же роль по отношению к системам с малым ростом решений, что и показатели Боля по отношению к экспоненциально дихотомическим системам.

Литература

1. Макаров Е.К. *Об оценках Малкина для нормы матрицы Коши линейной дифференциальной системы* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 328–334.

2. Макаров Е.К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 3. С. 393–399.

3. Барабанов Е.А., Бекряева Е.Б. *О вычислении показателей малого роста линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 11. С. 1510–1511.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ СТЕПЕННО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н.С. Нипарко

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

nad-den@mail.ru

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит тому или иному классу возмущений, которые будут указаны ниже. В соответствии с принятыми обозначениями $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ — показатели Ляпунова системы (2).

Рассмотрим следующие три класса возмущений — классы Z_0^n, Exp_0^n и Deg_0^n, состоящие из кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(\cdot)$, удовлетворяющих соответственно условиям: $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ (класс Z_0^n), $\|Q(t)\| \leqslant c_Q \exp(-\sigma_Q t)$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Exp_0^n) и $\|Q(t)\| \leqslant c_Q t^{-r_Q}$ при всех $t \geqslant 0$ (класс Deg_0^n), где c_Q, σ_Q и r_Q — положительные постоянные (свои для каждой матрицы $Q(\cdot)$). Класс Z_0^n называется классом убывающих к нулю возмущений, а классы Exp_0^n и Deg_0^n — классами соответственно экспоненциально и степенно убывающих к нулю возмущений. Очевидны собственные включения $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Z}_0^n$ — какое-либо подмножество класса Z_0^n. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми при возмущениях из класса $\mathfrak{M}$, если $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и любой матрицы $Q(\cdot) \in \mathfrak{M}$. То, что показатели Ляпунова систем (1) могут быть неустойчивыми даже при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов, установлено еще О. Перроном [1]. К настоящему времени необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова системы (1) получены только для классов Z_0^n [2, 3] и Exp_0^n [4] возмущений.

В работе [5] получено необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n. В его формулировке, которую мы не приводими, существенную роль играет понятие степенной интегральной разделенности [5], состоящее в следующем: системы (1) с матрицами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ называются степенно интегрально разделенными, если для их матриц Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ и $X_B(\cdot,\cdot)$ выполнено условие: для любого положительного ε найдется такое $T_\varepsilon \geqslant 0$, что

$$\|X_A^{-1}(t,\tau)\|^{-1} \geqslant t^{-\varepsilon}\|X_B(t,\tau)\|$$

для всех $t \geqslant \tau \geqslant T_\varepsilon$. В этом случае будем говорить, что система A степенно интегрально больше системы B.

Так как необходимое условие [5] устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n получено по той же схеме, что и необходимые условия устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из классов Z_0^n и Exp_0^n, а для последних эти условия оказываются и достаточными, то поскольку класс Deg_0^n является промежуточным между этими классами: $\mathrm{Exp}_0^n \subset \mathrm{Deg}_0^n \subset \mathrm{Z}_0^n$, — представляется вполне правдоподобным, что сформулированное необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n должно быть и достаточным. Оказывается, это не так.

Теорема. *Для любого натурального $n \geqslant 2$, каждого $q \in \{2,\ldots,n\}$, произвольного набора $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ вещественных чисел и любого набора $n_1, n_2, \ldots, n_q$ натуральных чисел, удовлетворяющего равенству*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n,$$

существуют линейные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad t \geqslant 0,$$

где $i = 1,\ldots,q$, такие, что система A_i имеет один-единственный показатель Ляпунова Λ_i, устойчивый при возмущениях из класса $\mathrm{Deg}_0^{n_i}$ $(i = 1,\ldots,q)$, и для каждого $k = 1,\ldots,q-1$ система A_{k+1} степенно интегрально больше системы A_k, а показатели Ляпунова блочно-диагональной системы

$$\dot{x} = \mathrm{diag}[A_1(t),\ldots,A_q(t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

неустойчивы при возмущениях из класса Deg_0^n.

Результаты доклада опубликованы в статье [6].

Литература

1. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31. H. 5. S. 748–766.

2. Миллионщиков В. М. *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.

3. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. *Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1794–1803.

4. Барабанов Е. А., Денисенко (Нипарко) Н. С. *Необходимое и достаточное условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 165–175.

5. Нипарко Н. С. *Необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при степенно убывающих возмущениях* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16, № 2. С. 105–117.

6. Барабанов Е. А., Нипарко Н. С. *Неустойчивость показателей Ляпунова степенно интегрально разделенной линейной дифференциальной системы при степенно убывающих возмущениях* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 25–31.