УДК 530.12

Т. А. ЖУР

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВРАЩЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ

1. Постановка задачи. В работах [1, 2] подробно исследовались уравнения Папапетру [3], которые описывают поступательное и вращательное движения вращающейся частицы во внешнем гравитационном поле и имеют вид

$$\frac{DP^\alpha}{ds} + \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\mu\nu} u^\beta S^{\mu\nu} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^\alpha}{u^0}\frac{DS^{\beta 0}}{ds} - \frac{u^\beta}{u^0}\frac{DS^{\alpha 0}}{ds} = 0, \tag{1.2}$$

где $P^\alpha = mu^\alpha + u_\beta \dfrac{DS^{\alpha\beta}}{ds}$ — 4-импульс вращающейся частицы; символ D означает абсолютную производную; $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ — тензор кривизны внешнего пространства-времени, метрика которого $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$; $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор; $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ — 4-скорость частицы, $S^{\alpha\beta}$ — тензор вращения ("спин") частицы; греческие индексы α, β, μ, ν пробегают значения 0, 1, 2, 3; по повторяющимся индексам идет суммирование.

Исследование уравнений (1.1), (1.2) проводится аппроксимационным методом Эйнштейна — Инфельда в ньютоновском и постньютоновском приближениях (НП и ПНП) общей теории относительности (ОТО) при дополнительных условиях на тензор вращения частицы

$$S^{0i}u_0 = KS^{ij}u_j, \tag{1.3}$$

где индексы $i, j = 1, 2, 3$. Далее любые латинские индексы, например $k, s, l, \ldots$, также будут пробегать значения 1, 2, 3. Условия (1.3) в известном смысле обобщают наиболее употребительные условия $S^{0i} = 0$ (при $K = 0$), $S^{\alpha\beta}u_\beta = 0$ или $S^{\alpha\beta}P_\beta = 0$ (при $K = 1$ в ПНП ОТО) и другие (см. [4]).

Система уравнений поступательного движения вращающейся частицы (1.1) подробно исследована в ПНП ОТО в работе [2]. Согласно аппроксимационной процедуре Эйнштейна — Инфельда, разложения скорости u^i и тензора вращения частицы имеют вид

$$u^i = \lambda \underset{1}{u^i} + \lambda^3 \underset{3}{u^i} + \ldots, \quad S^{ij} = \lambda^3 \underset{3}{S^{ij}} + \lambda^5 \underset{5}{S^{ij}} + \ldots, \quad S^{0i} = \lambda^4 \underset{4}{S^{0i}} + \lambda^6 \underset{6}{S^{0i}} + \ldots, \tag{1.4}$$

где $\lambda = 1/c$, c — скорость света в вакууме (см. [2, 4]); число под коренной буквой обозначает порядок величины в разложении по λ. В [2] также показано, что в НП ОТО

$$\underset{3}{S^{ij}} = \text{const}, \tag{1.5}$$

а $\underset{4}{S^{0j}}$ тогда в НП ОТО, так как $u_0 = 1$, легко находится из условия (1.3):

$$\underset{4}{S^{0i}} = K \underset{3}{S^{ij}} \underset{1}{u_j}. \tag{1.6}$$

Принимаем, как и в работах [1, 2], что внешнее гравитационное поле при исследовании системы (1.1), (1.2) создается газопылевым шаром, имеющим ньютоновские радиус R и постоянную плотность ρ, в центре которого сосредоточена гравитирующая ньютоновская масса M.

Целью настоящей работы является подробное рассмотрение и интегрирование в ПНП ОТО системы уравнений вращательного движения частицы (1.2), а также обсуждение некоторых рекомендаций по экспериментальной проверке ОТО на основе полученных оценок ряда вековых эффектов.

2. Уравнения (1.2) в ПНП ОТО и их интегрирование. Уравнения (1.2) имеют три содержательных уравнения при $\alpha = i$, $\beta = j$, $i \neq j$. В остальных случаях они обращаются в тождества. Таким образом, в ПНП ОТО нужно расшифровать уравнения

$$\frac{DS^{ij}}{ds} + \frac{u^i}{u^0}\frac{DS^{j0}}{ds} - \frac{u^i}{u^0}\frac{DS^{i0}}{ds} = 0, \quad i \neq j. \tag{2.1}$$

Применяя аппроксимационную процедуру Эйнштейна — Инфельда к уравнениям (2.1), используя метрику пространства-времени из [2], (1.1), (1.2), равенства (1.4) — (1.6) и помня, что ньютоновское движение происходит в плоскости x^1Ox^2 $(x^3 = 0,\ \underset{1}{u}^3 = 0)$, а производную по s можно заменить на производную по x^0 $(x^0 = ct)$, которую будем обозначать точкой над коренной буквой $(da/dx^0 = \dot{a})$, получаем после достаточно продолжительных вычислений обыкновенные дифференциальные уравнения для релятивистских поправок к $\underset{3}{S}^{ij}$, т.е. уравнения для $\underset{5}{S}^{ij}$:

$$\underset{5}{\dot{S}}^{ij} = \underset{6}{A}^{ij}, \quad i \neq j, \tag{2.2}$$

где

$$\underset{6}{A}^{23} = \Big(\frac{2\gamma M}{r^3} + \frac{8}{3}\pi\gamma\rho\Big)\Big[\Big(x^1\dot{x}^1 - \frac{3-K}{2}x^2\dot{x}^2\Big)\underset{3}{S}^{23} + \Big(\frac{K+1}{2}x^2\dot{x}^1 - x^1\dot{x}^2\Big)\underset{3}{S}^{31}\Big] + K\dot{x}^2(\ddot{x}^2\underset{3}{S}^{23} - \ddot{x}^1\underset{3}{S}^{31}), \tag{2.3}$$

$$\underset{6}{A}^{31} = \Big(\frac{2\gamma M}{r^3} + \frac{8}{3}\pi\gamma\rho\Big)\Big[\Big(\frac{3-K}{2}x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2\Big)\underset{3}{S}^{31} + \Big(\frac{K+1}{2}x^1\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^1\Big)\underset{3}{S}^{23}\Big] + K\dot{x}^1(\ddot{x}^1\underset{3}{S}^{31} - \ddot{x}^2\underset{3}{S}^{23}), \tag{2.4}$$

$$\underset{6}{A}^{12} = \Big[\Big(\frac{2\gamma M}{r^3} + \frac{8}{3}\pi\gamma\rho\Big)\frac{3-K}{2}(x^1\dot{x}^1 + x^2\dot{x}^2) + K(\dot{x}^1\ddot{x}^1 + \dot{x}^2\ddot{x}^2)\Big]\underset{3}{S}^{12}. \tag{2.5}$$

Все величины справа в равенствах (2.3) — (2.5) являются ньютоновскими.

Интегрирование уравнений (2.2) проведем в полярных координатах r, φ, которые связаны с декартовыми равенствами $x^1 = r\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\varphi$. От переменной интегрирования t перейдем к переменной φ, воспользовавшись интегралом площадей в НП ОТО $r^2\dot{\varphi} = C_3 = \text{const}$, а r заменим, воспользовавшись ньютоновским решением (см. [2], (2.3), (2.5)):

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\varphi}{p} - \frac{2\pi\rho p^2}{M}e\varphi\sin\varphi + \frac{4\pi\rho p^2}{3M} + \frac{4}{M}\pi\rho p^2 e^2 - \frac{4\pi}{3M}\rho p^2 e^2\cos 2\varphi. \tag{2.6}$$

В результате необходимых преобразований и вычислений с точностью до релятивистских вековых членов с учетом только первой степени ρ и не выше второй степени эксцентриситета e, находим:

$$\underset{5}{S}^{23} = \int \underset{6}{A}^{23}dt = \int \frac{r^2}{C_3}\underset{6}{A}^{23}d\varphi = \frac{1}{2}\pi\gamma\rho p^2 e(1-K)(4\underset{3}{S}^{31} - e\underset{3}{S}^{23})\varphi^2 - \frac{1}{2}\underset{3}{S}^{31}\Big[\frac{3\gamma M}{p} + \pi\gamma\rho p^2\Big(8 + e + \frac{46}{3}e^2\Big) +$$
$$+ \frac{K}{3}\pi\gamma\rho p^2(4 - 7e + 10e^2)\Big]\varphi + \pi\gamma\rho p^2 e\Big[\frac{1}{16}(K-1)\underset{3}{S}^{31}\sin 4\varphi - (K-1)\underset{3}{S}^{31}\sin^2\varphi - 2(K-1)\underset{3}{S}^{31}\cos\varphi +$$
$$+ Ke\underset{3}{S}^{31}\sin^4\varphi + \frac{8}{3}K\underset{3}{S}^{31}\cos^3\varphi + 9Ke\underset{3}{S}^{31}\cos^4\varphi + \frac{4}{3}(K-1)\underset{3}{S}^{23}\sin^3\varphi - 4Ke\underset{3}{S}^{23}\sin^3\varphi\cos\varphi -$$
$$-4K\underset{3}{S}^{23}\sin\varphi\cos^2\varphi - 8Ke\underset{3}{S}^{23}\sin\varphi\cos^3\varphi + 4\underset{3}{S}^{23}\sin\varphi\Big]\varphi, \tag{2.7}$$

$$\underset{3}{S}^{31}=\int \underset{6}{A}^{31}dt=\int\frac{r^2}{C_3}\underset{6}{A}^{31}d\varphi=\frac{1}{2}\pi\gamma\rho p^2e(K-1)\Big(\frac{1}{4}\underset{3}{S}^{23}-e\underset{3}{S}^{31}\Big)\varphi^2+\underset{3}{S}^{23}\Big[\frac{1}{2}(K-1)\pi\gamma\rho p^2\Big(\frac{8}{3}+e-\frac{10}{3}e^2\Big)-$$

$$-4\pi\gamma\rho p^2e^2-K\Big(\frac{4}{3}+7e^2\Big)\pi\gamma\rho p^2-\frac{K+5}{2}\frac{\gamma M}{p}\Big]\varphi+\pi\gamma\rho p^2e\Big[\frac{1}{16}(K-1)\underset{3}{S}^{23}\sin 4\varphi-(K-1)\underset{3}{S}^{23}\sin^2\varphi+$$

$$+(6K-4)\underset{3}{S}^{23}\cos\varphi+(6-2K)\underset{3}{S}^{31}\sin\varphi+2K\underset{3}{S}^{31}\sin\varphi\cos^2\varphi+8Ke\underset{3}{S}^{31}\sin\varphi\cos^3\varphi+$$

$$+4Ke\underset{3}{S}^{23}\cos^4\varphi+2K\underset{3}{S}^{31}\sin^3\varphi+4Ke\underset{3}{S}^{23}\sin^4\varphi\Big]\varphi, \tag{2.8}$$

$$\underset{3}{S}^{12}=2\pi\gamma\rho p^2e(3\sin\varphi-Ke\sin 2\varphi)\underset{3}{S}^{12}\varphi. \tag{2.9}$$

3. Обсуждение полученных результатов. Чтобы выяснить физический смысл полученных результатов, перейдем от тензора $\tilde{S}^{ij}=\lambda^3\underset{3}{S}^{ij}+\lambda^5\underset{5}{S}^{ij}+\ldots$ в ПНП ОТО к соответствующему релятивистскому вектору $\tilde{S}_k$. Переход совершается, как известно [4, 5], по формуле

$$\tilde{S}_k=\frac{1}{2}\sqrt{-g/g_{00}}\,\delta_{ijk}\tilde{S}^{ij}, \tag{3.1}$$

где $g=|g_{\alpha\beta}|$ — определитель 4-го порядка, составленный из компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$; $\delta_{123}=1$, δ_{ijk} — антисимметрический символ по всем индексам. Пользуясь значениями $g_{\alpha\beta}$ в ПНП ОТО (см. [1, 4]), находим, что

$$\tilde{S}_k=\underset{3}{S}_k+\lambda^2\Big(\underset{5}{S}_k-\frac{3}{2}\underset{2}{h}_{00}\underset{3}{S}_k\Big), \tag{3.2}$$

где $\underset{3}{S}_k=\frac{1}{2}\delta_{ijk}\underset{3}{S}^{ij}$, $\underset{5}{S}_k=\frac{1}{2}\delta_{ijk}\underset{5}{S}^{ij}$, $\underset{2}{h}_{00}=-\frac{2\gamma M}{r}+4\pi\gamma\rho\Big(\frac{r^2}{3}-R^2\Big)$. Следовательно,

$$\underset{3}{S}_1=\underset{3}{S}^{23},\quad \underset{3}{S}_2=\underset{3}{S}^{31},\quad \underset{3}{S}_3=\underset{3}{S}^{12},\quad \underset{5}{S}_1=\underset{5}{S}^{23},\quad \underset{5}{S}_2=\underset{5}{S}^{31},\quad \underset{5}{S}_3=\underset{5}{S}^{12}. \tag{3.3}$$

Вычислим модуль вектора $\vec{\tilde{S}}=(\tilde{S}_1,\tilde{S}_2,\tilde{S}_3)$ в ПНП ОТО по известной формуле скалярного квадрата в трехмерном искривленном пространстве с метрическим тензором $\gamma^{ij}=-g^{ij}$, которая с учетом (3.2) принимает вид

$$|\vec{\tilde{S}}|=(\gamma^{ij}\tilde{S}_i\tilde{S}_j)^{1/2}=(-g^{ij}\tilde{S}_i\tilde{S}_j)^{1/2}=[(1+\lambda^2\underset{2}{h}_{00})\delta_{ij}\tilde{S}_i\tilde{S}_j]^{1/2}=|\vec{S}|+\lambda^2(\underset{3}{S}_i\,\underset{5}{S}_i/|\vec{S}|-\underset{2}{h}_{00}|\vec{S}|), \tag{3.4}$$

где $|\vec{S}|=\sqrt{\underset{3}{S}_1^2+\underset{3}{S}_2^2+\underset{3}{S}_3^2}=\mathrm{const}$ — ньютоновский модуль собственного углового момента частицы, $\underset{3}{S}_i\,\underset{5}{S}_i=\underset{3}{S}_1\,\underset{5}{S}_1+\underset{3}{S}_2\,\underset{5}{S}_2+\underset{3}{S}_3\,\underset{5}{S}_3$.

Раскроем подробнее релятивистскую добавку к $|\vec{S}|$ в (3.4), пользуясь (2.7) — (2.9) и связью (3.3). Учитывая только вековые члены с ρ и e не выше чем в первой и второй степенях соответственно и сделав для упрощения записи переобозначения $|\vec{\tilde{S}}|$ на $\tilde{S}$, $|\vec{S}|$ на S, $\underset{3}{S}_i$ на S_i, находим:

$$\tilde{S}=S-\frac{\gamma M(K+8)}{2pSc^2}S_1S_2\varphi+\frac{\pi\gamma\rho p^2}{c^2S}(A\varphi^2+B\varphi), \tag{3.5}$$

где

$$A=\frac{e}{8}(1-K)(15S_1S_2-4eS_1^2+4eS_2^2), \tag{3.6}$$

$$B=S_1S_2\Big[\frac{e^2}{3}(31K-30)+\frac{e}{3}(5K-3)-\frac{2}{3}(K+8)+\frac{e}{8}(K-1)\sin 4\varphi-2(K-1)e\sin^2\varphi+$$

$$+2(2K-1)e\cos\varphi+\frac{8}{3}Ke\cos^3\varphi+5Ke^2\sin^4\varphi+13Ke^2\cos^4\varphi\Big]+4e\sin\varphi S_1^2\Big[\frac{1}{3}(K-1)\sin^2\varphi-$$

$$-K\cos^2\varphi-Ke\cos\varphi(1+\cos^2\varphi)\Big]+2e\sin\varphi\Big[S_2^2(1+4Ke\cos^3\varphi)-S_3^2(1+2Ke\cos\varphi)\Big]. \tag{3.7}$$

Итак, в ПНП ОТО модуль собственного углового момента вращающейся частицы $\tilde{S}$ меняется вековым образом по формуле (3.5).

Исследуя структуру релятивистских поправок к S, заметим, что в случае $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 \neq 0$ (ньютоновский вектор углового момента $\vec{S}$ перпендикулярен плоскости ньютоновской орбиты частицы $x^3 = 0$) формула (3.5) сильно упрощается:

$$\tilde{S} = S[1 - c^{-2}2\pi\gamma\rho p^2 e \sin\varphi(1 + 2Ke\cos\varphi)\varphi]. \tag{3.8}$$

Если к тому же орбита круговая ($e = 0$), то $\tilde{S} = S = \mathrm{const}$. Если $\tilde{S}_i \neq 0$, но $e = 0$, то

$$\tilde{S} = S - \frac{\gamma M(K+8)}{2pSc^2}S_1S_2\varphi - \frac{2\pi\gamma\rho p^2(K+8)}{3Sc^2}S_1S_2\varphi. \tag{3.9}$$

Чтобы найти углы $\tilde{\alpha}_i$, которые образует релятивистский вектор $\tilde{\vec{S}}$ с осями координат Ox^i, введем в рассмотрение три бесконечно малых вектора $\vec{d_i x}$, направленных соответственно по осям Ox^i, координаты которых определяются по формуле $\vec{d_i x} = (\delta_{i1}dx^1, \delta_{i2}dx^2, \delta_{i3}dx^3)$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда $\vec{d_1 x} = (dx^1, 0, 0)$, $\vec{d_2 x} = (0, dx^2, 0)$, $\vec{d_3 x} = (0, 0, dx^3)$. Воспользовавшись скалярным произведением векторов $\tilde{\vec{S}}$ и $\vec{d_i x}$ $(\tilde{\vec{S}} \cdot \vec{d_i x} = |\tilde{\vec{S}}| \cdot |\vec{d_i x}| \cos\tilde{\alpha}_i)$, находим (с точностью до вековых членов, ρ и e в первой и второй степенях соответственно):

$$\cos\tilde{\alpha}_i = \frac{\tilde{\vec{S}}\vec{d_i x}}{\tilde{S}|\vec{d_i x}|} = \frac{\tilde{S}_j\delta_{ij}dx^j}{\tilde{S}(-g_{jk}\delta_{ij}dx^j\delta_{ik}dx^k)^{1/2}} = \frac{\tilde{S}_i}{\tilde{S}}\Big(1 + \frac{1}{2c^2}\underset{2}{h_{00}}\Big) =$$

$$= \frac{S_i}{S}\Big[1 + \frac{\gamma M(K+8)}{2pS^2c^2}S_1S_2\varphi - \frac{\pi\gamma\rho p^2}{S^2c^2}(A\varphi^2 + B\varphi) - \frac{4\pi\gamma\rho p^2 e}{c^2}\sin\varphi + \frac{\underset{5}{S_i}}{S_i c^2}\Big], \tag{3.10}$$

где $\underset{5}{S_i}$, согласно (3.3), берутся из (2.7) — (2.9). Выражение (3.10) указывает на то, что углы $\tilde{\alpha}_i$ меняются вековым образом в отличие от ньютоновских углов $\alpha_i = \mathrm{const}$. В частном случае, в котором получена формула (3.8), формулы (3.10) приводят к $\cos\tilde{\alpha}_1 = 0$, $\cos\tilde{\alpha}_2 = 0$, т.е., как и в НП ОТО, вектор $\tilde{\vec{S}}$ перпендикулярен плоскости ньютоновской орбиты.

Если $S_i \neq 0$, но $e = 0$, то

$$\cos\tilde{\alpha}_i = \frac{S_i}{S}\Big\{1 + \frac{1}{c^2}\Big[\frac{\gamma(K+8)}{S^2}S_1S_2\Big(\frac{M}{2p} + \frac{2\pi\gamma\rho p^2}{3}\Big)\varphi + \frac{\underset{5}{S_i}}{S_i}\Big]\Big\}. \tag{3.11}$$

Релятивистские поправки к $\cos\alpha_i = S_i/S$ и к S в пределах Солнечной системы при $\rho \sim 10^{-18} \div 10^{-20}\,\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ в общем случае имеют следующий порядок: $\cos\alpha_i = (S_i/S)[1 \pm (10^{-8} \div 10^{-10})\varphi]$, $\tilde{S} = S[1 \pm (10^{-8} \div 10^{-10})\varphi]$. Например, для Земли последнее равенство должно приводить к изменению продолжительности суток (периода T вращения вокруг оси) по формуле $\tilde{T} = T[1 \pm 5(10^{-1} \div 10^{-3})c]$ за 100 лет.

Summary

A system of differential equations, which describes the rotational movement of a particle in post-Newtonian approximation of general relativity, is introdused and integrated. The system was derived on the basis of Papapetru's equations with some additional conditions on $S^{\alpha\beta}$: $S^{0i} = KS^{ij}u_j$. Numeric estimates for some peculiarities of rotational movement of a particle are obtained.

Литература

1. Жур Т.А., Неманова И.Т., Рябушко А.П. // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 68 – 70.
2. Жур Т.А., Неманова И.Т., Рябушко А.П. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1998. № 1. С. 79 – 83.
3. Papapetrou A. // Proc. Roy. Soc. 1951. Vol. A209. P. 248.
4. Рябушко А.П. Движение тел в ОТО. Мн., 1979.
5. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., 1971.

Белорусский аграрный технический университет

Поступила в редакцию 12.06.97