

## Библиографический список

1. Зимняков Д.А., Тучин В.В., Оптическая томография тканей // Квантовая электроника, 32(10). 2002. С. 849-867.
2. Vouha B., Tearney E. Handbook of Optical Coherence Tomography. Marcel Dekker Inc., 2002. 756 p.
3. Проскурин С.Г., Потлов А.Ю., Галев К.И.С., Абдулкарим С.Н., Построение структурного изображения биообъекта с использованием растрового усреднения в оптической когерентной томографии // Известия ЮФУ, Технические науки. №9. 2012. С.129-134.
4. Проскурин С.Г., Растровое сканирование и усреднение для уменьшения влияния спеклов в оптической когерентной томографии // Квантовая электроника. 42(6). 2012. С.495-499.
5. Проскурин С.Г., Фролов С.В., Визуализация кровеносных сосудов при помощи оптической когерентной томографии // Медицинская техника. №3. 2012. С.9-14.
6. Goodman J.W. Speckle Phenomena in Optics // Theory and Applications. Roberts and Co., 2007. 387 p.

УДК 530.12

## РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ СРЕДЫ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

А.П. Рябушко\*, И.Т. Неманова\*\*, Т.А. Жур\*\*

\*Белорусский национальный технический университет, Беларусь, Минск,  
(Тел. (37517)2675127 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru).

\*\*Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск,  
(Тел. (37517)2638122 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru).

*Аннотация:* Представлены результаты исследований белорусской школы по проблеме движения тел. Обосновано, что Pioneer anomaly является реликтовым ускорением пробного тела в Солнечной системе. Показано, что при учете гравитационного поля среды треугольного лагранжевого решения в ограниченной задаче трех тел не существует. Оно существует только в симметричном случае, когда массы тяжелых тел равны. Рассмотрена ограниченная задача трех тел в случае одной звезды при учете светового давления. Изучена степень влияния светового давления на форму орбиты движения.

*Abstract:* Presented the results of Belarusian school's research of the body motion problem. It has been shown, that with allowance of the gravity field of the gaseous dust medium the lagrangian triangular solution in the restricted three-body problem does not exist. It exists only in the symmetric case, when masses of heavy bodies are equal. Considered the restricted three-body problem in case of one star with allowance for light pressure. Studied the influence degree of light pressure on the shape of the orbital motion.

*Ключевые слова:* общая теория относительности, постньютоновское приближение, проблема Pioneer Anomaly, смещение перигелиев, пробное тело, гравитационное поле, точка либрации, точка фотолибрации.

*Keywords:* general theory of relativity, post-Newtonian approximation, Pioneer Anomaly problem, perihelion shift, test body, gravity field, libration point, photolibration point.

В связи с тем, что межпланетная среда (реликтовая материя) Солнечной системы – газопылевые облака, кометы, пояса астероидов и т.д. создает заметное дополнительное гравитационное поле, белорусская школа по проблеме движения тел сформулировала и решила ряд задач по движению тел при учете гравитационного поля среды в постньютоновском приближении общей теории относительности.

Согласно астрономическим данным последних лет распределение плотности среды  $\rho$  в Солнечной системе в первом приближении можно считать сферически симметричным и хорошо описываемым трехзвенной или четырехзвенной моделью [1], [2]. В этом случае в постньютоновском приближении общей теории относительности проинтегрированы уравнения Эйнштейна и уравнения геодезических линий, что позволило получить ряд интересных результатов, из которых отметим четыре.

1. Обратное смещение перигелиев орбит у внешних планет Солнечной системы в соответствии с найденным с точностью до вековых членов уравнением их орбит в полярных координатах  $r, \varphi$  (четырёхзвенная модель,  $k = \overline{1,4}$ ):

$$u = 1/r = \left\{ 1 + e \cos \left[ \left( 1 + \alpha_k^H - \alpha_0 + \alpha_\rho \right) \varphi \right] \right\} / p, \quad (1)$$

где  $p$  и  $e$  – параметр и эксцентриситет вращающегося эллипса;  $\alpha_k^H = p^3 b_k / m$ ,  $m$  – масса планеты,  $b_k$  – функция плотности среды в соответствующей зоне;  $\alpha_0 = 3\gamma m / c^2 p$  – релятивистская поправка, приводящая к знаменитому прямому смещению перигелия Меркурия;  $\alpha_\rho$  – релятивистская поправка к смещению перигелия за счет учета гравитационного поля среды, которая на несколько порядков меньше  $\alpha_k^H$  и  $\alpha_0$ , и ею можно пренебречь.

Численные оценки в Солнечной системе показывают, что в (1) для внутренних планет Солнечной системы  $\alpha_k^H - \alpha_0 + \alpha_\rho < 0$ , т.е. смещение перигелиев прямое (как у Меркурия), а для внешних планет Солнечной системы  $\alpha_k^H - \alpha_0 + \alpha_\rho > 0$ , т.е. смещение перигелиев должно быть обратным.

2. Решена проблема Pioneer Anomaly. На основе экспериментальных данных, полученных в астрономии в основном за последние два десятилетия, построена модель распределения плотности материи Солнечной системы. Авторами выдвинута и обоснована гипотеза: постоянным источником Pioneer anomaly является реликтовое ускорение, порождаемое реликтовым гравитационным полем, создаваемым реликтовой межпланетной средой Солнечной системы, т.е. материей, оставшейся после образования Солнца и планет со спутниками. Основную роль при этом играет не гравитационное поле газопылевой составляющей среды, а гравитационное поле комет и астероидов, принадлежащих семейству Юпитера, поясу Эджеверса-Койпера, облакам Хиллса и Оорта, метеоритному веществу. Зарегистрированное космическими кораблями Pioneer 10 и Pioneer 11 на расстояниях (20-70)а.е. дополнительное ускорение  $a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8}$  см·с<sup>-2</sup> создается гравитационным полем реликтовой материи (см. [2], (17)), а существование  $a_p$  является экспериментальным подтверждением предложенной нами теории.

3. Исследована задача трех тел, движущихся в среде [3]. Траектория пробного тела в частном треугольном решении ограниченной задачи трех тел в присутствии газопылевой среды описывается выражением  $u(\varphi') = 1/r = u_0 + u_1 = 1/r_0 + u_1$ , где  $u_1$  выражается формулой

$$u_1 = B_3(B_2 \cos \varphi' + B_1 \sin \varphi') / (B_1^2 + B_2^2) - B_3 B_2, \quad (2)$$

где  $B_1, B_2, B_3$  постоянные величины (см. [3], (17), (18)). Вид функции  $u_1$  указывает на периодические синусоидальные изменения расстояния от центра масс системы двух массивных тел  $a$  и  $b$  до третьего пробного тела при том, что в отсутствии газопылевой среды указанное расстояние остается неизменным. Угол  $\varphi$ , составляемый радиус-вектором пробного тела с неподвижной осью  $Ox^1$  барицентрической системы отсчета,  $\varphi = \varphi' + \varphi_0$ . Для численной оценки полученного результата принимаем следующие порядки входящих в выражение (2) величин: плотность  $\rho$  порядка  $10^{-22}$  г·см<sup>-3</sup>, расстояния  $a_0, b_0, r_0$  – порядка  $10^{17}$  м (10 световых лет), массы тяжелых тел  $m_a, m_b$  – порядка  $10^{31}$  кг, скорости тел  $a, b, c$  – порядка  $10^4$  м/с. В этом случае порядок величины  $u_1$ , вычисляемой по формуле (2), определяется порядком отношения  $B_3 / B_2 = \alpha(b_0 - a_0 + r_0 \cos \varphi_0)(a_0 + b_0)^4 / (r_0^2 \cos \varphi_0)$ , равным  $10^{-21}$  м<sup>-1</sup>, т.е. можно считать, что  $u_1$  – величина указанного порядка. Тогда  $r_1$  будет иметь порядок  $10^{13}$  м. При многократном увеличении масс  $m_a$  и  $m_b$  тяготеющих тел этот результат не изменяется. Если для оценки результата выбрать расстояния от центра масс до тел  $a, b, c$ , и, сле-

довательно, расстояния между ними в 10 раз большие, то получим «добавку»  $u_1$  порядка  $10^{-18} \text{ м}^{-1}$ . В таком случае смещение пробного тела от точки Лагранжа, т.е. величина  $r_1$ , возрастет до величины порядка  $10^{18} \text{ м}$ .

Показано, что учет гравитационного поля среды разрушает треугольную лагранжеву конфигурацию.

Получен закон ухода пробного тела из треугольной лагранжевой точки либрации при учете гравитационного поля среды. Доказано [3], что помещенное с нулевой скоростью в треугольную лагранжеву точку либрации (в  $L_4$  или  $L_5$ ) пробное тело при учете гравитационного поля среды уходит из нее, т.е. лагранжевых точек равновесия не существует. Должны существовать другие точки равновесия, удаленные от  $L_4$ ,  $L_5$  на расстояния, зависящие от величины плотности среды  $\rho$ .

4. Рассмотрена ограниченная задача трех тел в случае одной звезды при учете светового давления. Изучена степень влияния светового давления на форму орбиты движения.

Получена система дифференциальных уравнений, которая точно проинтегрирована в случаях: а) треугольных точек фотолибрации; б) коллинеарных точек фотолибрации. Доказано, что существует бесконечное количество точек фотолибрации, которые во вращающейся системе координат заполняют две дуги окружности в случае треугольных решений и три отрезка в случае коллинеарных решений. Найдены уравнения, из которых определяются координаты точек фотолибрации.

#### Библиографический список

1. Рябушко А.П., Жур Т.А. Релятивистское движение тела в гравитационном поле разреженной среды с притягивающим центром // Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления : сб. научн. ст. 2-ой Междунар. науч.-практ. конф. Минск, 2007. В 2-х частях. Ч.1. С.95-102.
2. Ryabushko A.P., Zhur T.A., Nemanova I.T. Motion of bodies and its stability in the General Relativity Theory // American Institute of Physics. Melville, New York, 2010. Conference Proceedings, 1205. P.148-154.
3. Рябушко А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. Решение лагранжевой ограниченной треугольной задачи трех тел при учете гравитационного поля среды // Вести НАН Беларуси. Сер. ф.-мат. н., 2013. №3. С.107-112.

UDK 517.958

## NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUILIBRIUM OF AXISYMMETRIC SOFT SHELLS

I.B. Badriev\*, V.V. Banderov\*\*

\* Kazan Federal University, Russia, Kazan,  
(Tel. (8432)2337167 e-mail: ildar.badriev1@mail.ru).

\*\* Kazan Federal University, Russia, Kazan,  
(Tel. (8432)2337167 e-mail: ildar.badriev1@mail.ru).

*Аннотация:* Рассматривается осесимметричная задача об определении положения равновесия мягкой оболочки вращения. Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде вариационного неравенства с псевдомонотонным оператором в банаховом пространстве. Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод. Этот метод реализован численно. Результаты численных экспериментов подтвердили эффективность предложенного итерационного метода.

*Abstract:* We consider one axisymmetric problem of the equilibrium position of a soft rotation shell. Generalized statement of this problem is formulated in the form of variational inequality with a pseudo-monotone operator in Banach space. To solve this variational inequality, we suggest the iterative method. This method was realized numerically. The numerical experiments made for the model problems confirmed the efficiency of the iterative method.

*Ключевые слова:* Математическое моделирование, мягкая оболочка, положение равновесия, псевдомонотонный оператор, итерационный метод, численный эксперимент.

*Keywords:* Mathematical simulation, soft shell, equilibrium position, pseudo-monotone operator, iterative method, numerical experiment.

**Introduction.** We consider an axisymmetric problem of the equilibrium position of a soft rotation shell. The latter is formed by two interlacing families of threads. One family has a cir-