7. Бернхардт Э. Переработка термопластических материалов / Пер. с англ. М., 1962.
8. Торнер Р. В. Теоретические основы переработки полимеров (Механика процессов), М., 1977.
9. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: 13-е изд. М., 1990.
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи теории упругости. М., 1965.

Институт механики металлополимерных систем АН Беларуси

Поступила в редакцию 11.09.92

УДК 539.4

Ю. В. ЧИГАРЕВ

О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

В задачах контактного деформирования особый интерес вызывают задачи, связанные с учетом предварительно напряженного состояния среды [1]. Такой подход особенно необходим при расчете прочности и жесткости деталей машин и строительных конструкций, которые до контактного деформирования находились в некотором напряженном состоянии.

В данной работе для стохастически неоднородной упруговязкопластической среды получена замкнутая система уравнений для средних напряжений, деформаций, перемещений, которая описывает основное (предварительно напряженное) состояние, реализующееся в случайно-неоднородном теле. При этом масштаб неоднородности считаем меньше характерных размеров тела. Путем наложения на основное среднее напряженное и деформированное состояние детерминированных возмущений (давление жесткого штампа) определена линеаризованная система уравнений, которая используется в решении контактной задачи.

Рассмотрим упруговязкопластическое тело объема V, ограниченное поверхностью S, к которой приложены внешние воздействия P_i. Будем считать тело изотропным, неоднородным. Механические коэффициенты упругости G (модуль сдвига), пластичности k, вязкости η, упрочнения c тогда будут меняться от точки к точке тела непрерывным или дискретным образом. Предполагаем, что изменение этих свойств от точки к точке имеет случайный характер.

Тело ведет себя упругим образом в точках [2], где

$$S_{ij}S_{ij} < k^2 \quad \left(S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{1}$$

(σ_{ij} — компоненты тензора напряжений).

Если

$$S_{ij}S_{ij} > k^2, \tag{2}$$

то среда деформируется пластическим образом и полные деформации e_{ij} представляются в виде суммы упругой e^e_{ij} и пластической e^p_{ij} деформаций:

$$e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij}. \tag{3}$$

Если $\dot{e}^p_{ij} = 0$, то предельное соотношение будет

$$(S_{ij} - ce^p_{ij})(S_{ij} - ce^p_{ij}) < k^2. \tag{4}$$

Если $\dot{e}^p_{ij} \neq 0$, то функция нагружения имеет вид

$$(S_{ij} - ce^p_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij})(S_{ij} - ce^p_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij}) = k^2, \tag{5}$$

а ассоциированный закон течения запишем в виде

$$\dot{e}^p_{ij} = \psi(S_{ij} - ce^p_{ij} - \eta\dot{e}^p_{ij}), \quad \psi > 0. \tag{6}$$

Соотношение Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{7}$$

Уравнение равновесия

$$[\sigma_{jk} = (\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0 \tag{8}$$

и граничные условия

$$[\sigma_{jk} = (\delta_{ik} + u_{i,k})] n_j = p_i. \tag{9}$$

Система уравнений (1)—(9) замкнута и имеет единственное решение.

Представляя все функции в виде суммы математического ожидания, обозначаемого символом $< >$, и случайной флуктуации, обозначаемой штрихом, а также полагая зависимость параметров среды от пространственных координат в виде

$$\eta = <\eta> f; \; c = <c> f; \; k = <k> f; \; G = <G> f, \tag{10}$$

где $f(x_i)$ — статистически однородная изотропная функция, аналогично [3] получаем систему уравнений, которая будет описывать среднее напряженно-деформированное состояние стохастически неоднородной упруговязкопластической среды

$$\begin{aligned}
& 8<G>^3<k>^2<\dot{e}_{ij}> - 4<L_{ij}><G>^2<k>^2 - [<I_{ij}> - \\
& - 2<G><c><e_{ij}> - <\eta>(2<G><\dot{e}_{ij}> - \\
& - <L_{ij}>)][<I_{kg}> - 2<G><c><e_{kg}> - \\
& - <\eta>(2<G><\dot{e}_{kg}> - <L_{kg}>)](2<G><\dot{e}_{kg}> - \\
& - <L_{kg}>) = -<f'^2>[24<G>^3<k>^2<\dot{e}_{ij}> + \\
& + 8<G>^2<c><I_{ij}><e_{kg}><\dot{e}_{kg}> - \\
& - 24<G>^3<\eta><c><e_{ij}><\dot{e}_{ij}><\dot{e}_{kg}> + \\
& + 4<G>^2<\eta><I_{ij}><\dot{e}_{kg}>^2 + \\
& + 4<G>^2<\eta><I_{kg}><e_{kg}><\dot{e}_{ij}> - \\
& - 24<G>^3<\eta><c><e_{kg}><\dot{e}_{kg}><\dot{e}_{ij}> - \\
& - 24<G>^3<\eta>^2<e_{ij}><\dot{e}_{kg}><\dot{e}_{kg}> + \\
& + 8<G>^2<\eta>^2<L_{ij}><\dot{e}_{ij}><\dot{e}_{kg}> + \\
& + 4<G>^2<c>^2<e_{ij}><e_{kg}><L_{kg}> + \\
& + 4<G>^2<c>^2<e_{ij}><e_{kg}><L_{kg}> + \\
& + 4<G>^2<\eta><c><e_{kg}><L_{kg}><\dot{e}_{ij}> - \\
& - 24<G>^3<c>^2<e_{ij}><e_{kg}><\dot{e}_{kg}>],
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$I_{ij} = \sigma_{ij}(2<G> + <c>) - \delta_{ij}\sigma(2<G> + 3\gamma<c>),$$

$$L_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - 3\gamma\delta_{ij}\sigma,$$

$$\gamma = \nu/(1+\nu).$$

Уравнение равновесия

$$[<\sigma_{ij}>(\delta_{ik}+<u_{i,k}>)+<f^{12}>F_{ij}(<\sigma_{s,p}><u_{s,p}>)]_{,j}=0. \quad (12)$$

Граничные условия

$$[<\sigma_{ij}>(\delta_{ij}+<u_{i,k}>)+<f^{12}>F_{ij}(<\sigma_{s,p}>,<u_{s,p}>)]n_j=P_i. \quad (13)$$

В формулах (11)—(13) величина $<f^{12}>$ — дисперсия неоднородности материала, F_{ij} — нелинейный оператор.

Пусть решением системы (11)—(13) будет

$$<\sigma_{ij}(x_{k,t})>=\sigma^0_{ij}(x_k,t), \quad (14)$$
$$<e_{ij}(x_k,t)>=e^0_{ij}(x_k,t),\ <n_i(x_k,t)>=n^0_i(x_k,t).$$

Предполагаем, что с ростом времени данные решения стремятся к $\sigma^0_{ij}(x_k)$, $e^0_{ij}(x_k)$, $u^0_i(x_k)$. Уравнения (11)—(13) будем рассматривать как соотношения, описывающие некоторое предварительно напряженное состояние среды, в которое вдавливается жесткий штамп. Действие последнего вызывает малое возмущение основного напряженного состояния. Если малые возмущения напряжений, деформаций и перемещений обозначить через σ^+_{ij}, e^+_{ij}, n^+_i, то решение для возмущенного состояния можно искать в виде

$$\sigma_{ij}=\sigma^0_{ij}+\sigma^+_{ij}, \quad e_{ij}=e^0_{ij}+e^+_{ij}, \quad (15)$$
$$u_i=u^0_i+u^+_i.$$

Подставим (15) в (11)—(13). В результате линеаризации указанных уравнений, выделения в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, временного множителя $\exp(i\omega t)$, а также полагая основное среднее напряженно-деформированное состояние однородным, аналогично [3] получаем систему уравнений

$$\sigma^i_j=\delta^i_j a^k_i e_{kk}+(1-\delta^i_j)b_{ij}e_{ij}. \quad (16)$$

Уравнение равновесия

$$(\sigma_{ij}+\sigma^0_{jk}u_{i,k})_{,j}=0. \quad (17)$$

Граничные условия

$$(\sigma_{ij}+\sigma^+_{jk}u_{i,k})n_j=P_i. \quad (18)$$

В соотношении (16)—(18) для амплитудных величин возмущений оставлены те же обозначения, что и для возмущений, опущен лишь индекс «плюс» вверху. Коэффициенты a^k_i и b_{ij} — комплексные величины, зависят от свойств рассматриваемой среды $<c>$, $<\eta>$, $<k>$, $<G>$, ν, $<f^{12}>$ и компонент тензоров напряжений σ^0_{ij}, деформаций e^0_{ij}, перемещений u^0_i основного состояния.

Здесь и в дальнейшем явный вид этих коэффициентов ввиду громоздкости не приводим.

В цилиндрической системе координат связь между напряжениями и деформациями, согласно уравнению (16), будет

$$\sigma_{rr}=a_{11}e_{rr}+a_{12}e_{\varphi\varphi}+a_{13}e_{33}, \quad (19)$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}=a_{12}e_{rr}+a_{22}e_{\varphi\varphi}+a_{23}e_{33},$$
$$\sigma_{33}=a_{13}e_{rr}+a_{32}e_{\varphi\varphi}+a_{33}e_{33},$$
$$\sigma_{r\varphi}=<G>e_{r\varphi},\ \sigma_{\varphi3}=<G>e_{\varphi3},\ \sigma_{r3}=\frac{a_{11}-a_{13}}{2}e_{r3}.$$

Уравнения равновесия (17) запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial x_3}+\frac{1}{3}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})-P\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_3^2}=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial x_3}+\frac{2}{r}\sigma_{r\varphi}-P\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}=0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi 3}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}+\frac{1}{r}\sigma_{r3}=0.$$

Компоненты тензора деформаций можем записать:

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{1}{r}u_r,$$

$$e_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\ e_{r\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \varphi}-\frac{1}{r}u_\varphi, \quad (21)$$

$$e_{r3}=\frac{\partial u_3}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial x_3},\ e_{\varphi 3}=\frac{1}{3}\frac{\partial u_3}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial x_3}.$$

Пусть штамп внедряется в полупространство под действием силы P^+ [4]. Условия равновесия для штампа будут:

$$P^+=2\Pi\int_0^a g(\rho)\rho d\rho, \quad (22)$$

где $g(r)$ — контактное давление, a — радиус области контакта. Обозначим через $\Phi(r)$ функцию, описывающую форму основания штампа, δ — осевое смещение штампа.

Подставляя (19), (21) в (20), получаем уравнения в перемещениях. Для осесимметричной задачи имеем

$$\left[a_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{a_{22}}{r^2}+\left(\frac{a_{11}-a_{13}}{2}-P^+\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]u_2+$$

$$+\left[\frac{a_{11}+a_{13}}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial x_3}+\frac{a_{13}-a_{12}}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}\right]u_3=0, \quad (23)$$

$$\left[\frac{a_{11}+a_{13}}{2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial x_3}+\frac{a_{11}-a_{13}+2a_{12}}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x_3}\right]u_3+$$

$$+\left[\frac{a_{11}-a_{13}}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_3}\right]u_3=0.$$

Решение системы уравнений (23) ищем в форме интегралов Ханкеля

$$u_r=\int_0^\infty \hat{u}_r(S,x_3)I_0(S,r)SdS,$$

$$u_3=\int_0^\infty \hat{u}_3(S,x_3)I_0(Sr)SdS,$$

где $\hat{u}_r$, u_3 — трансформаторы Ханкеля, I_0 — функция Бесселя. Известным методом [1, 5] составим дифференциальные уравнения относительно трансформант

$$S^2a_{11}\hat{u}_r+0{,}5(2a_{11}-a_{33})S\hat{u}_3+0{,}5a_{11}\dot{\hat{u}}=0,$$

$$\dot{\hat{u}}+Su_r=0. \quad (24)$$

Решения (24) представим в виде

$$\hat{u}_r = A(S)e^{-\mu S x_3} + B(S)e^{-\mu S x_3},$$
$$\hat{u}_3 = c(S)e^{-\mu S x_3} + D(S)e^{-\mu S x_3},$$

где

$$A = -\mu C,\ B = -\mu D,\ \mu = \sqrt{0{,}5(1+B) + i(1-B)},$$
$$B = \left[\frac{1}{a_{11}} - 0{,}5\left(\frac{1}{a_{33}} - \frac{1}{a_{11}}\right)\right] a_{33}.$$

Функции $C(S)$ и $D(S)$ найдем с помощью граничных условий $r_{rx_3}(r, 0) = 0$, $\sigma_{x_3}(r, 0) = -g(r)$, записав их в трансформантах Ханкеля [1, 5]. Если $\Omega(S)$ — трансформанта Ханкеля функции $g(r)$, то перемещение u_3 можно записать:

$$u_3(r, 0) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \Omega(S) I_0(S, r)\, dS,$$

где

$$\lambda = a_{11}\sqrt{\left[\frac{4a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}}{a_{11}a_{33}}\right]\left[\frac{a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}}{a_{11}a_{33}}\right]}.$$

Используя методику рассуждений работы [1, 5], приходим к выражению относительно контактного давления

$$\int_0^a g(\rho) K\left(\frac{r\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right)\frac{\rho\, d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi}{2}(\delta - \Phi(r)) \times \tag{25}$$

$$\times \frac{1}{a_{33}}\{[4a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}][a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}]\}^{1/2}.$$

Приняв в (25) $\Phi(r) = r^2/2R$ и учитывая (22), получим

$$a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3Ra_{33}P^{+}}{\{[4a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}][a_{11}a_{33} - (a_{11} - a_{33})a_{11}]\}^{1/2}}}. \tag{26}$$

Выражение в фигурных скобках играет роль контактной жесткости основания, как и в работе [1]. Однако в отличие от [1] контактная жесткость в данной задаче зависит не только от функции нагружения предварительного напряженного состояния, но и от свойств вязкости, пластичности, упрочнения среды и дисперсии неоднородности.

Зная коэффициенты a_{ij} параметров свойств среды и возмущение от штампа P^{+}, по формуле (26) определим радиус области контакта. Если известны P^{+} и a, то по (26) можно оценить степень жесткости в области контакта. Численный анализ (26) показал, что учет неоднородности и предварительно напряженного состояния материала ведет к увеличению области контакта.

Summary

The contact problem about indenting hard indent in initially stressed viscoelastic semispace has been constructed. It is issumed that parameters of continuum are depended on space coordinates by random manner. The dependence between size of contact region, pression of indent and the parameters which are determined stiffness of foundation.

Литература

1. Александров В. М., Ромалис Б. М. Контактные задачи в машиностроении. М., 1986.
2. Спорыхин А. Н. // ПМТФ. 1967. № 4. С. 27—33.
3. Спорыхин А. Н., Чигарев Ю. В. // Прикладная механика. 1977. Т. 3, № 3. С. 13—19.
4. Мартыненко М. Д. // Прочность и пластичность. М., 1971.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., 1967.

Белорусский аграрный технический университет

Поступила в редакцию 06.02.92