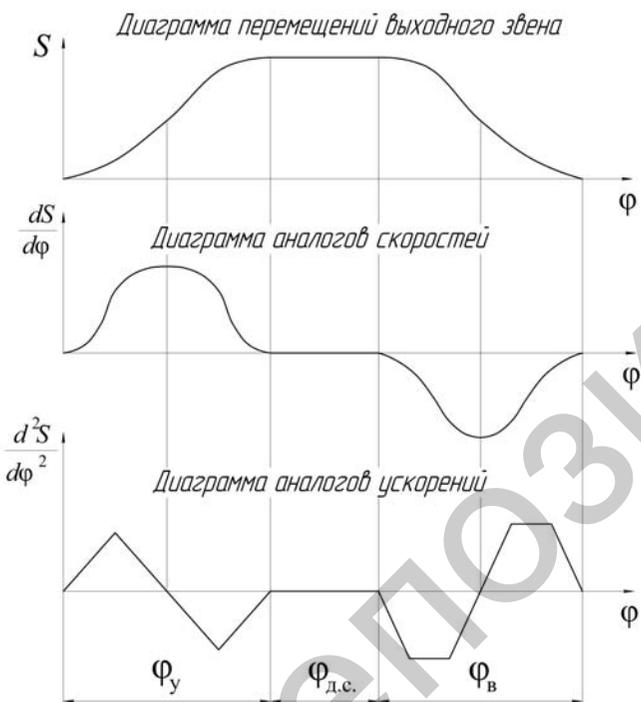


Рис. 3.7. Законы треугольника и трапеции ускорения движения выходного звена

Например, если аналог ускорения изменяется по закону треугольника для фазы удаления или трапецеидальному закону для фазы возвращения (рис. 3.7) или еще предпочтительнее – по косинусоидальному для фазы удаления или синусоидальному для фазы возвращения (рис. 3.8), то такие законы движения называются *безударными*.

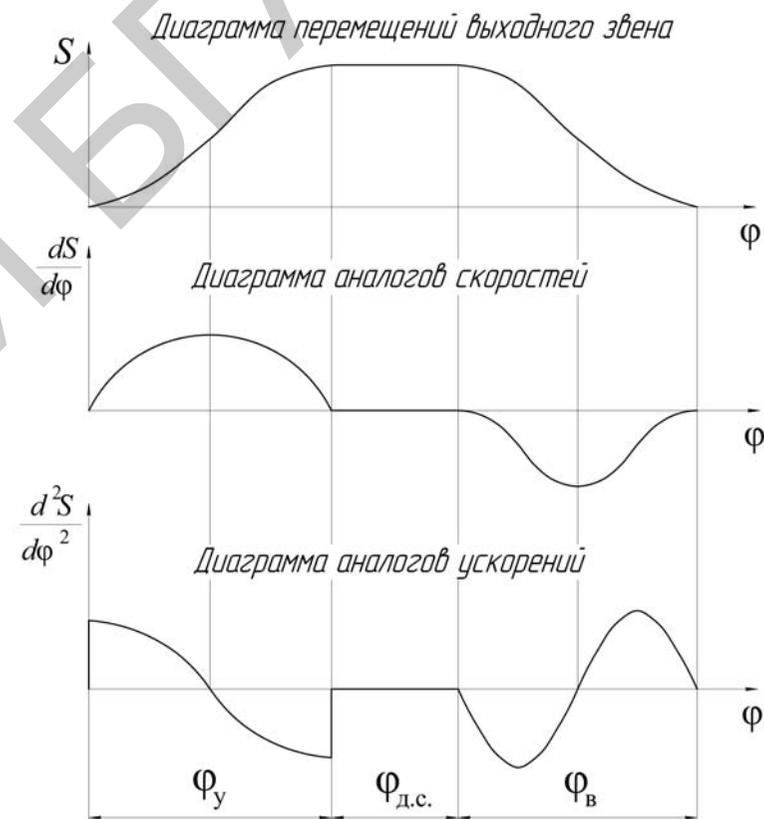


Рис. 3.8. Косинусоидальный и синусоидальный законы ускорения движения выходного звена

Таким образом, типовые законы движения выходного звена кулачкового механизма делятся на законы с жесткими и мягкими ударами и безударные. С точки зрения динамических нагрузок жела-

тельно безударные законы. Однако кулачки с такими законами движения технологически более сложны, так как требуют более точного и сложного оборудования для их изготовления. Законы с жесткими ударами имеют весьма ограниченное применение и используются в неответственных механизмах при низких скоростях движения и невысокой долговечности. Кулачки с безударными законами целесообразно применять в механизмах с высокими скоростями движения при жестких требованиях к точности и долговечности. Наибольшее распространение получили законы движения с мягкими ударами, с помощью которых можно обеспечить рациональное сочетание стоимости изготовления и эксплуатационных характеристик кулачкового механизма.

Поэтому согласно вышеизложенному при проектировании кулачковых механизмов, как правило, вначале выбирают диаграмму аналога ускорения выходного звена, затем методом графического интегрирования (операция обратная графическому дифференцированию) строят диаграмму аналогов скоростей и диаграмму перемещения выходного звена.

### 3.4. Построение кинематических диаграмм движения выходного звена кулачкового механизма

Приведем пример построения кинематических диаграмм движения выходного звена кулачкового механизма (рис. 3.9).

Обобщенной координатой в механизме с вращающимся кулачком является угол поворота кулачка  $\varphi$ . Положение выходного звена относительно стойки, как для коромыслового кулачкового механизма, так и для механизма с толкателем определяется его линейной координатой  $S$ .

Аналог скорости и аналог ускорения выходного звена соответственно равны:

$$S' = \frac{dS}{d\varphi}, \quad S'' = \frac{d^2S}{d\varphi^2}.$$

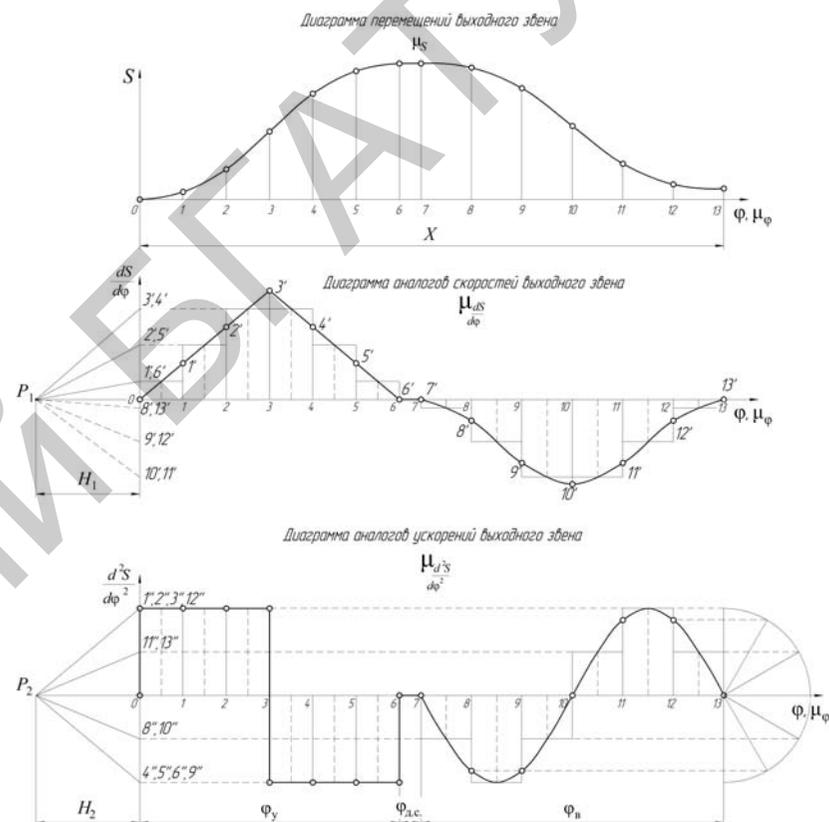


Рис. 3.9. Пример построения кинематических диаграмм движения выходного звена кулачкового механизма

#### Построение диаграммы аналогов ускорений.

В прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладываем отрезок длиной  $X$ , соответствующий рабочему углу  $\varphi_p$ , и делим его на части, соответствующие заданным фазовым углам по следующим зависимостям:

$$X_y = \frac{X}{\varphi_p} \varphi_y;$$

$$X_{\text{д.с}} = \frac{X}{\varphi_p} \varphi_{\text{д.с}};$$

$$X_{\text{в}} = \frac{X}{\varphi_p} \varphi_{\text{в}}.$$

Масштабный коэффициент угла поворота определяем по формуле

$$\mu_{\varphi} = \frac{\varphi_p}{X}.$$

После выбора масштабного коэффициента строим диаграмму аналогов ускорений  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}(\varphi)$ . Например, на фазе удаления примем

параболический закон, на фазе возвращения – синусоидальный, построенный с помощью вспомогательной полуокружности (рис. 3.9).

Диаграмму аналогов скоростей строим путем графического интегрирования диаграммы аналогов ускорений.

Графические построения выполняем в следующей последовательности (рис. 3.9). Отрезок, соответствующий фазе удаления, делим на равные части, в нашем случае – 6, присваивая точкам деления номера от 0 до 6. Отрезок, соответствующий фазе возвращения, делим также на 6 равных частей и точкам деления присваиваем номера от 7 до 13. Деление отрезка, соответствующего углу дальнейшего движения, не производим, учитывая неизменность рассматриваемых функций на этом отрезке.

Через точки деления (0, 1, 2, ...) проводим прямые параллельно оси ординат так, чтобы они пересекали и ось абсцисс диаграммы аналогов скоростей. Эти прямые в рассматриваемом примере на фазе удаления разбивают заданную диаграмму аналогов ускорений на прямоугольники, а на фазе возвращения – на криволинейные трапеции. Каждую из этих криволинейных трапеций заменяем равновеликим прямоугольником. Четвертую сторону каждого прямоугольника проводим параллельно оси абсцисс так, чтобы площадка, добавленная этой стороной, равнялась площадке отброшенной. Стороны полученных прямоугольников, параллельные оси абсцисс,

продолжаем до пересечения с осью ординат соответственно в точках 1'', 2'', 3'' и т. д.

В курсовом проектировании при синтезе кулачковых механизмов точки 1'', 2'', 3'' и т. д. на оси ординат можно получить, проводя горизонтальные прямые из точек диаграммы аналогов ускорений, соответствующих *серединам* участков 0-1, 1-2, 2-3 и т. д. по оси абсцисс.

На отрицательном направлении оси абсцисс (влево от начала координат) отмечаем точку  $P_2$  – полюс интегрирования на произвольном расстоянии  $H_2$  (мм) от начала координат и проводим отрезки  $P_21''$ ,  $P_22''$ ,  $P_23''$  и т. д.

*Построение диаграммы аналогов скоростей.*

Из начала координат диаграммы аналогов скоростей  $\frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$

проводим отрезок  $01'$  параллельно отрезку  $P_21''$  до пересечения с ординатой 1, после этого из точки 1' строим отрезок  $1'2'$  параллельно отрезку  $P_22''$  до пересечения с ординатой 2 и т. д. Через точки 0, 1', 2', 3', ... проводим плавную линию, которая и будет представлять собой искомую диаграмму аналогов скоростей, масштабный коэффициент которой зависит от полюсного расстояния и масштабов исходной диаграммы аналогов ускорений.

Диаграмма перемещения получается путем графического интегрирования диаграммы аналогов скоростей. Все построения аналогичны построениям диаграммы аналогов скоростей.

Вычислим масштабные коэффициенты диаграмм. Масштабный коэффициент по оси ординат диаграммы перемещений  $S(\varphi)$ :

$$\mu_s = \frac{h}{S_{\text{max}}},$$

где  $h$  – максимальное перемещение выходного звена (центра ролика);  $S_{\text{max}}$  – максимальная ордината диаграммы перемещений.

Масштабный коэффициент по оси ординат диаграммы аналогов скоростей  $\frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$ :

$$\mu_{\frac{dS}{d\varphi}} = \frac{\mu_s}{\mu_\varphi H_1},$$

где  $H_1$  – расстояние от начала координат диаграммы аналогов скоростей до полюса  $P_1$ .

Масштабный коэффициент по оси ординат диаграммы аналогов ускорений  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}(\varphi)$ :

$$\mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} = \frac{\mu_{\frac{dS}{d\varphi}}}{\mu_\varphi H_2},$$

где  $H_2$  – расстояние от начала координат диаграммы аналогов ускорений до полюса  $P_2$ .

### 3.5. Динамический анализ кулачкового механизма

Сила  $F$ , действующая на выходное звено кулачкового механизма (например, толкатель) со стороны кулачка 1 и вызывающая его движение, направлена по нормали  $n-n$  к профилю кулачка в точке его контакта с толкателем 2 (рис. 3.10). Поэтому в общем случае она направлена под углом к направлению движения толкателя.

Угол между действующей на толкатель силой  $F$  и направлением его движения называется углом давления  $\alpha$ , а угол между действующей силой и направлением, перпендикулярным направлению движения толкателя, называется углом передачи движения  $\gamma$ . В сумме эти углы составляют угол, равный  $90^\circ$ , поэтому при рассмотрении работоспособности кулачкового механизма с учетом сил, действующих в его высшей кинематической паре, можно оперировать любым из этих двух углов.

С уменьшением угла передачи движения  $\gamma$  уменьшается движущая составляющая  $F'$  действующей силы  $F$  (составляющая, совпадающая с направлением движения толкателя). В то же время увеличивается составляющая  $F''$ , прижимающая толкатель к направ-

ляющей, увеличивая тем самым силу трения между толкателем и опорой, которая препятствует движению толкателя.

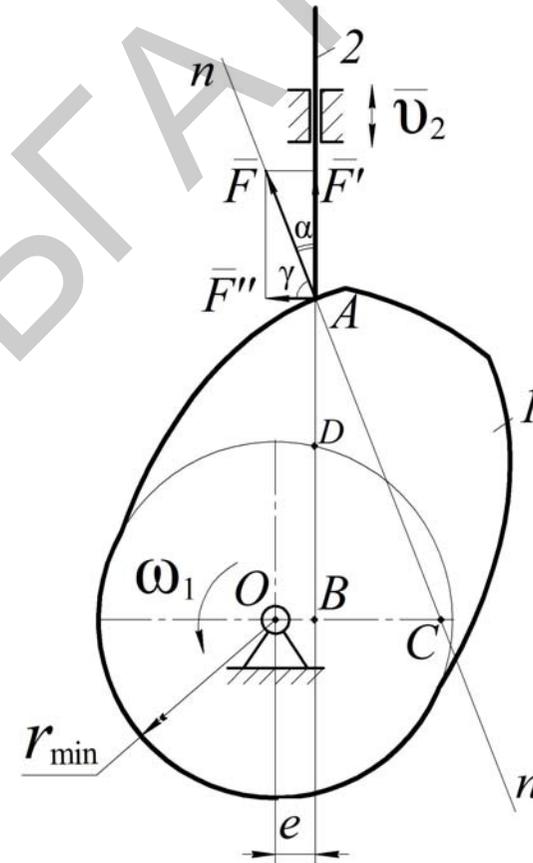


Рис. 3.10. Схема сил, действующих на выходное звено кулачкового механизма

Если эта сила трения окажется больше движущей составляющей  $F'$ , то произойдет заклинивание механизма. Поэтому при проектировании кулачковых механизмов задается минимально-допустимый угол передачи движения  $\gamma$  из условия отсутствия заклинивания. Синтез механизмов с учетом действующих на его звенья сил называется динамическим синтезом.

Из рисунка 3.10 видно, что

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{AD + BD}{OC - OB} = \frac{S_2 + \sqrt{r_{\min}^2 - e^2}}{OC - e}, \quad (3.1)$$

где  $e$  – эксцентриситет (расстояние от оси толкателя до центра вращения кулачка);

$S_2$  – перемещение толкателя в данном положении механизма (в начальный момент толкатель находился на окружности минимального радиуса  $r_{\min}$ ; в рассматриваемый момент, фаза удаления, – находится на профиле кулачка в точке  $A$ ).

Так как кулачок 1 с толкателем 2 составляют высшую кинематическую пару, то в данном случае также выполняется основной закон зацепления, т. е. точка пересечения нормали  $n-n$  с линией центров (здесь в качестве линии центров выступает прямая  $OC$ , перпендикулярная оси толкателя) является мгновенным центром относительного вращения (точка  $C$ ). Поэтому скорость точки  $C$ , принадлежащей кулачку 1, равна скорости поступательного движения толкателя 2:

$$v_C = v_2,$$

Но

$$v_C = \omega_1 \cdot OC,$$

откуда

$$OC = \frac{v_C}{\omega_1}. \quad (3.2)$$

Заменив скорости в зависимости (3.2) через их производные, получаем:

$$OC = \frac{\frac{dS_2}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dS_2}{d\varphi} = S_2', \quad (3.3)$$

где  $S_2'$  – аналог скорости толкателя 2 (производная перемещения толкателя 2 по углу поворота кулачка  $\varphi$  – это линейная величина, пропорциональная скорости толкателя).

Для перехода от аналога скорости к истинной скорости толкателя надо аналог скорости умножить на угловую скорость кулачка:

$$v_2 = S_2' \cdot \omega_1.$$

Окончательно зависимость (3.1) для определения угла передачи движения  $\gamma$  с учетом (3.3) выглядит следующим образом:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{S_2 + \sqrt{r_{\min}^2 - e^2}}{OC - e} = \frac{S_2 + \sqrt{r_{\min}^2 - e^2}}{S_2' - e}. \quad (3.4)$$

В зависимости (3.4) значения  $S_2$  и  $S_2'$  при синтезе кулачкового механизма predetermined заданными законами движения выходного звена, которые необходимо обеспечить. Остается два конструктивных параметра, которые можно назначать произвольно – эксцентриситет  $e$  и величина  $r_{\min}$ .

Значение эксцентриситета  $e$  может изменяться в относительно небольших пределах и обычно predetermined общей компоновкой механизма. Кроме того, изменение эксцентриситета незначительно влияет на величину угла передачи движения  $\gamma$  (его величина в числителе и в знаменателе зависимости (3.4) стоит с одним знаком). Поэтому параметром, изменением которого можно существенно повлиять на величину угла передачи движения  $\gamma$ , является радиус  $r_{\min}$ . Чем больше величина этого радиуса, тем больше угол передачи движения  $\gamma$  во всех положениях механизма и тем меньше вероятность его заклинивания, тем выше коэффициент полезного действия механизма. Однако увеличение окружности минимального радиуса  $r_{\min}$  приводит к увеличению габаритов, веса и материалоемкости всей конструкции.

В зависимости от угла поворота кулачка  $\varphi$  угол передачи движения  $\gamma$ , соответственно, и угол давления  $\alpha$  принимают различные значения. В большинстве конструкций кулачковых механизмов

с поступательно движущимся толкателем допустимые значения угла передачи движения  $\gamma$  и угла давления  $\alpha$  принимают следующие значения:

$$\alpha_{\max} = 40^\circ, \quad \gamma_{\min} = 50^\circ.$$

Для коромысловых кулачковых механизмов:

$$\alpha_{\max} = 50^\circ, \quad \gamma_{\min} = 40^\circ.$$

В случае, когда  $\gamma < \gamma_{\min}$ , либо  $\alpha > \alpha_{\max}$ , происходит заклинивание кулачкового механизма.

Поэтому основной задачей динамического синтеза кулачкового механизма является определение такого значения  $r_{\min}$ , при котором бы угол передачи движения  $\gamma$  был не меньше допустимого значения во всех положениях механизма, а габариты при этом были бы минимальными.

### 3.6. Определение основных размеров кулачкового механизма

При определении основных размеров кулачкового механизма с толкателем заданными параметрами являются допускаемый угол передачи движения  $\gamma_{\min}$  либо угол давления  $\alpha_{\max}$ , максимальное перемещение выходного звена  $S_{\max}$  и направление вращения кулачка. Для коромыслового кулачкового механизма вдобавок к перечисленным параметрам задается длина коромысла.

Прежде чем приступить к определению основных размеров кулачкового механизма, вначале необходимо построить диаграммы движения выходного звена способом, рассмотренным в подразделе 3.4, и определить все масштабные коэффициенты.

Основным размером, определяемым при проектировании кулачкового механизма с роликовым толкателем или коромыслом, является минимальный радиус теоретического профиля кулачка  $r_{\min}$  – минимальное расстояние от центра вращения кулачка до начального положения центра ролика, при котором переменный угол передачи движения  $\gamma$  для любого положения кулачка будет больше  $\gamma_{\min}$ .

### Кулачковый механизм с роликовым толкателем

Строим диаграмму перемещения толкателя в функции от аналога скорости  $S = S\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)$  (рис. 3.11). Ось ординат  $S$  направлена в сторону подъема толкателя и на ней в масштабе  $\mu_S$  откладываем ординаты  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{13}$ , перенесенные из диаграммы перемещения толкателя  $S = S(\varphi)$ . Отрезок  $B_0B_6$  соответствует максимальному перемещению толкателя.

Отрезок  $B_0B_6$  соответствует максимальному перемещению толкателя.

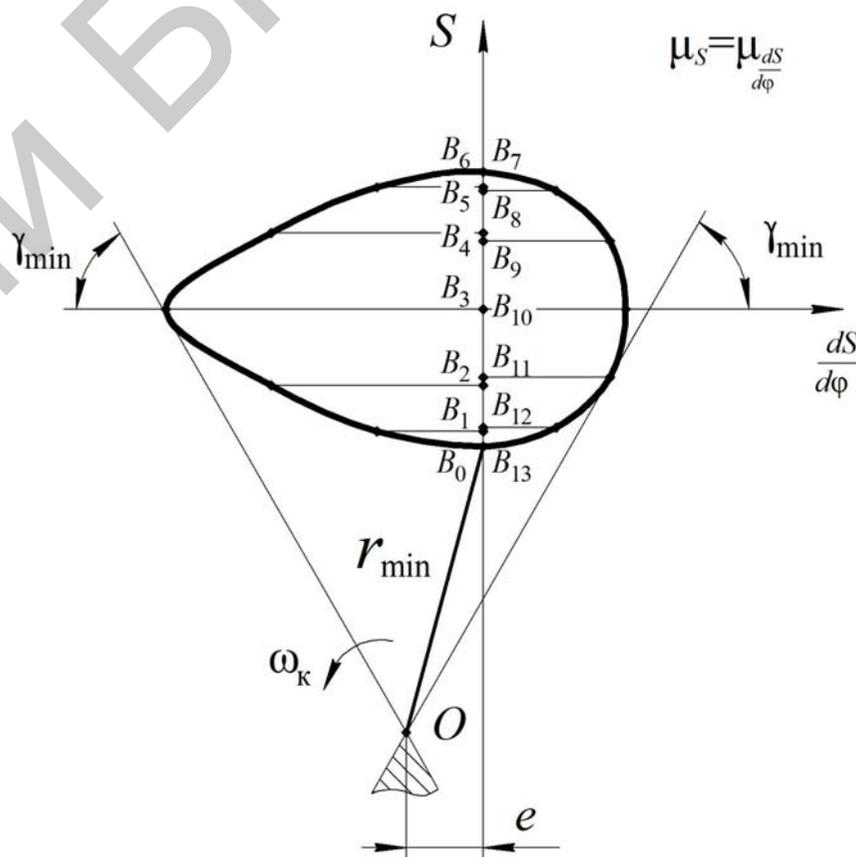


Рис. 3.11. Схема к определению  $r_{\min}$  кулачкового механизма с роликовым толкателем



После разметки траектории движения точки  $B$  через каждое из 12-ти ее положений проводим лучи, исходящие из центра вращения коромысла (точка  $A$ ), и на них из точек  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{13}$  откладываем отрезки в масштабе  $\mu_{dS} = \mu_S$ , пропорциональные аналогам скоростей  $\frac{dS}{d\varphi}$

ростей  $\frac{dS}{d\varphi}$  для каждого из соответствующих положений коромысла

из диаграммы  $\frac{dS}{d\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$ . Причем, как и в кулачковом механизме

с толкателем, для фазы удаления эти отрезки направлены в сторону вращения кулачка и в противоположную сторону на фазе возвращения. Соединив плавной кривой концы отложенных отрезков, получаем диаграмму перемещения центра ролика коромысла в функции от аналога скорости  $S = S\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)$ .

Через концы отрезков, выражающих аналоги скоростей, под допускаемым углом передачи движения  $\gamma_{\min}$  проводим прямые для каждого из положений коромысла на фазах удаления и возвращения. При выполнении курсового проекта по теории механизмов и машин указанные прямые, как правило, достаточно провести через две крайние точки, в нашем примере – 3 и 10 положения коромысла, с каждой стороны диаграммы

$$S = S\left(\frac{dS}{d\varphi}\right).$$

Вследствие приближенности всех расчетов, связанных с заданным допускаемым углом передачи движения  $\gamma_{\min}$ , допускаемая зона, заштрихованная область на рисунке 3.12, для определения положения центра вращения кулачка располагается между прямыми, имеющими точку пересечения, наиболее удаленную от диаграммы

$$S = S\left(\frac{dS}{d\varphi}\right) - \text{точка } O.$$

Выбранное в допускаемой зоне положение центра кулачка  $O$  определяет искомый минимальный радиус кулачка –  $r_{\min}$  и расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла  $l_{OA}$ .

### Кулачковый механизм с плоским толкателем

В механизмах с плоским толкателем (рис. 3.1,  $e$ ) угол передачи движения  $\gamma$  определяется углом между тарелкой толкателя и самим толкателем (осью его поступательного движения). Поэтому с точки зрения передачи движения наиболее выгодным является значение этого угла  $90^\circ$ .

С точки зрения технологии изготовления плоского толкателя и сборки механизма угол между толкателем и его тарелкой, равный  $90^\circ$ , также является самым выгодным. Поэтому на практике обычно используется именно этот случай.

Таким образом, явление заклинивания для данного типа механизма не является актуальным. Однако кулачок должен иметь выпуклый профиль во всех точках, так как плоская тарелка не может работать с вогнутыми участками. Оказывается, что чем больше величина окружности минимального радиуса  $r_{\min}$ , тем меньше вероятность образования на профиле вогнутых участков. Поэтому в данном случае решается задача, аналогичная задаче динамического синтеза – выбрать  $r_{\min}$  так, чтобы вогнутые участки на профиле отсутствовали, а габариты при этом были бы минимальными (другими словами  $r_{\min}$  выбирается из условия выпуклости кулачка).

Условие выпуклости для кулачкового механизма с плоским толкателем записывается следующим образом:

$$r_{\min} > -\left(S + \frac{d^2S}{d\varphi^2}\right). \quad (3.5)$$

Для определения  $r_{\min}$  строим диаграмму перемещения толкателя в функции от аналога ускорений  $S = S\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right)$  (рис. 3.13). На оси

ординат  $S$  в масштабе  $\mu_S$  из начала координат, соответствующего начальному положению толкателя – точка  $B_0$ , откладываем отрезки  $B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{12}B_0$ , перенесенные из ранее построенной диаграммы перемещения плоского толкателя  $S = S(\varphi)$ . Отрезок  $B_0B_6$  соответствует его максимальному перемещению.

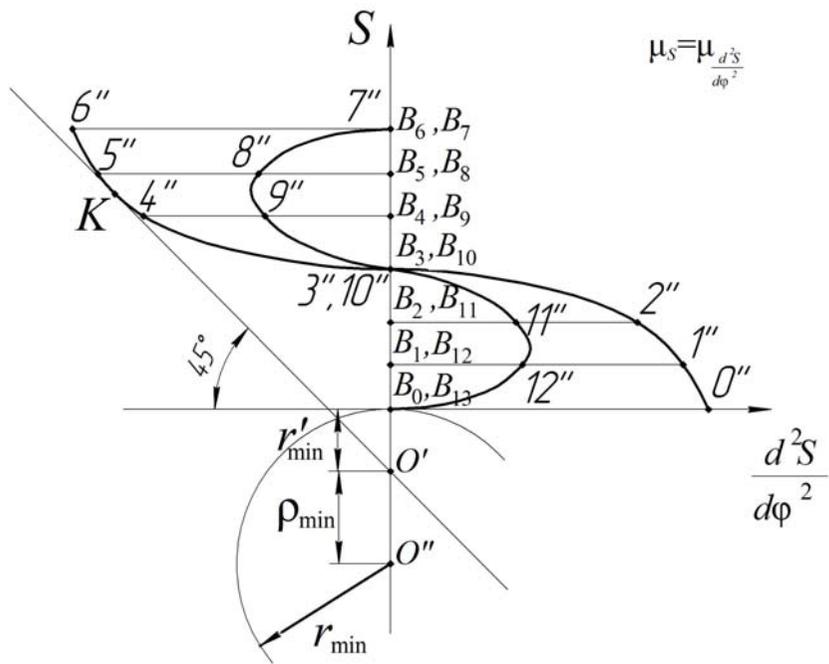


Рис. 3.13. Схема к определению  $r_{\min}$  кулачкового механизма с плоским толкателем

Через полученные точки  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{13}$  в масштабе  $\mu_{\frac{d^2S}{d\varphi^2}} = \mu_S$  проводим отрезки  $B_0-0'', B_1-1'', B_2-2'', B_3-3'', \dots$ , параллельные оси абсцисс и равные ординатам построенной диаграммы аналогов ускорений  $\frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{d^2S}{d\varphi^2}(\varphi)$ .

К одной из ветвей диаграммы  $S = S\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right)$  с максимальными отрицательными абсциссами (левый квадрант) проводим касательную под углом  $45^\circ$  к оси  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}$  до ее пересечения с осью ординат  $S$ . По-

лученный отрезок  $OO'$ , который отсекает касательная на отрицательном направлении оси ординат, определяет искомую величину  $r'_{\min}$ , т. е. такое значение  $r$ , при котором радиус кривизны профиля кулачка хотя бы в одной точке (такая точка на профиле соответствует  $K$  – точке касания прямой с диаграммой) обращается в ноль, но отрицательных значений иметь не может.

Наименьшее допустимое значение радиуса кривизны профиля кулачка  $\rho_{\min}$  определяется при расчете на прочность из условия ограничения контактных напряжений. В курсовых проектах по теории механизмов и машин его можно принять условно равным:

$$\rho_{\min} = (0,2 - 0,5)h, \quad (3.6)$$

где  $h$  – максимальное перемещение толкателя.

Окончательно область допустимых значений минимального радиуса профиля кулачка  $r_{\min}$  с учетом радиуса кривизны  $\rho_{\min}$  будет определяться неравенством

$$r_{\min} \geq r'_{\min} + \rho_{\min}. \quad (3.7)$$

### 3.7. Построение профиля кулачка

Построение профиля кулачка является заключительным этапом синтеза кулачкового механизма. Прежде чем приступить к проектированию профиля кулачка, вдобавок к заданным параметрам кулачкового механизма, необходимо определить минимальный радиус профиля кулачка  $r_{\min}$  и величину эксцентриситета  $e$  (для кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем) по методике, изложенной в предыдущем разделе.

В основу построения профиля кулачка положен метод обращенного движения. Суть метода заключается в том, что всем звеньям кулачкового механизма сообщается дополнительное вращение с угловой скоростью, равной по величине и противоположной по направлению угловой скорости кулачка, т. е.  $-\omega_k$ .

*Построение профиля кулачка с роликовым толкателем*

Из произвольно выбранного положения центра вращения кулачка – точки  $O$  (рис. 3.14), в масштабе  $\mu_s$  проводим две окружности ра-

диусами  $r_{\min}$  и  $e$ . К окружности радиусом  $e$  проводим касательную  $y$ - $u$ . Точка пересечения касательной  $y$ - $u$  с окружностью радиусом  $r_{\min}$  определяет положение центра ролика толкателя, соответствующее началу фазы удаления, – точка  $B_0$ . Далее переносим на касательную  $y$ - $u$  в том же масштабе  $\mu_s$  остальные разметки траектории движения центра ролика толкателя ( $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{13}$ ) из ранее построенных диаграмм  $S = S(\varphi)$  либо  $S = S\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)$ . Следует отметить, что количе-

ство разметок траектории движения центра ролика толкателя соответствует изначальному делению фазовых углов кулачкового механизма при построении диаграммы аналогов ускорений.

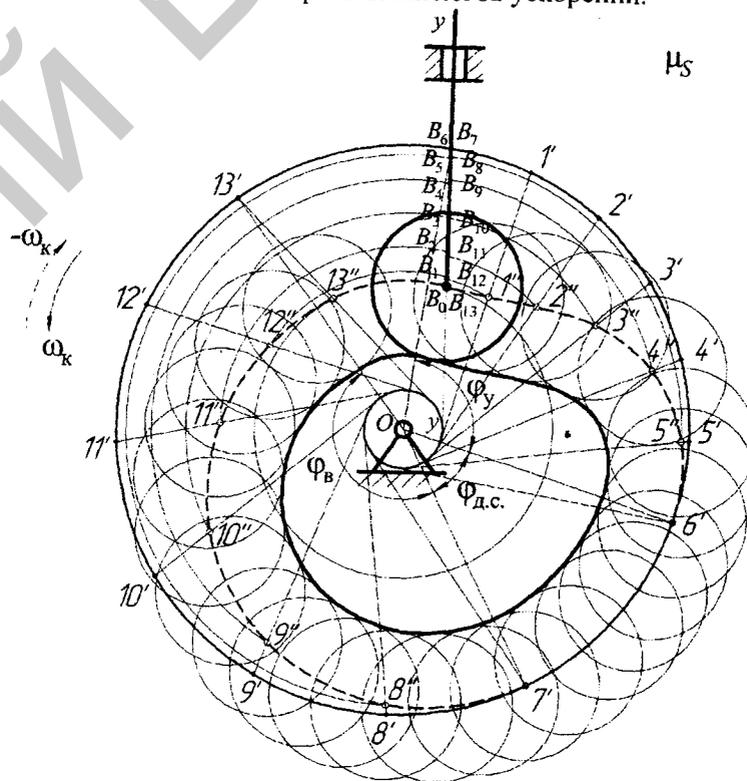


Рис. 3.14. Схема к построению кулачкового механизма с роликовым толкателем





движение), последовательно откладываем заданные фазовые углы: удаления –  $\varphi_y$ , дальнего стояния –  $\varphi_{д.с.}$  и возвращения –  $\varphi_v$ . Делим дуги, заключенные между фазовыми углами удаления и возвращения как и на диаграмме перемещений  $S = S(\varphi)$ , на 6 равных частей соответственно точками  $1', 2', 3', \dots, 13'$ .

Из центра вращения кулачка  $O$  вначале через полученные точки  $1', 2', 3', \dots, 13'$  проводим прямые. Затем через точку  $B_1$  – дугу радиусом  $OB_1$  до ее пересечения с прямой проходящей через точку  $1'$ , далее через точку  $B_2$  – дугу радиусом  $OB_2$  до ее пересечения с прямой, проходящей через точку  $2'$  и т. д. Через точки пересечения построенных дуг с соответствующими прямыми ( $1'', 2'', 3'', \dots, 13''$ ) проводим перпендикуляры к прямым  $O-1'', O-2'', O-3''$  и т. д., которые означают положение плоскости тарелки толкателя при его движении относительно кулачка. Кривая, огибающая эти перпендикуляры, и является практическим профилем кулачка.

#### Вопросы для самопроверки

1. По каким признакам классифицируются кулачковые механизмы?
2. Назовите основные параметры кулачковых механизмов.
3. Приведите динамические характеристики основных законов движения выходных звеньев кулачковых механизмов.
4. Какие силы действуют в кулачковых механизмах?
5. При каких условиях обеспечивается отсутствие такого явления, как заклинивание различных видов кулачковых механизмов?
6. Какие параметры задаются при определении основных размеров кулачковых механизмов?
7. В чем заключается суть метода обращенного движения при построении профиля кулачка?

## 4. УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ. ВИБРОАКТИВНОСТЬ И ВИБРОЗАЩИТА МАШИН

### 4.1. Уравновешивание механизмов

#### 4.1.1. Уравновешивание роторов

Вибрацией является процесс поочередного возрастания и убывания значений какой-либо величины. Термин «вибрация» относится к механическим колебаниям. Но не всякие механические колебания принято называть вибрацией. Укажем на некоторые признаки, выделяющие вибрацию в классе механических колебаний.

С понятием «вибрация» обычно связывают относительно малые отклонения отдельных точек тела. Например, вибрируют фундамент, корпус самолета, подшипник. Но нельзя сказать, что качания маятника, которые относятся к механическим колебаниям, являются вибрацией. Физический маятник, совершая колебания вправо – влево, может одновременно испытывать и вибрацию, если его точка подвеса находится на вибрирующей стене, от которой передается вибрация. Маятник может также вибрировать как упругое тело, если он достаточно гибок. Таким образом, один из признаков вибрации – относительно малые отклонения тела или его точек при механических колебаниях.

Вибрации подвержены упругие тела – стержни, мембраны, оболочки, т. е. вибрация – это «малые» колебания упругих тел. Вибрирует под фундаментом грунт, обладающий упругими свойствами. Вибрируют опоры линий электропередачи, представляющие собой металлические конструкции с упругими свойствами.

В машинах и механизмах существуют источники колебательного возбуждения – двигатели и рабочие органы. Они порождают нежелательную вибрацию в объектах. Вибрация сказывается на прочности и устойчивости механизмов. Возникает проблема виброзащиты различных объектов и человека. Проблема заключается в том, чтобы устранить или максимально снизить уровень вибрации.

Вращающиеся элементы машин (роторы турбин, турбогенераторов, насосов, вентиляторов) согласно проекту должны иметь строгую круговую симметрию относительно оси вращения. Однако из-за технологических несовершенств они подчас не вполне симмет-

ричны как в геометрическом, так и в динамическом отношениях. Валы и диски не точно круглы, распределение масс не точно однородно, а классность дисков может быть не строго перпендикулярна к оси вращения. В этих случаях возникает неуравновешенность и нежелательная вибрация объекта.

Указанные отклонения незначительны, но эффект, получающийся от них при большой частоте вращения из-за центробежных сил, весьма значителен. Прежде всего, это сказывается на силах, которые действуют на опоры со стороны неуравновешенного ротора.

Неуравновешенность вращающихся элементов – один из наиболее распространенных источников возбуждения вибрации в машинах. Для ее устранения применяют уравнивание, или балансировку, когда непосредственно воздействуют на источник возбуждения вибрации.

Рассмотрим случай статического уравнивания вращающихся звеньев. При вращении звена на его опоры действуют динамические реакции. Для полного устранения этих реакций необходимо, чтобы главный вектор  $F_{и}$  и главный момент сил инерции  $M_{и}$  были равны нулю:

$$\bar{F}_{и} = 0; \quad (4.1)$$

$$\bar{M}_{и} = 0. \quad (4.2)$$

Иногда ограничиваются выполнением только условия (4.1), которое равносильно условию постоянства положения центра масс звена, или, что то же, условию расположения центра масс на оси вращения звена. Распределение массы вращающегося звена, переводящее его центр масс на ось вращения, называется статическим уравниванием вращающегося звена.

За меру статической неуравновешенности, или статического дисбаланса, принимают статический момент масс звена относительно оси вращения. Эту неуравновешенность называют статической, так как ее можно обнаружить статическим испытанием.

С этой целью звено цилиндрической формы устанавливают на два горизонтальных ножа. Если центр масс расположен на оси цилиндра, то звено будет находиться в равновесии при любом поло-

жении. В противном случае звено будет двигаться, пока не займет положения устойчивого равновесия, при котором центр масс имеет наименьшее расположение.

Для статического уравнивания надо в направлении, противоположном центру масс, установить корректирующую массу  $m_k$  на расстоянии  $r_k$  от оси вращения (рис. 4.1, а). Если будет выполнено условие:

$$m_k \bar{r}_k = -m \bar{r}_k, \quad (4.3)$$

то при вращении звена сила инерции корректирующей массы окажется равной и противоположной силе инерции  $F_{и}$  неуравновешенного звена. Результирующая сила инерции при этом условии равна нулю. Условие (4.3) достигается обычно путем проб. Иногда установку корректирующей массы заменяют удалением массы  $m_k$ . В этом случае центр удаляемой массы и центр масс звена располагаются по одну сторону от оси вращения.

По условию (4.3) определяют также размеры противовесов, если неуравновешенность звена может быть найдена по чертежу.

Для звеньев, имеющих большую протяженность вдоль оси вращения, должны быть выполнены оба условия уравниваемости звена – (4.1) и (4.2). В этом случае полностью устраняется давление на стойку от сил инерции. Распределение масс вращающегося звена, устраняющее давление от сил инерции этого звена на стойку, называется полным уравниванием вращающегося звена. Если звено считать абсолютно твердым телом, то при этом условии ось вращения совмещается с одной из главных осей инерции.

Полное уравнивание можно выполнить установкой корректирующих масс в двух произвольно выбранных плоскостях I и II, называемых плоскостями коррекции (рис. 4.1, б). При равномерном вращении звена с угловой скоростью  $\omega$  элементарной  $i$ -й массе  $m_i$  соответствует элементарная сила инерции

$$\bar{F}_{иi} = \bar{r}_i \omega^2 m_i, \quad (4.4)$$

где  $\bar{r}_i$  – радиус-вектор элементарной массы  $m_i$ .

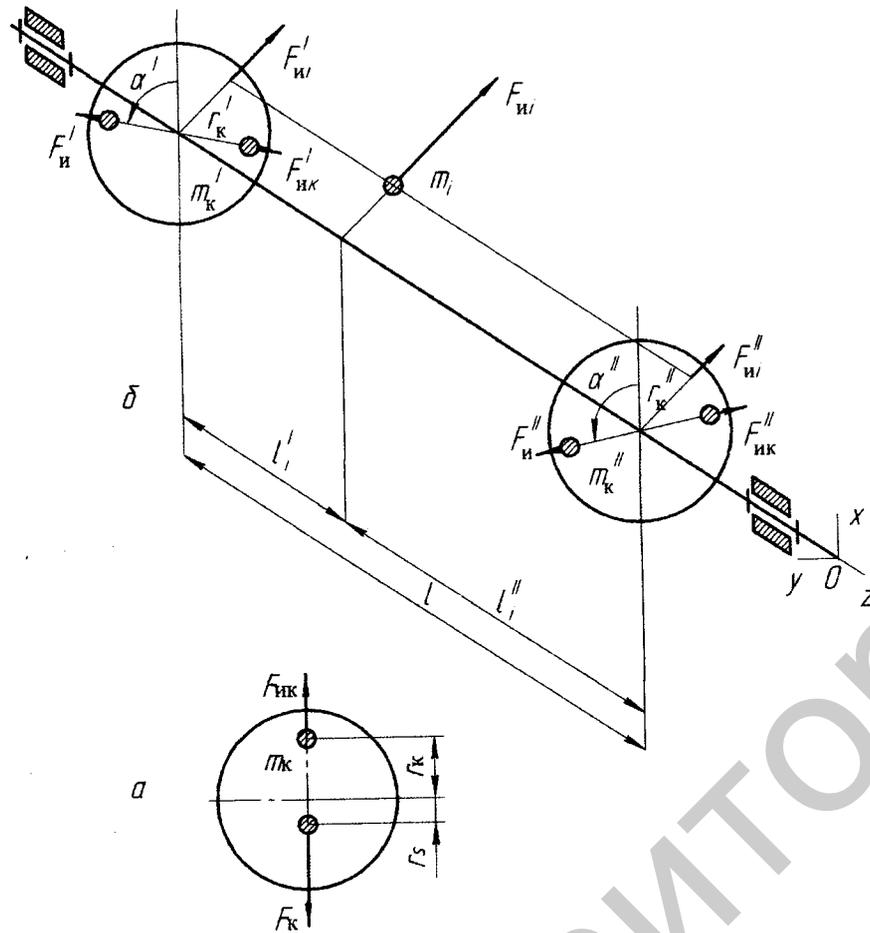


Рис. 4.1. Уравновешивание ротора:  
 а – статическое уравновешивание; б – полное уравновешивание

Разложим силу  $F_{wi}$  на две параллельные составляющие в плоскостях коррекции I и II:

$$\bar{F}_{wi}^I = \bar{F}_{wi} l_i^II / l, \quad \bar{F}_{wi}^{II} = \bar{F}_{wi} l_i^I / l,$$

и просуммируем эти составляющие для  $i$  масс. Тогда получим, что все элементарные силы инерции свелись к двум силам:

$$\bar{F}_n^I = \sum \bar{F}_{wi}^I, \quad \bar{F}_n^{II} = \sum \bar{F}_{wi}^{II},$$

расположенным в плоскостях коррекции под углами  $\alpha^I, \alpha^{II}$  к оси  $x$ . Эти силы отличаются между собой как по модулю, так и по направлению. Иногда говорят, что они образуют неуравновешенный крест, т. е. скрещиваются.

Силы  $\bar{F}_n^I$  и  $\bar{F}_n^{II}$  могут быть представлены как силы инерции масс  $m^I$  и  $m^{II}$ , находящихся на расстояниях  $r^I$  и  $r^{II}$  от оси вращения. Тогда за меру полной неуравновешенности можно принять дисбалансы:

$$D^I = m^I r^I, \quad D^{II} = m^{II} r^{II}, \quad (4.5)$$

которые отличаются от центробежных сил инерции постоянным множителем, равным квадрату угловой скорости звена.

Корректирующие массы должны быть выбраны так, чтобы их силы инерции  $\bar{F}_{ик}^I$  и  $\bar{F}_{ик}^{II}$  уравновешивали силы  $\bar{F}_n^I$  и  $\bar{F}_n^{II}$ , т. е. были им равны и противоположно направлены. Значения этих масс  $m_k^I$  и  $m_k^{II}$  выбираются из условий:

$$m_k^I r_k^I = m^I r^I, \quad m_k^{II} r_k^{II} = m^{II} r^{II},$$

а углы их расположения из соотношений:

$$\alpha_k^I = \alpha^I + \pi, \quad \alpha_k^{II} = \alpha^{II} + \pi.$$

Для коленчатых валов двигателей корректирующие массы выполняются в виде противовесов, размеры которых находят расчетным путем из обычных условий равновесия сил.

Если расстояние между опорами ротора значительно больше его диаметра, то при определении допустимых дисбалансов следует принимать во внимание деформации изгиба ротора или его вала. Для установления основных соотношений между деформациями изгиба и дисбалансом рассмотрим простейший случай вертикального вала, на котором укреплен диск массой  $m$  (рис. 4.2).

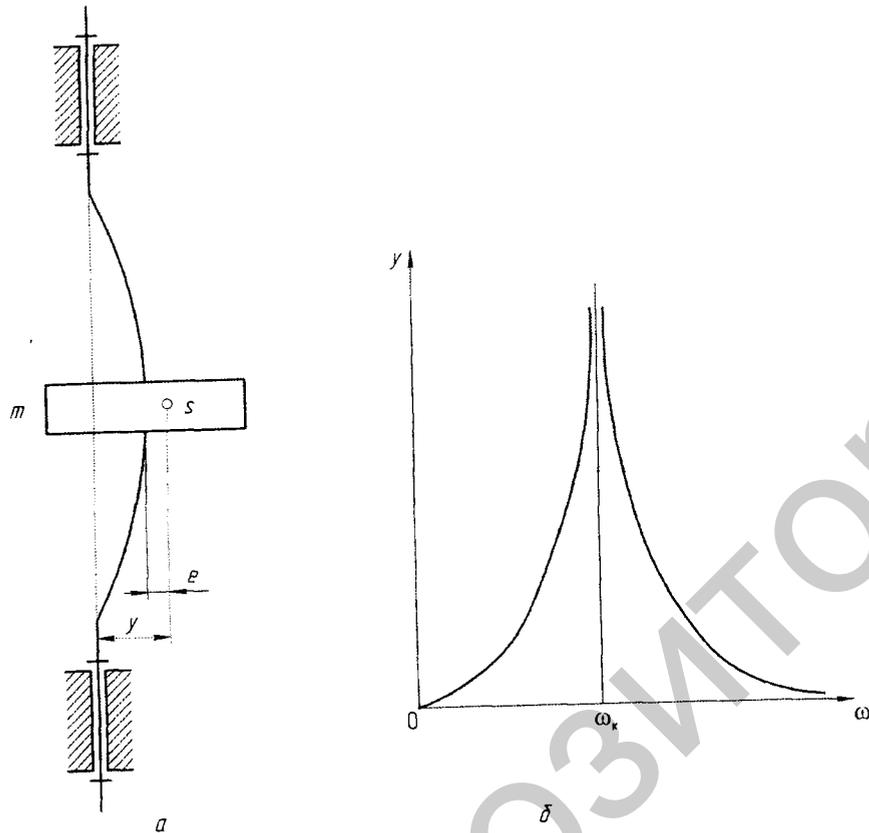


Рис. 4.2. Уравновешивание гибкого ротора:

$a$  – схема устройства;  $b$  – зависимость прогиба вала от частоты вращения

Центр масс  $S$  смещен от оси вала на величину  $e$ . Массой вала пренебрегаем. При вращении вала с угловой скоростью  $\tilde{\omega}$  сила

инерции диска вызывает изгиб вала. Обозначим через  $y$  прогиб вала в сечении, где укреплен диск. Этот прогиб связан с модулем силы инерции  $F_n = m(e + y)\omega^2$  соотношением:

$$y = \delta_1 m (e + y) \omega^2, \quad (4.6)$$

где  $\delta_1$  – прогиб от единичной силы в данном сечении.

Отсюда:

$$y = \frac{\omega^2 e}{\frac{1}{\delta_1 m} - \omega^2}. \quad (4.7)$$

Угловая скорость вала, при которой знаменатель выражения (4.7) обращается в нуль, а, следовательно, прогиб  $y \rightarrow \infty$ , называется критической угловой скоростью:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{1}{\delta_1 m}}.$$

Критическую угловую скорость вращения вала можно рассматривать так же, как собственную частоту системы «вал – диск», а состояние вала при  $\omega = \omega_k$  считать резонансным. Если учесть силы сопротивления, то при критической угловой скорости прогиб  $y$  не стремится к бесконечности, а имеет хотя и большую, но конечную величину. Из (4.7)

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_k}{\omega}\right)^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что при  $\omega < \omega_k$  (докритический или дорезонансный режим)  $y > 0$ , а при  $\omega > \omega_k$  (закритический или зарезонансный режим)  $y < 0$ , т. е. в закритическом режиме прогиб  $y$  получается отрицательным или, что то же, сдвиг фаз между колебаниями вы-

нуждающей силы и собственными колебаниями равен  $\pi$ . В закритическом режиме прогиб  $y$  уменьшается с увеличением угловой скорости  $\bar{\omega}$  и при  $\bar{\omega} \rightarrow \infty$  стремится к смещению  $e$ . Центробежная сила инерции в закритическом режиме определяется соотношением

$$F_{и} = m(e-y)\omega^2,$$

т. е. дисбаланс уменьшается с увеличением угловой скорости.

Вал, работающий при угловой скорости, меньшей критической, принято называть жестким, а при угловой скорости, большей критической, – гибким.

#### 4.1.2. Уравновешивание масс

Уравновешенным механизмом называется механизм, для которого главный вектор и главный момент сил давления стойки на фундамент остаются постоянными при заданном движении начальных звеньев. Цель уравновешивания механизмов – устранение переменных воздействий на фундамент.

Условия уравновешивания механизма имеют вид:

$$\bar{F} + \bar{F}_{и} = \text{const}, \quad (4.8)$$

$$\bar{M} + \bar{M}_{и} = \text{const}. \quad (4.9)$$

Удовлетворять этим условиям путем распределения масс звеньев удается только в очень редких случаях. Обычно, для обеспечения приближенного постоянства главного вектора и главного момента сил давления фундамента на стойку, принимают частные условия:

$$\bar{F}_{и} = 0, \quad (4.10)$$

$$\bar{M}_{и} = 0, \quad (4.11)$$

которым можно удовлетворять подбором масс звеньев и установкой противовесов.

Распределение масс звеньев, устраняющее давление стойки на фундамент от сил инерции звеньев механизма, называется уравновешиванием масс механизма.

При уравновешивании масс плоских механизмов часто ограничиваются выполнением условия (4.10), при котором равен нулю только главный вектор сил инерции звеньев механизма. Это условие равносильно требованию постоянства положения центра масс звеньев механизма относительно стойки. Распределение масс звеньев механизма, переводящее его центр масс в точку, неподвижную относительно стойки, называется статическим уравновешиванием масс механизма.

Пусть дано тело  $AB$  массой  $m$ , совершающее плоское или вращательное движение (рис. 4.3, а). Сосредоточим массу тела, распределенную по всему его объему, в точках  $A$  и  $B$  (рис. 4.3, б).

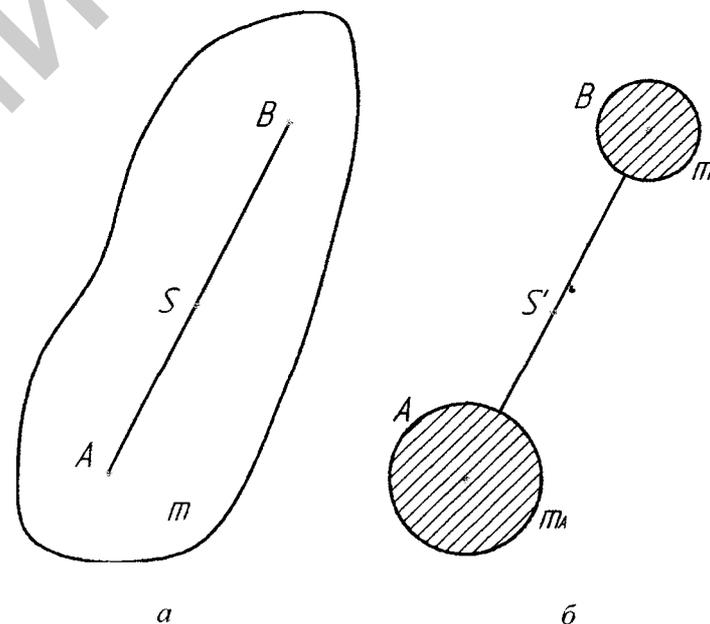


Рис. 4.3. Замена масс звена

Значения сосредоточенных масс  $m_A$  и  $m_B$  определяются из уравнений:

$$m_A + m_B = m, \quad (4.12)$$

$$m_A l_{AS} = m_B l_{BS}. \quad (4.13)$$

Вспользуемся формулами (4.12, 4.13) для статического уравновешивания шарнирного четырехзвенника  $ABCD$ , у которого центры масс звеньев  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  лежат на линиях, соединяющих центры шарниров (рис. 4.4). Массу звена 1 заменим двумя массами, сосредоточенными в точках  $A$  и  $B$ , причем для решения задачи надо определить только массу, сосредоточенную в точке  $B$ :

$$m_{B1} = m_1 l_{AS_1} / l_{AB}.$$

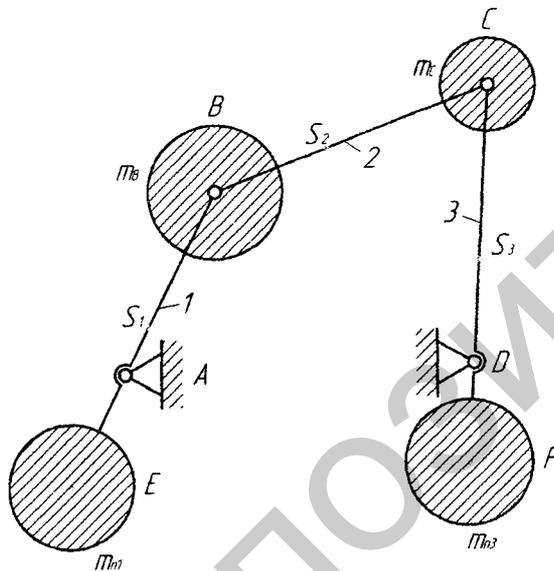


Рис. 4.4. Уравновешивание масс твердого тела

Аналогично заменяем массу звена 3 массами, сосредоточенными в точках  $C$  и  $D$ :

$$m_{C3} = m_3 l_{DC_3} / l_{CD}.$$

Массу  $m_2$  звена 2 заменяем массами, сосредоточенными в точках  $B$  и  $C$ :

$$m_{B2} = m_2 l_{CS_2} / l_{BC}, \quad m_{C2} = m_2 l_{BS_2} / l_{BC}.$$

В результате замены получаем две подвижные массы, сосредоточенные в точках  $B$  и  $C$ :  $m_B = m_{B1} + m_{B2}$ ,  $m_C = m_{C3} + m_{C2}$ .

Чтобы уравновесить силы инерции заменяющих масс  $m_B$  и  $m_C$ , нужно установить на звеньях 1 и 3 противовесы с массами  $m_{п1}$  и  $m_{п3}$ , удовлетворяющие условиям:

$$m_{п1} l_{AE} = m_B l_{AB}, \quad (4.14)$$

$$m_{п3} l_{DF} = m_C l_{CD}, \quad (4.15)$$

где  $l_{AE}$  и  $l_{DF}$  — расстояния от центров  $A$  и  $D$  до центров масс противовесов  $E$  и  $F$ .

Для статического уравновешивания кривошипно-ползунного механизма необходимо поставить противовесы не только на кривошип, но и на шатун. Если ограничиться одним противовесом, установленным на кривошипе (рис. 4.5), то возникает задача о приближенном статическом уравновешивании масс механизма. В точке  $B$  сосредоточим массу  $m_B$ , получающуюся от размещения масс кривошипа и шатуна:

$$m_B = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}}.$$

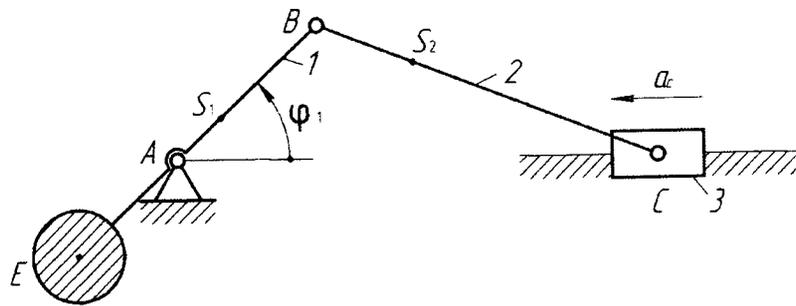


Рис. 4.5. Частичное уравнивание кривошипно-ползунного механизма

В точке  $C$  сосредоточена масса  $m_C$ , равная сумме массы ползуна и части массы шатуна:

$$m_C = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3.$$

Сила инерции массы  $m_B$  уравнивается противовесом с центром масс в точке  $E$  при выполнении условия

$$m_{п1} l_{AB} = m_B l_{AB}.$$

Осталась неуравновешенной только сила инерции от массы ползуна  $m_C$ , которая направлена вдоль линии движения ползуна. Таким образом, осуществлено частичное уравнивание кривошипно-ползунного механизма.

#### 4.2. Колебания в механизмах

Колебательные движения встречаются во многих машинах и механизмах. Рассмотрим малые колебания механических систем с одной степенью свободы на основе применения уравнений Лагранжа.

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату  $q$ , а ее движение описывается одним уравнением Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (4.16)$$

где  $T$  – кинетическая энергия;  
 $q$  – обобщенная координата;  
 $Q$  – обобщенная сила.

Обобщенную силу  $Q$  можно считать состоящей из трех частей:

$$Q = Q^П + Q^Ф + Q^В,$$

где  $Q^П = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}$  – обобщенная сила, выражаемая через потенциальную энергию;

$Q^Ф$  – составляющая обобщенной силы, получаемая от действия сил сопротивления;

$Q^В$  – составляющая обобщенной силы, получаемая от возмущающих сил.

Рассмотрим малые собственные (свободные) колебания системы. Для малых колебаний в уравнении Лагранжа (4.16) можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно  $q$ ,  $\dot{q}$  и  $\ddot{q}$ , т. е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, произведения и т. д.

В случае малых колебаний получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты  $q$ . Колебания, для которых дифференциальное уравнение является линейным, называются линейными. Малые колебания принадлежат к числу линейных. Однако линейными колебаниями могут быть не обязательно малые колебания.

Кинетическая энергия системы, на которую наложены голономные, идеальные, неосвобождающие и стационарные связи, равна:

$$T = \frac{1}{2} A \dot{q}^2,$$

где  $\dot{A} = \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} \right)^2$ ,

$m_k$  – масса  $k$ -ой точки;

$\bar{r}_k$  – радиус-вектор  $k$ -ой точки.

Разлагая  $A(q)$  в окрестности  $q = 0$  в степенной ряд, имеем:

$$A(q) = A_0 + \left( \frac{\partial A}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2} + \dots$$

Индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при  $q = 0$ .

Выражение кинетической энергии после отбрасывания слагаемых третьего и более высокого порядков можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (4.17)$$

где  $a$  – коэффициент инерции.

Потенциальная энергии системы  $\Pi$  для стационарного силового поля является функцией обобщенной координаты  $q$ . Разлагая ее в степенной ряд в окрестности  $q = 0$ , получим:

$$\Pi(q) = \Pi_0 + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0 q + \left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0 \frac{q^2}{2!} + \dots \quad (4.18)$$

Величина  $\left( \frac{\partial \Pi}{\partial q} \right)_0$  есть значение обобщенной силы  $Q$  в положении равновесия системы, которое равно нулю. Величину  $\left( \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right)_0$  называют коэффициентом жесткости.

Отбрасывая в выражении (4.18) слагаемые третьего и более высокого порядков, получим

$$\Pi(q) = \frac{1}{2} c q^2, \quad (4.19)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости.

На основании зависимостей (4.17) и (4.19) найдем составляющие уравнения Лагранжа второго рода (4.16).

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \dot{q}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \ddot{q}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = c q.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (4.16), получим дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы

$$a \ddot{q} + c q = 0. \quad (4.20)$$

Дифференциальное линейное уравнение собственных прямолинейных колебаний материальной точки имеет вид

$$m \ddot{x} + c_0 x = 0, \quad (4.21)$$

где  $m$  – масса точки;  
 $c_0$  – жесткость.

Сравнивая уравнения (4.20) и (4.21), выясняем, что они аналогичны. Только в уравнение собственных колебаний системы (4.20) вместо координаты  $x$  входит обобщенная координата  $q$ , а вместо жесткости  $c_0$  – коэффициент жесткости  $c$ .

Преобразуем уравнение (4.20) к виду

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (4.22)$$

где  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$  – круговая (циклическая) частота собственных колебаний.

Дифференциальное уравнение (4.22) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решение дифференциального уравнения (4.22) ищем в виде

$$q = e^{\lambda t}. \quad (4.23)$$

После подстановки выражения (4.23) в уравнение (4.22) получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (4.24)$$

Квадратное уравнение (4.24) имеет два чисто мнимых корня:

$$\lambda_{1,2} = \pm ki.$$

Решение уравнения (4.22) можно представить в виде

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (4.25)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot{q} = C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Определив произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  и подставив их в уравнение (4.25), получим

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \quad (4.26)$$

Представим выражение (4.26) в амплитудной форме:

$$q = A \sin(kt + \alpha) = A \sin \alpha \cos kt + A \cos \alpha \sin kt.$$

Из сравнения этого выражения с (4.25) новые постоянные  $A$  и  $\alpha$  через постоянные  $C_1$  и  $C_2$  выразятся формулами

$$C_1 = A \sin \alpha, \quad C_2 = A \cos \alpha.$$

Отсюда:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin \alpha = \frac{C_1}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{C_2}{A}.$$

Подставляя вместо  $C_1$  и  $C_2$  их выражения через начальные значения, получаем:

$$A = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{q_0}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{\dot{q}_0}{Ak}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}. \quad (4.27)$$

Величину  $A$  называют амплитудой колебаний. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению  $q = 0$ . Обобщенная координата  $q$  изменяется в пределах от  $+A$  до  $-A$ .

Безразмерная постоянная  $\alpha$  называется начальной фазой колебаний. Она является значением фазы колебаний  $(kt + \alpha)$  при  $t = 0$ . Начальная фаза может изменяться в пределах от  $0$  до  $2\pi$ . Для определения начальной фазы  $\alpha$  по начальным условиям можно использовать любую комбинацию двух ее тригонометрических функций из (4.27), например  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ .

Собственные линейные колебания в амплитудной форме с учетом начальных условий можно представить в окончательной форме:

$$q = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}} \sin \left( kt + \operatorname{arctg} \frac{q_0 k}{\dot{q}_0} \right). \quad (4.28)$$

Для прямолинейных колебаний точки соответственно

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \sin\left(kt + \arctg \frac{x_0 k}{v_0}\right). \quad (4.29)$$

Движение системы, определяемое формулой (4.26 или 4.28), называется гармоническим колебанием. Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Уменьшением фазы на  $\pi/2$  от синуса можно перейти к косинусу.

Собственные линейные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Материальная точка под действием линейной восстанавливающей силы тоже совершает гармонические колебания.

Обобщенная координата  $q$  изменяется по закону синуса, который является периодической функцией аргумента с наименьшим периодом  $2\pi$ , следовательно, и  $q$  является периодической функцией. Значение периода колебаний  $\tau$  для переменной  $t$  получим из условия, по которому добавление периода к этой переменной должно изменить фазу колебаний на наименьший период синуса  $2\pi$ . Имеем:

$$k(t + \tau) + \alpha = kt + \alpha + 2\pi, \quad (4.30)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Для прямолинейных колебаний точки период

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_0}}. \quad (4.31)$$

Период колебаний измеряется в единицах времени, например, в секундах. Величина, обратная периоду  $\nu = \frac{1}{\tau}$ , называется частотой колебаний. Частота колебаний обычно измеряется числом колебаний в секунду или в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному колебанию в секунду.

Круговая частота  $k$  выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu. \quad (4.32)$$

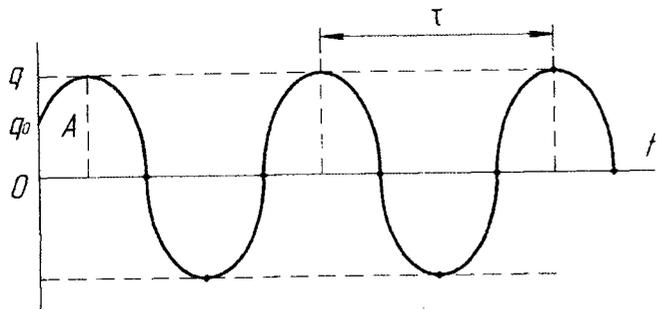
Из (4.32) следует, что круговая частота  $k$  есть число колебаний за время, равное  $2\pi$  с.

На рис. 4.6, а представлен график собственных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Он представляет собой синусоиду.

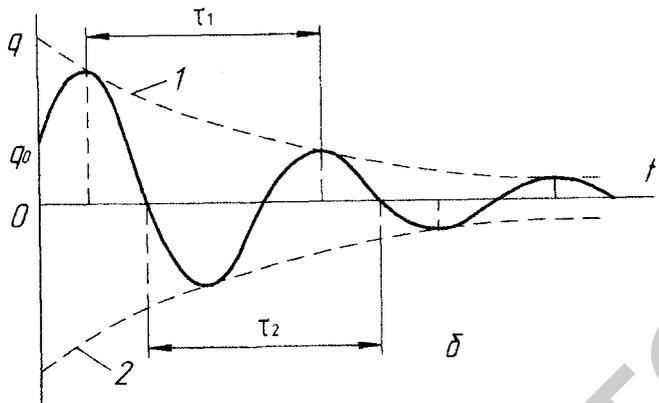
Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Отметим основные свойства собственных линейных колебаний. Собственные линейные колебания системы являются гармоническими. Амплитуда этих колебаний – величина постоянная и определяется начальными условиями. Период колебаний тоже величина постоянная, не зависящая от амплитуды и, следовательно, от начальных условий.

Величина периода определяется только свойствами колеблющейся системы, т. е. коэффициентом инерции  $a$  и жесткостью  $c$ . Независимость периода колебаний от амплитуды называется изохронностью колебаний. Собственные линейные колебания, если нет возмущающих сил, могут возникнуть только при начальных условиях, неравных нулю, т. е. когда в начальный момент система имеет не равную нулю начальную обобщенную координату  $q_0$  или начальную обобщенную скорость  $\dot{q}_0$ .

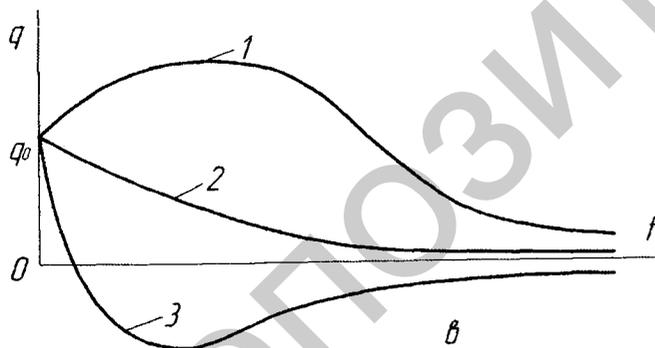
Гармонические колебания точки при наличии линейной восстанавливающей силы возникают вследствие начального отклонения точки  $x_0$  или начальной скорости  $v_0$ , или и того и другого вместе. Гармонические колебания обладают той особенностью, что возникнув однажды в какой-то момент времени, они продолжают сколько угодно долго без изменения параметров колебаний, если нет других воздействий. Но обычно колебания всегда сопровождаются возникновением сил сопротивления, которые изменяют характер собственных колебаний.



a



b



b

Рис. 4.6. Графики колебаний

Если на точки системы с одной степенью свободы, кроме потенциальных сил, действуют еще силы сопротивления, то дифференциальное уравнение Лагранжа выразится в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{\Pi} + Q^{\Phi}, \quad (4.33)$$

где  $Q^{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}$  – обобщенная сила потенциальных сил;

$Q^{\Phi}$  – обобщенная сила сопротивления.

Рассмотрим случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления  $\bar{R}_k$  точек системы линейно зависят от скоростей этих точек, т. е.

$$\bar{R}_k = -\mu_k \bar{v}_k = -\mu_k \dot{\bar{r}}_k,$$

где  $\mu_k$  – постоянный коэффициент сопротивления.

Вычислим обобщенную силу сопротивления. Согласно определению обобщенной силы имеем:

$$Q^{\Phi} = \sum_{k=1}^N \bar{R}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q} = - \sum_{k=1}^N \mu_k \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q}. \quad (4.34)$$

Введем обозначение:

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} = - \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k \bar{v}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k v_k^2}{2}. \quad (4.35)$$

Функцию  $\Phi$  называют диссипативной функцией или функцией Рэля. Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в ней вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Обобщенная сила сопротивления равна:

$$Q^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$

Диссипативная функция  $\Phi$  равна:

$$\Phi = \frac{1}{2} B(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2, \quad (4.36)$$

где введено обозначение  $\mu = B(0)$ . Положительная постоянная величина  $\mu$  называется обобщенным коэффициентом сопротивления.

Вблизи положения равновесия системы имеем следующие выражения для кинетической и потенциальной энергий и диссипативной функции:

$$T = \frac{a\dot{q}^2}{2}; \quad \Pi = \frac{cq^2}{2}; \quad \Phi = \mu \frac{\dot{q}^2}{2}.$$

Подставляя их в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^\Pi + Q^\Phi, \quad (4.37)$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}; \quad Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -cq; \quad Q^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = -\mu\dot{q},$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$a\ddot{q} = -cq - \mu\dot{q}.$$

Это приближенное уравнение. При его получении отброшены все члены второго и более высокого порядков.

Если разделить обе части уравнения на  $a$  и ввести обозначения  $k^2 = \frac{c}{a}$ ,  $2n = \frac{\mu}{a}$ , то после переноса всех членов уравнения в левую часть получим дифференциальное уравнение движения системы в окончательной форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0. \quad (4.38)$$

Постоянная  $k = \sqrt{\frac{c}{a}}$  является круговой частотой собственных колебаний системы без учета сопротивления. Величина  $n = \frac{\mu}{2a}$  называется коэффициентом затухания. Ее размерность такая же, как и у круговой частоты. Вместо  $n$  иногда употребляют величину  $\tau_0 = \frac{1}{n}$ , которая называется постоянной времени и имеет размерность времени.

Дифференциальное уравнение (4.38) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение следует искать в форме  $q = e^{\lambda t}$ , где постоянная  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0,$$

которое получается после подстановки решения в дифференциальное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (4.39)$$

Если  $n < k$ , то величина под знаком квадратного корня в (4.39) отрицательна. Обозначим  $k_1^2$  положительную величину ( $k^2 - n^2$ ). Тогда  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$  и из (4.39) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0,$$

зависящее от двух произвольных постоянных, выразится в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (4.40)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Решение (4.40) можно также представить в амплитудной форме:

$$q = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (4.41)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – тоже произвольные постоянные.

Дифференцируя (4.40) по времени, имеем:

$$\dot{q} = -ne^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} (-C_1 k_1 \sin k_1 t + C_2 k_1 \cos k_1 t). \quad (4.42)$$

Используя выражение (4.40) для  $q$ , а (4.42) для  $\dot{q}$  при  $t = 0$ , получаем уравнения для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$q_0 = C_1; \quad \dot{q}_0 = -nC_1 + k_1 C_2.$$

Из них

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1} = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Соответственно постоянные  $A$  и  $\alpha$  через начальные условия выразятся следующим образом:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}; \quad \sin \alpha = \frac{q_0}{A}; \quad (4.43)$$

$$\cos \alpha = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{A\sqrt{k^2 - n^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{q_0 \sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}.$$

Величина  $A$  положительна. Она не является амплитудой. Начальная фаза  $\alpha$  может иметь значения в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Для выяснения поведения функции  $q(t)$  построим график, используя уравнение (4.41). Вид функции  $q = A e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha)$  можно выяснить при помощи построения графиков вспомогательных функций  $q_1 = A e^{-nt}$  (рис. 4.6, б, кривая 1) и  $q_2 = -A e^{-nt}$  (рис. 4.1, б, кривая 2). Кривые 1 и 2 являются ограничивающими для  $\sin(k_1 t + \alpha)$ , который изменяется между 1 и  $-1$ .

Таким образом, изобразив синусоиду между ограничивающими кривыми 1 и 2, можно составить представление о виде графика функции  $q(t)$ .

Из графика функции  $q(t)$  следует, что величины последовательных наибольших отклонений  $q$  от положения равновесия уменьшаются с увеличением времени, стремясь к нулю при неограниченном возрастании времени. В соответствии с этим движение, определяемое уравнением (4.41), называют *затухающими колебаниями*.

*Условным периодом* затухающих колебаний, или *периодом* называют период  $\sin(k_1 t + \alpha)$ . Он является периодом прохождения системы через положения равновесия, так как функция  $q(t)$  и  $\sin(k_1 t + \alpha)$  равняются нулю одновременно. Круговой частотой  $\sin(k_1 t + \alpha)$  является величина  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ . Следовательно, период затухающих колебаний

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (4.44)$$

Период затухания колебаний – величина постоянная, не зависящая от начальных условий. Он больше периода собственных колебаний при отсутствии сопротивления  $\tau = \frac{2\pi}{k}$ .

Величину отношения двух последовательных максимумов

$$D = \frac{q_{n+1}^{\max}}{q_n^{\max}} = e^{n\tau}$$

называют *декрементом затухания*.

Рассмотрим случай, когда  $n > k$  (случай большого сопротивления). Корни характеристического уравнения в этом случае имеют значения:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm k_2,$$

где введено новое обозначение для положительной величины  $\sqrt{n^2 - k^2} = k_2$ .

Оба корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, так как  $k_2 < n$ . Следовательно, общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$$

имеет вид

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-nt} (C_1 e^{k_2 t} + C_2 e^{-k_2 t}), \quad (4.45)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, которые можно определить по начальным условиям:

$$t = 0, \quad q = q_0, \quad \dot{q} = \dot{q}_0.$$

Не выполняя этих вычислений, можно оценить поведение функции  $q(t)$ , используя уравнение (4.45). Для  $q_0 > 0$  могут представиться три случая в зависимости от знака и величины  $q_0$ .

При  $q_0 > 0$  функция  $q(t)$  некоторое время возрастает до определенного максимума, а затем убывает, асимптотически приближаясь к нулю, так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$  вследствие того, что показатели степеней  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  отрицательны (рис. 4.6, в, кривая 1).

При не очень больших по абсолютной величине отрицательных значениях  $q_0$  может сразу начаться убывание  $q(t)$  (рис. 4.6, в, кривая 2). При больших по модулю отрицательных значениях  $q_0$  функция  $q(t)$ , убывая, может достичь нулевого значения, соответствующего положению равновесия системы, стать отрицательной и, оставаясь отрицательной, асимптотически приближаться к нулю (рис. 4.6, в, кривая 3). Во всех этих случаях движение является затухающим, не колебательным, которое иногда называют также аperiодическим.

Рассмотрим вынужденные колебания. Для возбуждения вынужденных колебаний необходимо действие на точки механической системы возмущения. Рассмотрим общий случай, когда обобщенная сила  $Q$  состоит из трех сил:

$$Q = Q^{\text{П}} + Q^{\text{Ф}} + Q^{\text{В}},$$

где  $Q^{\text{П}} = -cq$  – потенциальная сила;

$Q^{\text{Ф}} = \mu \dot{q}$  – сила сопротивления;

$Q^{\text{В}} = H \sin(pt + \delta)$  – возмущающая сила.

Подставив это значение обобщенной силы в уравнение Лагранжа (4.16), получим

$$a\ddot{q} + \mu\dot{q} + cq = H \sin(pt + \delta).$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = h \sin(pt + \delta), \quad (4.46)$$

где  $k^2 = \frac{c}{a}$ ;  $2n = \frac{\mu}{a}$ ;  $h = \frac{H}{a}$ ;

$k$  – круговая частота собственных колебаний;

$n$  – коэффициент затухания;

$h$  – относительная амплитуда возмущающей силы.

Так как дифференциальное уравнение (4.46) является неоднородным, его решение состоит из двух частей:  $q_1$  – общего решения однородного уравнения и  $q_2$  – частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение  $q_1$  однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0$$

выражается в одной из трех форм:

1) при  $n < k$ ,  $q_1 = A_1 e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2}t + \alpha_1)$ ;

2) при  $n = k$ ,  $q_1 = e^{-nt} (C_1 t + C_2)$ ;

3) при  $n > k$ ,  $q_1 = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2}t})$ .

В любом из этих случаев из-за наличия множителя  $e^{-nt}$  координата  $q_1$  стремится к нулю с возрастанием времени, т. е. затухает.

Частное решение  $q_2$  уравнения (4.46) ищут в форме

$$q_2 = A \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (4.47)$$

Постоянные  $A$  и  $\varepsilon$  определяются из следующего условия: если подставить частное решение (4.47) в уравнение (4.46), то последнее превратится в тождество. Значения  $A$  и  $\varepsilon$  равны:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2) + 4n^2 p^2}};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{n^2 - p^2}; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \pi,$$

где  $p$  – круговая частота вынужденных колебаний;

$n$  – коэффициент затухания.

Из зависимости (4.47) следует, что вынужденные колебания не затухают. Их частота совпадает с частотой возмущающей силы. Для возникновения вынужденных колебаний на систему должно действовать возмущение.

### 4.3. Виброзащита машин

Во многих механизмах внешние силы, действующие на звенья, являются периодическими функциями времени, которые посредством разложения в ряды Фурье могут быть представлены в виде суммы гармоник различных частот. Каждая гармоника обобщенной силы с частотой  $p$  представляется суммой двух членов, один из которых пропорционален  $\cos pt$ , а другой –  $\sin pt$ :

$$x(ip) = \cos pt + i \sin pt$$

или в показательной форме

$$x(ip) = e^{ipt}. \quad (4.48)$$

Безразмерную обобщенную координату можно представить также комплексной величиной:

$$y(ip) = A e^{i(pt + \delta)}, \quad (4.49)$$

где  $A$  – амплитуда гармонических колебаний;

$\delta$  – начальная фаза.

Пусть гармоническая вынуждающая сила изменяется по закону

$$Q(t) = A e^{i(pt + \delta)},$$

или

$$Q(ip) = A_1(ip)e^{ipt},$$

где  $A_1(ip) = A_1 e^{i\delta_1}$  – комплексная амплитуда гармонической вынуждающей силы.

Тогда обобщенная координата  $q$  будет тоже гармонической функцией той же угловой частоты  $p$ , но с измененными амплитудой и фазой:

$$q(t) = A_2 e^{i(pt + \delta_2)},$$

или

$$q(ip) = A_2(ip)e^{ipt},$$

где  $A_2(ip) = A_2 e^{i\delta_2}$  – комплексная амплитуда гармонических колебаний.

Отношение комплексной амплитуды гармонических вынужденных колебаний к комплексной амплитуде гармонической вынуждающей силы называется частотной передаточной функцией:

$$W(ip) = \frac{A_2(ip)}{A_1(ip)}. \quad (4.50)$$

Частотными характеристиками называются динамические характеристики гармонических вынужденных колебаний, зависящие от частоты гармонического возбуждения. Наиболее употребительной является амплитудно-частотная характеристика, под которой понимается зависимость амплитуды гармонических вынужденных колебаний от частоты гармонического возбуждения.

Амплитудно-частотную характеристику механизма обычно изображают в виде зависимости  $A(p) = A_2/A_1$ . На рис. 4.7, а показан график  $A(p)$  для фиксированного значения коэффициента демпфирования (затухания)  $n$ .

При  $p = 0$  значение амплитуды  $A$  равно статическому перемещению от единичной силы  $A_{ст}$ . При  $p \rightarrow \infty$  амплитуда  $A$  стремится к нулю. Максимальное значение  $A$  достигается при  $p = \sqrt{k^2 - 2n^2}$ , т. е. вблизи  $p = k$ .

Фазо-частотной характеристикой называется зависимость разности фаз между гармоническими вынужденными колебаниями и гармоническим возбуждением от его частоты. Обычно начальная фаза принимается равной нулю. Тогда фазо-частотная характеристика изображает зависимость начальной фазы  $\delta$  от частоты  $p$  (рис. 4.7, б). Аналитическая зависимость для рассматриваемого примера имеет вид

$$\delta = -\arctg \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики можно объединить в единую характеристику, которая изображается годографом вектора. Модуль вектора равен амплитуде, а угол – начальной фазе  $\delta$  (рис. 4.7, в).

Характеристика, изображенная на рис. 4.7, в, называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой. Действительная (вещественная) часть комплексной амплитуды  $\dot{A}(ip)$  обозначается через  $U(p)$ , а мнимая – через  $iV(p)$ :

$$\dot{A}(ip) = U(p) + iV(p).$$

При силовом возбуждении коэффициентом динамичности по перемещениям называют отношение амплитуды гармонических вынужденных колебаний к статическому перемещению под действием силы, равной амплитуде гармонического возбуждения. При изменении обобщенной силы по синусоидальному закону амплитуда гармонических вынужденных колебаний определяется по формуле

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{A}_1}{a\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

где  $a$  – инерционный коэффициент.

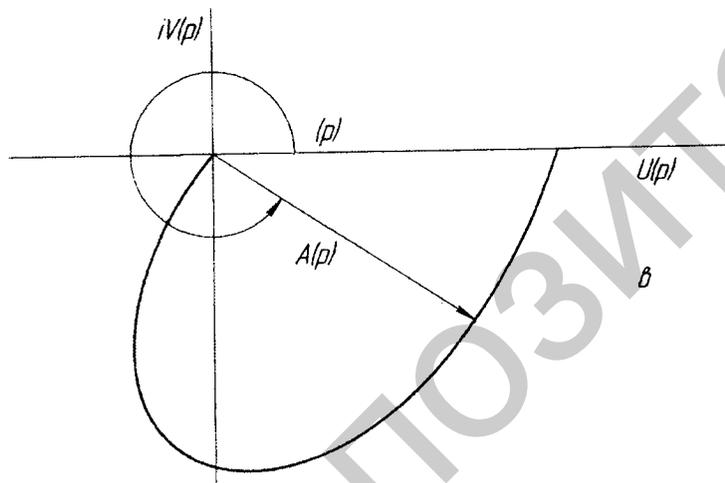
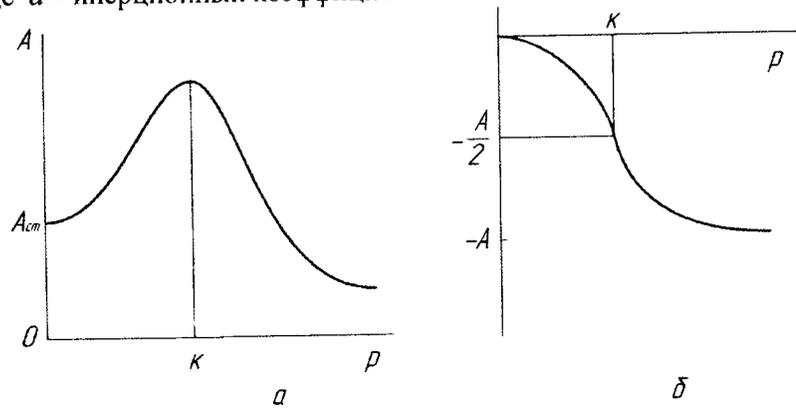


Рис. 4.7. Частотные характеристики механизмов

Амплитуда изменения обобщенной силы равна  $A_1$ . Перемещение, вызываемое действием этой силы, равно  $A_1/c$ , где  $c$  – коэффициент жесткости. Коэффициент динамичности по перемещениям равен:

$$K_{\text{дин}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}. \quad (4.51)$$

На рис. 4.8, *a* показаны резонансные кривые, выражающие зависимость коэффициента динамичности от частотного отношения, равного отношению частоты вынужденных колебаний к собственной частоте при нескольких значениях коэффициента демпфирования  $n$ .

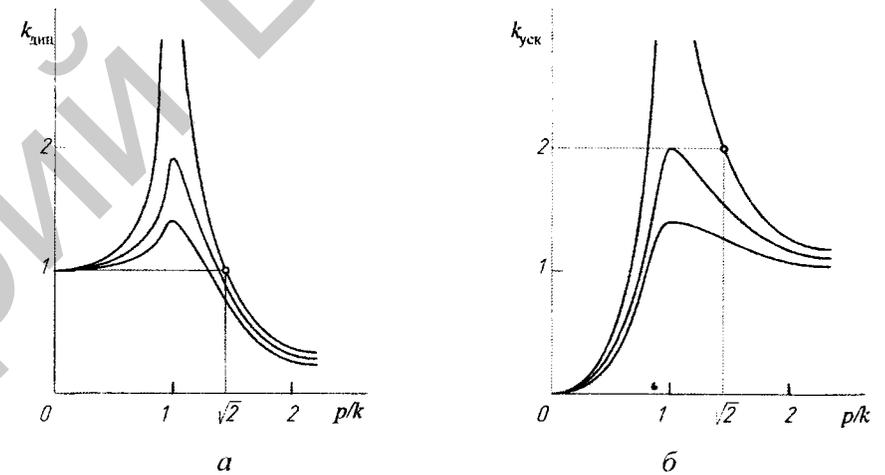


Рис. 4.8. Графики коэффициентов динамичности:  
*a* – зависимость коэффициента динамичности от частотного отношения  $p/k$ ;  
*б* – зависимость коэффициента динамичности по ускорениям от частотного отношения  $p/k$

Под коэффициентом динамичности по ускорениям понимается отношение максимального модуля ускорения выходного звена с учетом упругости звеньев механизма к максимальному модулю ускорения без учета упругости звеньев. Коэффициент динамичности по ускорениям равен:

$$K_{\text{уск}} = \frac{p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \equiv K_{\text{дин}} \frac{p^2}{k^2}. \quad (4.52)$$

На рис. 4.8, б показаны графики зависимости коэффициента динамичности по ускорениям от частотного отношения  $\frac{p}{k}$ , соответствующие резонансным кривым, показанным на рис. 4.8, а. Коэффициент динамичности по перемещениям без учета сил трения ( $n = 0$ ) равен единице при  $\frac{\delta}{k} = \sqrt{2}$  и при  $\frac{\delta}{k} \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Коэффициент динамичности по ускорениям при  $n = 0$  равен двум при  $\frac{\delta}{k} = \sqrt{2}$  и при  $\frac{\delta}{k} \rightarrow \infty$  стремится к единице.

Виброзащитные системы, показанные на рис. 4.9, различают по виду возбуждения колебаний. В первом случае (рис. 4.9, а) колебания вызываются переменной силой  $F(t)$ , и возбуждение называется силовым. Во втором случае (рис. 4.9, б) источником возбуждения является основание, и возбуждение колебаний называется кинематическим.

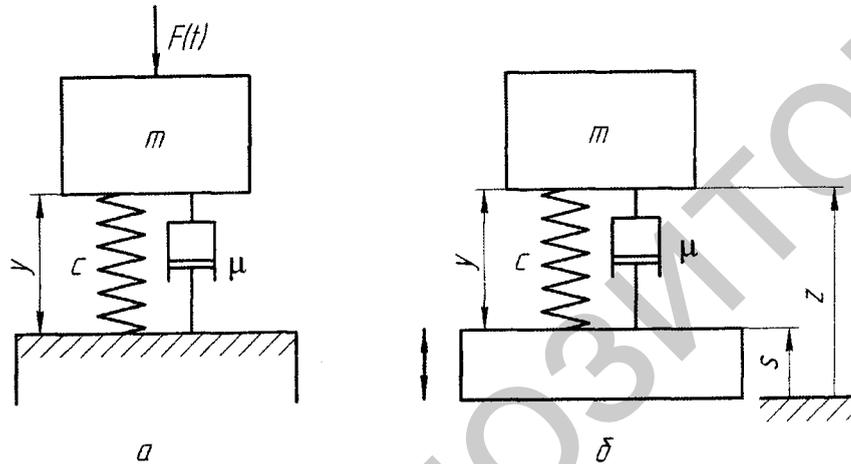


Рис. 4.9. Одноосный виброизолятор:  
а – машина установлена на фундаменте;  
б – твердое тело с колеблющимся основанием

При силовом возбуждении машина с общей массой  $m$  является источником возбуждения, а фундамент – защищаемым объектом. Виброизолятор, помещенный между машиной и фундаментом, имеет приведенный коэффициент жесткости  $c$  и приведенный коэффициент сопротивления  $\mu$ .

Приведенный коэффициент жесткости  $c$  определяется из условия равенства потенциальной энергии виброизолятора и эквивалентной пружины. Приведенный коэффициент сопротивления  $\mu$  определяется из условия равенства работ, затрачиваемых на трение в виброизоляторе и в эквивалентном демпфере.

Обобщенная реакция виброизолятора  $Q$  и внешняя сила  $F(t)$  направлены вдоль одной и той же оси, совпадающей с направлением перемещения  $y$ .

Уравнение движения источника возбуждения, рассматриваемого как твердое тело, имеет вид

$$m\ddot{y} = F(t) + Q(y, \dot{y}). \quad (4.53)$$

Виброизолятор уменьшает динамическую составляющую реакции  $Q$ , передаваемой на основание при заданном воздействии переменной силы  $F(t)$ .

Рассмотрим колебания линейного виброизолятора при силовом возбуждении. Примем, что приведенная реакция виброизолятора  $Q$  складывается из приведенной силы упругости, линейно зависящей от перемещения, и приведенной силы трения, линейно зависящей от скорости:

$$Q(y, \dot{y}) = -cy - \mu\dot{y}. \quad (4.54)$$

Тогда уравнение (4.53) примет вид

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = F(t),$$

или

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = \frac{F(t)}{m}, \quad (4.55)$$

где  $k^2 = \tilde{n}/m$ ,  $2n = \mu/m$ .

Пусть внешняя сила  $F(t)$  изменяется по гармоническому закону  $F(t) = H \sin pt$ . Тогда

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = \frac{H}{m} \sin pt, \quad (4.56)$$

где  $H$  – амплитуда вынуждающей силы.

Решение этого уравнения для установившихся вынужденных колебаний имеет вид

$$y = \frac{H}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt - \theta), \quad (4.57)$$

где  $\theta$  – сдвиг фаз силы и перемещения, определяемый выражением

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Продифференцировав выражение (4.57) и подставив значения в (4.54), получим

$$Q = -\frac{cH \sin(pt - \theta)}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} - \frac{\mu H p \cos(pt - \theta)}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

или

$$Q = -\frac{cH}{m\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \left[ \sin(pt - \theta) + \frac{p\mu}{c} \cos(pt - \theta) \right]. \quad (4.58)$$

Преобразуем зависимость (4.58) с учетом формулы коэффициента динамичности по перемещениям (4.51):

$$K_{\text{дин}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}.$$

Так как отношение  $c/m = k^2$ , то

$$Q = -K_{\text{дин}} H \left[ \sin(pt - \theta) + \frac{p\mu}{c} \cos(pt - \theta) \right]. \quad (4.59)$$

Максимальное значение силы, передаваемой виброизолятором на основание, равно:

$$Q_{\text{max}} = K_{\text{дин}} H \sqrt{\frac{1 + 4n^2 p^2}{k^2}}. \quad (4.60)$$

Коэффициент передачи силы на основании  $K_c$  представляет собой отношение максимального значения силы к амплитуде вынуждающей силы:

$$K_c = \frac{Q_{\text{max}}}{H}.$$

При силовом возбуждении линейного виброизолятора коэффициент передачи силы равен:

$$K_c = K_{\text{дин}} \sqrt{\frac{1 + 4n^2 p^2}{k^2}}. \quad (4.61)$$

Коэффициент передачи силы  $K_c$  совпадает с коэффициентом динамичности по силам. Из зависимости (4.61) видно, что при отсутствии демпфирования ( $n = 0$ ) коэффициент динамичности по силам равен коэффициенту динамичности по перемещениям.

Введем следующие коэффициенты:

$$\nu = \frac{p}{k} - \text{частотное отношение};$$

$$\beta = \frac{n}{k} - \text{относительное демпфирование.}$$

Тогда коэффициент передачи силы будет равен:

$$K_c = \sqrt{\frac{1 + 4\beta^2\nu^2}{(1 - \nu^2)^2 + 4\beta^2\nu^2}}. \quad (4.62)$$

Коэффициент передачи сил характеризует качество виброзащитной системы. При жестком соединении источника возбуждения (машины) и основания (фундамента)  $K_c = 1$ , при  $K_c < 1$  виброзащитная система эффективна, так как амплитуда силы, действующей на основание, уменьшается; при  $K_c > 1$  применение виброизолятора нецелесообразно.

При кинематическом возбуждении (см. рис. 4.9, б) защищаемый объект представлен как твердое тело с массой  $m$ , а источником возбуждения является основание, совершающее колебания по закону  $s(t)$ . В этом случае задача виброизолятора состоит в уменьшении динамической составляющей  $Q$ , передаваемой на защищаемый объект.

Абсолютное перемещение защищаемого объекта  $z$  равно сумме перемещения основания  $s$  и относительного перемещения защищаемого объекта  $y$ .

$$z = s + y. \quad (4.63)$$

Тогда уравнение движения защищаемого объекта как твердого тела при колебаниях основания имеет вид

$$m[\ddot{y} + \ddot{s}(t)] = Q(y, \dot{y}),$$

или

$$m\ddot{y} = -m\ddot{s}(t) + Q(y, \dot{y}). \quad (4.64)$$

Уравнение движения (4.64) при кинематическом возбуждении совпадает с уравнением (4.53) при силовом возбуждении, если принять  $F(t) = m\ddot{s}$ .

Если реакция виброизолятора  $Q$  определяется из уравнения (4.54), то уравнение принимает вид

$$m\ddot{y} = -m\ddot{s} - cy - \mu\dot{y}, \quad (4.65)$$

где  $y$  — перемещение защищаемого объекта относительно основания.

Рассмотрим случай, когда основание колеблется по закону

$$s = A_s \sin pt, \quad (4.66)$$

тогда

$$\ddot{s}(t) = -A_s p^2 \sin pt. \quad (4.67)$$

Для данного случая уравнение принимает вид

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = mA_s p^2 \sin pt.$$

или

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = A_s p^2 \sin pt. \quad (4.68)$$

Поскольку  $2n = \frac{\mu}{m}$ , а  $k^2 = \frac{c}{m}$  (см. формулу 4.46), уравнение (4.68) примет вид

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + k^2 y = A_s p^2 \sin pt. \quad (4.69)$$

Уравнение (4.56) совпадает с уравнением (4.69) если выполняется следующее условие:

$$H = mA_s p^2.$$

Тогда коэффициент передачи при кинематическом возбуждении совпадает с коэффициентом передачи при силовом возбуждении.

#### Вопросы для самопроверки

1. Что является мерой статической и динамической уравновешенности?
2. Как производится полное уравновешивание ротора?
3. Каковы особенности уравновешивания гибкого ротора?
4. Как производится уравновешивание масс шарнирного четырехзвенника?
5. В чем особенности частичного уравновешивания кривошипно-ползунного механизма?
6. Какие виды колебаний встречаются в машинах?
7. В чем состоит вибрационная защита машин?

1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учебник для вузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1988. – 640 с.

2. Иванов, М. Н. Детали машин : учебник для вузов / М. Н. Иванов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Высшая школа, 1991. – 383 с.

3. Иосилевич, Г. Б. Прикладная механика : учебник для вузов / Г. Б. Иосилевич, Г. Б. Строганов, Г. С. Маслов. – Москва : Высшая школа, 1989. – 351 с.

4. Козик, А. А. Теория механизмов и машин в примерах и задачах : учебно-методическое пособие / сост.: А. А. Козик, И. С. Крук. – Минск : БГАТУ, 2009. – 220 с.

5. Лачуга, Ю. Ф. Теоретическая механика : учебник для студентов вузов по агроинженерным специальностям / Ю. Ф. Лачуга, В. А. Ксендзов. – Москва : Колос, 2000. – 576 с.

6. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин : учебное пособие для вузов / Н. И. Левитский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1990. – 592 с.

7. Леонов, И. В. Теория механизмов и машин (основы проектирования по динамическим критериям и показателям экономичности) : учебное пособие / И. В. Леонов, Д. И. Леонов. – Москва : Высшее образование, Юрайт-Издат, 2009. – 239 с.

8. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики : учебник для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1990. – 607 с.

9. Тимофеев, С. И. Теория механизмов и механика машин / С. И. Тимофеев. – Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 349 с.

10. Фролов, К. В. Теория механизмов и машин : учебник для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов [и др.]; под ред. К. В. Фролова. – Москва : Высшая школа, 1987. – 496 с.

Учебное издание

**Орда Александр Николаевич,  
Шкляревич Виктор Александрович,  
Бобко Виктор Николаевич,  
Воробей Александр Сергеевич**

## **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

*Учебное пособие*

**В двух частях**

**Часть 2**

**Синтез механизмов**

Ответственный за выпуск *А. Н. Орда*  
Редактор *Н. А. Антипович*  
Компьютерная верстка *Н. А. Антипович*

Подписано в печать 22.07.2015 г. Формат 60×84<sup>1/16</sup>.  
Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 8,14. Уч.-изд. л. 6,36. Тираж 150 экз. Заказ 504.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный аграрный технический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий  
№ 1/359 от 09.06.2014.  
№ 2/151 от 11.06.2014.  
Пр-т Независимости, 99–2, 220023, Минск.