

УДК 539.374

Ю. В. ЧИГАРЕВ

**К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ
 ИЗ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА**

Построению общих решений трехмерных динамических и статических уравнений устойчивости в первом приближении для упругих и некоторых сложных сред при однородных докритических деформациях посвящена монография [1]. Вопрос о получении замкнутой системы уравнений устойчивости для упруговязкопластической упрочняющейся модели [2], когда параметры среды являются случайными функциями координат [3–5], рассматривался в работе [6].

Рассмотрим бесконечно длинную в направлении Ox_3 пластинку из стохастически неоднородного упруговязкопластического материала. Обозначим через L – длину, H – толщину пластинки (рис. 1). Исследуем случай плоской деформации в плоскости x_1Ox_2 , считая, что вдоль оси Ox_1 пластинка сжимается равномерным давлением P . Параметры среды (η – коэффициент вязкости, G – модуль сдвига, c – коэффициент упрочнения, k – коэффициент пластичности) зависят от координат случайным образом через функцию $f(x_1, x_2)$, статически однородную изотропную [3] $\eta = \langle \eta \rangle + f$; $G = \langle G \rangle + f$; $c = \langle c \rangle + f$; $k = \langle k \rangle + f$. Коэффициент Пуассона $\nu = \text{const}$.

Предположим, что масштаб неоднородности мал по сравнению с характерным масштабом пластинки что позволяет использовать интегрирование в бесконечных пределах при нахождении уравнений для основного среднего состояния и соответствующий тензор Грина. Символом $\langle \rangle$ будем обозначать математическое ожидание, штрихом – случайные флуктуации функций:

$$\begin{aligned} f &= \langle f \rangle + f' = 1 + f; \quad \sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sigma'_{ij}, \\ e_{ij} &= \langle e_{ij} \rangle + e'_{ij}; \quad u_i = \langle u_i \rangle + u'_i \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

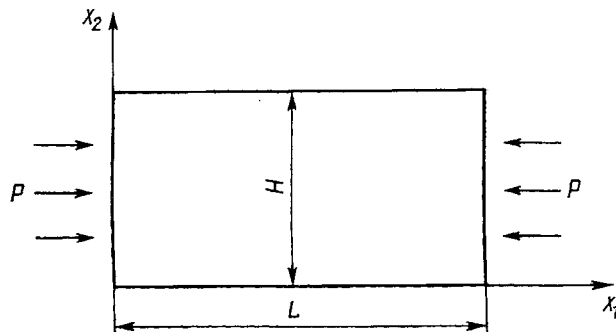


Рис. 1

Представим все компоненты напряженного и деформированного состояния в виде суммы $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(x_k, t) + \sigma_{ij}^+$, где индекс "0" приписан компонентам основного состояния, а "+" – компонентам возмущенного состояния, причем $\langle \sigma_{ij}(x_k, t) \rangle = \sigma_{ij}^0(x_k, t)$. Об устойчивости состояния будем судить по линеаризованной системе уравнений, которую получаем, считая компоненты возмущения малыми.

Напряженное состояние пластинки до потери устойчивости определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11}^0 \rangle &= -P, \quad \langle \sigma_{22}^0 \rangle = \langle \sigma_{12}^0 \rangle = 0, \\ \langle \sigma_{11}^{p_0} \rangle &= \langle \sigma_{22}^{p_0} \rangle = \frac{\langle k \rangle \sqrt{2} - P}{2 \langle c \rangle}; \quad \langle \sigma_{12}^{p_0} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения равновесия возмущенного состояния при малых докритических деформациях и малых послекритических углах поворота представим в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} + \alpha) \nabla^2 u_1^+ + (\alpha_{12} + \alpha) \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1^2} - \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_2^2} &= 0, \\ (\alpha_{11} + \alpha) \nabla^2 u_2^+ + (\alpha_{12} + \alpha) \frac{\partial^2 u_1^+}{\partial x_1 \partial x_2} - \alpha_{11} \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x_2^2} - (\alpha_{11} + P) \frac{\partial^2 u_2^+}{\partial x_1^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ∇^2 – оператор Лапласа, коэффициенты α_{11} , α , α_{12} следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{2 \langle G \rangle (1 - \nu)}{q} \left\{ \frac{a \langle k^3 \rangle}{2} + 4 \langle G^2 \rangle P^2 + \langle f^{12} \rangle \left[\left(\frac{a}{4 \langle G \rangle \langle c \rangle} - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{P(1 - \nu)}{4 \langle G^2 \rangle} \right) \left(\frac{\langle k^2 \rangle \langle c \rangle P}{2} + \frac{3P \langle c^2 \rangle \langle k^2 \rangle}{16 \langle G \rangle} - \frac{b \langle c \rangle \langle k^2 \rangle}{2} - \frac{\langle k^3 \rangle \langle c \rangle}{2\sqrt{2}} \right) - \right. \\ &\left. \left. - 4(1 - \nu) \langle G^2 \rangle P^2 + \frac{\langle c \rangle \langle k^2 \rangle}{8} \left(\frac{b}{\langle c \rangle} - \frac{\nu P}{\langle G \rangle} \right) (2\sqrt{2} \langle k \rangle - \langle c \rangle) \right] \right\}, \\ \alpha_{12} &= \frac{2 \langle G \rangle \nu}{q} \left\{ 4 \langle G^2 \rangle P^2 + \frac{a \langle k^3 \rangle}{2} - \langle f^{12} \rangle \left(\frac{\langle k^2 \rangle \langle c^2 \rangle}{8} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \left[\left(\frac{\nu P}{\langle G \rangle} \right)^2 + \left(\frac{b}{\langle G \rangle} \right)^2 + \frac{Pb}{\langle G \rangle \langle c \rangle} + \frac{P^2}{\langle G^2 \rangle} \right] + 4\nu \langle G^2 \rangle P^2 \right) \right\}, \\ q &= (1 - 2\nu) \left\{ 4 \langle G^2 \rangle P^2 + \langle k^4 \rangle + \langle f^{12} \rangle \frac{\langle c^2 \rangle \langle k^2 \rangle}{2} \left(\frac{b}{\langle c \rangle} - \frac{P}{2 \langle G \rangle} \right)^2 \right\}, \\ \alpha &= 2 \langle G \rangle (1 + 3 \langle f^{12} \rangle), \\ a &= \sqrt{2} P - \langle k \rangle, \quad b = \sqrt{2} \langle k \rangle - P, \\ \alpha_{11} &= \alpha_{22}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}. \end{aligned}$$

Аналогично [1, 6], если докритическое среднее напряженно-деформированное состояние – однородное, уравнения (3) можно привести к системе уравнений в амплитудных величинах перемещений

$$R_{ij} u_j^+ = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (4)$$

где дифференциальные операторы имеют вид

$$R_{11} = \left(\alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right); \quad R_{22} = \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (\alpha - P) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right],$$

$$R_{12} = R_{21} = (\alpha_{12} + \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5)$$

В дальнейшем, используя методику, развитую в [1], получаем алгебраическое уравнение для определения критической нагрузки из двухкомпонентного материала с объемными концентрациями и характеристиками соответственно $\delta_1, k_1, G_1, c_1, f_1$ и $\delta_2, k_2, G_2, c_2, f_2$. На основе корреляционной теории [7] связь между концентрациями и характеристическими функциями, а также выражения для модулей среды определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 &= 1, \quad \delta_1 + \delta_2 = 1, \\ \langle c \rangle &= c_1 + \delta_1(c_2 - c_1), \quad \langle G \rangle = G_1 + \delta_2(G_2 - G_1), \\ \langle k \rangle &= k_1 + \delta_2(k_2 - k_1), \quad \langle f^{12} \rangle = \delta_2(1 - \delta_2)(f_2 - f_1)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Опуская промежуточные выкладки, записываем значение критической нагрузки в виде

$$P^* = 1 - \frac{2\psi}{15B_1B_2} (B_4 - B_2B_3). \quad (7)$$

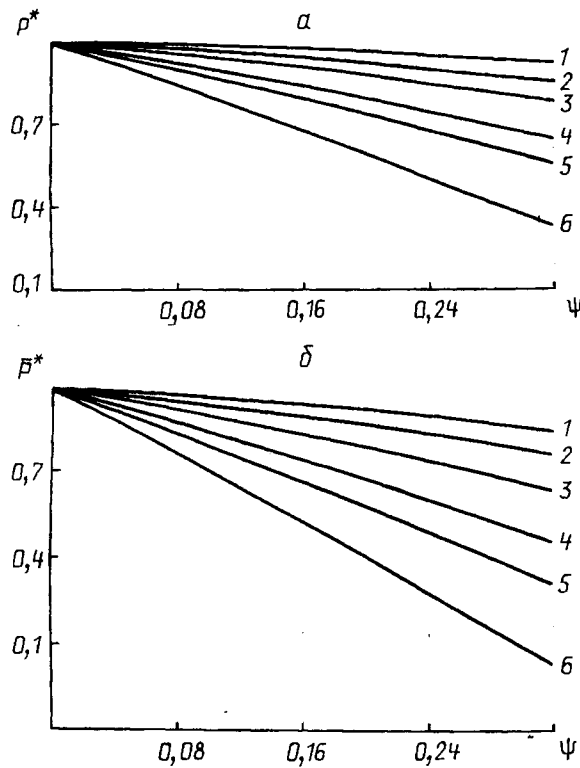


Рис. 2. Зависимости критической нагрузки от геометрических размеров пластинки, вычисленных по теории малых докритических деформаций и углов поворота (а) и по теории малых деформаций (б): 1, 2 - однородное состояние $\langle f^{12} \rangle = 0$; 3, 4 - 0,1; 5, 6 - $\langle f^{12} \rangle = 0,8$; 1, 2, 3 - $K_0 = 0,2$; 2, 4, 6 - $K_0 = 0,01$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_1 &= k_0(\sqrt{2} + k_0) + \langle f^{12} \rangle k_0(k_0\sqrt{2} - 1)\Delta; \quad B_2 = k_0(\sqrt{2} - k_0) + \\
 &+ \langle f^{12} \rangle (k_0^2 - 2k_0\sqrt{2} + 1)\Delta; \quad B_3 = 2(1 + 3 \langle f^{12} \rangle); \\
 B_4 &= 3(B_1^2 - B_2^2); \quad \Delta = [k_0^2 + \langle f^{12} \rangle (k_0^2 - k_0^2\sqrt{2} + 0,5)]^{-1}; \\
 k_0 &= \langle k \rangle G^{-1}; \quad c_0 = \langle c \rangle G^{-1}; \quad \eta_0 = \langle \eta \rangle G^{-1}; \quad \psi = \frac{\Pi H}{2L}; \\
 P^* &= 9PB_1(\psi^2 B_4 \langle G \rangle)^{-1}; \quad \eta_0 = 0; \quad c_0 = 1; \quad (\psi \ll 1).
 \end{aligned}$$

Для теории малых докритических деформаций критическая нагрузка при плоском деформировании пластинки из двухкомпонентного материала определяется выражением

$$P^{**} = \left[1 - \frac{2\psi^2}{15B_1B_3} (B_4 - B_2B_3 + 2,5B_1B_3) \right]. \quad (8)$$

На рис. 2, а, б кривые 1, 2 соответствуют однородному напряженному и деформированному состоянию. Кривые 3, 4 — значения безразмерной дисперсии $\langle f^{12} \rangle = 0,1$, а 5, 6 — $\langle f^{12} \rangle = 0,8$. Кривые 1, 3, 5 получены при $k_0 = 0,2$, а 2, 4, 6 — при $k_0 = 0,01$. Коэффициент Пуассона ν был принят равным 0,3.

Отметим, что разница между значениями критических сил, вычисленных по теории малых деформаций и углов поворота и теории малых деформаций, соответствующих однородному напряженному состоянию, незначительна. При учете случайной неоднородности среды разница между критическими значениями зависит от выбранных геометрических размеров пластинки, от среднего предела текучести и от значений безразмерной дисперсии.

Summary

The rectangular plate research on stability, when don't act the chance loading. In case two components material, the critical loading depend from structure of material.

Литература

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, 1971.
2. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., 1971.
3. Ломакин В. А. Статические задачи механики твердых деформируемых тел. М., 1970.
4. Болотин В. В., Москаленко В. Н. //Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1966. № 1. С. 66–73.
5. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., 1971.
6. Спорыхин А. Н., Чигарев Ю. В. //Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 3. С. 24–33.
7. Хорошун Л. П. // Прикл. механика. 1967. Т. 3, № 9. С. 12–19.

Белорусский аграрный технический
университет

Поступила в редакцию
11.04.96