ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346

Поступила в редакцию 05.03.2021
Received 05.03.2021

А. П. Рябушко[1], Т. А. Жур[2]

[1]Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ТОЧКИ ρ-ЛИБРАЦИИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Аннотация. Рассмотрена ограниченная круговая задача трех тел в однородной и неоднородной средах. Особое внимание уделено точкам либрации, выведены условия, при которых они существуют или не могут существовать в ньютоновском и постньютоновском приближениях общей теории относительности. Указан ряд закономерностей, ньютоновских и релятивистских новых эффектов, возникающих благодаря воздействию на тела гравитационных полей сред и релятивистских силовых добавок в дифференциальных уравнениях движения тел. С использованием выведенных ранее уравнений движения двух тел A_1, A_2 в среде авторами обоснованы следующие утверждения. В однородной среде (плотность среды $\rho = \text{const}$) в ньютоновском приближении общей теории относительности существуют точки ρ-либрации L_i^ρ, $i = 1,...,5$, движущиеся по тем же окружностям, что и эйлеровы и лагранжевы точки либрации L_i, но с угловой скоростью $\omega_{0\rho}$, большей угловой скорости ω_0 точек либрации L_i в пустоте. Тела A_1, A_2 по своим окружностям двигаются также с угловой скоростью $\omega_{0\rho} > \omega_0$. При переходе из ньютоновского приближения общей теории относительности в постньютоновское приближение общей теории относительности центр масс двух тел, покоившийся в однородной среде в ньютоновском приближении общей теории относительности, должен перемещаться по циклоиде, а траектории тел не могут быть окружностями, точки либрации L_i исчезают. В случае неоднородной среды, распределенной, например, сферически симметрично, центр масс двух тел уже в ньютоновском приближении общей теории относительности должен двигаться по циклоиде, хотя в пустоте он покоился. Поэтому тела A_1, A_2 должны описывать витки, образующие, образно говоря, «кружева», как и в случае однородной среды в постньютоновском приближении общей теории относительности. В силу существования «кружевного» эффекта движения точки либрации L_i уничтожаются. В частном случае, когда массы тел A_1, A_2 равны ($m_1 = m_2$), циклоиды исчезают и все точки ρ-либрации в однородной и неоднородной средах в ньютоновском и постньютоновском приближениях общей теории относительности существуют. Проведены численные оценки предсказываемых закономерностей и эффектов в Солнечной и других планетарных системах, в межзвездной и межгалактической средах. Смещения, связанные с упомянутыми эффектами, например смещение центра масс, могут достигать многих миллиардов километров за один оборот системы двух тел. Обсуждается возможная роль этих закономерностей и эффектов в теориях эволюции планетарных систем, галактик и их ансамблей. Дан краткий обзор исследований, проведенных белорусской научной школой по проблеме движения тел в средах в общей теории относительности.

Ключевые слова: общая теория относительности, три тела, точки ρ-либрации, однородная и неоднородная плотность сред, центр масс, ньютоновское и постньютоновское приближения

Для цитирования. Рябушко, А. П. Точки ρ-либрации в задаче трех тел / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 330–346. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346

Anton P. Ryabushko[1], Tatyana A. Zhur[2]

[1]Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

ρ-LIBRATION POINTS IN THE THREE-BODY PROBLEM

Abstract. Herein, the restricted circular three-body problem in homogeneous and inhomogeneous media is considered. Particular attention is paid to libration points. The conditions of their existence or non-existence in the Newtonian and post-Newtonian approximations of the general theory of relativity are derived. Several regularities, new Newtonian and relativistic effects arising due to the impact of the additional relativistic forces on bodies of gravitational fields of mediums in the differential equations of the motion of bodies are indicated. Using the previously derived equations of the motion of two bodies A_1, A_2 in the medium, the authors substantiated the following statements. In a homogeneous medium (density of the medium ρ = const) in the Newtonian approximation of the general theory of relativity there are ρ-libration points L_i^ρ, $i = 1,...,5$, moving along the same circles as the Euler and Lagrangian libration points L_i but with an angular velocity $\omega_{0\rho}$, greater than the angular velocity ω_0 of libration points L_i in a vacuum. Bodies A_1, A_2 also move along their circles with an angular velocity $\omega_{0\rho} > \omega_0$. When passing from the Newtonian approximation of the general theory of relativity to the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity, the centre of mass of two bodies, resting in a homogeneous medium in the Newtonian approximation of the general theory of relativity, must move along a cycloid. The trajectories of the bodies can not be circles, the libration points L_i disappear. In the case of an inhomogeneous medium distributed, for example, spherically symmetrically, the centre of mass of two bodies, already in the Newtonian approximation of the general theory of relativity, must move along the cycloid, despite it was at rest in the void. Therefore, bodies A_1, A_2 must describe loops that form, figuratively speaking, a «lace», as in the case of a homogeneous medium in the post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. The figure illustrating the situation is provided. Due to the existence of the «lace» effect, the libration point L_i movements are destroyed. In the special case, when the masses of bodies A_1, A_2 are equal ($m_1 = m_2$), the cycloids *disappear* and all the ρ-libration points exist in homogeneous and inhomogeneous media in the Newtonian and post-Newtonian approximations of the general theory of relativity. Numerical estimates of the predicted patterns and effects in the Solar and other planetary systems, interstellar and intergalactic mediums are carried out. For example, displacements associated with these effects, such as the displacement of the centre of mass, can reach many billions of kilometres per revolution of the two-body system. The possible role of these regularities and effects in the theories of the evolution of planetary systems, galaxies, and their ensembles is discussed. A brief review of the studies carried out by the Belarusian scientific school on the problem of the motion of bodies in media in the general theory of relativity is given.

Keywords: general theory of relativity, three bodies, ρ-libration points, homogeneous and inhomogeneous density of mediums, centre of mass, Newtonian and post- Newtonian approximations

For citation. Ryabushko A. P., Zhur T. A. ρ-Libration point in the three body problem. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 330–346 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-330-346

Введение. Задача трех и большего числа тел была поставлена сразу же после открытия И. Ньютоном закона всемирного тяготения, но ее решение с самого начала натолкнулось на непреодолимые трудности. Тем не менее попытки решить или хотя бы приблизиться к решению задачи трех тел никогда не прекращались. В этой области исследований величайшим математикам мира и известнейшим астрономам-теоретикам принадлежат многие выдающиеся работы, краткий обзор которых можно найти в публикациях [1–8] и указанной в них литературе.

В процессе исследования ньютоновских уравнений движения (УД) для системы трех тел в 1767 г. Л. Эйлер [9] впервые обнаружил три простых точных частных решения (коллинеарные эйлеровы решения), а в 1772 г. Ж. Л. Лагранж [10] дополнительно указал на существование еще двух точных частных решений задачи трех тел (треугольные лагранжевы решения).

Указанные решения описывают движение трех тел вокруг их центра масс C по однотипным кривым второго порядка, при этом тела остаются всегда либо на одной прямой (коллинеарные эйлеровы решения), либо образуют равносторонний треугольник (треугольные лагранжевы решения). Возможные расположения трех тел A_1, A_2, A_3, имеющих ньютоновские массы m_1, m_2, m_3, для рассматриваемых эйлеровых и лагранжевых решений в случае, когда A_3 является пробным телом, см. на рис. 1. Положения тела A_3 относительно основных тел A_1 и A_2 называются точками *либрации* и обозначаются следующим образом: L_1, L_2, L_3 – коллинеарные эйлеровы точки либрации, L_4, L_5 – треугольные лагранжевы точки либрации.

Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж считали, что найденные ими решения имеют чисто теоретическое значение. Однако в 1906 г. были открыты две группы («греки» и «троянцы») малых планет (астероидов), расположение которых вместе с Юпитером и Солнцем приблизительно соответствует треугольным лагранжевым решениям (см. [11, гл. 1; 12]), а в 1960-х гг. в треугольных точках либрации системы Земля–Луна были обнаружены облакоподобные спутники, состоящие из очень разреженного скопления частиц межпланетной пыли и льдинок [13, 14]. Кроме того, как оказалось впоследствии, эти решения послужили отправной точкой для построения многих классов других (приближенных) решений задачи трех тел, подтвержденных наблюдениями. В частности, исследовались траектории тел и их устойчивость в окрестностях точек либрации $L_1 - L_5$ (см., напр., [5, 7]).

В настоящее время в связи с успехами и перспективами дальнейшего освоения околосолнечного пространства, организации наблюдений дальнего космоса эти решения приобретают

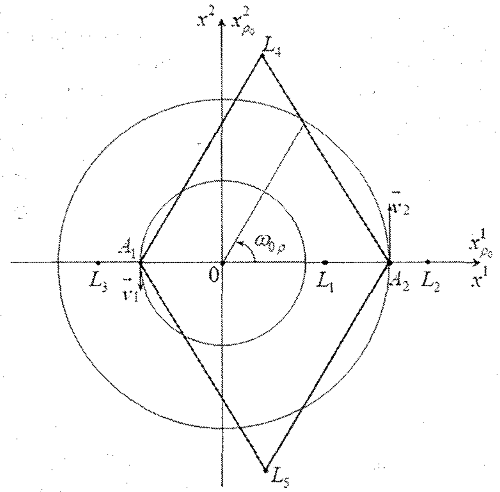

Рис. 1. Пробное тело A_3 находится в одной из точек либрации $L_1 - L_5$, в которых действующие на тело A_3 гравитационные и центробежные силы уравновешиваются. Траекториями всех трех тел A_1, A_2, A_3 могут быть, в частности, концентрические окружности с центром в начале координат O (система координат Ox^1x^2 – барицентрическая). Все точки A_1, A_2, $L_1 - L_5$ двигаются по своим окружностям с угловой скоростью $\omega_{\rho 0}$. Положение точек изображено в начальный момент времени $t = 0$

Fig. 1. Test body A_3 is located at one of the libration points $L_1 - L_5$, where the gravitational and centrifugal forces acting on the body body A_3 are balanced. The trajectories of all three bodies A_1, A_2, A_3 can be, in particular, concentric circles centered at the origin of coordinates O (the Ox^1x^2 coordinate system is barycentric). All points A_1, A_2, $L_1 - L_5$ move along their circles with an angular velocity $\omega_{\rho 0}$. The position of the points is shown at the initial moment of time $t = 0$

важное значение при разработке определенных схем полетов космических аппаратов, при использовании в случае ограниченной задачи трех тел коллинеарных L_1, L_2, L_3 и треугольных L_4, L_5 точек либрации в качестве своеобразных космических портов для размещения в них внеземных исследовательских лабораторий, в частности телескопов и прочих наблюдательных технических устройств, с помощью которых изучаются Солнечная система, Галактика и Вселенная.

Имеется ряд проектов и программ по осуществлению запуска наблюдательной техники в космос. Например, знаменитый телескоп «Хаббл» и аппарат LISA работали в окрестности эйлеровой точки L_2, телескоп «Уэбб» – преемник телескопа «Хаббл» – в 2020 г. послан в окрестность этой же точки, обсерватория WMAP работала в окрестности точки L_1 между Солнцем и Землей на расстоянии 1,5 млн км от Земли, космический аппарат SOHO еще ранее в 1995 г. был выведен в ту же окрестность с целью изучения Солнца и его окрестностей, в результате чего была получена богатая информация о состоянии солнечной атмосферы, глубинных слоях Солнца, солнечном ветре, об активности солнечной короны, а также обнаружено большое количество околосолнечных комет. Осуществлен запуск в космос многих других космических аппаратов (см. [15, 16]).

Проведенный краткий обзор роли либрационных точек в небесной механике показывает, что эйлеровы и лагранжевы решения представляют значительный теоретический и практический интерес. Но исследование и использование этих решений в астрономии, астродинамике, астрофизике без учета релятивистских поправок, возникающих согласно эйнштейновской теории тяготения, т. е. общей теории относительности (ОТО), является недостаточным. Поэтому начиная с 1960-х гг. белорусской научной школой по проблеме движения тел в космосе проводятся исследования по проблеме *релятивистского* движения тел и его устойчивости в «пустоте» (см. монографии [6, 8] и диссертации [17–19]).

Но, как известно [12, 16, 20–22], пространство не является «пустым», а заполнено межпланетной (МП), межзвездной (МЗ), межгалактической (МГ) средами, включающими в себя всевозможные излучения («видимая» материя). В настоящее время астрофизиками и физиками-теоретиками выдвинуты гипотезы (см., напр., [16, 22–24]), в которых утверждается, что кроме видимой материи во Вселенной существуют так называемые «темная» материя и «темная» энергия, которые обладают пока неизвестными человечеству свойствами, но ответственны, по-видимому, за антигравитацию. Учет влияния гипотетической материи на движение тел нами не проводится. Плотность ρ сред чрезвычайно мала:

межпланетная $\rho_{\text{мп}} \sim (10^{-18} \div 10^{-23})\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, (1)

межзвездная $\rho_{\text{мз}} \sim (10^{-24} \div 10^{-26})\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, (2)

межгалактическая $\rho_{\text{мг}} \sim (10^{-27} \div 10^{-29})\ \text{г} \cdot \text{см}^{-3}$. (3)

Но общая масса этой видимой (наблюдаемой) материи превосходит массу всех галактик (см., напр., [22, гл. 1, § 1.2]). Благодаря существованию сред возникает фоновое гравитационное поле, которое существенно влияет на происходящие в космосе процессы, в частности вызывает дополнительное уменьшение скорости света, изменяет траектории движения планет, звезд, галактик и их собственные угловые моменты импульса, приводит к смещению или даже уничтожению точек либрации в некоторых системах тел и т. д. и т. п.

С целью приближения результатов исследований (в модельных задачах из области астрофизики) к реальности следует на уровне общей теории относительности учитывать фоновое гравитационное поле. Начиная с 1980-х гг. белорусская научная школа по проблеме движения тел в космосе приступила к исследованиям движения тел в среде. По этой тематике защищены две диссертации [25, 26] и опубликовано значительное количество работ, основные из которых [27–41]. Однако в проблеме релятивистского движения тел еще существует ряд пробелов (белых пятен), которые во времена интенсивного изучения освоения космоса необходимо ликвидировать.

Одним из них является следующий. Учет фонового гравитационного поля видоизменяет дифференциальные уравнения движения тел в космосе. Эти уравнения не являются грубыми (g-устойчивыми), т. е. малые изменения уравнений могут приводить к существенным изменениям их решений (см., напр., [6, 8]). Из проведенного выше обзора ясно, что для разных целей широко востребованы точки либрации, но их положение в пространстве и условия существования в среде не выяснены.

Целью настоящей работы является исследование, вносящее ясность в проблему точек либрации в среде.

Формулировка задачи, символика и вывод необходимых уравнений. Решаем ограниченную *круговую* задачу трех тел A_1, A_2, A_3, имеющих массы m_1, m_2, m_3. Тела A_1, A_2 – основные, тело A_3 – пробное. Поэтому $m_1 >> m_3$, $m_2 >> m_3$. Тело A_3 не влияет на движение тел A_1, A_2. По определению полагаем $m_3 = 0$. Движение тел происходит в однородной среде, плотность которой $\rho = \text{const}$, в шаре радиусом R.

Задачу решаем в 2 этапа: I этап. Ньютоновское приближение (НП) ОТО; II этап. постньютоновское приближение (ПНП) ОТО.

I этап. Ньютоновское приближение общей теории относительности. В пространстве вводим прямоугольную декартову систему координат $Ox^1x^2x^3$ и без ограничения общности считаем, что тела двигаются в координатной плоскости x^1Ox^2, т. е. в плоскости $x^3 = 0$. Символику для координат точек M и тел $A_k, k = 1,2,3$ выбираем следующей: $M(x^1, x^2, x^3)$, $A_k\left(a_k{}^1, a_k{}^2, a_k{}^3\right)$. Так как тела A_k двигаются в плоскости $x^3 = 0$, то всегда $a_k{}^3 = 0$. Центр масс C тел A_1 и A_2 в НП ОТО в пустоте определяется по правилу:

$$C(c^1, c^2, 0),\ c^i = \frac{m_1 a_1{}^i + m_2 a_2{}^i}{m_1 + m_2}, \quad i = 1 \text{ и } 2. \tag{4}$$

Систему координат выбираем барицентрической, т. е. в пустоте $c^i = 0$. Как показано в [40], уравнения движения (УД) двух тел в НП ОТО в однородной среде ($\rho = \text{const}$) имеют вид

$$\ddot{a}^i_{1\rho} = -\frac{\gamma m_2}{r^3_{12\rho}}\left(a^i_{1\rho} - a^i_{2\rho}\right) - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i_{1\rho}, \tag{5}$$

$$\ddot{a}^i_{2\rho} = -\frac{\gamma m_1}{r^3_{12\rho}}\left(a^i_{2\rho} - a^i_{1\rho}\right) - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^i_{2\rho}, \tag{6}$$

где координаты тел A_1 и A_2 снабжены индексом ρ, так как при учете плотности ρ среды координаты этих тел отличаются от их координат в пустоте; $r_{12\rho} = \left[\left(a_{2\rho}^1 - a_{1\rho}^1\right)^2 + \left(a_{2\rho}^2 - a_{1\rho}^2\right)^2\right]^{1/2}$ – ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2 в среде (точнее – расстояние между их центрами масс).

Центр масс тел A_1 и A_2 в среде C_ρ следует определить следующим образом:

$$C_\rho\left(c_\rho^1, c_\rho^2, 0\right), \quad c_\rho^i = \frac{m_1 a_{1\rho}{}^i + m_2 a_{2\rho}{}^i}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Умножив (5) на m_1, а (6) на m_2 и сложив полученные равенства, находим в силу (7) и (5), (6):

$$m_1 \ddot{a}_{1\rho}^i + m_2 \ddot{a}_{2\rho}^i = (m_1 + m_2)\ddot{c}_\rho^i = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\left(m_1 m_{1\rho}^i + m_2 a_{2\rho}^i\right) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho(m_1 + m_2)c_\rho^i. \tag{8}$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом

$$\ddot{c}_\rho^i + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho c_\rho^i = 0, \tag{9}$$

общим решением которого является функция

$$c_\rho^i = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\rho}\, t\right), \tag{10}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования. Решая задачу Коши для дифференциального уравнения (9) при начальных условиях $c_\rho^i(0) = 0$, $\dot{c}_\rho^i(0) = 0$, получаем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, т. е. при любом t имеем

$$c_\rho^i \equiv 0. \tag{11}$$

Следовательно, в НП ОТО при учете гравитационного поля однородной среды (ρ = const) система координат является барицентрической, если она в пустоте была таковой.

Интегрирование системы (5), (6) проводим по стандартной известной схеме (см., напр., [6, § 23]). В итоге получаем параметрические уравнения траекторий тел A_1 и A_2 ($m_1 \geq m_2$):

$$A_1\left(a_{1\rho}^1, a_{1\rho}^2\right) \begin{cases} a_{1\rho}^1 = -\dfrac{m_2 r_{12\rho}}{m_1 + m_2}\cos\varphi, \\ a_{1\rho}^2 = -\dfrac{m_2 r_{12\rho}}{m_1 + m_2}\sin\varphi; \end{cases} \qquad A_2\left(a_{2\rho}^1, a_{2\rho}^2\right) \begin{cases} a_{2\rho}^1 = \dfrac{m_1 r_{12\rho}}{m_1 + m_2}\cos\varphi, \\ a_{2\rho}^2 = \dfrac{m_1 r_{12\rho}}{m_1 + m_2}\sin\varphi, \end{cases} \tag{12}$$

где с точностью до вековых членов, первой степени ρ и второй степени e ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2 $r_{12\rho}$ определяется уравнением относительной орбиты тел

$$\frac{1}{r_{12\rho}} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} - \frac{2\pi p^2\rho}{m_1 + m_2}e\varphi\sin\varphi = \frac{1 + e\cos\left[\left(1 + \alpha_\rho^i\right)\varphi\right]}{p}, \quad \alpha_\rho^i = \frac{2\pi p^3\rho}{m_1 + m_2}; \tag{13}$$

угол $\varphi = \omega t$, ω – угловая скорость тел A_1 и A_2 на их орбитах и является переменной величиной.

Отметим частный случай: система (5), (6) допускает своим решением движение тел A_1 и A_2 по концентрическим окружностям с центром в начале координат. Тогда параметрические уравнения их траекторий также имеют вид (12) с той лишь разницей, что $r_{12\rho} = r_{0\rho} = \text{const}$, но угловая скорость $\omega_{0\rho}$ тел на их круговых орбитах ($\varphi = \omega_{0\rho} t$)

$$\begin{cases} a_{1\rho}^1 = -\dfrac{m_2}{m} r_{0\rho}\cos\varphi, \\ a_{1\rho}^2 = -\dfrac{m_2}{m} r_{0\rho}\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{2\rho}^1 = \dfrac{m_1}{m} r_{0\rho}\cos\varphi, \\ a_{2\rho}^2 = \dfrac{m_1}{m} r_{0\rho}\sin\varphi, \end{cases} \qquad m = m_1 + m_2 \tag{14}$$

определяется равенством

$$\omega_{0\rho}^2 = \frac{\gamma m}{r_{0\rho}^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho, \tag{15}$$

т. е. она будет постоянной, одинаковой для обоих тел A_1, A_2 и больше угловой скорости в пустоте $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3}$. Имеем ньютоновский эффект увеличения угловой скорости в однородной среде. Заметим, что для круговых орбит их радиусы в НП ОТО одинаковые в пустоте и в среде: $r_0 = r_{0\rho}$. Поэтому в формулах (14), (15) вместо $r_{0\rho}$ можно писать r_0.

Ньютоновские уравнения движения пробного тела A_3 и точки ρ-либрации. Принимаем в ньютоновском приближении общей теории относительности движения тел A_1 и A_2 *круговыми* ($e = 0$, $r_{12\rho} = r_{0\rho} = r_0 = p = \text{const}$), а тело A_3 в случае пустого пространства $\rho = 0$ – находящимся в одной из пяти точек либрации $L_1 - L_5$, т. е. в одной из коллинеарных точек L_1, L_2, L_3 или в одной из треугольных точек либрации L_4, L_5 (см. рис. 1).

Зная метрику пространства-времени, порожденного телами A_1, A_2 и материальным шаром, которая найдена в [29, (14.5)], из уравнений геодезической (см., напр., [6, 42, 43]) при $\alpha = i$ после необходимых преобразований получаем ньютоновские уравнения движения тела $A_3\left(a_{3\rho}^1, a_{3\rho}^2, 0\right)$ в однородной среде ($\rho = \text{const}$):

$$\ddot{a}_{3\rho}^i + \frac{\gamma m_1}{r_{31\rho}^3}\left(a_{3\rho}^i - a_{1\rho}^i\right) + \frac{\gamma m_2}{r_{32\rho}^3}\left(a_{3\rho}^i - a_{2\rho}^i\right) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\rho a_{3\rho}^i, \tag{16}$$

где $r_{31\rho} = \left|\vec{a}_{3\rho} - \vec{a}_{1\rho}\right|$ $r_{32\rho} = \left|\vec{a}_{3\rho} - \vec{a}_{2\rho}\right|$ – ньютоновские расстояния тела A_3 до тел A_1 и A_2 в среде внутри шара, $\vec{a}_{k\rho}$ имеет координаты $a_{k\rho}^i$, $k = 1,2,3$. Как видим, в уравнениях (16) справа появился по сравнению с классическим случаем в пустоте вместо нуля дополнительный член, что возможно вызовет изменения мест расположения тела A_3, т. е. положений точек либрации $L_1 - L_5$, или даже при некоторых условиях к отсутствию равновесных решений системы (16).

Естественным образом формулируется в НП ОТО

Задача 1. Выяснить, существуют ли смещения эйлеровых и лагранжевых точек либрации в зависимости от величины ρ и условия, при которых, может быть, система (16) не имеет либрационных решений в случае *круговых* движений тел в НП ОТО.

Решение системы (16) будем, как и в случае пустого пространства, искать в виде

$$a_{3\rho}^1 = a_{30\rho}^1 \cos\omega_{0\rho}t - a_{30\rho}^2 \sin\omega_{0\rho}t, \qquad a_{3\rho}^2 = a_{30\rho}^1 \sin\omega_{0\rho}t + a_{30\rho}^2 \cos\omega_{0\rho}t, \tag{17}$$

где $a_{30\rho}^1 = \text{const}$, $a_{30\rho}^2 = \text{const}$ – искомые координаты точек либрации при учете гравитационного поля однородной среды. Равенства (17) означают, что мы ищем точки либрации L_n^ρ, $n = 1,...,5$ во вращающейся вокруг точки O с угловой скоростью $\omega_{0\rho}$ из (15) системе координат $Oa_\rho^1 a_\rho^2$.

Дважды дифференцируем по t равенство (17):

$$\ddot{a}_{3\rho}^1 = -\omega_{0\rho}^2\left(a_{30\rho}^1 \cos\omega_{0\rho}t - a_{30\rho}^2 \sin\omega_{0\rho}t\right), \qquad \ddot{a}_{3\rho}^2 = -\omega_{0\rho}^2\left(a_{30\rho}^1 \sin\omega_{0\rho}t + a_{30\rho}^2 \cos\omega_{0\rho}t\right). \tag{18}$$

Найденные в (18) $\ddot{a}_{3\rho}^1$, $\ddot{a}_{3\rho}^2$ и $a_{3\rho}^1$, $a_{3\rho}^2$ из (17) подставляем в систему (16). После необходимых преобразований приходим к системе двух алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант $a_{30\rho}^1$ и $a_{30\rho}^2$:

$$a\cos\omega_{0\rho}t + b\sin\omega_{0\rho}t = 0, \qquad a\sin\omega_{0\rho}t - b\cos\omega_{0\rho}t = 0, \tag{19}$$

где

$$a = -\omega_{0\rho}^2 a_{30\rho}^1 + \frac{\gamma m_1}{r_{31\rho}^3}\left(a_{30\rho}^1 + \frac{m_2}{m}r_0\right) + \frac{\gamma m_2}{r_{32\rho}^3}\left(a_{30\rho}^1 - \frac{m_1}{m}r_0\right) + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a_{30\rho}^1, \tag{20}$$

$$b = \omega_{0\rho}^2 a_{30\rho}^2 - \frac{\gamma m_1}{r_{31\rho}^3} a_{30\rho}^2 - \frac{\gamma m_2}{r_{32\rho}^3} a_{30\rho}^2 - \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a_{30\rho}^2. \tag{21}$$

Решением системы (19) являются $a = 0$, $b = 0$, которые можно, заменив $\omega_{0\rho}^2$ его выражением (15), окончательно записать в виде

$$-\frac{\gamma m}{r_0^3} a_{30\rho}^1 + \frac{\gamma m_1}{r_{31\rho}^3}\left(a_{30\rho}^1 + \frac{m_2}{m} r_0\right) + \frac{\gamma m_2}{r_{32\rho}^3}\left(a_{30\rho}^1 - \frac{m_1}{m} r_0\right) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\gamma m}{r_0^3} a_{30\rho}^2 - \frac{\gamma m_1}{r_{31\rho}^3} a_{30\rho}^2 - \frac{\gamma m_2}{r_{32\rho}^3} a_{30\rho}^2 = 0. \tag{23}$$

Отмечаем очень важное обстоятельство: благодаря наличию в $\omega_{0\rho}^2$ члена $4\pi\gamma\rho/3$ в выражениях (20), (21) и уравнениях (22), (23) уничтожились члены $(4/3)\pi\gamma\rho a_{30\rho}^1$ и $(4/3)\pi\gamma\rho a_{30\rho}^2$ (!). Это означает, что уравнения (22) и (23) эквивалентны уравнениям, которые решались Л. Эйлером и Ж. Л. Лагранжем. Следовательно, эйлеровы и лагранжевы точки либрации $L_1 - L_5$ существуют и гравитационным полем однородной среды в НП ОТО никуда не смещаются в случае *круговых* движений тел, но угловая скорость движения всех точек либрации $L_1 - L_5$ и тел A_1, A_2 по их окружностям согласно (15) больше, чем в пустоте ω_0.

Задача 1 решена, но представляет интерес задача того же типа в случае неоднородного распределения плотности, например для центрально симметрического распределения плотности среды внутри шара:

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad 0 \le r \le R; \quad \rho = 0 \ \text{ при } R \le r < +\infty. \tag{24}$$

Формулируем условие этой задачи.

Задача 2. Выяснить, существуют ли в НП ОТО круговые движения тел и эйлеровы, и лагранжевы точки либрации в ограниченной задаче трех тел внутри шара с распределением плотности среды (24).

Решение. В работе [41] выведены УД двух тел в НП ОТО в среде (24), которые в принятых здесь обозначениях имеют вид (i = 1 и 2):

$$\ddot{a}_{1\rho_0}^i = -\frac{\gamma m_2}{r_{12\rho_0}^3}\left(a_{1\rho_0}^i - a_{2\rho_0}^i\right) - 2\pi\gamma\rho_0\left(\frac{2}{3} - \frac{a_1}{2R}\right)a_{1\rho_0}^i, \quad a_1 \le R, \tag{25}$$

$$\ddot{a}_{2\rho_0}^i = -\frac{\gamma m_1}{r_{12\rho_0}^3}\left(a_{2\rho_0}^i - a_{1\rho_0}^i\right) - 2\pi\gamma\rho_0\left(\frac{2}{3} - \frac{a_2}{2R}\right)a_{2\rho_0}^i, \quad a_2 \le R, \tag{26}$$

где $a_{1\rho_0}^i$, $a_{2\rho_0}^i$ – координаты тел A_1, A_2, учитывающие влияние на движения тел гравитационного поля среды; $r_{12\rho_0} = \left[\left(a_{2\rho_0}^1 - a_{1\rho_0}^1\right)^2 + \left(a_{2\rho_0}^2 - a_{1\rho_0}^2\right)^2\right]^{1/2}$ – ньютоновское расстояние между телами A_1 и A_2, находящимися в среде (24); a_1^i, a_2^i – координаты тел A_1, A_2 в пустоте; $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $a_1 = \left|\vec{a}_1\right|$, $a_2 = \left|\vec{a}_2\right|$ – ньютоновские радиусы-векторы тел A_1, A_2 и их расстояния до начала координат соответственно. Последние члены справа в (25), (26) пропорциональны плотности ρ_0, которую из-за ее малости (см. (1)–(3)) учитываем только в первой степени.

Выясним, допускаются ли круговые движения тел A_1, A_2 системой (25), (26). Для этого запишем параметрические уравнения круговых орбит тел A_1 и A_2 ($r_0 = r_{12\rho_0} = \text{const}$):

$$A_1\left(a_{1\rho_0}^1, a_{1\rho_0}^2\right) \begin{cases} a_{1\rho_0}^1 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \cos(\omega_{\rho_0} t), \\ a_{1\rho_0}^2 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \sin(\omega_{\rho_0} t); \end{cases} \qquad A_2\left(a_{2\rho_0}^1, a_{2\rho_0}^2\right) \begin{cases} a_{2\rho_0}^1 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \cos(\omega_{\rho_0} t), \\ a_{2\rho_0}^2 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \sin(\omega_{\rho_0} t). \end{cases} \tag{27}$$

Находим вторые производные по времени координат $a^i_{1\rho 0}$, $a^i_{2\rho 0}$ из (27):

$$\begin{aligned} \ddot{a}^1_{1\rho 0} &= \frac{m_2}{m} r_0 \omega^2_{\rho 0} \cos\varphi, & \ddot{a}^1_{2\rho 0} &= -\frac{m_1}{m} r_0 \omega^2_{\rho 0} \cos\varphi, \\ \ddot{a}^2_{1\rho 0} &= \frac{m_2}{m} r_0 \omega^2_{\rho 0} \sin\varphi; & \ddot{a}^2_{2\rho 0} &= -\frac{m_1}{m} r_0 \omega^2_{\rho 0} \sin\varphi, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\varphi = \omega_{\rho 0} t$. Подставив $\ddot{a}^i_{1\rho 0}$, $\ddot{a}^i_{2\rho 0}$ из (28) и $a^i_{1\rho 0}$, $a^i_{2\rho 0}$ из (27) в (25), (26), получим соответственно с точностью до ρ_0 в первой степени два равенства

$$\omega^2_{\rho 0} = \frac{\gamma m}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 - \pi\gamma\rho_0 \frac{a_1}{R}, \tag{29}$$

$$\omega^2_{\rho 0} = \frac{\gamma m}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 - \pi\gamma\rho_0 \frac{a_2}{R}, \tag{30}$$

которые при $a_1 \neq a_2$ приводят к противоречию. Это означает, что система (25), (26) при разных a_1 и a_2 запрещает круговые движения тел A_1 и A_2 с одинаковыми угловыми скоростями, что в свою очередь влечет *отсутствие* в рассматриваемых условиях точек либрации $L_1 - L_5$.

Только в частном случае, когда $a_1 = a_2 = a_0 = \text{const}$, что происходит при $m_1 = m_2 = m_3$, частным решением системы (25), (26) является окружность радиусом a_0, параметрические уравнения которой

$$a^1 = a_0 \cos(\omega_{\rho 0} t), \qquad a^2 = a_0 \sin(\omega_{\rho 0} t), \quad a_0 \le R. \tag{31}$$

Тела A_1 и A_2 двигаются по окружности (31) с угловой скоростью

$$\omega_{\rho 0} = \left(\frac{\gamma m}{r_0^3} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0 - \pi\gamma\rho_0 \frac{a_0}{R} \right)^{1/2}, \quad r_0 = 2a_0, \quad m = 2m_0, \tag{32}$$

находясь в диаметрально противоположных точках. Параметрические уравнения тел A_1 и A_2 при этом имеют вид

$$A_1\left(a^1_{1\rho 0}, a^2_{1\rho 0}\right) \begin{cases} a^1_{1\rho 0} = -a_0 \cos(\omega_{\rho 0} t), \\ a^2_{1\rho 0} = -a_0 \sin(\omega_{\rho 0} t); \end{cases} \quad A_2\left(a^1_{2\rho 0}, a^2_{2\rho 0}\right) \begin{cases} a^1_{2\rho 0} = a_0 \cos(\omega_{\rho 0} t), \\ a^2_{2\rho 0} = a_0 \sin(\omega_{\rho 0} t), \end{cases} \tag{33}$$

где $\omega_{\rho 0}$ определяется формулой (32). В рассматриваемом частном случае все точки ρ-либрации существуют. Из соображений симметрии точки равновесия во вращающейся с угловой скоростью $\omega_{\rho 0}$ системе координат $Ox^1_{\rho 0} x^2_{\rho 0}$ расположены следующим образом: $L_1^{\rho 0}$ совпадает с началом координат O; $L_{4,5}^{\rho 0}$ имеют координаты $(0, \pm a_0\sqrt{3})$; $L_2^{\rho 0}$ и $L_3^{\rho 0}$ расположены на оси $Ox^1_{\rho 0}$ симметрично относительно O в интервалах $(a_0, +\infty)$ и $(-a_0, -\infty)$ соответственно (рис. 2).

Решение задачи 2 закончено, но остается некоторая неудовлетворенность. Хотелось бы получить четкий ответ на вопрос: каковы физические причины исчезновения точек равновесия, т. е. точек либрации, в неоднородной среде в НП ОТО?

Движение центра масс тел A_1 и A_2. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим поведение центра масс (ЦМ) тел A_1, A_2 в неоднородной среде (24) в НП ОТО, который определяется аналогично (4) или (7):

$$C_{\rho 0}\left(c^1_{\rho 0}, c^2_{\rho 0}\right), \; c^i_{\rho 0} = \frac{m_1 a^i_{1\rho 0} + m_2 a^i_{2\rho 0}}{m}, \quad i = 1 \text{ и } 2, \tag{34}$$

где $a^i_{1\rho 0}$, $a^i_{2\rho 0}$ – ньютоновские координаты тел A_1, A_2 в среде (24). Эти координаты подчинены УД (25), (26).

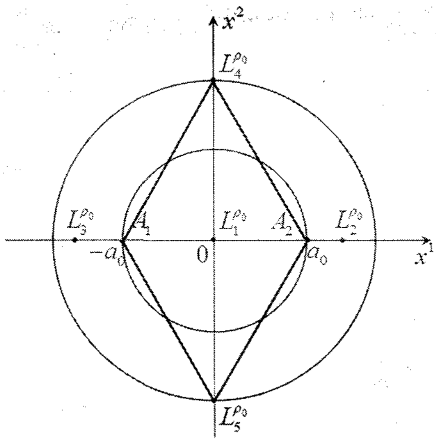

Рис. 2. Дано расположение тел A_1, A_2 и точек ρ_0-либрации $L_1^{\rho 0} - L_5^{\rho 0}$ (т. е. пробного тела A_3) в начальный момент времени $t = 0$, которые все вращаются по своим окружностям с центром O. Изображен частный случай $m_1 = m_2$, $a_1 = a_2 = a_0$, $OL_3^{\rho 0} = OL_2^{\rho 0}$

Fig. 2. The location of bodies A_1, A_2 and ρ_0-libration points $L_1^{\rho 0} - L_5^{\rho 0}$ (i. e. Test body A_3) at the initial point of time $t = 0$, which all rotate along their circles with the center O. The particular case is shown when $m_1 = m_2$, $a_1 = a_2 = a_0$, $OL_3^{\rho 0} = OL_2^{\rho 0}$

Дважды продифференцируем по времени t равенство (34), затем вместо появившихся $\ddot{a}^i_{1\rho 0}$, $\ddot{a}^i_{2\rho 0}$ подставим их выражения из УД (25), (26) и учтем условие барицентричности (в (4) $c^i = 0$ или в (11) $c^i_\rho = 0$). Тогда получим

$$\ddot{c}^i_{\rho 0} = \frac{m_1\ddot{a}^i_{1\rho 0} + m_2\ddot{a}^i_{2\rho 0}}{m} = \frac{\pi\gamma\rho_0}{Rm}\left(m_1 a_1 a_1^i + m_2 a_2 a_2^i\right), \tag{35}$$

где величины в скобках относятся к пустому пространству ($\rho_0 = 0$) и вычислены в неподвижной барицентрической системе координат Ox^1x^2 (инерциальной системе отсчета); a_1, a_2 – ньютоновские радиусы круговых орбит тел A_1, A_2 в пустоте; a_1^i, a_2^i выражаются формулами

$$A_1 \begin{cases} a_1^1 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \cos(\omega_0 t), \\ a_1^2 = -\dfrac{m_2}{m} r_0 \sin(\omega_0 t); \end{cases} \qquad A_2 \begin{cases} a_2^1 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \cos(\omega_0 t), \\ a_2^2 = \dfrac{m_1}{m} r_0 \sin(\omega_0 t), \end{cases} \tag{36}$$

которые являются параметрическими уравнениями круговых траекторий тел A_1, A_2, $r_0 = r_{12} = A_1A_2$ – расстояние между телами A_1 и A_2, $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3}$.

Подставив a_1^i, a_2^i из (36) в (35), приходим к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения координат $c^i_{\rho 0}$ ЦМ тел A_1 и A_2 в среде (24) в НП ОТО:

$$\ddot{c}^1_{\rho 0} = K\cos(\omega_0 t), \quad \ddot{c}^2_{\rho 0} = K\sin(\omega_0 t), \tag{37}$$

где

$$K = \frac{\pi\gamma\rho_0 m_1 m_2 r_0}{Rm^2}(a_2 - a_1). \tag{38}$$

Заменив a_1, a_2 в (38) их значениями $a_1 = m_2 r_0/m$, $a_2 = m_1 r_0 / m$ и решив задачу Коши для уравнений (37) при начальных условиях $c^i_{\rho 0}(0) = 0$, $\dot{c}^i_{\rho 0}(0) = 0$, получим частное решение системы (37), в котором $\varphi = \omega_0 t$:

$$c^1_{\rho 0} = K_0(1 - \cos\varphi), \quad c^2_{\rho 0} = K_0(\varphi - \sin\varphi), \quad K_0 = K/\omega_0^2 = \frac{\pi\rho_0 r_0^5 m_1 m_2 (m_1 - m_2)}{Rm^4}. \tag{39}$$

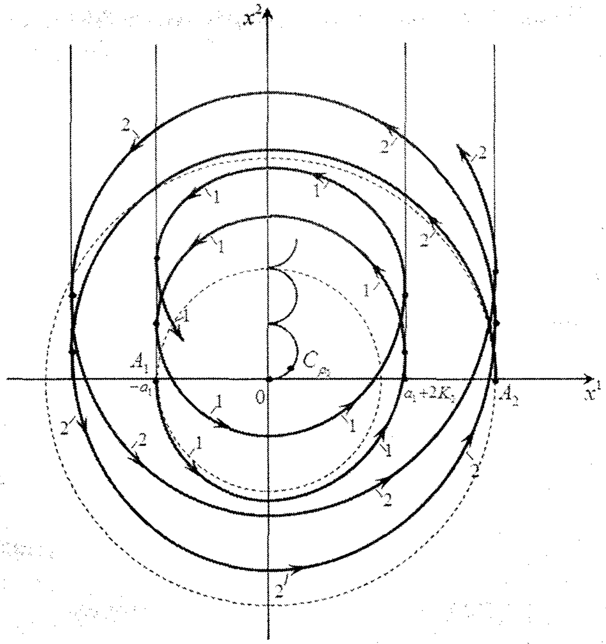

Рис. 3. Представлено поведение тел A_1, A_2 и их ЦМ в НП ОТО в неоднородной среде. Тело A_1 описывает витки, уходящие вверх и касающиеся вертикальных полупрямых $x^1 = -a_1$ и $x^1 = -a_1 + 2K_0$ в точках $(-a_1, 2n\pi K_0)$ и $\left(a_1 + 2K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Аналогично: тело A_2 описывает уходящие вверх витки, касающиеся полупрямых $x^1 = a_2$ и $x^1 = -a_2 + \pi K_0$ в точках $(a_2, 2n\pi K_0)$ и $\left(-a_2 + \pi K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$ соответственно. Пунктиром изображены окружности, по которым двигаются тела A_1 и A_2 в пустоте

Fig. 3. The behavior of bodies A_1, A_2 and their CMs in NA of GTR in an inhomogeneous medium. Body A_1 describes the turns going up and touching the vertical half-lines $x^1 = -a_1$ and $x^1 = -a_1 + 2K_0$ at the points $(-a_1, 2n\pi K_0)$ and $\left(a_1 + 2K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$, $n = 0,1,2,\ldots$. Similarly, body A_2 describes the upward loops touching the half-lines $x^1 = a_2$ and $x^1 = -a_2 + \pi K_0$ at the points $(a_2, 2n\pi K_0)$ and $\left(-a_2 + \pi K_0, (2n+1)\pi K_0\right)$ respectively. The dotted line shows the circles, along which bodies A_1 and A_2 move in the void

Уравнения (39) определяют циклоиду, находящуюся при $m_1 > m_2$ в первой четверти с базой на положительной полуоси Ox^2 системы координат Ox^1x^2, которая, следовательно, не является барицентрической для тел A_1, A_2 в среде (24), хотя в пустоте она была таковой (рис. 3).

Таким образом, проясняется причина исчезновения точек либрации в неоднородной среде (24): для тел A_1, A_2 *не существует* в неоднородной среде в НП ОТО барицентрической системы координат, ЦМ тел в любой инерциальной системе координат не остается в покое; тела A_1, A_2 не могут передвигаться по окружностям, а каждое из тел описывает *витки*, которые с течением времени «уходят» при $K_0 > 0$ в бесконечность в положительном направлении оси Ox^2 (см. рис. 3, на котором изображено по два витка для каждого тела, соответствующих двум аркам циклоиды (39)).

О точках либрации в постньютоновском приближении общей теории относительности. Проблему удобно разделить на три случая: в пустоте, в однородной среде, в неоднородной среде.

1. В «пустом» пространстве ($\rho = 0$) точки либрации, движение тел и их устойчивость по Ляпунову в ограниченной круговой задаче трех тел нами рассмотрены в 1970-х гг. (см. [6, § 28–31]).

Дополним проведенное в [6] рассмотрение следующей информацией.

В постньютоновском приближении общей теории относительности с точностью до вековых членов тела A_1 и A_2 во вращающейся системе координат имеют координаты

$$A_1\left(-\frac{m_2}{m}r_0, \frac{2\gamma m_2}{c^2m^2}\left(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2\right)\omega_0 t\right), \tag{40}$$

$$A_2\left(\frac{m_1}{m}r_0, -\frac{2\gamma m_1}{c^2m^2}\left(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2\right)\omega_0 t\right). \tag{41}$$

Из вида координат в (40), (41) следует, что $r_0 = A_1A_2$ – расстояние между телами A_1 и A_2, расстояния тел до начала координат постоянны и равны $A_1O = m_2r_0/m$, $A_2O = m_1r_0/m$, прямая A_1A_2 в ПНП ОТО вращается около начала координат с угловой скоростью

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0\left[1 - \frac{\gamma\left(3m_1^2 + 5m_1m_2 + 3m_2^2\right)}{2c^2mr_0}\right], \tag{42}$$

т. е. в пустоте тела A_1, A_2 в ПНП ОТО имеют угловую скорость движения по круговым орбитам $\tilde{\omega}_0$, которая меньше их угловой скорости $\omega_0 = \sqrt{\gamma m/r_0^3}$ в НП ОТО (см. [6, формулы (30.1), (31.2)]).

Пробное тело A_3, находящееся в НП ОТО в одной из точек либрации, в ПНП ОТО смещается вековым образом из этих точек: коллинеарные точки L_1, L_2, L_3 сходят с прямой A_1A_2, а расстояния треугольных точек либрации L_4, L_5 до тел A_1 и A_2 меняются вековым образом, кроме случая, когда массы m_1, m_2 тел A_1, A_2 подчинены условию

$$m_1 > \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2}m_2 \approx 24{,}939m_2. \tag{43}$$

В случае (43) лагранжевы треугольники $A_1A_2L_4$, $A_1A_2L_5$ с точностью до вековых членов в НП ОТО и ПНП ОТО совпадают (см. [6, § 30, 31]).

Замечание. Вековые смещения точек либрации можно рассматривать, с одной стороны, как их уничтожение, а с другой – как их неустойчивость по Ляпунову при постоянно действующих возмущениях [5–8].

2. В случае однородной среды (ρ = const $\neq 0$) в НП ОТО для круговых движений тел A_1, A_2 существует, как нами показано выше (см. формулы (4)–(11) и сопутствующий им текст), барицентрическая система координат, т. е. такая инерциальная система отсчета, в которой их ЦМ покоится в начале координат. Оказывается, что при переходе из НП ОТО в ПНП ОТО свойство барицентричности теряется и, как доказывается в работе [40], ЦМ этих тел должен двигаться по циклоиде, параметрические уравнения которой в неподвижной системе координат Ox^1x^2 имеют вид (ЦМ тел A_1 и A_2 и его координаты обозначены символами $\tilde{C}_\rho\left(\tilde{c}_\rho^1, \tilde{c}_\rho^2\right)$):

$$\tilde{c}_\rho^1 = \frac{\pi\gamma\rho r_0^3}{c^2m^2}W\left(1 - \cos\varphi\right), \qquad \tilde{c}_\rho^2 = \frac{\pi\gamma\rho r_0^3}{c^2m^2}W\left(\varphi - \sin\varphi\right), \tag{44}$$

где $\varphi = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\gamma m/r_0^3}$. Величина W = const и определяется формулой

$$\begin{aligned} W = m_1^2&\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{a_1} + \frac{R^2 - a_1^2}{a_1^2}\ln\frac{R - a_1}{R + a_1}\right) + \frac{4R^3}{\left(R + a_1\right)^3}\right] - \\ - m_2^2&\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{a_2} + \frac{R^2 - a_2^2}{a_2^2}\ln\frac{R - a_2}{R + a_2}\right) + \frac{4R^3}{\left(R + a_2\right)^3}\right] + \\ &+ 2m_1m_2\left(a_1 - a_2\right)\left(\frac{4R^3}{3a_1^2a_2^2} - \frac{1}{r_0}\right), \end{aligned} \tag{45}$$

где все величины имеют ранее оговоренный смысл.

Отметим, что, как и в случае циклоиды (39), при $m_1 = m_2$ (тогда и $a_1 = a_2$) циклоида (44) исчезает, так как согласно (45) $W = 0$. В этом частном случае ЦМ покоится, и система координат Ox^1x^2 является барицентрической.

3. Случай *неоднородной* плотности среды (24) подробно рассмотрен в НП ОТО при решении задачи 2 и ее частного случая (см. текст, сопровождающий формулы (25)–(33)). Для рассмотрения тех же вопросов в ПНП ОТО следует привлечь УД (34)–(36) из нашей недавней работы [41], которые не выписываем из-за их громоздкости и которые отличаются от УД в НП ОТО (25),

(26) появлением справа релятивистских силовых добавок F_1^i, F_2^i. Эти добавки состоят из суммы двух частей:

$$F_1^i = F_{1(g)}^i + F_{1(g\rho_0)}^i, \quad F_2^i = F_{2(g)}^i + F_{2(g\rho_0)}^i,$$

где $F_{1(g)}^i$, $F_{2(g)}^i$ не зависят от ρ_0, а $F_{1(g\rho_0)}^i$, $F_{2(g\rho_0)}^i$ зависят от ρ_0. Отношение последних к ньютоновским членам с ρ_0 в (25), (26) для стандартных пар звезд или пар тел планетарных систем есть малые величины $\sim (10^{-8} \div 10^{-12})$. Поэтому влиянием силовых добавок $F_{1(g\rho_0)}^i$, $F_{2(g\rho_0)}^i$ на результаты пунктов 1, 2, 3 можно пренебречь. Что же касается силовых добавок $F_{(g)}^i$, $F_{2(g)}^i$, то их отношение к тем же ньютоновским членам для тех же пар тел имеют порядок $\sim (10^2 \div 10^6)$ и, следовательно, эти силовые добавки могут играть главенствующую роль в формировании точек либрации или в их уничтожении. Используя нужные формулы и экспериментальные данные о парах тел, ниже дадим численные оценки открытым новым эффектам.

Подводим итог. Рассмотрение всех трех случаев показывает, что в ПНП ОТО в пустоте, в однородной и в неоднородной средах точки либрации постоянно действующими релятивистскими силовыми добавками почти всегда *уничтожаются*. Только при условии (43) треугольные точки либрации существуют во всех трех случаях. Это означает, что при условии (43) треугольные точки либрации устойчивы по Ляпунову, а во всех остальных случаях точки либрации неустойчивы (см. [5, 6, 8]).

Обсуждение и численные оценки некоторых эффектов.

1. Ньютоновский эффект увеличения угловой скорости в *однородной* среде. Он характеризуется формулой (15) и его численные оценки будут разными в зависимости от области применимости.

а) В *межпланетной* среде согласно источникам [12, 16, 20, 22, 44] ее плотность $\rho_{\text{мп}}$ имеет порядок, указанный формулой (1). Тогда добавочный член в (15)

$$\frac{4}{3}\pi\gamma\rho_{\text{мп}} \approx 3(10^{-25} \div 10^{-30})\,\text{с}^{-2}, \tag{46}$$

а основной член в планетарной системе типа Солнечной (радиус R которой принимается (см., напр., [45]) $R \sim 10^5$ а. е. $= 10^5(1{,}5 \cdot 10^{13}$ см$) = 1{,}5 \cdot 10^{18}$ см, расстояние между Солнцем (звездой) и планетой $r_0 \sim (10^{13} \div 10^{18})$ см, масса звезды $m = 2 \cdot 10^{33}$ г) имеет оценку

$$\frac{4}{3}\pi\gamma\rho_{\text{мп}} \approx 3(10^{-25} \div 10^{-30})\,\text{с}^{-2}, \tag{47}$$

Из оценок (46), (47) следует в согласии с (15) оценка

$$\omega_{0\rho} = \left[\frac{\gamma m}{r_0^3}\left(1 + \frac{4\pi\gamma\rho_{\text{ì ï}}}{3\omega_0^2}\right)\right]^{1/2} \approx \omega_0\left[1 + \frac{3(10^{-25} \div 10^{-30})}{10^{-13} \div 10^{-28}}\right]^{1/2} =$$

$$= \omega_0\left[1 + 3(10^{-17} \div 10^3)\right]^{1/2}, \quad \max\omega_{0\rho} \approx 55\omega_0. \tag{48}$$

Согласно новейшим данным [46], плотность газопылевой среды, измеренная космическими аппаратами Pioner 10 и 11 на расстояниях от Солнца 20–70 а. е., составляет $\rho_{\text{мп}} \approx (5 - 30) \cdot 10^{-20}$ г $\cdot$ см$^{-3}$. Для однозначности оценки (48) возьмем $\rho_{\text{мп}} = 10^{-19}$ г $\cdot$ см$^{-3}$, $r_0 = 0{,}6 \cdot 10^{15}$ см (среднее расстояние Плутона до Солнца), $m_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г. Тогда получим:

$$\omega_0 \approx 8 \cdot 10^{-6}\ \text{с}^{-1}, \quad 4\pi\gamma\rho_{\text{мп}}/3 \approx 3 \cdot 10^{-26}\ \text{с}^{-2}, \quad \omega_{0\rho} \approx (\omega_0 + 10^{-21})\,\text{с}^{-1}, \tag{49}$$

т. е. в рассматриваемой реальной ситуации $\omega_{0\rho}$ практически совпадает с ω_0.

Зависимость (15) показывает, что при увеличении r_0 угловая скорость $\omega_{0\rho}$ уменьшается и стремится к постоянной добавочной угловой скорости $\sqrt{4\pi\gamma\rho/3}$. Это означает, что добавочная угловая скорость, возникающая благодаря гравитационному полю среды, может оказаться близкой к ω_0.

Подкрепим это утверждение следующим экзотическим примером (см. [16]). На международной астрономической конференции в г. Падуе была выдвинута гипотеза, подкрепленная математическими расчетами, в которой утверждается, что внутри облака Оорта, которое принадлежит Солнечной системе, скрывается «истинная» десятая планета, которая в 1,5–6 раз массивнее Юпитера и обращается вокруг Солнца на расстоянии $r_0 = 25000$ а. е. $= 3{,}75 \cdot 10^{17}$ см. Для этой гипотетической планеты при той же плотности среды $\rho_{\text{мп}} = 10^{-19}$ г $\cdot$ см$^{-3}$ имеем:

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma M_\odot / r_0^3} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}, \quad 4\pi\gamma\rho_{\text{мп}}/3 \approx 2{,}8 \cdot 10^{-26} \text{ с}^{-2}, \quad \omega_{0\rho} \approx 1{,}5\omega_0, \tag{50}$$

т. е. добавочная угловая скорость равна половине основной.

б) *Межзвездная* среда имеет плотность (2), а расстояния между парами звезд могут быть малыми («тесные» пары) и значительными («широкие» пары). Принимая массы звезд $m_1 = m_2 = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, расстояние r_0 между ними для тесной пары в среднем $r_{0(\text{т})} = 10^{15}$ см, а для широких пар $r_{0(\text{ш})}^{(1)} = 10^{19}$ см или $r_{0(\text{ш})}^{(2)} = 10^{20}$ см, получаем соответственно, приняв $\rho_{\text{мз}} = 10^{-25}$ г $\cdot$ см$^{-3}$ (см. также (48)):

$$\begin{cases} \omega_{0(\text{т})} \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}, & & \omega_{0\rho(\text{т})} \approx \omega_{0(\text{т})}(1 + 1/2 \cdot 10^{-13}) \text{ с}^{-1}, \\ \omega_{0(\text{ш})}^{(1)} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1}, & \dfrac{4}{3}\pi\gamma\rho_{\text{мз}} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-32} \text{ с}^{-2}, & \omega_{0\rho(\text{ш})}^{(1)} \approx \omega_{0(\text{ш})}^{(1)}(1 + 1/2 \cdot 10^{-1}) \text{ с}^{-1}, \\ \omega_{0(\text{ш})}^{(2)} = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}, & & \omega_{0\rho(\text{ш})}^{(2)} \approx \omega_{0(\text{ш})}^{(2)}(1 + 1/2 \cdot 10^{2}) \text{ с}^{-1}. \end{cases} \tag{51}$$

Таким образом, численные оценки (51) показывают, что в реальных ситуациях $\omega_{0\rho}$ для систем из двух звезд в гравитационном поле, создаваемом звездами и однородной средой, может на несколько порядков превосходить ω_0 в пустоте. Это обстоятельство следует учитывать в вопросах космологии.

в) В *межгалактической* среде плотностью (3), опираясь на астрофизические данные наблюдений, несложно получить численные оценки $\omega_{0\rho}$ для пар галактик, аналогичные оценкам (51) для пар звезд (темы для курсовых студенческих работ и НИРС).

2. Рассмотрим теперь три взаимосвязанных эффекта, впервые полученные выше: 1) ньютоновский эффект исчезновения барицентрической системы координат в неоднородной среде для пары тел; 2) циклоидальное движение ЦМ двух тел (39); 3) кружевной эффект движения (КЭД) двух тел (см. формулы (34)–(39) и относящийся к ним текст, а также рис. 3).

Дадим оценку длины базы циклоиды (39), т. е. оценим расстояния $2\pi K_0$ при значениях m_1, m_2, r_0, ρ_0, сопутствующих выводу оценок (51), выбрав $R = 10^{21}$ см. Тогда получаем согласно формуле для K_0 из (39) три оценки:

$$2\pi K_{0(\text{т})} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ см}, \quad 2\pi K_{0(\text{ш})}^{(1)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{15} \text{ см} \approx 167 \text{ а. е.}, \quad 2\pi K_{0(\text{ш})}^{(2)} \approx 2{,}5 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 1{,}67 \cdot 10^{7} \text{ а. е.} \tag{52}$$

Итак, при *одном обороте* пары тел A_1, A_2 (φ изменяется на 2π) центр масс тел смещается на указанные оценками (52) расстояния. Эти расстояния в планетарных системах ничтожно малые, но в звездных системах ЦМ двойных звезд может «вояжировать» в среде на значительные расстояния. Скорости и направления движения ЦМ у разных двойных звезд будут разными, что должно приводить к их столкновениям и различным космологическим следствиям, например, к формированию структуры галактики, в которой они находятся.

3. Оценим период T обращения двойных звезд, воспользовавшись оценками (51). Имеем

$$\begin{aligned} T_{(\text{т})} &= 2\pi/\omega_{0\rho(\text{т})} \approx 1{,}26 \cdot 10^{10} \text{ с} \approx 400 \text{ лет}, \\ T_{(\text{ш})}^{(1)} &= 2\pi/\omega_{0\rho(\text{ш})}^{(1)} \approx 1{,}20 \cdot 10^{16} \text{ с} \approx 380 \text{ лет}, \\ T_{(\text{ш})}^{(2)} &= 2\pi/\omega_{0\rho(\text{ш})}^{(2)} \approx 0{,}78 \cdot 10^{16} \text{ с} \approx 250 \text{ лет}. \end{aligned} \tag{53}$$

4. Релятивистский эффект (44), (45) так же, как и эффект (39), предсказывает вековое смещение центр масс тел A_1 и A_2 по циклоиде, но циклоида (44), (45) возникает в *однородной* среде в ПНП ОТО, а циклоида (39), по которой движется ЦМ тел в *неоднородной* среде, появляется уже в НП ОТО. Поэтому расположение и размеры циклоид (39) и (44), (45) разные. Численные оценки для циклоиды (39) даны выше в п. 2. Пользуясь формулами (44), (45), можно достаточно просто оценить в разных случаях длину базы и расположение циклоиды (44), (45), а также координаты ЦМ (44).

Список использованных источников

1. Шарлье, К. Небесная механика / К. Шарлье. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. Субботин, М. Ф. Введение в теоретическую астрономию / М. Ф. Субботин. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
3. Гребеников, Е. А. Задача трех тел / Е. А. Гребеников // Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М. : Наука, 1976. – Ч. 5. – С. 524–553.
4. Дубошин, Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы / Г. Н. Дубошин. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
5. Маркеев, А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
6. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1979. – 240 с.
7. Себехей, В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел / В. Себехей. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
8. Рябушко, А. П. Проблема устойчивости движения тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1987. – 112 с.
9. Euler, L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium / L. Euler // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. – 1767. – Vol. 11. – P. 144–151.
10. Lagrange, J. Essais sur le problem des trois corps / J. Lagrange. – Paris, 1772.
11. Дубошин, Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г. Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
12. Ипатов, С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С. И. Ипатов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
13. Kordylevski, K. Photographische Untersungen Libration-spunktes L_5 im System Erdi-Mond / K. Kordylevski // Acta Astron. – 1961. – Vol. 11. – P. 165–169.
14. Kordylevski, K. Dust Cloud Moons of the Earth / K. Kordylevski // Phis. Today. – 1967. – Vol. 20, № 2. – P. 39–46. https://doi.org/10.1063/1.3034149
15. Клищенко, А. П. Астрономия / А. П. Клищенко, В. И. Шупляк. – М.: Новое знание, 2004. – 224 с.
16. Стражев, В. И. К тайнам Вселенной / В. И. Стражев. – Минск: РИВШ, 2006. – 160 с.
17. Рябушко, А. П. Уравнения движения и движение вращающихся симметричных масс в общей теории относительности: автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук / А. П. Рябушко. – Минск, 1958. – 8 с.
18. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности: автореф. дисс. … д-ра физ.-мат. наук / А. П. Рябушко. – Минск, 1972. – 16 с.
19. Баханьков, А. А. Устойчивость движения вращающихся тел в общей теории относительности: автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / А. А. Баханьков. – Минск: БГУ. – 1981. – 16 с.
20. Мартынов, Д. Я. Курс общей астрофизики / Д. Я. Мартынов. – М.: Наука, 1988. – 616 с.
21. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.
22. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – Фрязино: Век-2, 2011. – 576 с.
23. Райзен, И. Новый сюрприз Вселенной: темная энергия / И. Райзен // Наука и жизнь. – 2004. – № 3. – С. 38–42.
24. Лукаш, В. Н. Темная энергия: мифы и реальность / В. Н. Лукаш, В. А. Рубаков // Успехи физ. наук. – 2008. – Т. 178, № 3. – С. 301–308.
25. Неманова, И. Т. Релятивистское движение тел в среде: автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.02. / И. Т. Неманова. – Минск, 1987. – 14 с.
26. Жур, Т. А. Релятивистское движение вращающихся тел в среде: автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Т. А. Жур. – Минск, 1999. – 18 с.
27. Рябушко, А. П. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1983. – Т. 27, № 10. – С. 889–892.
28. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения пробных тел в газопылевом шаре с притягивающим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, №9. – С. 806–809.
29. Рябушко, А. П. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1987. – Т. 31, № 8. – С. 519–522.
30. Жур, Т. А. Релятивистское поступательное движение вращающейся частицы в среде / Т. А. Жур, И. Т. Неманова, А. П. Рябушко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 1. – С. 79–83.
31. Жур, Т. А. Релятивистское вращение частицы в среде / Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 3. – С. 82–85.

32. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения поступательного движения двух вращающихся тел сравнимых масс в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 64–68.

33. Рябушко, А. П. Релятивистское поступательное движение двух вращающихся тел сравнимых масс в среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 68–73.

34. Рябушко, А. П. Релятивистские собственные вращения двух тел в гравитирующей среде / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. – 2004. – № 2. – С. 61–65.

35. Рябушко, А. П. Риманово пространство-время, определяемое неоднородным газопылевым шаром с гравитирующим центром, в общей теории относительности / А. П. Рябушко, Т. А. Жур, И. Т. Неманова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 77–85.

36. Рябушко, А. П. Релятивистские эффекты движения тела в гравитационном поле неоднородной среды. II. Постньютоновское приближение общей теории относительности / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 86–90.

37. Рябушко, А. П. Pioneer anomaly как реликтовое ускорение пробного тела в Солнечной системе / А. П. Рябушко, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 3. – С. 99–104.

38. Ryabushko, A. P. Motion of Bodies and Its Stability in the General Relativity Theory / A. P. Ryabushko, T. A. Zhur, I. T. Nemanova // AIP Conference Proceedings. – 2010. – Vol. 1215. – P. 148–154. https://doi.org/10.1063/1.3382322

39. Рябушко, А. П. Решение лагранжевой ограниченной треугольной задачи трех тел при учете гравитационного поля газопылевой среды / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 107–112.

40. Рябушко, А. П. Движение релятивистского центра масс системы двух тел в среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 77–82. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

41. Рябушко, А. П. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 194–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205

42. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

43. Рябушко, А. П. Релятивистские уравнения движения пробного тела в поле тяготения неоднородного газопылевого шара с гравитирующим центром / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 64–71.

44. Бочкарев, Н. Г. Основы физики межзвездной среды / Н. Г. Бочкарев. – М.: МГУ, 1992. – 392 с.

45. Радзиевский, В. В. Солнечная система / В. В. Радзиевский // Физика космоса: маленькая энциклопедия. – М.: Сов. энцикл., 1976. – С. 61–80.

46. Nieto, M. M. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11 / M. M. Nieto, S. G. Turyshev, J. D. Anderson // Phys. Lett. B. – 2005. – Vol. 613, № 1/2. – P. 11–19. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035

References

1. Charlier C. L. *Celestial Mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 628 p. (in Russian).

2. Subbotin M. F. *Introduction to Theoretical Astronomy*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 800 p. (in Russian).

3. Grebenikov E. A. The problem of three bodies. *Reference Guide to Celestial Mechanics and Astrodynamics. Part 5*. Moscow, Nauka Publ., 1976, pp. 524–553 (in Russian).

4. Duboshin G. N. *Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 456 p. (in Russian).

5. Markeev A. P. *Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 312 p. (in Russian).

6. Ryabushko A. P. *Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1979. 240 p. (in Russian).

7. Szebehely V. *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 656 p. (in Russian).

8. Ryabushko A. P. *The Problem of the Stability of the Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1987. 112 p. (in Russian).

9. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1767, vol. 11, pp. 144–151.

10. Lagrange J. *Essais Sur le Problem des Trois Corps*. Paris, 1772.

11. Duboshin G. N. *Celestial Mechanics. Main tasks and Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1975. 800 p. (in Russian).

12. Ipatov S. I. *Migration of Celestial Bodies in the Solar System*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 320 p. (in Russian).

13. Kordylevski K. Photographische Untersungen Libration-spunktes L_5 im System Erdi-Mond. *Acta Astronomica,* 1961, vol. 11, pp. 165–169.

14. Kordylevski K. Dust Cloud Moons of the Earth. *Phisics Today*. 1967, vol. 20, no. 2, pp. 39–46. https://doi.org/10.1063/1.3034149

15. Klischenko A. P., Shuplyak V. I. *Astronomy*. Moscow, Novoe znanie Publ., 2004. 224 p. (in Russian).

16. Strazhev V. I. *To the Secrets of the Universe*. Minsk, National Institute of Higher Education, 2006. 160 p.

17. Ryabushko A. P. *Equations of Motion and Motion of Rotating Symmetric Masses in the General Theory of Relativity*. Minsk, 1958. 8 p. (in Russian).

18. Ryabushko A. P. *The Motion of Bodies in General Relativity*. Minsk, 1972. 16 p. (in Russian).

19. Bakhankov A. A. *Stability of Motion of Rotating Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, 1981. 16 p. (in Russian).

20. Martinov D. Y. *General Astrophysics Course*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 616 p. (in Russian).

21. Kononovich E. V., Moroz V. I. *General Course of Astronomy*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 544 p. (in Russian).

22. Zasov A. V., Postnov K. A. *General Astrophysics*. Fryazino, Vek-2 Publ., 2011. 576 p. (in Russian).

23. Reisen I. The new surprise of the Universe: dark energy. *Nauka i zhizn'* [Science and life], 2004, no. 3, pp. 38–42 (in Russian).

24. Lukash V. N., Rubakov V. A. Dark Energy: Myths and Reality. *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, no. 3, pp. 283. https://doi.org/10.1070/pu2008v051n03abeh006567

25. Nemanova I. T. *Relativistic Motion of Bodies in the Environment*. Minsk, 1987. 14 p. (in Russian).

26. Zhur T. A. *Relativistic Motion of Rotating Bodies in the Environment*. Minsk, 1999. 18 p. (in Russian).

27. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The Gravitational Field of an Attractive Center Surrounded by a Dusty Cloud in the Post-Newtonian Approximation of the General Theory of Relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1983, vol. 27, no. 10, pp. 889–892 (in Russian).

28. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. Relativistic Effects of the Motion of Test Bodies in the Gas-Dust Ball with an Attractive Center. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1984, vol. 28, no. 9, pp. 806–809 (in Russian).

29. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of the gas-dust ball with two attractive centers in the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1987, vol. 31, no. 8, pp. 519–522 (in Russian).

30. Zhur T. A., Nemanova I. T., Ryabushko A. P. Relativistic translational motion of the rotating particle in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 1, pp. 79–83 (in Russian).

31. Zhur T. A. Relativistic rotation of the particle in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 3, pp. 82–85 (in Russian).

32. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic equations of translational motion of two rotating bodies of comparable mass in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2001, no. 3, pp. 64–68 (in Russian).

33. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic translational motion of two rotating bodies of comparable mass in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2003, no. 3, pp. 68–73 (in Russian).

34. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Relativistic proper rotations of two bodies in the gravitational environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2004, no. 2, pp. 61–65 (in Russian).

35. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Riemannian space-time, defined by an inhomogeneous gas-dust ball with the gravitational center, in general relativity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2005, no. 4, pp. 77–85 (in Russian).

36. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Relativistic effects of the motion of the body in the gravitational field of an inhomogeneous environment. II. Post-Newtonian approximation of the general theory of relativity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 1, pp. 86–90 (in Russian).

37. Ryabushko A. P., Zhur T. A. Pioneer anomaly as the relict acceleration of a test body in the Solar system. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 3, pp. 99–104 (in Russian).

38. Ryabushko A. P., Zhur T. A., Nemanova I. T. Motion of Bodies and Its Stability in the General Relativity Theory. *AIP Conference Proceedings*, 2010, vol. 1215, pp. 148–154. https://doi.org/10.1063/1.3382322

39. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Solution of the Lagrangian limited triangular three-body problem with allowance for the gravity field of the gaseous dust environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2013, no. 3, pp. 107–112 (in Russian).

40. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Motion of the relativistic center of mass of the two-body system in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 77–82 (in Russian). https://doi. org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82

41. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. The Motion of the system of two bodies and their center of mass in an inhomogeneous environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 194–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205

42. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Field Theory.* Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p. (in Russian).

43. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Relativistic equations of motion of the test body in the gravitational field of an inhomogeneous gas-dust ball with a gravitational center. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2006, no. 3, pp. 64–71 (in Russian).

44. Bochkarev N. G. *Fundamentals of physics of the interstellar environment.* Moscow, Moscow State University, 1992. 392 p. (in Russian).

45. Radzievski V. V. Solar system. *Space Physics: A Little Encyclopedia.* Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1976, 61–80 (in Russian).

46. Nieto M. M., Turysher S. G., Anderson J. D. Directly measured limit on the interplanetary matter density from Pioneer 10 and 11. *Physics Letters B*, 2005, vol. 613, no. 1–2, pp. 11–19. https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.03.035

Информация об авторах

Рябушко Антон Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, г. Минск, Республика Беларусь).

Жур Татьяна Антоновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Information about the authors

Anton P. Ryabushko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus).

Tatyana A. Zhur – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru