ФІЗІКА

УДК 530.12

Т. А. ЖУР, И. Т. НЕМАНОВА, А. П. РЯБУШКО

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ

1. Постановка задачи. Пусть гравитационное поле создается газопылевым шаром, имеющим ньютоновский радиус R и постоянную ньютоновскую плотность ρ, в центре которого сосредоточена притягивающая масса M. Реально это означает, что источником гравитационного поля является центральное сферически симметричное тело массой M, погруженное в газопылевой шар радиусом R и плотностью ρ. Размеры центрального тела значительно меньше размеров шара. В работе [1] в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) аппроксимационным методом Эйнштейна — Инфельда (см. [2]) найдена метрика пространства-времени, возникающего благодаря описанной выше материальной конфигурации:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \tag{1.1}$$

где $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$; по повторяющимся индексам идет суммирование; $g_{00} = 1 + \lambda^2 \underset{2}{h}_{00} + \lambda^4 \underset{4}{h}_{00}$, $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 + \lambda^2 \underset{2}{h}_{00}$; $\lambda = 1/c$ (c — скорость света в вакууме). Компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в итоге определяются выражениями $\underset{2}{h}_{00}, \underset{4}{h}_{00}$:

1) внутреннее решение

$$\underset{2}{h}{}^*_{00} = -\frac{2\gamma M}{r} + 4\pi\gamma\rho\left(\frac{r^3}{3} - R^2\right), \quad r \leqslant R, \tag{1.2}$$

$$\underset{4}{h}{}^*_{00} = \frac{2\gamma^2}{r^2} M^2 + 16\pi\gamma^2\rho M\left(\frac{r}{3} - R\right) - 12\pi\gamma^2\rho M\left(R - r + \frac{r^2}{3R}\right) + 12\pi\gamma^2\rho M\,\frac{R^2}{r}, \tag{1.3}$$

где $r = \sqrt{{x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2}$ означает ньютоновское расстояние какой-либо точки $M(x^1, x^2, x^3)$ гравитационного поля до центра шара, x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты точки M, γ — ньютоновская постоянная тяготения;

2) внешнее решение

$$\underset{2}{h}{}^{**}_{00} = -\frac{2\gamma}{r}(M + M_\rho), \quad M_\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho, \quad r \geqslant R, \tag{1.4}$$

$$\underset{4}{h}{}^{**}_{00} = \frac{2\gamma^2}{r^2}(M + M_\rho)^2 - 16\pi\gamma^2\rho M\frac{R^2}{r} + \underset{4}{h}{}^{**}_{00}(p), \tag{1.5}$$

где добавка $\underset{4}{h}{}^{**}_{00}(p) = -4\pi\gamma^2\rho M\dfrac{R^2}{r}$, $r \geqslant R$, обязана существованию давления в газопылевом шаре.

Как показано в [1], найденная метрика внутреннего и внешнего решений гладко сшивается (класс сшивки C^1) на границе $r = R$ газопылевого шара с пустотой, а вне шара пространство-время является в ПНП ОТО шварцшильдовским. Метрика также удовлетворяет условиям гармоничности, т.е. система координат, в которой записана метрика, является в ПНП ОТО гармонической (см. [2, 3]).

Теперь можно достаточно точно сформулировать задачу и цель настоящей работы: получить в ПНП ОТО систему дифференциальных уравнений Папапетру [4], описывающих поступательное движение вращающейся частицы во внешнем гравитационном поле, которое создается описанной выше материальной системой.

2. Вывод уравнений поступательного движения в ПНП ОТО. Система уравнений Папапетру [4] имеет вид:

$$\frac{D}{ds}\left(mu^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{ds}\right) + \frac{1}{2}R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}u^\beta S^{\mu\nu} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^\alpha}{u^0}\frac{DS^{\beta 0}}{ds} - \frac{u^\beta}{u^0}\frac{DS^{\alpha 0}}{ds} = 0, \tag{2.2}$$

где $\dfrac{D}{ds}$ обозначает абсолютную производную (см., например, [5, § 85]); $m = m_0 c$, m_0 — масса покоя частицы; $u^\alpha \equiv dx^\alpha/ds$ — ее 4-скорость; $S^{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор вращения, характеризующий собственное вращение частицы; $R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}$ — тензор кривизны риманова пространства-времени, в котором движется частица; все греческие индексы $\alpha, \beta, \mu, \nu, \ldots$ принимают значения $0, 1, 2, 3$.

Система семи уравнений (2.1), (2.2) содержит 10 неизвестных функций u^α, $S^{\alpha\beta}$. Остается произвол в три функции, который ряд авторов предлагают ликвидировать введением трех дополнительных условий на тензор $S^{\alpha\beta}$. Мы их введем несколько позже, а сейчас отметим, что система (2.2), согласно аппроксимационной процедуре Эйнштейна — Инфельда, в ньютоновском приближении превращается в простейшую систему $dS^{ij}/ds = 0$ (латинские индексы $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$), а так как в ньютоновской теории гравитации $s = x^0 = ct$, где t — время, то получаем, что S^{ij} постоянен во времени: $S^{ij} = \mathrm{const}$ (в ньютоновском приближении!). Поэтому система 4-х уравнений (2.1) в ПНП ОТО, содержащая только ньютоновские значения $S^{\alpha\beta}$, может интегрироваться независимо от системы (2.2) относительно неизвестных 4-х функций u^0, u^i.

Приступая к интегрированию системы (2.1), заметим, что она всегда имеет первый интеграл, который получается из метрики (1.1) делением ее почленно на ds^2 :

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1, \tag{2.3}$$

которым будет удобно воспользоваться в дальнейшем.

Интегрирование будем осуществлять для внутреннего решения (1.2), (1.3), так как внешнее решение (1.4), (1.5) дает поле Шварцшильда, в котором движение вращающейся частицы уже изучено (см. [2]).

В соответствии с аппроксимационной процедурой искомые функции u^α и m разлагаются в ряды:

$$u^0 = \underset{0}{u^0} + \lambda^2 \underset{2}{u^0} + \ldots, \qquad u^i = \lambda \underset{1}{u^i} + \lambda^3 \underset{3}{u^i} + \ldots, \qquad m = \lambda^2 \underset{2}{m} + \lambda^4 \underset{4}{m} + \ldots$$

Разлагая в ряд интеграл (2.3), находим, что

$$\underset{0}{u^0} = 1, \qquad \underset{2}{u^0} = \frac{1}{2}\underset{1}{u^s}\underset{1}{u^s} - \frac{1}{2}\underset{2}{h^*_{00}} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\underset{2}{h^*_{00}}, \tag{2.4}$$

где v — величина 3-скорости частицы.

Воспользовавшись (2.4), из (2.1) при $\alpha = 0$ находим $d\underset{2}{m}/ds = 0$, т.е. $\underset{2}{m} = \mathrm{const}$, а при $\alpha = i$ (2.1) дает ньютоновские уравнения поступательного движения вращающейся частицы:

$$\ddot{x}^i - \left(\frac{\gamma M}{r}\right)_{,x^i} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho x^i = 0, \qquad r \leqslant R, \tag{2.5}$$

где запятая обозначает частную производную по x^i.

В ПНП ОТО из (2.1) при $\alpha = 0$ находим, что $d\underset{4}{m}/ds = 0$, т.е. $\underset{4}{m} = \text{const}$, а при $\alpha = i$ после достаточно громоздких вычислений с использованием разложения в ряды по λ тензора кривизны $R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}$ [2] и дополнительных условий на тензор вращения

$$S^{0i} = KS^{ij}u_j \tag{2.6}$$

приходим к постньютоновским уравнениям поступательного движения вращающейся частицы:

$$\ddot{\tilde{x}}^i - \left(\frac{\gamma M}{\tilde{r}}\right)_{,\tilde{x}^i} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho\tilde{x}^i = f^i, \tag{2.7}$$

где

$$f^i = \frac{4\gamma M}{r^3}x^j u^j u^i + \frac{16}{3}\pi\gamma\rho x^j u^j u^i + 4\gamma^2 M^2\frac{1}{r^4}x^i - \frac{22}{3}\pi\gamma^2\rho M\frac{1}{r}x^i + 4\pi\gamma^2\rho M\frac{1}{R}x^i +$$
$$+10\pi\gamma^2 M\rho\frac{R^2}{r^3}x^i - \frac{\gamma M}{r^3}x^i u^s u^s - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho x^i u^s u^s - \frac{KS^{ij}}{m}\frac{D}{ds}(u^j_{;\beta}u^\beta) - \frac{\gamma S^{12}}{m}\left(\frac{M}{r^3} - \frac{8\pi\rho}{3}\right)\delta_{i\bar{k}}u^{\bar{k}}.$$

Здесь $\delta_{i\bar{k}} = -\delta_{\bar{k}i}$, $\delta_{12} = 1$, $\delta_{3\bar{k}} = 0$, $\bar{k} = 1,2$. Тильда "$\tilde{\ }$" над буквой означает, что соответствующая величина рассматривается в ПНП ОТО.

Обсудим условия (2.6). Как уже упоминалось выше, система (2.1), (2.2) содержит семь независимых уравнений для десяти неизвестных функций $u^\alpha, S^{\alpha\beta}$. Поэтому ее дополняют тремя условиями, которые обычно трактуются как условия, обеспечивающие правильный выбор центра тяжести пробного тела. Наиболее употребительными являются условия

$$S^{\alpha\beta}P_\beta = 0, \quad P_\beta \equiv mu_\beta + g_{\beta\mu}u_\nu\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} \tag{2.8}$$

(см. [2]). Однако в линейном приближении по $S^{\alpha\beta}$ уравнения (2.1) при условиях (2.8) в постньютоновском приближении не согласуются с уравнениями Фока [3]. Совпадение имеет место, если вместо общековариантных условий (2.8) взять условия (2.6). Поэтому мы и приняли в определенном смысле более общие дополнительные условия (2.6) с $K = \text{const}$, которые при $K = 0$ приводят к условиям Папапетру [6] $S^{0i} = 0$, а при $K = 1$ дают условия (2.8).

Интегрированию уравнений (2.7) и обсуждению результатов будет посвящена следующая работа.

Summary

A system of differential equations, which describes the relativistic translation of a rotating particle in the internal gravitational field induced by the gravity center contained in a gas-powder ball, is introduced. The system was derived on the basis of Papapetru's equations with some additional conditions on $S^{\alpha\beta}$: $S^{0i} = KS^{ij}u_j$.

Литература

1. Рябушко А. П., Неманова И. Т. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 10. С. 889 – 892.
2. Рябушко А. П. Движение тел в ОТО. Мн., 1979.
3. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.
4. Papapetrou A. // Proc. Roy. Soc. 1951. A209. P. 248.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988.
6. Corinaldesi E., Papapetrou A. // Proc. Roy. Soc. 1951. A209. P. 259.

Белорусский аграрный технический университет

Поступила в редакцию 02.08.96