ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2011
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО[1], *Т. А. ЖУР*[2], *И. П. БОЯРИНА*[2]

НЬЮТОНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПРИ УЧЕТЕ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

[1]*Белорусский национальный технический университет*
[2]*Белорусский государственный аграрный технический университет*

(Поступила в редакцию 09.04.2010)

1. Ньютоновские уравнения движения при учете светового давления. В пустоте без учета светового давления ньютоновские уравнения движения (УД) пробного (легкого) тела массой m в гравитационном поле, создаваемом центрально-симметричным тяжелым телом (звездой) массой M, могут быть записаны в векторной форме [1]:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r}=0, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор пробного тела; $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – его расстояние до начала координат O прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, совпадающее с центром масс тяжелого тела; $\gamma=6,67\cdot10^{-8}\,\text{г}^{-1}\cdot\text{см}^3\cdot\text{сек}^{-2}$ – ньютоновская постоянная тяготения; t – ньютоновское абсолютное время.

Учет светового давления $\vec{P}$ звезды на пробное тело приводит к появлению в (1) справа добавочного члена

$$\vec{P}=\frac{A_0}{r^3}\vec{r}, \tag{2}$$

где $A_0>0$, так как $\vec{P}$ – центральная сила отталкивания, и A_0 является постоянной величиной в случае стационарной светимости звезды; A_0 имеет следующую структуру [2–6]:

$$A_0=(k\sigma q_0 r_0^2 c^{-1})\,\text{г}\cdot\text{см}^3\cdot\text{сек}^{-2}, \tag{3}$$

где k – безразмерная постоянная, заключенная в пределах $1\le k\le 2$ ($k=1$ для пробного тела, абсолютно поглощающего излучение, $k=2$ для абсолютно отражающего тела, для диффузного в среднем отражения светового излучения обычно принимается $k=1,44$); $\sigma\,\text{см}^2$ – поперечное миделево сечение легкого тела, которое в случае сферического пробного тела радиусом R вычисляется по формуле $\sigma=\pi R^2\,\text{см}^2$; q_0 $\text{эрг}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{сек}^{-1}$ – *звездная постоянная*, т. е. полное количество энергии электромагнитного излучения звезды, приходящего за 1 сек на 1 см^2 площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r_0 от звезды; $c=3\cdot10^{10}\,\text{см}\cdot\text{сек}^{-1}$ – скорость света в вакууме. В монографиях [2] и [7] содержится подробное обоснование формул (2) и (3).

В частности, для Солнца при $r_0=1\,\text{а. е.}$ ($1\,\text{а. е.}=1,5\cdot10^{13}\,\text{см}$ – среднее расстояние от Земли до Солнца) имеем [5–8]:

$$q_0=1,36\cdot10^6\,\text{эрг}\cdot\text{см}^{-2}\text{сек}^{-1},\quad A_0=k\sigma\cdot1,02\cdot10^{22}\,\text{г}\cdot\text{см}^3\cdot\text{сек}^{-2}. \tag{4}$$

Значение q_0 из (4) называется *солнечной постоянной*, характеризует *светимость* Солнца и служит эталоном при сравнении звездных постоянных и светимостей других звезд [7].

Запишем теперь УД пробного тела с учетом светового давления в удобном для нас виде. Для этого нуль справа в (1) заменим на $\vec{P}$ из (2), перенесем $\vec{P}$ в левую часть полученного уравнения и разделим его почленно на m:

$$\frac{d^2\vec{r}_s}{dt^2}+\frac{\gamma m_s}{r_s^3}\vec{r}_s=0, \tag{5}$$

где $m_s=M-\dfrac{A_0}{\gamma m}=M-m_0, \quad m_0=\dfrac{A_0}{\gamma m}=k\dfrac{\sigma}{m}q_0r_0^2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{г}, \qquad (6)$

и m_s называется *редуцированной массой* звезды (reduce – ослаблять) [9].

Подставив в (6) значения для q_0, A_0 из (4), получим редуцированную массу Солнца:

$$m_s=\left(1{,}99\cdot 10^{33}-k\frac{\sigma}{m}1{,}53\cdot 10^{29}\right)\text{г}, \tag{7}$$

где $M_0=1{,}99\cdot 10^{33}$г – масса Солнца. Букву r в (5) снабжаем индексом "s", так как УД (5) имеет решения, определяемые значением m_s.

2. Интегрирование уравнений движения (1) и (5). По хорошо известной методике (см., например, [1, 10, 11]) из УД (1) находим, что траектория движения пробного тела лежит в плоскости, в качестве которой без ограничения общности можно взять координатную плоскость xOy, т. е. $z=0$. Введя на ней полярную систему координат по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, получим два первых интеграла УД (энергии и площадей), которые позволяют сконструировать дифференциальное уравнение орбиты, допускающее точное интегрирование. Не приводя в тексте промежуточных вычислений (их можно найти, например, в [1, 10, 11]), сразу выпишем готовые результаты:

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{\gamma M}{r}=h=-\frac{\gamma M}{2p}(1-e^2) \text{ – интеграл энергии,} \tag{8}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=C=\sqrt{\gamma Mp} \text{ – интеграл площадей,} \tag{9}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos\varphi}{p} \text{ – уравнение орбиты,} \tag{10}$$

где v – поступательная скорость пробного тела на орбите (10), которая является линией второго порядка с параметром p и эксцентриситетом e: при $e=0$ – окружность, при $0<e<1$ – эллипс, при $e=1$ – парабола, при $e>1$ – гипербола.

Интегрирование УД (5) формально проводится точно так же, как и УД (1), но следует иметь в виду, что «массовый» центр у них разный – M и m_s. Чтобы различать решения УД (1) и (5), величины, связанные с УД (5), будем снабжать индексом "s" ($s=1,2,3$).

Интегрирование УД (5) проведем при следующих начальных условиях: I. Периастр орбиты (10), получаемый при $\varphi=0$, совпадает с периастром новой орбиты из УД (5); II. $dr/d\varphi=dr_s/d\varphi$ при $\varphi=0$; III. $v(\varphi=0)=v_s(\varphi=0)$.

Для УД (5) имеем три случая: 1) $m_s>0$; 2) $m_s<0$; 3) $m_s=0$.
Для случая 1), когда $M>m_0$, полагаем $s=1$ и находим по методике решения УД (1):

$$\frac{1}{2}v_1^2-\frac{\gamma m_1}{r_1}=h_1=-\frac{\gamma m_1}{2p_1}(1-e_1^2), \tag{11}$$

$$r_1^2\frac{d\varphi}{dt}=C_1=\sqrt{\gamma m_1p_1}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 + e_1 \cos\varphi}{p_1}. \tag{13}$$

В силу принятых начальных условий орбита (13) конкретизируется, определенным образом привязывается к орбите (10), которую будем называть *опорной*, а параметры p_1, e_1 однозначно выражаются через известные величины p, e, M, m_0. Действительно, легко устанавливаются следующие связи:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{M}{m_1} = \frac{1 + e_1}{1 + e}, \tag{14}$$

из которых сразу же извлекаем полезную информацию:

$$p_1 = \frac{Mp}{m_1} > p, \ e_1 = \frac{Me + m_0}{m_1} > e, \tag{15}$$

т. е. у орбиты (13), которую будем называть *возмущенной*, параметр p_1 и эксцентриситет e_1 всегда больше, чем у опорной орбиты. Также легко показывается, что $r_1 > r$ при одинаковых φ ($r_1 = r$ только при $\varphi = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Для случая 2), когда $m_2 < 0 \ (M < m_0)$, при тех же начальных условиях и по той же методике находим:

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{\gamma m_2}{r_2} = h_2 = \frac{\gamma m_2}{2 p_2} (1 - e_2^2), \tag{16}$$

$$r_2^2 \frac{d\varphi}{dt} = C_2 = \sqrt{-\gamma m_2 p_2}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{-1 + e_2 \cos\varphi}{p_2}, \tag{18}$$

где $p_2 = -\dfrac{M}{m_2} p, \ e_2 = 1 - \dfrac{M}{m_2}(1 + e)$. (19)

Случай 3) тривиален. При оговоренных начальных условиях решение УД (5) при $m_3 = 0$ ($M = m_0$) дает прямую, проходящую через периастр и перпендикулярную большой оси опорной орбиты (10); по этой прямой движется пробное тело. Эта прямолинейная траектория имеет следующее уравнение в полярных координатах и параметрические уравнения:

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1 + e}{p} \cos\varphi; \ x = \frac{p}{1 + e}, \ y = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} (1 + e) t = v(\varphi = 0) t. \tag{20}$$

3. Обсуждение полученных закономерностей.

С л у ч а й 1). Формулы (11) – (15) относятся к случаю 1) $m_1 > 0$, т. е. $M > m_0$, когда пробное тело притягивается центром. Будем считать, что опорная орбита является эллипсом или окружностью: $0 \le e < 1$. Тогда орбита (13) будет также эллипсом, если $e_1 < 1$, что осуществляется, как это следует из (15), только при выполнении неравенства

$$m_0 < \frac{1}{2} M (1 - e). \tag{21}$$

Этот возмущенный эллипс будет больших размеров по сравнению с опорным эллипсом или окружностью (10), так как согласно (15) $p_1 > p$, $e < e_1 < 1$ и $r_1 > r$, а также из формул

$$p_1 = a_1 (1 - e_1^2), \ p = a (1 - e^2) \tag{22}$$

вытекает, что $a_1 > a$. Происходит, образно говоря, «раздувание» опорного эллипса. Кроме того, из формул (15) и (22) следует точная формула:

$$a_1 = \frac{m_1(1-e)a}{M(1-e)-2m_0}. \tag{23}$$

Теперь легко находим приращение Δa большой оси возмущенного эллипса (13) к большой оси опорного эллипса (10):

$$\Delta a = 2a_1 - 2a = \frac{2m_0(1+e)a}{M(1-e)-2m_0}. \tag{24}$$

При выполнении неравенства (21) $\Delta a > 0$. Если же неравенство (21) превращается в равенство, то знаменатели в (23) и (24) обращаются в нуль и получаем $a_1 = \infty$, $\Delta a = \infty$ и согласно (15) $e_1 = 1$, т. е. параболу с параметром $p_1 = 2p/(1+e)$. Дальнейшее увеличение m_0 в пределах $M > m_0 > M(1-e)/2$ приводит к превращению параболы в гиперболу, так как согласно (15) получаем $e_1 > 1$. Парабола является сепаратрисой, отделяющей семейство эллипсов от семейства гипербол. Периастры у всех этих возмущенных орбит и опорной орбиты находятся в точке П (рисунок). Действительная ось гипербол откладывается вправо от точки П, так как $a_1 < 0$ и $r_1 < 0$ при $\varphi = \pi$. Движение пробного тела происходит по левой ветви гиперболы (13), охватывающей центр притяжения F.

Следует отметить, что так как согласно (14) $Mp = m_1 p_1$, то секторная скорость пробного тела одна и та же для всех орбит:

$$C_1 = \sqrt{\gamma m_1 p_1} = \sqrt{\gamma M p} = C. \tag{25}$$

Поступательные же скорости v и v_1 пробного тела на опорной орбите (10) и возмущенных орбитах (13) совпадают согласно начальному условию только в периастре, когда $\varphi = 2\pi n$, а в остальных точках орбит всегда $v > v_1$. Действительно, из (8) и (11) получаем выражения

$$v^2 = \frac{\gamma M}{p}(1 + 2e\cos\varphi + e^2),\ v_1^2 = \frac{\gamma m_1}{p_1}(1 + 2e_1\cos\varphi + e_1^2), \tag{26}$$

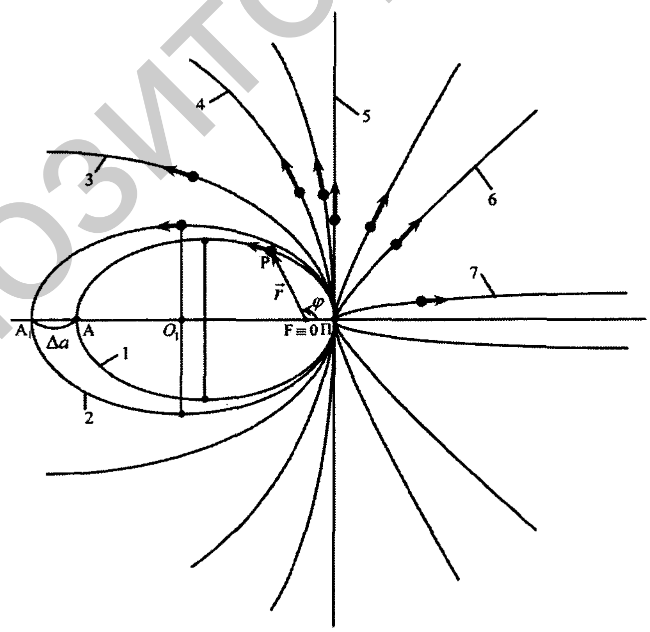

Схема расположения опорной и возмущенных орбит: *1* – опорный эллипс; *2* – возмущенный эллипс, случай (36) – (38); *3* – парабола-сепаратриса; *4* – левая ветвь возмущенной гиперболы, случай (46); *5* – прямая, по которой возможно движение частицы; *6* – правая ветвь возмущенной гиперболы, случай (44); *7* – случай (43) ($\vec{r} = \overline{OP}$ – радиус-вектор частицы P; П – периастр всех орбит; А и A_1 – апоастры опорного и возмущенного эллипсов: F – фокус для всех орбит, в котором находится силовой центр (звезда) из которых и (15) следует, что $v(\varphi = 2\pi n) = v_1(\varphi = 2\pi n)$, а для остальных φ имеем $v > v_1$. Для эллипсов ($e < 1$ и $e_1 < 1$) в апоастре, когда $\varphi = (2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеем:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}}(1-e),\ v_1 = v\left(1 - \frac{4m_0}{M(1-e)^2}\left(1 - e - \frac{m_0}{M}\right)\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Из (26) следует также, что и v, и v_1 достигают наибольшего значения в периастре, а в апоастре принимают наименьшее значение.

Из интеграла площадей (9) при использовании орбиты (10) находим время t как функцию φ:

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{\gamma M}}\left[\frac{e\sin\varphi}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \tag{28}$$

Формула (28) верна только при $e < 1$.

Если $\varphi = \pi$, то должно быть $t = T/2$, где T – период обращения по опорной орбите пробного тела. Тогда из (28) с помощью (22) при этих значениях φ и t получаем третий закон Кеплера, который запишем в виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M}a^3. \tag{29}$$

При учете светового давления из интеграла площадей (12) при использовании (13) и (22) выводим аналогичные формулы:

$$t = \sqrt{\frac{p_1^3}{\gamma m_1}}\left[\frac{e_1\sin\varphi}{(e_1^2-1)(1+e_1\cos\varphi)} + \frac{2}{(1-e_1^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right], \tag{30}$$

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma m_1}a_1^3, \tag{31}$$

которые верны только при $e_1 < 1$.

С помощью формул (15), (22), (29), (31) доказывается, что $T_1 > T$, а формула (31) трансформируется в формулу

$$T_1^2 = T^2\left(1 - \frac{m_0}{M}\right)^2\left[1 - \frac{2m_0}{M(1-e)}\right]^{-3}. \tag{32}$$

Формула (32) дает возможность легко получить разницу ΔT между T_1 и T:

$$\Delta T = T_1 - T = T\left\{\left(1 - \frac{m_0}{M}\right)\left[1 - \frac{2m_0}{M(1-e)}\right]^{-3/2} - 1\right\}. \tag{33}$$

З а м е ч а н и е. Если $e_1 > 1$, то формулы (30) – (33) теряют смысл, а вместо формулы (30) имеем:

$$t = \sqrt{\frac{p_1^3}{\gamma m_1}}\left[\frac{e_1\sin\varphi}{(e_1^2-1)(1+e_1\cos\varphi)} - \frac{2}{(e_1^2-1)^{3/2}}\ln\left|\frac{(e_1+1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{e_1^2-1}}{(e_1+1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{e_1^2-1}}\right|\right]. \tag{30*}$$

С л у ч а й 2). Имеем центральное поле отталкивания, так как $m_2 < 0$. В нем согласно (19) $e_2 > 1$, т. е. траекторией движения пробного тела может быть только гипербола, точнее – правая ветвь гиперболы (18), которая не охватывает центр отталкивания F (см. рисунок). Эта ветвь проходит через периастр П опорной орбит и пробное тело в этой точке имеет поступательную скорость $v_2(\varphi = 0) = v(\varphi = 0)$ согласно начальному условию. В любой точке правой ветви орбиты (18)

$v_2(\varphi) > v(\varphi)$. В силу (19) $Mp = -m_2 p_2$. Поэтому $C_2 = C$, т. е. секторные скорости для опорной орбиты (10) и возмущенной орбиты (18) равны. Время t как функцию φ можно найти, интегрируя (17) с использованием (18):

$$t = \sqrt{\frac{{p_2}^3}{-\gamma m_2}} \left[\frac{e_2 \sin\varphi}{({e_2}^2 - 1)(-1 + e_2 \cos\varphi)} - \frac{2}{({e_2}^2 - 1)^{3/2}} \ln \left| \frac{(e_2 + 1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sqrt{e_2^2 - 1}}{(e_2 + 1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sqrt{e_2^2 - 1}} \right| \right]. \tag{34}$$

С л у ч а й 3). Согласно (20) движение пробного тела происходит по прямой с постоянной скоростью $v_3 = v(\varphi = 0) = \sqrt{\gamma M / p}(1 + e)$. Связь t с φ выражается формулой:

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{\gamma M}} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{(1 + e)^2}. \tag{35}$$

4. Числовые оценки. При учете влияния светового давления на закономерность движения пробного тела ключевую роль играет величина m_0, которую можно вычислять по формуле (6), а для Солнечной системы – по формуле (7). Образно говоря, m_0 определяет «парусность» тела.

Рассмотрим подробнее движения пробного тела в Солнечной системе. Пусть тело сферически симметричное радиусом R, массой m и диффузно отражающее свет, т. е. $k = 1,44$. Тогда $\sigma = \pi R^2$ и согласно (7)

$$m_0 = \frac{R^2}{m} \cdot 6,92 \cdot 10^{29}\,\text{г}. \tag{36}$$

Пусть, далее, пробное тело имеет характеристики американского спутника Земли «Эхо-1»: сфера-баллон с $R = 15$ м, $m = 68$ кг. Тогда

$$m_0 = 2,29 \cdot 10^{31}\,\text{г},\; m_1 = 1,97 \cdot 10^{33}\,\text{г}. \tag{37}$$

Если такой спутник запустить на орбиту Земли, т. е. сделать спутником Солнца, то его опорное движение будет отличаться от возмущенного на значительные величины, вычисленные согласно (24), (27), (33):

$$\Delta a \approx 3,66 \cdot 10^6\,\text{км},\; \Delta v = v - v_1 \approx 0,68\,\text{км} \cdot \text{сек}^{-1},\; \Delta T \approx 0,48\,\text{года}. \tag{38}$$

В межпланетном пространстве существуют объекты (малые тела, частицы, молекулы, ионы, атомы и т. д.), для которых отношение R^2 / m в (36) настолько велико, что m_0 близко к массе Солнца или даже больше ее: $m_0 > M$ (см. [8, 9]). В последнем случае редуцированная масса Солнца [9] $m_2 = M_0 - m_0 < 0$. Тогда получаем для таких объектов поле отталкивания и решением УД (5) будут только ветви гипербол (18), которые не охватывают центральное тело [10, 11] (см. рисунок). Такие объекты «выметаются» из Солнечной системы, что существенно влияет на формирование межпланетной среды, ее плотности, на состояние метеорного вещества, поведение комет, образование у них хвостов и т. д.

Легко установить «порог», после которого поле притяжения превращается в поле отталкивания для пробного тела. Находим из (7), что при равенстве

$$k \frac{\sigma}{m} = 1,30 \cdot 10^4\,\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1} \tag{39}$$

гравитационное притяжение в Солнечной системе уравновешивается световым отталкиванием. За порогом (39), т. е. при

$$k \frac{\sigma}{m} > 1,30 \cdot 10^4\,\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \tag{40}$$

редуцированная масса Солнца $m_2 = M_0 - m_0 < 0$. Пробное тело (частица) с характеристикой $k\sigma / m$, удовлетворяющей неравенству (40), оказывается в центральном поле отталкивания и будет по гиперболе уходить из Солнечной системы. Скорость v_2 удаления от Солнца по орбите (18) вычисляется из интеграла энергии (16), которому можно придать вид:

$$v_2 = \left[-\frac{\gamma M_2}{p_2} (1 - 2e_2 \cos\varphi + e_2^2) \right]^{1/2}. \qquad (41)$$

Связь φ с t задается функцией (34), из которой (и из (18)) видно, что угол φ ограничен интервалом $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$, концы которого определяются значением φ_0 из равносильных равенств:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right| = \sqrt{\frac{e_2 - 1}{e_2 + 1}}, \text{ или } \cos\varphi_0 = \frac{1}{e_2}. \qquad (42)$$

Значение $2\varphi_0$ дает угол между асимптотами гиперболы, по которой частица уходит в бесконечность.

Из наблюдений известно [8, 9], что в космосе существуют частицы, для которых порог (39) превышается. Скорость и время их ухода из звездной (Солнечной) системы зависит от того, насколько «сильно» неравенство (40). Например, для очень пористой частицы, имеющей большое миделево сечение σ и малую массу m, при $1 \le k \le 2$ достижимо следующее значение

$$k\frac{\sigma}{m} = k\pi \frac{R^2}{m} \approx (1 \div 2) 5{,}26 \cdot 10^7 \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \qquad (43)$$

т. е. получаем сильное неравенство (40) (сильное отталкивание).

Для частицы, радиус которой $R = 10^{-5}$ см и масса $m = 10^{-14}$ г [8, 9],

$$k\frac{\sigma}{m} = k\pi \frac{R^2}{m} \approx (1 \div 2) 3{,}14 \cdot 10^4 \text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}, \qquad (44)$$

т. е. получаем «слабое» неравенство (40) (слабое отталкивание).

Если рассматривать частицы, радиусы которых $R = 10^{-5}$ см, массы $m = 6 \cdot 10^{-14}$ г, то при диффузном отражении света, когда $k = 1{,}44$, получаем

$$k\frac{\sigma}{m} = 0{,}75 \cdot 10^4, \quad m_0 = 1{,}15 \cdot 10^{33} \text{г}, \; M_0 > m_0 > \frac{1}{2} M_0 (1 - e). \qquad (45)$$

Для таких же частиц (согласно (7)) редуцированная масса Солнца $m_1 = 0{,}84 \cdot 10^{33}$ г > 0 (еще поле притяжения), но $e_1 > 1$ и возмущенные орбиты будут ветвями гипербол, хотя опорная орбита является эллипсом (10) (см. рисунок).

Имея оценки (43) – (45), можно вычислить в случае Солнечной системы φ_0 (см. (42)), p_2 и e_2 для возмущенной орбиты, редуцированную массу Солнца для разных частиц, время t_1 и t_2 ухода частиц за пределы Солнечной системы, или время достижения частицей Плутона $t_П$, скорость движения v_1 и v_2 на выходе за эти пределы и другие величины. При этом следует помнить, что должны выполняться начальные условия. Для полной определенности опорный эллипс (10) будем считать орбитой Земли и отражение света частицей диффузным. Тогда $e = 0{,}017$, $p = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ см, $k = 1{,}44$. Теперь рассмотрим разные случаи.

Случай (43). Из (7) находим редуцированную массу Солнца $m_2 = -1{,}16 \cdot 10^{37}$ г. Из (19) получаем $p_2 = 2{,}57 \cdot 10^9$ см, $e_2 = 1 + 1{,}74 \cdot 10^{-4}$. Из (42) вычисляем $\cos\varphi_0 = 1 - 1{,}74 \cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 \approx 1°$. Время t_2, нужное для ухода атома водорода из перигелия П при начальной скорости $v(\varphi = 0)$

за пределы Солнечной системы $2 \cdot 10^5$ а. е., вычисляем с помощью (34), куда вместо m_2, p_2, e_2 подставляем только что найденные их значения, а φ заменяем на φ_1, которое удовлетворяет (18) при $r_2 = 2 \cdot 10^5$ а. е. $= 3 \cdot 10^{18}$ см. В итоге по формуле (34) имеем $t_2 = 915{,}74 \cdot 10^7$ сек ≈ 290 лет. Промежуток времени t_Π, необходимый для достижения орбиты Плутона ($r_2 = 40$ а. е.), равен $t_\Pi = 1{,}6 \cdot 10^6$ сек $\approx 18{,}5$ сут. Скорость v_2 частицы на границе Солнечной системы и скорость v_Π в районе орбиты Плутона можно вычислить по формуле (41): $v_2 \approx 3230$ км $\cdot$ сек$^{-1}$, $v_\Pi \approx 3197$ км $\cdot$ сек$^{-1}$.

С л у ч а й (44). Аналогично случаю (43) последовательно находим: $m_2 = -4{,}93 \cdot 10^{33}$ г; $p_2 = 6{,}06 \cdot 10^{12}$ см; $e_2 = 1{,}41$; $\cos\varphi_0 = 0{,}7092$; $\varphi_0 \approx 44°50'$; $t_2 = 29052 \cdot 10^7$ сек ≈ 9194 года; $t_\Pi \approx 8{,}9 \cdot 10^7$ сек $\approx 2{,}82$ года; $v_2 \approx 73{,}2$ км $\cdot$ сек$^{-1}$; $v_\Pi \approx 72{,}5$ км $\cdot$ сек$^{-1}$.

С л у ч а й (45). Используя равенства (7), (11) – (15), (30), находим: $m_1 = 0{,}84 \cdot 10^{33}$ г; $p_1 = 3{,}55 \cdot 10^{13}$ см; $e_1 = 1{,}41$; $\cos\varphi_0 = -0{,}7092$; $\varphi_0 \approx 135°10'$; $t_1 = 240420 \cdot 10^7$ сек ≈ 76082 года; $t_\Pi \approx 15{,}34$ года; $v_1 \approx 12{,}5$ км $\cdot$ сек$^{-1}$; $v_\Pi \approx 13{,}2$ км $\cdot$ сек$^{-1}$.

Для планет Солнечной системы согласно формуле (7) $m_0 \sim (10^{10} \div 10^{11})$ г и, естественно, световое давление практически не влияет на движение планет. Но следует иметь в виду, что существуют звездные планетарные системы, в которых центральная звезда имеет светимость, превосходящую светимость Солнца в $10^3 \div 10^6$ раз [8], что приводит соответственно к увеличению возмущений в элементах опорных орбит спутников звезды во столько же раз. В этой ситуации определение массы центральной звезды по наблюдениям ее спутника с помощью третьего закона Кеплера (31) приводит к нахождению редуцированной массы звезды $m_s = M - m_0$, но истинная масса звезды $M = m_1 + m_0$ может значительно отличаться от m_1, что следует иметь в виду. Таким образом, светимость звезд может существенно влиять на величину m_0 и правильное определение массы звезды.

В заключение заметим, подчеркивая важность исследований по влиянию электромагнитных излучений на движение тел, что в 60–70-х годах XX века в научной литературе широко обсуждались проекты «космического солнечного паруса» [12–14], в которых решались задачи выхода космического аппарата, оснащенного солнечным парусом в качестве двигателя малой тяги, из зоны притяжения планеты и дальнейшего движения в качестве спутника Солнца или других планет.

Подчеркнем, что эти задачи решались и исследование в данной работе проводилось в рамках ньютоновской теории тяготения, но представляет научный и, возможно, практический интерес решение подобных и других задач по движению тел с учетом светового давления в рамках эйнштейновской теории тяготения (в общей теории относительности), что авторы предполагают осуществить, опираясь на результаты настоящего исследования, в последующих работах.

Литература

1. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. Э л ь я с б е р г П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., 1965.
3. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. М., 1988. § 47, 54.
4. Я в о р с к и й Б. М., Д е т л а ф А. А. Справочник по физике. М., 1965. С. 526, 634.
5. К а п л а н С. А. Давление излучения. Маленькая энциклопедия «Физика космоса». М., 1976. С. 215.
6. А к с е н о в Е. П. Движение искусственных спутников Земли. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., 1976. С. 617.
7. А к с е н о в Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., 1977. § 9.1.
8. К о н о н о в и ч Э. В., М о р о з В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
9. Р а д з и е в с к и й В. В. Солнечная система. Маленькая энциклопедия «Физика космоса». М., 1976. С. 61.
10. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика. М., 1965. § 15.
11. Р я б у ш к о А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979.
12. С к о п ц о в А. П. // Проблемы механики управляемого движения. Вып. 1. Пермь, 1972.
13. Г р о з д о в с к и й Г. Л., И в а н о в Ю. Н., Т о к а р е в В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., 1975.
14. Б е л е ц к и й В. В. Очерки о движении космических тел. М., 1977.

A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR, I. P. BOYARINA

NEWTONIAN MOTION OF A BODY IN THE GRAVITATIONAL FIELD WITH LIGHT PRESSURE

Summary

In the Newtonian approximation of the general relativity, the energy integral, the orbital angular momentum and the equation of the orbit of a test body with light pressure have been derived and discussed. Several Newtonian effects are predicted. Some numerical values of these effects are given.