Литература

1. Ovsiyuk, E.M., Veko O.V., Rusak Yu. A., Chichurin A.V., Red'kov V.M. *To Analysis of the Dirac and Majorana Particle Solutions in Schwarzschild Field* // NPCS. 2017. V. 20. № 1. P. 56–72.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. 1916. K 1. S. 189–196.
3. Regge T., Wheeler John A. *Stability of a Schwarzschild Singularity* // Phys. Rev. 1957. Vol. 108, P. 1063–1069.
4. Brill D.R., Wheeler John A. *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields* // Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. P. 465–479.
5. Bardeen J.M., Press W.H. *Radiation fields in the Schwarzschild background* // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 7–19.
6. Hawking S.W. *Black hole explosions?* // Nature. 1974. V. 248. № 5443. P. 30–31.
7. Hawking S.W. *Particle creation by black holes* // Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199 — 220.
8. Page D.N. *Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, non-rotating hole* // Phys. Rev. 1976. V. D13. P. 198–206.
9. Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford: Oxford University Press, 1983.
10. Joel Smoller, Chunjing Xie. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry // Annales Henri Poincaré. 2012. T. 13. № 4. P. 943–989.
11. Fiziev P. in: https://www. researchgate.net/profile/Plamen-Fiziev/publications
12. Ronveaux (ed.). *Heun's differential equation.* Oxford: Oxford University Press, 1995.
13. Slavyanov S.Yu., Lay W. *Special functions. A unified theory based on singularities.* Oxford, 2000.

ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В СРЕДЕ В ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А.П. Рябушко, И.Т. Неманова, Т.А. Жур

В работах [1, 2] решены задачи: в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) получено гравитационное поле газопылевого шара радиуса R, плотность которого $\rho = \text{const}$, с двумя притягивающими центрами (телами). В этом поле выведены уравнения движения центров и проведено интегрирование этих уравнений движения. Рассмотрен также вопрос о влиянии лобового сопротивления среды движущимся в ней телам. Сделаны численные оценки всех полученных релятивистских эффектов. В этой работе выясняется закон движения центра масс $\tilde{C}$ двух тел в среде в ПНП ОТО.

Рассмотрим случай круговых движений тел A и B *внутри* газопылевого шара. Это упрощает решение задачи и позволяет составить систему уравнений движения центра масс $\tilde{C}$:

$$\ddot{\tilde{c}}^i = \frac{\gamma^2\rho}{c^2(m_a+m_b)}\left[\frac{2\pi m_a m_b}{3r_0^2}(5|\vec{a}|b^i + 5|\vec{b}|a^i - 3|\vec{a}|a^i - 3|\vec{b}|b^i) + 5(m_a^2 I_{a0}^i + m_b^2 I_{b0}^i) - \right.$$
$$\left. - (m_a^2 I_{a1}^i + m_b^2 I_{b1}^i) - m_a m_b (I_{a2}^i + I_{b2}^i) + 5 m_a m_b (I_{a3}^i + I_{b3}^i)\right]. \tag{1}$$

Вычислив или осреднив входящие в систему (1) интегралы I_{av}^i, I_{bv}^i находим решение задачи Коши для системы (1) при начальных условиях $\tilde{c}^i(0) = 0$, $\dot{\tilde{c}}^i(0) = 0$:

$$\tilde{c}^1 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(1-\cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(\phi - \sin\phi), \quad \phi = \omega_0 t, \tag{2}$$

где величина $\omega_0 = \sqrt{\gamma(m_a + m_b)/r_0^3}$ является угловой скоростью обращения тел A и B по круговой орбите в ньютоновском приближении ОТО. Величина $N = \mathrm{const}$ и определяется выражением

$$N = m_a^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{a}|} + \frac{R^2+|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}\ln\frac{R-|\vec{a}|}{R+|\vec{a}|}\right) + \frac{4R^3}{(R+|\vec{a}|)^3}\right] -$$

$$- m_b^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{b}|} + \frac{R^2+|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}\ln\frac{R-|\vec{b}|}{R+|\vec{b}|}\right) + \frac{4R^3}{(R+|\vec{b}|)^3}\right] + 2m_a m_b(|\vec{a}| - |\vec{b}|)\left(\frac{4R^3}{3|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Согласно уравнениям (2) центр масс $\tilde{C}$ движется по циклоиде с базой на положительной части координатной оси Ox^2, если $N > 0$, и на отрицательной части, если $N < 0$. В случае $m_a = m_b$ имеем $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $N = 0$, т.е. центр масс покоится в начале координат. Если начальные условия расположения тел A и B изменить, то ориентация циклоиды изменится.

Рассмотрим систему двух тел A и B, близких по своим характеристикам к системе Солнце — Юпитер. Принимаем $m_a = 2\cdot 10^{33}$ г, $m_b = 2\cdot 10^{30}$ г, $|\vec{a}| = 7,78\cdot 10^{10}$ см, $|\vec{b}| = 7,78\cdot 10^{13}$ см; движения тел — круговые; плотность газопылевого шара $\rho = (10^{-18} \div 10^{-22})$ г $\cdot$ см$^{-3}$; его радиус $R = (10^{18} \div 10^{20})$ см. Скорость света $c = 3\cdot 10^{10}$ см $\cdot$ с$^{-1}$, ньютоновская постоянная тяготения $\gamma = 6,67\cdot 10^{-83}$ см $\cdot$ г$^{-1}\cdot$ с$^{-2}$. Расстояние между телами A и B $r_0 = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Для наблюдаемых планетарных туманностей, в частности, Солнечной системы, наиболее популярными являются следующие значения плотности $\rho = 10^{-21}$ г $\cdot$ см$^{-3}$ и радиуса $R = 10^{18}$ см. Тогда при указанных значениях величин имеем параметрические уравнения циклоиды

$$\tilde{c}^1 = -6,316\cdot 10^{10}(1-\cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = -6,316\cdot 10^{10}(\phi - \sin\phi). \tag{3}$$

За один оборот системы тел A — B, т.е. при изменении ϕ от 0 до 2π, что соответствует во времени примерно 12-ти годам, ее центр масс переместится по циклоиде (3) из начала координат в точку $\tilde{C}_1(0, -4\cdot 10^{11})$, что должно вызвать «опускание» системы тел A — B примерно на расстояние $4\cdot 10^{11}$ см относительно неподвижной системы координат x^1Ox^2.

Чтобы судить о законах движения тел A и B, нужно еще, кроме обсуждаемого здесь воздействия гравитационного поля газопылевого шара на движение тел, оценить релятивистские поправки в ПНП ОТО, которые найдены в [3]. Эти поправки Δa^i, Δb^i к ньютоновским координатам тел a^i, b^i при выполнении начальных условий — при $t = 0$ (или $\phi = 0$) эти поправки и их производные по времени (или по ϕ) равны нулю — имеют вид

$$\Delta a^1 = \frac{\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\cos\omega_0 t - 1), \quad \Delta a^2 = \frac{2\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\omega_0 t - \sin\omega_0 t), \tag{4}$$

$$\Delta b^1 = -\frac{\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\cos\omega_0 t - 1), \quad \Delta b^2 = -\frac{2\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a+m_b)^2}(\omega_0 t - \sin\omega_0 t), \tag{5}$$

где $[3,5] = 3m_a^2 + 5m_a m_b + 3m_b^2$. Для рассматриваемой системы тел A и B легко находим численные оценки коэффициентов в (4), (5) и оценки $|\Delta a^i|$, $|\Delta b^i|$ за один оборот, которые находятся в интервале от $5\cdot 10^2$ см до $7\cdot 10^6$ см, т.е. максимальная релятивистская поправка на 4–5 порядков меньше смещения центра масс согласно (3): за один оборот $|\tilde{c}^2| \approx 4\cdot 10^{11}$ см. Поэтому поправками (4), (5) можно пренебречь.

Величина смещения центра масс системы двух тел в газопылевом шаре может оказаться на несколько порядков меньше, если распределение газопылевой среды в шаре будет *неоднородным* и величина плотности ρ будет убывать к периферии шара.

Литература

1. Рябушко А.П, Неманова И.Т. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 6. С. 519–522.

2. Неманова И.Т. *Релятивистское движение тел в среде* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Мн.: БГУ, 1987.

3. Рябушко А.П. *Движение тел в общей теории относительности.* Мн., 1979.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

М.И. Тлеубергенов, Д.Т. Ажымбаев

По заданному множеству

$$\Lambda(t) : \lambda(x,t) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in C^{22}_{xt}, \tag{1}$$

требуется построить обобщенную силовую функцию $U = U(x, \dot{x}, t)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} = \sigma'_{\nu j}(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}_j, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,r}. \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega), \ldots, \xi_r(t,\omega)\}$ — системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [1], можно представить в виде суммы процессов: $\xi = \xi_0 + {} + \int c(y)P^0(t,dy)$, где $\xi = (\xi_1(t,\omega), \ldots, \xi_r(t,\omega))^{\mathsf{T}}$, ξ_0 — векторный винеровский процесс.

В данной работе в отличие от [2] строится силовая функция в предположении, что заданное интегральное многообразие зависит лишь от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей. Для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [4] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [1] строится уравнение Ито

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi} \tag{3}$$

так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения 3.

Затем на втором этапе по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры. И на третьем этапе в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид

$$L = T(x, \dot{x}, t) + U(x, \dot{x}, t), \quad \text{где} \quad T = a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

искомая силовая функция определяется в виде $U(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$.

Введем матрицу h^k_ν и рассмотрим задачу непрямого (косвенного) представления уравнения лагранжевой структуры

$$h^k_\nu(\ddot{x}_k - f_k - \sigma_{kj}\dot{\xi}^j) \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\nu} - \sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j.$$