О НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С НЕНУЛЕВЫМ СРЕДНИМ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. К. Деменчук (Минск, Беларусь)

Будем рассматривать систему

$$\dot{x} = (A + \varepsilon B(t))x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где A — постоянная $(n \times n)$-матрица; $B(t)$ — ω-периодическая $n \times n$-матрица; ε — достаточно малый по абсолютной величине вещественный параметр.

Пусть

$$\hat{B} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\omega} \int_0^t B(\tau)\, d\tau.$$

Вопросы существования ω-периодических решений и устойчивости системы (1) изучались в работах [1, 2] и др. Следует отметить, что системы такого вида встречаются в приложениях, когда объект, описываемый линейной стационарной системой, подвергается малым периодическим возмущениям.

Вместе с тем, как следует из [3], при определенных условиях данная система может допускать периодические режимы, период которых несоизмерим с ω, т.е. нерегулярные решения. В [4] исследовались такие решения при $\hat{B} = 0$. При этом частоты нерегулярного решения не зависят от возмущений.

В настоящем сообщении выясняются вопросы существования и устойчивости нерегулярных периодических решений системы (1) с ненулевым средним значением матрицы возмущений $\hat{B} \neq 0$. Для решения этой задачи согласно [3] реализуется редукция системы (1) к системе меньшей размерности. Предполагается, что коэффициенты редуцированной системы — нормальные попарно коммутирующие матрицы, что обеспечивает ее диагонализируемость. Получены достаточные условия, при выполнении которых для почти всех значений параметра из достаточно малой окрестности нуля система (1) имеет семейство нерегулярных устойчивых периодических решений.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры” при поддержке Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований, проект № Ф05-081.

Литература

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1964.

2. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М., 1966.

3. *Demenchuk A.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems // *Mathematica Bohemica*. V. **126**, (1) (2001) P. 221–228.

4. *Деменчук А.К.* Об устойчивости некоторых классов решений линейных дифференциальных систем с малыми периодическими возмущениями // *Дифференц. уравнения*. Т. **32**, (3) (1996) С. 307–310.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ, УБЫВАЮЩИХ НЕ МЕДЛЕННЕЕ СТЕПЕННЫХ

Н. С. Денисенко (Минск, Беларусь)

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси матрицей коэффициентов $A(t)$. Пусть $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ — ее характеристические показатели Ляпунова. Через S_0 обозначим класс всех кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(t)$, $t \geq 0$, убывающих на бесконечности не медленнее степенных функций, т.е. для любой $Q \in S_0$ найдется такое $q > 0$, что $\|Q(t)\| \leq \mathrm{const}/t^q$ при всех $t \geq 0$. Наряду с исходной системой (1) рассмотрим также возмущенную систему

$$\dot{y} = [A(t) + Q(t)]y, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где $Q \in S_0$. Пусть $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$ — ее характеристические показатели Ляпунова. Показатели Ляпунова системы (1) называются степенно устойчивыми, если $\lambda_k(A) = \lambda_k(A+Q)$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и любой $Q \in S_0$.

Пусть $\Lambda_1(A) < \ldots < \Lambda_p(A)$ — характеристические показатели системы (1) с учетом их кратности $n_1, \ldots, n_p$ соответственно.

Теорема. Показатели Ляпунова системы (1) степенно устойчивы тогда и только тогда, когда существует обобщенное преобразование Ляпунова $x = L(t)z$, удовлетворяющее условию $\varliminf\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln\|L(t)\|}{\ln t} \geq 0$ и приводящее систему (1) к блочно-треугольному виду $\dot{z} = \mathrm{diag}[A_1, \ldots, A_p]z$, где $A_i(t)$ — верхнетреугольные $(n_i \times n_i)$-матрицы с ограниченными коэффициентами, причем:

а) для каждой системы $\dot{z}_i = A_i(t)z_i$ $(i = 1,\dots,p)$ ее старший $\Gamma_0(A_i)$ и младший $\gamma_0(A_i)$ степенные показатели совпадают;

б) для любых $a_i \in \operatorname{diag} A_k(t)$ и $a_j \in \operatorname{diag} A_{k+1}(t)$ $(k = 1,\dots,p-1)$ выполнено условие: для любого $q > 0$ существует постоянная $T_q > 0$, такая, что при всех $t \geq s \geq T_q$ справедливо неравенство $\int_s^t [a_j(\tau) - a_i(\tau)]\,d\tau \geq$ $\geq -q(\ln t - \ln s)$.

УСЛОВИЯ МОНОДРОМНОСТИ ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Л. В. Детченя (Гродно, Беларусь)

Для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^7(r + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 + r_5x^5 + r_6x^6) + x^4y(p^2 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4 + q_5x^5 + q_6x^6) + \\ &\quad + x^2y^2(2p + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5 + p_6x^6) + y^3, \qquad (1)\\ \dot{y} &= -cx^9 - x^6y(b + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6) - x^3y^2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6)\end{aligned}$$

дадим качественную характеристику в окрестности начала координат. Исследование проведем методом Фроммера [1].

Положим $D = b^2 - 12cp^2 + 6br + 9r^2$, $B_k = a_{k+1}p - 2p^2p_{k+1} + 2pq_{k+1} - 2r_k$, $R_k = pq_{k+1} - p^2p_{k+1}$, $k = \overline{0,5}$, где считаем: $B_0 = B$, $R_0 = R$, $r_0 = r$.

При $D < 0$ справедлива

Теорема. Начало координат системы (1) является монодромной особой точкой [2] в случае выполнения одной из следующих 11 серий условий:

1) $b - B < 0$;

2) $r = R$, $b = a_1p$, $(-a_1p + 4p^2p_1 - 2pq_1)^2 - 8p^2(c - b_1p + a_2p^2 - 2p^3p_2 + 2p^2q_2 - 2pr_1) < 0$;

3) $r = R$, $b = a_1p$, $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$, $r_1 = R_1$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 - B_2 < 0$;

4) $r = R$, $b = a_1p$, $r_1 = R_1$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = B_2$, $(b_1 - 2a_2p + 4p^2p_2 - 2pq_2)^2 + 8p^3(b_3 - B_3) < 0$, при $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$ или $a_1 = 0$;

5) $r = R$, $b = a_1p$, $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2$, $b_1 = 2(a_2p - p^2p_2 + r_1)$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = a_3p$, $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$, $b_3 = B_3$, $b_4 - B_4 < 0$;

6) $r = R$, $b = a_1p$, $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2$, $b_1 = 2(a_2p - p^2p_2 + r_1)$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = a_3p$, $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$, $b_3 = B_3$, $b_4 = B_4$, $a_2 = 4pp_2 - 2q_2$, $(a_3p - 4pp_3 + 2q_3)^2 + 8p(b_5 - B_5) < 0$;

7) $r = R$, $b = a_1p$, $r_1 = R_1$, $r_2 = R_2$, $b_1 = 2(a_2p - p^2p_2 + r_1)$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = a_3p$, $b_3 = B_3$, $b_4 = B_4$, $b_5 = B_5$, $b_6 + 2r_6 < 0$ при $a_k = 4pp_k - 2q_k$, $k = \overline{1,3}$, или $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 4pp_3 - 2q_3$, или $a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

8) $r = \frac{1}{2}(-b + a_1p - 2p^2p_1 + 2pq_1)$, $(b + a_1p - 8p^2p_1 + 4pq_1)^2 - 16p^2(2c - 2b_1p + 2a_2p^2 - 4p^3p_2 + 4p^2q_2 - 4pr_1) < 0$;

9) $r = \frac{1}{2}(-b + a_1p - 2p^2p_1 + 2pq_1)$, $b = -a_1p + 8p^2p_1 - 4pq_1$, $c = p(b_1 - B_1 - r_1)$, $b_2 = B_2$, $b_3 = B_3$, $b_4 = B_4$, $b_5 = B_5$, $b_6 + 2r_6 < 0$;

10) $r = R$, $b = a_1p$, $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$, $r_1 = R_1$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = B_2$, $b_3 = B_3$, $b_1 = 2(a_2p - 2p^2p_2 + pq_2)$, $(a_3p - 7p^2p_3 + 5pq_3 - 3r_2)^2 + 8p^3(b_5 - B_5) < 0$;

11) $r = R$, $b = a_1p$, $a_1 = 4pp_1 - 2q_1$, $r_1 = R_1$, $c = p(b_1 - a_2p)$, $b_2 = B_2$, $b_3 = B_3$, $b_1 = 2(a_2p - 2p^2p_2 + pq_2)$, $a_3 = (7p^2p_3 - 5pq_3 + 3r_2)/p$, $b_5 = B_5$, $b_6 + 2r_6 < 0$.

Литература

1. *Андреев А.Ф.* Вестник ЛГУ, серия Математика. Механика. 1962. № 1. С. 5–21.

2. *Садовский А.П.* Условия возникновения проблемы центра и фокуса для A_3-системы // *Дифференц. уравнения.* 1990. Т. 26. № 10. С. 1743–1753.

FUNCTIONS OF ω-BOUNDED TYPE

A. M. Jerbashian (Yerevan, Armenia)

After highlighting the historical background of considered problems, the survey gives the recently established basic statements of the general theory of functions of ω-bounded type in the upper half-plane. The starting point is the canonical representation of some Banach spaces $A^p_{\omega,\gamma}$ of holomorphic functions. For $p = 2$ (i.e. in the case of Hilbert spaces) there is a theorem on the orthogonal projection from the corresponding L^2_ω to A^2_ω, a Paley-Wiener type theorem and a theorem on a natural isometry between A^2_ω and the Hardy space H^2, which is an integral operator along with its inversion. A theorem on projection from $L^p_{\omega,\gamma}$ to $A^p_{\omega,\gamma}$ is given and it is proved that $(A^p_{\omega,\gamma})^* = A^q_{\omega,\gamma}$ $(1/p + 1/q = 1)$ under several conditions on ω. Then the canonical representations of Nevanlinna–Djrbashian type classes of δ-subharmonic functions are given. The functions from the considered spaces and classes can have arbitrary growth near the finite points of the real axis. The most recent results are still unpublished.