УДК 532.5.013

О СВОБОДНОМ ПАДЕНИИ ОДИНОЧНОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТЯХ

Канд. техн. наук, доц. КРАВЦОВ М. В., инж. КРАВЦОВ А. М.

Белорусская государственная политехническая академия

Дифференциальное уравнение для случая прямолинейного падения одиночного тела в вязких средах в поле силы тяжести имеет вид

$$mdv/dt = G - P_A - F, \qquad (1)$$

где m, dv/dt — масса и ускорение тела;

$G = mg$ — сила тяжести (g — ускорение силы тяжести);

$P_A = m^*g$ — подъемная (архимедова) сила (m^* — масса жидкости в объеме, равном объему тела);

F — сила сопротивления.

Для случая свободного падения тел в несопротивляющейся среде, когда F и P_A равны нулю, задача решена Галилеем в XVII в. Найденные им закономерности свободного падения тел стимулировали усилия ученых разных стран по поиску аналогичных закономерностей для случая свободного падения тел в сопротивляющихся средах. Первые четкие представления, относящиеся к влиянию сопротивления жидкостей на скорости падения в них тел, были высказаны Мариоттом в середине XVII в. [1]. Однако только продуктивные теоретические и экспериментальные исследования Ньютона [2] в конце XVII и начале XVIII вв. о сопротивлении вязких сред движению в них тел составили основу для дальнейшего поиска истинных законов свободного падения тел в жидкостях. Этот поиск длится уже около 300 лет, и в нем заняты тысячи ученых и исследователей (Ньютон, Навье, Стокс, Пуазейль, Прандтль, Осеен, Аллен, Д. И. Менделеев, Н. Е. Жуковский, М. А. Великанов, А. П. Згжда, Д. М. Минц и др.).

Данная работа посвящена итоговому анализу результатов многолетних исследований и поиску формул для расчетов сил сопротивления F и скоростей равномерного падения v одиночных тел в безграничных объемах жидкостей в поле силы тяжести, позволяющих рационально использовать их при расчетах процессов осаждения в сооружениях, аппаратах и установках современных технологий в различных отраслях хозяйства.

Решение проблемы свободного падения одиночных тел в жидкостях под действием силы тяжести сводится к определению вида формулы для силы F в (1). В настоящее время принято силу F представлять в виде

$$F = \psi\, S\, \rho\, v^2/2, \qquad (2)$$

где ψ — коэффициент сопротивления;

S — площадь миделя тела, перпендикулярная направлению движения;

ρ — плотность жидкости;

v — скорость падения тела.

Большинство исследований было посвящено изучению движения в жидкостях шара, так как его симметричная форма делала решение более простым. В случае движения шара $S = \pi\, d^2/4$ (d — диаметр шара). Если же речь идет о движении тела с формой, отличной от формы шара, то площадь миделя S определяют через эквивалентный диаметр шара. Так, например, при изучении падения частиц песка в воде в качестве диаметра эквивалентного шара принимают диаметр частиц, равный среднеарифметическому размеру проходного и непроходного отверстий сит, с помощью которых формировалась фракция песка.

В настоящее время значения коэффициента сопротивления ψ связывают со значением числа Рейнольдса Re, т. е. полагают что

$$\psi = f(\mathrm{Re}), \tag{3}$$

где $\mathrm{Re} = vd\rho/\mu$; μ — динамический коэффициент вязкости жидкости.

В современной гидромеханике раскрытие зависимости (3) составляет одну из важнейших задач.

Далее будем рассматривать случай равномерного падения одиночного твердого тела под действием силы тяжести в безграничном объеме вязкой среды. В этом случае в (1) $mdv/dt = 0$, а для опытного определения значений ψ можно воспользоваться формулой

$$\psi = 4d\Delta\rho g/(3\rho v^2), \tag{4}$$

где $\Delta\rho$ — разность плотностей тела и жидкости.

Раскрытие зависимости (3) шло путем накопления опытных данных и подбора формул для коэффициента сопротивления ψ, а также путем теоретических исследований. Особенно интенсивно экспериментальные исследования проводились в 30-х гг. нашего столетия. К середине 70-х гг. они практически прекратились. Это связано, очевидно, с тем, что стали полагать опытную зависимость (3) известной. Действительно в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,1 до 70000 опытным путем была изучена зависимость (3) в случае свободного падения твердых шаров в жидкостях [3, 4] и в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,000036 до 32000 в случае падения частиц песка в воде [5]. Вместе с тем, анализ опытных данных показывает [6, 7], что при числах Рейнольдса более 10000—20000 ясности в ходе зависимости (3) для случая падения шаров в жидкостях нет. Опытные зависимости различных авторов сильно расходятся. На наш взгляд, причина здесь в том, что в опытах не выдерживались условия, обеспечивающие свободное равномерное падение шаров (не исключался первоначальный ускоренный участок движения, имело место стеснение движения близко расположенными стенками сосуда и т. д.). Кроме того, при больших числах Рейнольдса изучалось не равномерное падение шаров, а обтекание неподвижных шаров равномерным потоком воды. С учетом принципа относительности результаты исследования прямой и обращенной задачи сопоставимы. Однако и здесь ряд условий подобия трудно выдержать (стеснение потока стенками, влияние подвески, ограничения в поведении шара и т. д.). Все это явилось стимулом для изучения ускоренного движения одиночных тел на первоначальном участке [8], стесненного осаждения шаров [9, 10], свободного падения шаров и частиц зернистых материалов в вязких средах при малых [7] и больших [11] числах Рейнольдса. В результате этого зависимость (3) для случая свободного падения шаров в жидкостях оказалась изученной в диапазоне чисел Рейнольдса от 0,05 до 250000. Обобщенный опытный график зависимости (3) для случая свободного падения твердых шаров и частиц кварцевого песка в безграничных объемах жидкостей представлен на рис. 1 и 2. При этом оказалось характерным то, что при больших

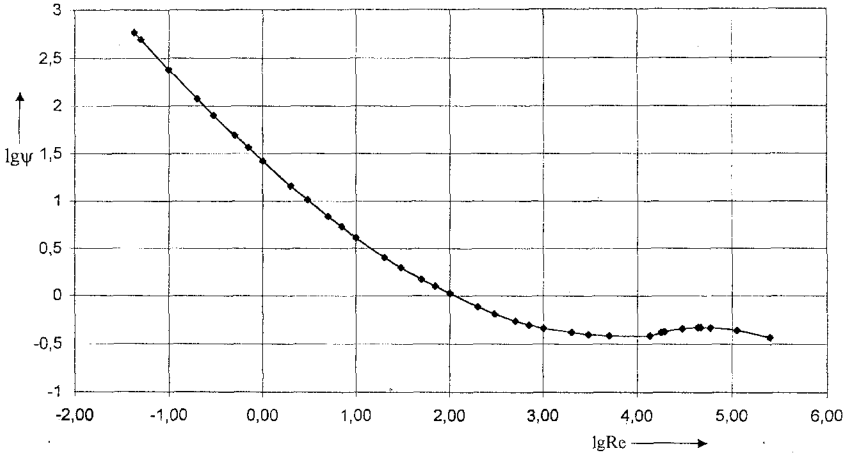

Рис. 1. Зависимость lg $\psi = f$ (Re) при свободном равномерном падении шаров в вязких средах

числах Рейнольдса скорости падения шаров и частиц кварцевого песка линейно зависят от их диаметров (а не пропорциональны значению корня квадратного из диаметров, как принято считать), т. е.

$$v = a + b\,d, \tag{5}$$

где a и b – размерные постоянные коэффициенты.

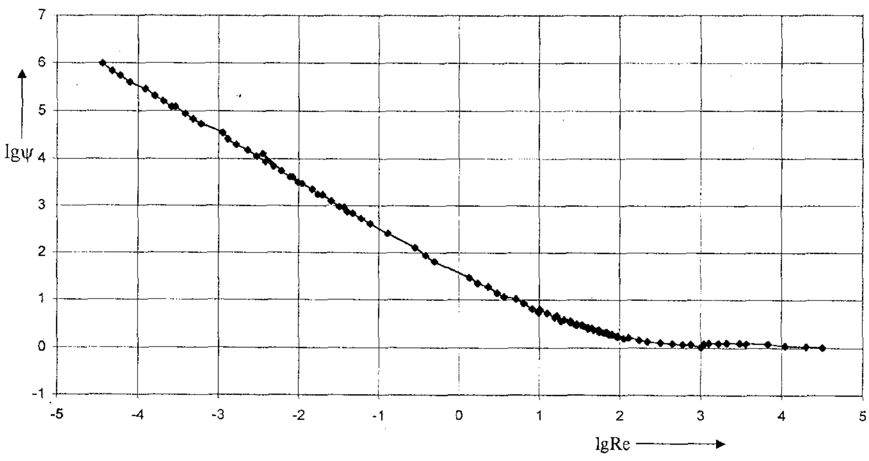

Рис. 2. Зависимость $\psi = f$ (Re) при свободном равномерном падении частиц кварцевого песка (естественных наносов) в воде

Опытный график зависимости $v = f(d)$ представлен на рис. 3.

Формула (5) в безразмерных величинах представляется в виде

$$\mathrm{Re} = k_1\,\mathrm{Ar}^{1/3} + k_2\,\mathrm{Ar}^{2/3}, \qquad (6)$$

где k_1 и k_2 — безразмерные постоянные коэффициенты;

$\mathrm{Ar} = 3/4\psi\mathrm{Re}^2 = d^3\Delta\rho\rho g/\mu^2$ —критерий Архимеда.

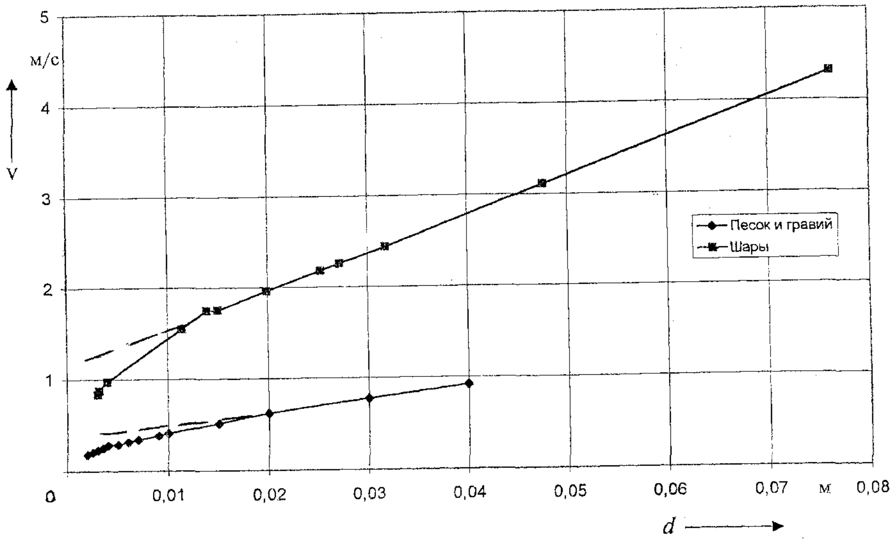

Рис. 3. Зависимость $v = f(d)$ при свободном равномерном падении шаров и частиц кварцевого песка и гравия в воде

Постоянные коэффициенты в (6) оказались равными для случаев падения: шаров в вязких средах $k_1 = 25{,}2$; $k_2 = 0{,}0278$, частиц кварцевого песка (естественных наносов) в воде $k_1 = 12{,}8$; $k_2 = 0{,}0238$.

Из факта существования формулы (6) можно сделать первый важный вывод о том, что она является одной из асимптот к общей зависимости (3), определяющей закон свободного падения одиночных тел в вязких средах.

Формул для (3), полученных в результате аппроксимации опытных данных, в разное время было получено много. Обзоры и анализ некоторых из них дан в [1, 3, 4, 7, 12]. Каждая из формул справедлива в узком диапазоне чисел Рейнольдса, появление их к настоящему времени можно рассматривать как исторический факт и для дальнейшего решения проблемы расчетов коэффициентов сопротивлений они значения не имеют.

Теоретически обоснованных частных формул для расчетов коэффициентов сопротивлений не много. Значение же для поиска общей формулы, на наш взгляд, имеет лишь одна, полученная в середине XIX в. в результате частного решения дифференциальных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости Стоксом. Эта формула имеет вид

$$\psi = A\,/\,\mathrm{Re} \quad \text{или} \quad \mathrm{Re} = 4\mathrm{Ar}\,/\,3A, \qquad (7)$$

где A — постоянный коэффициент.

Принято считать, что $A = 24$. Это связано с тем, что при решении уравнений движения вязкой жидкости в качестве одного из граничных условий принято полное прилипание частиц жидкости к поверхности твердого шара, т. е. скорости частиц жидкости на поверхности шара в этом случае принимаются равными скорости движения шара. Часто полагают, что принятие таких условий подтверждается опытными исследованиями, а формула Стокса (7) справедлива при малых числах Рейнольдса (предельные числа Рейнольдса называются разными: Re = 0,1; Re = 1,0 и т. д.). Ранее показано [7], что строго обосновать предположение о полном прилипании частиц жидкости к поверхности падающего шара логическим, теоретическим и опытным путем трудно. Дело в том, что в формулу Стокса, кроме коэффициента A, входит значение динамического коэффициента вязкости μ, которое определяют по формуле Стокса при заданном значении A. Следует отметить, что при принятии скольжения частиц жидкости по поверхности падающего шара в (7) коэффициент A в соответствии с решением Стокса оказывается меньше 24 и в пределе при скорости частиц жидкости равным нулю (случай падения в чистой жидкости пузырька воздуха или капли чистой органической жидкости) $A = 16$. При свободном падении частиц кварцевого песка в воде, по данным опытов на рис. 2, $A = 32{,}8$. Что же касается пределов применения формулы Стокса (7), бесспорно [7], что она является второй асимптотой к зависимости (3), как в случае падения твердых шаров, так и в случае падения или подъема капель органических жидкостей, пузырьков воздуха или частиц зернистых материалов в вязких средах.

Справедливость сделанных предположений о существовании двух асимптот (6) и (7) к общей зависимости (3) подтверждается сопоставлением расчетов с обобщенными данными на рис. 1 и 2. Сильные расхождения при этом имеются лишь в срединной части опытного графика зависимости $\psi = f(\mathrm{Re})$, где должен доминировать член, определяющий соответствующую долю сопротивления свободно падающему одиночному телу со стороны вязкой среды. С учетом приведенных выше соображений, на наш взгляд, конструкция общей зависимости $\mathrm{Re} = f(\mathrm{Ar})$ будет иметь следующий вид:

$$\mathrm{Re} = 1/(3A/4\mathrm{Ar} + K + 1/(k_1\mathrm{Ar}^{1/3} + k_2\mathrm{Ar}^{2/3})), \qquad (8)$$

где $K = \alpha e^{-\beta(\lg\mathrm{Ar})^2}$ – в случае падения шаров и $K = \alpha e^{-\beta(\lg\mathrm{Ar})}$ – в случае падения частиц естественных наносов;

α и β – постоянные коэффициенты.

По результатам исследований в (8) приняты следующие значения постоянных коэффициентов: для шаров $A = 24{,}0$; $\alpha = 0{,}092$; $\beta = 0{,}174$; $k_1 = 25{,}2$; $k_2 = 0{,}0278$, для частиц естественных наносов (частиц кварцевого песка) – $A = 32{,}8$; $\alpha = 1{,}76$; $\beta = 1{,}36$; $k_1 = 12{,}8$; $k_2 = 0{,}0238$.

Следует заметить, что переход от зависимости $\mathrm{Re} = f(\mathrm{Ar})$ (8) к зависимости $\psi = f(\mathrm{Re})$ (3) может быть осуществлен с учетом того, что $\psi = 4\mathrm{Ar}/3\mathrm{Re}^2$.

Сопоставление расчетных (8) и опытных данных (рис. 1 и 2) для случаев свободного равномерного падения шаров и частиц кварцевого песка в вязких средах в функции $\mathrm{Re} = f(\mathrm{Ar})$ дано на рис. 4 и 5. При этом среднеарифметические расхождения опытных и расчетных данных во всех исследованных диапазонах чисел Рейнольдса не превысили 0,05 (5 %).

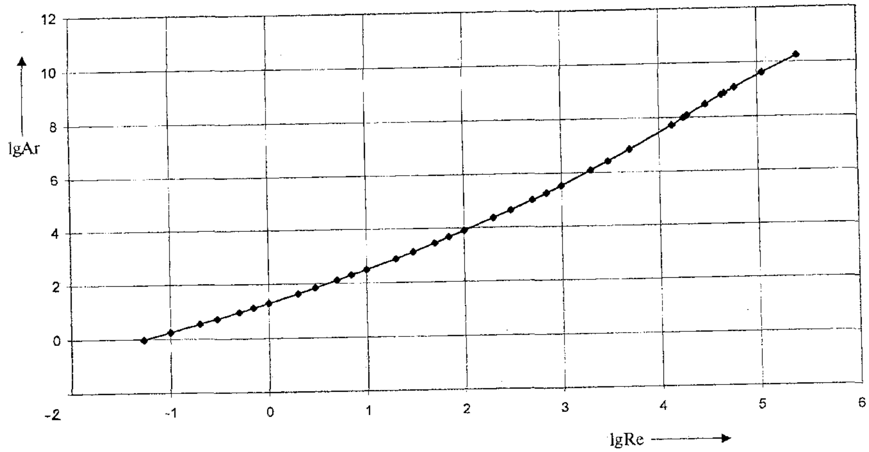

Рис. 4. Зависимость Ar = f(Re) при свободном равномерном падении шаров в вязких средах

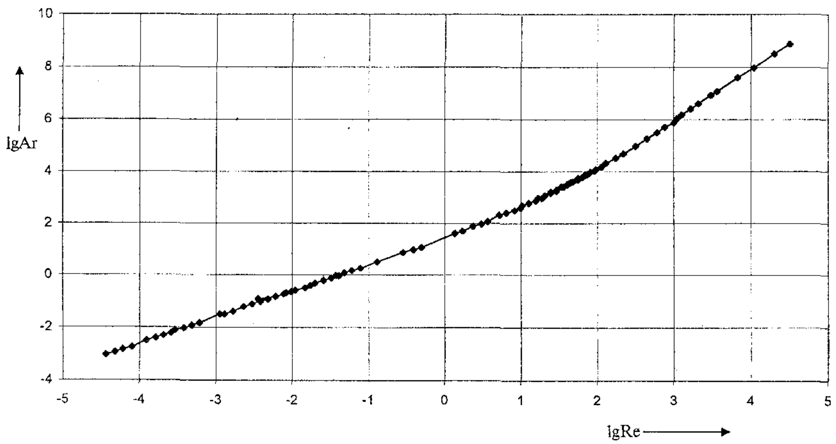

Рис. 5. Зависимость Ar = f(Re) при свободном равномерном падении частиц кварцевого песка в воде

Существенно то, что с использованием формулы (8) расчет скоростей осаждения шаров и частиц зернистых материалов в вязких средах осуществляется чрезвычайно просто. Для этого следует по заданным значениям d, $\Delta\rho$, ρ, μ определить значение Ar, по (8) определить Re и затем v.

ЛИТЕРАТУРА

1. Менделеев Д. И. О сопротивлении жидкостей: Соч. – Л.; М.: Изд-во АН СССР, 1946. – Т. 7.

2. Ньютон И. Математические начала натуральной философии: Собр. трудов А. Н. Крылова. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – Т. 7.

3. Tanaka Z, Iinoya K. New approximate equation of drag coefficient for spherical particles // J. Chem.Eng.of Japan. – 1970. – Vol. 3, № 2.

4. L a p p l e C. E., S h e p h e r d C. B. Calculation of particle Trajectories // Eng. Chem., 1940. – 32, № 5, 605.

5. К а р а у ш е в А. В. Проблемы динамики естественных водных потоков. – М., Гидрометеоиздат, 1960.

6. A c h e n b a c h E. Experiments on the flow past spheres // J. Fluid. Mech., 1969. – 54, № 3, 565.

7. К р а в ц о в М. В. Гидравлика зернистых материалов // Наука и техника. – Мн., 1980. – 168 с.

8. К р а в ц о в М. В., С у в о р о в В. В. Свободное неустановившееся падение шара в жидкости // Водное хоз-во Белоруссии. – Мн.: Вышэйшая школа, 1973. – Вып. 3.

9. К р а в ц о в М. В. Стесненное осаждение твердых сферических частиц // Водное хоз-во Белоруссии. – Мн.: Вышэйшая школа, 1974. – Вып. 4.

10. К р а в ц о в М. В. К вопросу моделирования процессов осаждения взвесей // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1976. – № 4.

11. К р а в ц о в М. В., С у в о р о в В. В. Сопротивление движению шаров в жидкостях при числах Re до 10^6 // Водное хоз-во Белоруссии. – Мн.: Вышэйшая школа, 1971. – Вып. 4.

12. M i l l e r D. G. Sedimentation // Water and Water Eng. – February, 1964.

Представлена Ученым
советом МИПК при БГПА

Поступила 29.07.1999