УДК 530.12

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ТОЧКИ ФОТОЛИБРАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

А.П. Рябушко*, Т.А. Жур, О.Л. Зубко* И.Т. Неманова****

**Белорусский национальный технический университет, Беларусь, Минск,*
Тел. (37517)2415127 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru
***Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск,*
Тел. (37517)3698122 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Аннотация: Представлены результаты исследований белорусской школы по проблеме релятивистского движения тел в фотогравитационных полях. В работе проводятся исследования по выяснению законов движения в ограниченной задаче трех тел и поиску релятивистских точек фотолибрации.

Ключевые слова: Общая теория относительности, пробное тело, фотогравитационное поле, точка фотолибрации.

RELATIVISTIC PHOTOLIBRATION POINTS IN CELESTIAL MECHANICS

A. P. Ryabushko*, T.A. Zhur**, O. L. Zubko*, I. T. Nemanova**
*Belarusian National Technical University, Belarus, Minsk,
Tel. (37517)2415127 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru
**Belarusian State Agrarian Technical University, Belarus, Minsk,
Tel. (37517)3698122 e-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Abstract: Presented the results of Belarusian school's research of the problem of the relativistic body motion in photogravitational fields. In this paper the research to identify the laws of motion in the restricted three-body problem and the search for relativistic photolibration points is being carried out.

Keywords: General theory of relativity, test body,photogravity field, photolibration point.

Введение. В связи с интенсивным освоением космоса возникает необходимость более точного прогнозирования положений малых тел и их движений в Солнечной системе (планет, астероидов, метеоритов, космических аппаратов и станций и т.д.). На тела в космосе, кроме сил тяготения, действуют многие другие факторы и силы: прямое световое давление, электромагнитные поля, эффекты специальной теории относительности (СТО), к которым относятся аберрация света, продольный и поперечный эффекты Доплера, увеличение массы движущегося тела, сокращение площади миделевого сечения тела, а также эффекты общей теории относительности (ОТО) такие, как смещение перигелия орбиты тела, кривизна пространства-времени, влияние гравитационного поля газопылевой составляющей планетарной системы.

Белорусской школой по проблеме релятивистского движения тел (см., например, монографии [1], [2] и диссертации [3], [4]) в последние годы начата разработка проблемы *релятивистского* движения тел в *фотогравитационных* полях, т.е. при учете светового давления (СД) и перечисленных выше факторов [5] - [9].

Релятивистская ограниченная задача движения двух сферически симметричных тел в фотогравитационной небесной механике решена (см. [7] и [9]): в постньютоновском приближении (ПНП) СТО и ОТО выведены и проинтегрированы уравнения движения пробного тела в фотогравитационном поле звезды. Доказано, что пробное тело, начавшее движение по эллипсу с фокусом в центре звезды, продолжает движение по спирали, приближающейся к звезде (спираль можно интерпретировать как уменьшающийся в размерах эллипс с фокусом в центре звезды, эксцентриситет которого уменьшается), до точки сепарации. Достигнув этой точки, тело начинает падать по радиусу на звезду. С орбиты Земли время падения пробных тел с часто встречающимися характеристиками составляет 5-10 тыс. лет.

Сейчас белорусской школой начаты исследования по выяснению законов движения в ограниченной задаче трех тел. Это теме посвящена настоящая работа.

1. Уравнения движения. Если воспользоваться результатами работ []-[], то можно вывести уравнения движения (УД) в ПНП СТО-ОТО для плоской ограниченной круговой релятивистской задачи трех тел $A_i(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ (A_1 - звезда, A_2 - темное тело, A_3 - пробное тело). Тела A_1, A_2 обращаются около своего центра тяжести по окружностям. Их движение не зависит от движения тела A_3, которое движется в фотогравитационном поле (создаваемом телами A_1 и A_2) и под действием упомянутых выше факторов и эффектов. Для пробного тела A_3 выведены следующие УД (см. [7]):

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_3}{dt^2} + \dfrac{\gamma m_1}{r_{13}^3}(x_3 - x_1) + \dfrac{\gamma m_2}{r_{23}^3}(x_3 - x_2) = \dfrac{\gamma m_{13}}{r_{13}^3}\left[(x_3 - x_1)\cos\delta + (y_3 - y_1)\sin\delta\right], \\ \dfrac{d^2y_3}{dt^2} + \dfrac{\gamma m_1}{r_{13}^3}(y_3 - y_1) + \dfrac{\gamma m_2}{r_{23}^3}(y_3 - y_2) = \dfrac{\gamma m_{13}}{r_{13}^3}\left[(y_3 - y_1)\cos\delta + (x_3 - x_1)\sin\delta\right]. \end{cases} \tag{1}$$

Смысл входящих в систему (1) величин следующий: t - время; m_1 и m_2 - массы покоя звезды и темного тела; r_{13} и r_{23} - расстояния между телами A_1 и A_3, A_2 и A_3; γ - ньютоновская постоянная тяготения; δ - угол аберрации. Имеем также равенства:

$$\begin{gathered} \sin\delta = \frac{v}{c}\sin\alpha + \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\sin 2\alpha, \cos\delta = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha, \\ m_{13} = A_{13}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha\right), \end{gathered} \tag{2}$$

где $c = 3\cdot 10^{10} см \cdot c^{-1}$ - скорость света в вакууме; v - поступательная скорость тела A_3; α - угол между вектором поступательной скорости пробного тела A_3 $\vec{v}$ и радиус-вектором $\vec{r}_{03}$; величина A_{13} - *редуцирующая масса* звезды A_1, соответствующая пробному телу A_3, и имеет следующую структуру:

$$A_{13} = \frac{k\sigma_0 W_0^{(1)} r_0^2}{\gamma m_3^0 c}. \tag{3}$$

Здесь k - коэффициент отражения света пробным телом A_3 $(1 \le k \le 2)$; σ_0 - площадь миделева сечения пробного тела A_3; $W_0^{(1)}$ - звездная постоянная, являющаяся плотностью энергии электромагнитного (светового) излучения звезды A_1, приходящей за $1c$ на $1см^2$ площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r_0 от звезды; m_3^0 - масса покоя пробного тела A_3.

С точки зрения пробного тела A_3 масса звезды A_1 равна $m_1^* = m_1 - A_{13}$, которую называют *редуцированной* массой звезды A_1.

2. Стационарные решения. Мы пока не ставим целью найти общее решение системы (1). Ограничимся решением следующей задачи: найти все стационарные решения системы (1), когда пробное тело A_3 движется, как и тела A_1, A_2, с той же угловой скоростью ω_0 по окружности некоторого постоянного радиуса с центром в центре тяжести тел A_1 и A_2, который находится в начале координат O системы xOy, т.е. найти *релятивистские точки фотолибрации.*

Решение задачи следует проводить на разных уровнях точности.

Классический уровень осуществили Эйлер [10] и Лагранж [11], которые показали, что существует пять точек либрации: L_1, L_2, L_3 - эйлеровы коллинеарные точки либрации, L_4, L_5 - лагранжевы треугольные точки либрации (см. рис. 1). Эти решения получаются из (1), когда справа в (1) стоят нули.

Нулевой уровень соответствует решению поставленной задачи при учете только прямого СД, когда справа в (1) $\delta = 0$, $m_{13} = A_{13}$, т.е. члены с v/c и v^2/c^2 отбрасываются. В этом случае существует бесчисленное множество точек либрации L_i^*, заполняющих отрезки и дуги окружности (см. рис. 1, работу [8]).

Первый уровень рассмотрим в настоящей работе, отбрасывая в (1), (2) члены с v^2/c^2, т.е. решаем УД (1), когда

$$\cos\delta = 1, \sin\delta = \frac{v}{c}\sin\alpha, m_{13} = A_{13}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha\right). \tag{4}$$

Нужные нам стационарные решения УД (1) при условиях (4) ищем в виде:

$$\begin{aligned} x_3 &= (x_3^k + x_3^0 + x_3^1)\cos\omega_0 t - (y_3^k + y_3^0 + y_3^1)\sin\omega_0 t, \\ y_3 &= (x_3^k + x_3^0 + x_3^1)\sin\omega_0 t + (y_3^k + y_3^0 + y_3^1)\cos\omega_0 t, \end{aligned} \tag{5}$$

где все x и y с двойными индексами являются постоянными числами по времени t, но разными для разных пробных тел, так как для них редуцирующая масса A_{13} согласно (3) разная.

Постоянные x_3^k, y_3^k найдены на классическом уровне (см., например, [12], [13]). Постоянные x_3^0, y_3^0 найдены при решении задачи на нулевом уровне (см., например, [8]).

Наша задача – найти постоянные x_1^3, y_1^3. Подставив найденные из (5) вторые производные $\ddot{x}_3, \ddot{y}_3$ в УД (1) при условии (4) и проделав необходимые преобразования, аналогичные преобразованиям в [8], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения x_1^3, y_1^3 (для краткости вводим обозначения $X = x_3^k + x_3^0 + x_3^1, Y = y_3^k + y_3^0 + y_3^1$):

$$
\begin{cases}
-\omega_0^2 X + \dfrac{\gamma m_1^*}{(r_{13}^1)^3}\left(X + \dfrac{m_2}{m} r_0 \right) + \dfrac{\gamma m_2}{(r_{23}^1)^3}\left(X - \dfrac{m_1}{m} r_0 \right) = \\
= \dfrac{\gamma A_{13}}{(r_{13}^1)^3}\left[2\dfrac{v}{c}\sin\beta\left(X + \dfrac{m_2}{m} r_0 \right) + \dfrac{v}{c}\cos\beta \cdot Y \right], \\
-\omega_0^2 Y + \dfrac{\gamma m_1^*}{(r_{13}^1)^3} Y + \dfrac{\gamma m_2}{(r_{23}^1)^3} Y = \dfrac{\gamma A_{13}}{(r_{13}^1)^3}\left[2\dfrac{v}{c}\sin\beta \cdot Y - \dfrac{v}{c}\cos\beta\left(X + \dfrac{m_2}{m} r_0 \right) \right],
\end{cases} \qquad (6)
$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{\gamma m}{r_0^3}$; $r_0 = A_1 A_2$; $m = m_1 + m_2$; β - угол между $\vec{r}_{03}$ и $\vec{r}_{13}$; r_{13}^1, r_{23}^1 - расстояния между пробным телом A_3 и соответственно звездой и темным телом на первом уровне.

Для решения системы (6) необходимо рассмотреть два случая.

I. Квази-коллинеарный случай. Имеем $\beta = 0$, $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$ и система (6), как показывают подробные вычисления, имеет решение:

$$
x_3^1 = 0, \quad y_3^1 = -\frac{\gamma A_{13}}{(r_{13}^0)^3}\left(x_3^k + x_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)\frac{v}{c}\left[-\omega_0^2 + \frac{\gamma m_1^*}{(r_{13}^0)^3} + \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} \right]^{-1}, \qquad (7)
$$

где r_{13}^0 и r_{23}^0 означают расстояния тела A_3 до звезды A_1 и темного тела A_2 соответственно на нулевом уровне. Решение (7) показывает, что на первом уровне коллинеарные точки фотолибрации *не существуют*, строго говоря, но их отклонение от коллинеарности в Солнечной системе невелико. Так, например, для системы Солнце-Юпитер-пробное тело (СЮПТ) при $A_{13} = 0{,}1 m_1$ (характерная величина для многих микрометеоритов) имеем отклонения от положения коллинеарных точек фотолибрации нулевого уровня до нескольких десятков километров, т.е. должен происходить эффект «размывания» точек фотолибрации нулевого уровня.

II. Треугольный случай. В этом случае $\beta \neq 0$, система (6) усложняется, но анализ ее решения показывает, что треугольные точки фотолибрации на первом уровне смещаются относительно этих точек на нулевом уровне. В системе СЮПТ это смещение также составляет до нескольких десятков километров. Имеем двумерные области, занятые точками фотолибрации (см. рис. 1).

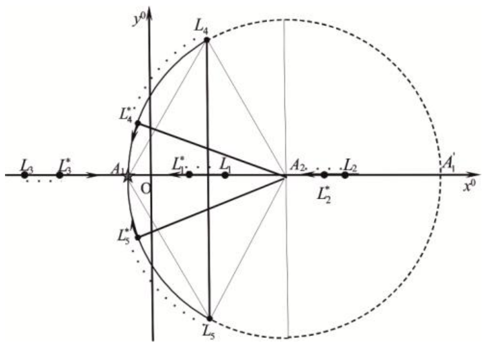

Рис. 1.

Учет членов порядка v^2/c^2 *увеличивает* эффекты отклонений и размывания точек фотолибрации. Подробные обосновывающие эти выводы вычисления будут даны авторами в следующих работах.

Библиографический список

1. Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. Мн., 1979.
2. Рябушко А.П. Проблема устойчивости движения тел в общей теории относительности. Мн., 1987.
3. Неманова И.Т. Релятивистское движение тел в среде. Дисс. на соискание звания канд. физ.-мат. наук. Мн., БГУ, 1987.

4. Жур Т.А. Релятивистское движение вращающихся тел в среде. Дисс. на соискание звания канд. физ.-мат. наук. Мн., НАН Беларуси, 1999.
5. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. //Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2011, №4. С. 93-97.
6. Рябушко А.П., Зубко О.Л., Жур Т.А., Боярина И.П. //Новейшие достижения европейской науки – 2012: материалы 8-й Международной научно-практической конф. София, 2012. Т. 18. С. 30-38.
7. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. //Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2012, №3. С. 77-83.
8. Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П., Зубко О.Л., Юринок В.И. //Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2014, №3. С. 60-67.
9. Рябушко А.П., Жур Т.А., Неманова И.Т., Боярина И.П., Зубко О.Л., Юринок В.И. //Докл. НАН Республики Казахстан. Физика, 2015. Т. 1. №1. С. 5-14.
10. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum //Novi Comm. Acad. Sci Jmp. Petrop. 1767. T. 11. P. 144-151.
11. Lagrange J.L. Eassais sur le problem des trois corps. Paris. 1772.
12. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
13. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.