ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Н. С. Нипарко (Минск, Беларусь)

Следующая задача, возникшая в теории управления показателями Ляпунова линейных дифференциальных систем, поставлена проф. Е. Л. Тонковым. Пусть про систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и равномерно ограниченными на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ коэффициентами и $n = 2$ известно только следующее: ее матрица Коши $X_A(\cdot,\cdot)$ такова, что при некотором $T > 0$ и любом $k \in \mathbb{N}$ верно равенство $X_A(kT,(k-1)T) = \begin{pmatrix} a & c_k \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где вещественные постоянные a и b одни и те же для всех $k \in \mathbb{N}$, а вещественнозначная последовательность $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена, т. е. $\sup_{k\in\mathbb{N}} |c_k| = c < \infty$. Верно ли, что показатели Ляпунова такой системы (1) устойчивы при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов? В докладе дается утвердительный ответ на этот вопрос, а сама постановка задачи несущественно обобщается.

Отметим вначале одно важное для дальнейшего упрощение: в постановке задачи можно, не нарушая общности рассуждений, считать, что $a > 0$ и $b > 0$. Для формулировки теоремы нам понадобится понятие интегральной вполне разделенности конечного семейства функций [1, с. 539]. Две вещественнозначные кусочно-непрерывные функции $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$, определенные на $[0,\infty)$, называются интегрально разделенными [1, с. 537 — 538], если существуют такие положительные постоянные d и D, что $\int_s^t (p(\tau) - q(\tau))\,\mathrm{d}\tau > d(t-s) - D$ при всех $t \geqslant s \geqslant 0$, и интегрально близкими [1, с. 537 – 538], если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая зависящая, вообще говоря, от ε постоянная D_ε, что $\left|\int_s^t (p(\tau) - q(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right| < \varepsilon|t-s| + D_\varepsilon$ при всех неотрицательных t и s. Две функции называются сравнимыми, если они либо интегрально разделены, либо интегрально близки, а семейство $\{a_1(\cdot),\ldots,a_n(\cdot)\}$ вещественнозначных функций, определенных на $[0,\infty)$, называется [1, с. 539] интегрально вполне разделенным, если любые две его функции сравнимы.

Напомним также, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ системы (1) называются устойчивыми при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что, какова бы ни была кусочно-непрерывная на $[0,\infty)$ $n\times n$-матрица $Q(\cdot)$, удовлетворяющая при всех $t \geqslant 0$ оценке $\|Q(t)\| < \delta$, для показателей Ляпунова $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ возмущенной системы $\dot{x} = (A(t)+Q(t))x$ справедливы неравенства $|\lambda_i(A+Q) - \lambda_i(A)| < \varepsilon$, $i = 1,\ldots,n$.

Ниже для матрицы $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ символом $\operatorname{diag} M$ обозначается ее главная диагональ, т. е. упорядоченный набор $(m_{11},\ldots,m_{nn})$.

Теорема. *Пусть при некотором* $T > 0$ *и каждом* $k \in \mathbb{N}$ *матрица Коши системы* (1) $X_A(kT,(k-1)T) = X_k$, *где* X_k *— верхнетреугольная матрица, диагональ которой* $\operatorname{diag} X_k = (a_1^k,\ldots,a_n^k)$ *состоит из положительных чисел. Если функции* $b_i(\cdot) : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots$ $\ldots, n$, *задаваемые равенствами* $b_i(t) \equiv \ln a_i^k$ *при* $t \in [(k-1)T, kT)$, $k \in \mathbb{N}$, *таковы, что семейство* $\{b_1(\cdot),\ldots,b_n(\cdot)\}$ *интегрально вполне разделено, то показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов.*

Доказательство теоремы опубликовано в статье [2].

Литература. 1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. **2.** Нипарко Н.С. // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 54, №1. С. 39–43.

МАКСИМАЛЬНОЕ НИЖНЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА

А. С. Платонов (Могилев, Беларусь), А. В. Филипцов (Минск, Беларусь)

Рассмотрим линейную систему Пфаффа

$$\partial x/\partial t_i = A_i(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in {\mathbb{R}_+}^m, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (1_n)$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на множестве ${\mathbb{R}_+}^m$ пространства $\mathbb{R}^m$ матрицами коэффициентов $A_i(t)$, удовлетворяющими в ней условию полной интегрируемости [1]. Пусть $p[x]$ — нижний характеристический вектор [2] нетривиального решения $x : {\mathbb{R}_+}^m \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ системы (1_n), определяемый условиями $l_x(p[x]) \equiv \equiv \varliminf\limits_{t\to\infty} (\ln\|x(t)\| - (p[x], t))/\|t\| = 0$ и $l_x(p[x] + \varepsilon e_i) < 0$ $\forall \varepsilon > 0$, $i = \overline{1,m}$, где e_i — орт, а объединение нижних характеристических векторов такого решения $P_x = \cup p[x]$ — нижнее характеристическое множество [2] этого решения, объединение нижних характеристических множеств всех нетривиальных решений системы (1_n) $P(A) = \cup P_x$ — нижнее характеристическое множество [2] этой системы.

В [3] показано, что показатель Перрона матрицы фундаментальной системы решений $X(t)$ линейной системы $\dot{x} = A(t)x$ совпадает с максимальным показателем Перрона этой системы. Доказана справедливость аналогичного утверждения для нижнего характеристического множества линейной системы Пфаффа (1_n).

Множество $D \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *ограниченным сверху* [4], если существует такое $r \in \mathbb{R}^m$, что $d \leqslant r$ для всех $d \in D$ $(d \leqslant r \;\Leftrightarrow\; d_i \leqslant r_i, \; i = \overline{1,m})$. Множество $\sup D \subset \mathbb{R}^m$, являющееся пересечением множеств $S \subset \overline{D}$, таких, что для всякого $d \in \overline{D}$ существует $s \in S$, $s \geqslant d$, будем называть *точной верхней границей* [4] ограниченного сверху множества $D \subset \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим множество L_k решений линейной системы Пфаффа (1_n), начинающихся при $t = t^{(0)}$ на произвольном подпространстве $\Pi_k = \mathbb{R}^k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, пространства $\mathbb{R}^n$.

Точную верхнюю границу всего множества нижних характеристических векторов решений системы (1_n), принадлежащих множеству L_k, будем называть *максимальным нижним характеристическим множеством* этих решений и обозначать символом $P_k = \sup \bigcup_{x_0 \in \Pi_k} P_{x(\cdot, x_0)}$. Очевидно, что при $k = n$ будем иметь $P_n = \sup P(A)$.

Пусть $X(t) = \left[x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)\right]$ – $n \times k$ матрица, составленная из линейно независимых столбцов-решений, служащих базисом в рассматриваемом множестве решений L_k.

Теорема. *Максимальное нижнее характеристическое множество P_k решений линейной системы Пфаффа (1_n), принадлежащих множеству L_k, совпадает с нижним характеристическим множеством P_X матрицы $X(t)$.*

В случае $k = n$ непосредственно из теоремы вытекает

Следствие. *Нижнее характеристическое множество матрицы фундаментальной системы решений $X(t)$ линейной системы Пфаффа (1_n) совпадает с максимальным нижним характеристическим множеством $\sup P(A)$ этой системы.*