УДК 539.3/.6(07)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

К.Г. Масальский – студент 2 курса БГАТУ
Научный руководитель – к.т.н., доцент О.И. Мисуно

Под устойчивостью понимается способность упругой системы сохранять под нагрузкой свою первоначальную форму равновесия. Если система этой способностью не обладает, то она называется неустойчивой, а ее состояние является неустойчивым. Наиболее простыми и распространенными случаями являются потеря устойчивости при центральном сжатии длинных (по сравнению с поперечными размерами) стержней, тонкостенных труб, прокатных профилей и т.д.

Из практики известно, что длинный стержень, изготовленный из материала одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, надежно работающий при действии растягивающей нагрузки, может разрушиться при действии такой же, но сжимающей нагрузки. При этом нормальные напряжения в поперечном сечении стержня, при которых произойдет разрушение, будут намного меньше предела прочности материала. Объяснение такого явления заключается в том, что при действии сжимающей нагрузки стержень не может сохранить первоначальную прямолинейную форму равновесия и искривляется. В этом случае в сечениях стержня наряду с продольной силой действует и изгибающий момент, интенсивно возрастающий при увеличении нагрузки сверх критической. Наименьшая сжимающая сила $F_к$ при которой прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой называется критической силой. Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня под действием осевой сжимающей нагрузки называется продольным изгибом.

Возникающий изгибающий момент вызывает резкое увеличение напряжений, перемещений и часто может являться причиной разрушения сжатых стержней.

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня при воздействии сжимающей силы F, значение которой меньше критической силы определяются как

$$\sigma = \left| -\frac{F}{A} \right|, \tag{1}$$

где A – площадь поперечного сечения стержня.

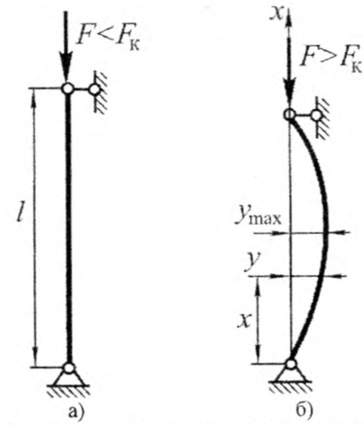


Рис. 1. Схемы нагружения стержня силой, значение которой:
а – меньше критической силы; б – больше критической силы

После того как сжимающая сила превысит критическую силу стержень начнет изгибаться и возникающие наибольшие нормальные напряжения будут равны

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{F}{A} - \frac{M_{max}}{W_z} \right| = \left| -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot y_{max}}{W_z} \right|, \tag{2}$$

где y_{max} – наибольший прогиб стержня (рисунок 1);

W_z – наименьший осевой момент сопротивления поперечного сечения стержня.

При $F_к > F$ прогиб стержня может быть значительным. Определить его величину можно в результате решения точного дифференциального уравнения изогнутой оси стержня

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{E\,I_{min}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} + Fy = 0, \tag{3}$$

где y – прогиб сечения стержня на расстоянии x (рисунок 1);

l_{min} – наименьший осевой момент инерции сечения.

Решение уравнения (3) показывает, что в закритической области существует строгая функциональная зависимость между прогибом и сжимающей силой. Для стержня шарнирно закрепленного по концам наибольший прогиб определяется из выражения

$$y_{\max}=\frac{l\sqrt{8}}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{F}{F_k}-1}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{F}{F_k}-1\right)\right) \qquad (4$$

где l – длина стержня.

Критическая сила для сжатого стержня большой гибкости λ определяется по формуле Эйлера

$$F_k=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \qquad (5$$

Подставляя выражение (5) в (4), а затем в (2) получим формулу для определения наибольших нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при его нагружении $F_к > F$

$$\sigma_{\max}=\left|-\frac{F}{A}-\frac{F}{W_z}\cdot\frac{l\sqrt{8}}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{F\lambda^2}{\pi^2 EA}-1}\cdot\left(1-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{F\lambda^2}{\pi^2 EA}-1\right)\right)\right| \qquad (6)$$

Используя формулу (4) построим графическую зависимость отношения сжимающей силы к критической силе как функции отношения наибольшего прогиба стержня к его длине, т.е. $\frac{F}{F_k}=f\left(\frac{y_{\max}}{l}\right)$ (рис. 2).

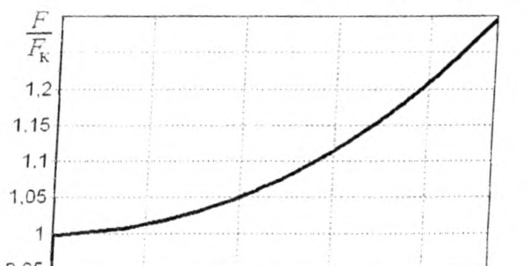
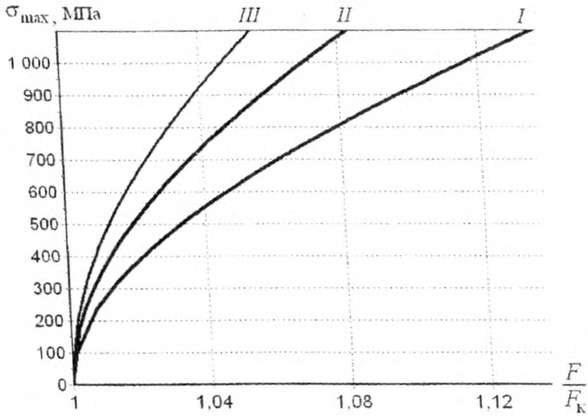


Рис. 2. Графическая зависимость отношения сжимающей силы к критической силе от отношения наибольшего прогиба стержня к его длине



I — *b* = 3 мм; *II* — *b* = 4 мм; *III* — *b* = 5 мм

Рис. 3. Зависимость наибольших напряжений от отношения сжимающей силы к критической силе

График зависимости $\frac{F}{F_k} = f\left(\frac{y_{max}}{l}\right)$ показывает, что с увеличением сжимающей силы сверх критической, интенсивность роста наибольшего прогиба стержня резко возрастает.

Определим по формуле (6) возникающие в стержне наибольшие напряжения и построим графическую зависимость наибольших напряжений как функции отношения сжимающей силы к критической силе, т.е. $\sigma_{max} = f\left(\frac{F}{F_k}\right)$ (рис. 3) для стержня (рис. 1) со следующими характеристиками и размерами: материал – сталь; сечение – прямоугольник со сторонами $h = 40$ мм и $b = 3$ (4; 5) мм; длина $l = 1$ м. Исследование зависимости (6) показывает, что напряжения в сжатом стержне после потери устойчивости также резко возрастают при увеличении силы. Причем интенсивность увеличения σ_{max} примерно в два раза выше для стержня с толщиной сечения 5 мм по сравнению стержнем с толщиной сечения 3 мм. Значит при уменьшении гибкости стержня после потери устойчивости, при прочих равных условиях, интенсивность роста напряжений увеличивается при росте сжимающей силы.