

К ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА СТЕНКАХ ПОРЫ

Ю.В. Чигарев,

*профессор каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ,
докт. физ.-мат. наук, профессор*

И.С. Крук,

проректор по научной работе – директор НИИМЭСХ БГАТУ, канд. техн. наук, доцент

Ф.И. Назаров,

доцент каф. технологий и механизации животноводства БГАТУ, канд. техн. наук

Н.Л. Ракова,

доцент каф. теоретической механики и теории механизмов и машин БГАТУ, канд. техн. наук, доцент

А.С. Воробей,

*науч. сотр. лаборатории механизации производства овощей и корнеклубнеплодов
РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства», канд. техн. наук*

В статье рассматривается подход к оценке напряжений и деформаций, возникающих на стенках замкнутых пор цилиндрического и сферического типа под действием внутренних и внешних воздействий. Приведены схемы реологических моделей пористых сред. Для упругой модели получены значения радиальных и окружных напряжений в зависимости от приложенных нагрузок, внутреннего и внешнего радиусов поры и нелинейного смещения точек поры при ее деформировании.

Ключевые слова: пора, напряжение, деформация, реологическая модель, цилиндрические координаты, внутренняя и внешняя нагрузка.

The article considers an approach to the assessment of stresses and deformations arising on the walls of closed pores of cylindrical and spherical type under the influence of internal and external influences. The schemes of rheological models of porous medium are given. For the elastic model, the values of radial and circumferential stresses are obtained depending on the applied loads, the internal and external pore radii and the nonlinear displacement of the pore points during its deformation.

Key words: pore, voltage, deformation, rheological model, cylindrical coordinates, internal and external load.

Введение

Пористые материалы используются практически во всех отраслях промышленности, строительства, горного дела и сельского хозяйства [1-8]. Основные вопросы современного сельскохозяйственного машиностроения связаны с повышением надежности и снижением металлоемкости конструкций сельскохозяйственных машин и орудий, в том числе связанные с износом почвообрабатывающих рабочих органов, уплотнением и разуплотнением почв. Точность прочностных расчетов зависит, во многом, от учета свойств материалов и их структуры. На деформирование пористых тел существенное влияние оказывает строение пор, их форма и размеры, распределение в теле и т.д. Поры в теле, как правило, распределены случайно.

Известно, что при деформировании материалов наличие пор может как уменьшать, так и увеличивать энергетические затраты. Например, многослойные пористые преграды проявляют демпфирующие свойства, защищающие конструкции от ударных и взрывных воздействий [5]. Преграды в виде каскадов, пле-

теных сеток, различных решеток играют роль демпфера и поэтому могут снижать энергию статических и динамических нагрузок. В случае замкнутых пор, заполненных воздухом или жидкостью, пористый материал повышает энергетические затраты на деформирование.

В почвогрунтах, в зависимости от их типа и нагружения, при деформировании можно наблюдать два вида переукладки твердых частиц: плотная, когда твердые частицы не деформируются и полностью не замыкают поры, второй вид переупаковки предполагает разрушение твердых частиц и частичное или полное замыкание пор.

В почвах поры могут быть частично или полностью заполнены водой. Степень водонасыщения и тип самих пор (замкнутые, полужамкнутые и открытые) влияют на процесс деформирования, так как изменяют параметры физических свойств.

В случае открытых пор, заполненных воздухом, например, пористых тел типа пенопластов, сухих почв, график зависимости напряжения (σ) от, деформации (ϵ) показан на рис. 1.

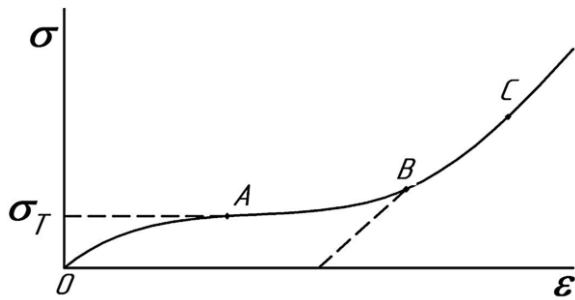


Рисунок 1. Диаграмма «напряжение-деформация» для пористых материалов: участок OA соответствует упругому деформированию, AB – пластическому; BC – упрочнению; σ_T – предел текучести

Данный график подобен классической диаграмме «напряжение-деформация» сплошных материалов. Отличие участков упругости и пластичности связано с существенно меньшим пределом текучести σ_T (точка A) и большим участком пластического течения (AB), который зависит от процесса замыкания пор. После частичного или полного замыкания пор происходит упрочнение материала, т.е. деформирование возможно при значительном увеличении напряжений (участок BC).

Цель работы – изучить существующие модели пористых сред и предложить математические зависимости для определения геометрических параметров и напряженного состояния стенок пор в зависимости от действующих внешней и внутренней нагрузок.

Основная часть

Исследованию математических моделей пористых тел со сложной реологией посвящены работы [6-8; 10-13]. Наиболее общая механическая модель, упруговязкопластических пористых тел, соответствующая рассмотренной диаграмме, показана на рисунке 2.

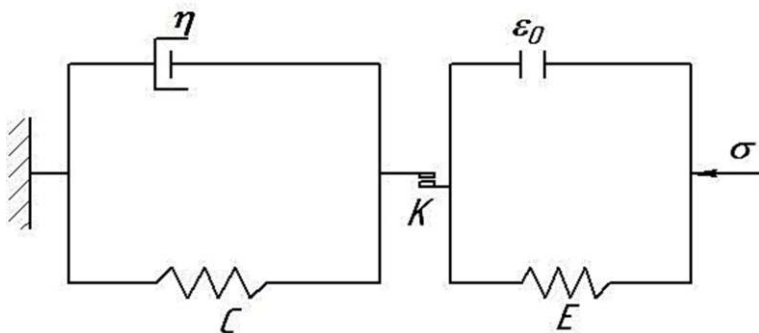


Рисунок 2. Механическая модель упруговязкопластических пористых тел: σ – напряжение; ε_0 – пористость; E – модуль упругости; $K = \sigma_T$ – коэффициент пластичности; η – коэффициент вязкости; C – коэффициент упрочнения

Данная модель состоит из двух частей [7]. Первая часть предполагает упругое деформирование до закрытия пор. При дальнейшем увеличении нагрузки до предела текучести $\sigma_T = K$, в теле появляются де-

формации, связанные с вязкопластическими упрочняющимися свойствами.

Если тело после замыкания пор проявляет упругопластические свойства, то механическая модель может быть представлена на основе реологической модели Прандтля (рис. 3а).

В модели, представленной на рисунке 3б, замыкание пор происходит одновременно с пластическим течением.

В данной работе рассмотрим подход к оценке напряженного и деформированного состояния сечения стенки поры, которая образована двумя поверхностями с радиусами – наружным r_n и внутренним r_v . Считаем, что внешняя и внутренняя поверхности нагружены равномерно распределенными нагрузками, соответственно, P_n и P_v (рис. 4). Данное сечение может принадлежать как к сферической, так и к цилиндрической форме поры или составлять отдельную часть более сложной конфигурации. В случае сферической поры сечение проходит через точку O центр сферы и перпендикулярно оси симметрии, проходящей через точку O.

Внешнее нагружение может быть представлено гидростатическим давлением или монотонно возрастающим. Внутреннее давление может быть обусловлено сжатым воздухом или жидкостью.

В сечении выделим некоторый элемент ABCD стенки поры (рис. 5).

В цилиндрической системе координат r, θ, Z рассмотрим равновесие элемента ABCD стенки поры. Предположим, симметричность поры и однородность материала стенок поры, составляющих ее толщину, а координатные оси r, θ, Z совпадающими с главными направлениями напряженного и деформированного состояния. Ось Z выберем совпадающей с осью симметрии, перпендикулярной плоскости сечения и проходящей через точку O.

Пусть на площадках стенок поры, перпендикулярных оси симметрии, действуют напряжения

$$\sigma_z = \frac{P_z}{F},$$

где P_z – осевая нагрузка, Н;
 F – площадь поперечного сечения сферы, m^2 .

Для элементарного объема стенки поры со сторонами ABCD и толщиной dz будут выполняться уравнения равновесия сил, приложенных к рассматриваемой оболочке сходящихся к оси Z, т.е. можно записать:

$$\begin{cases} \sum P_{z,j} = 0; \\ \sum P_{\theta,j} = 0; \\ \sum P_{r,j} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

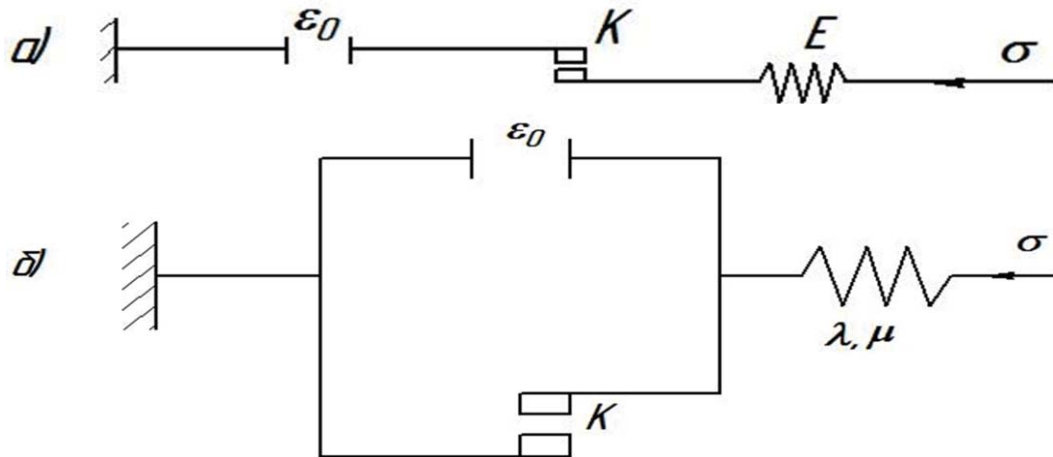


Рисунок 3. Модели пористых упругопластических тел

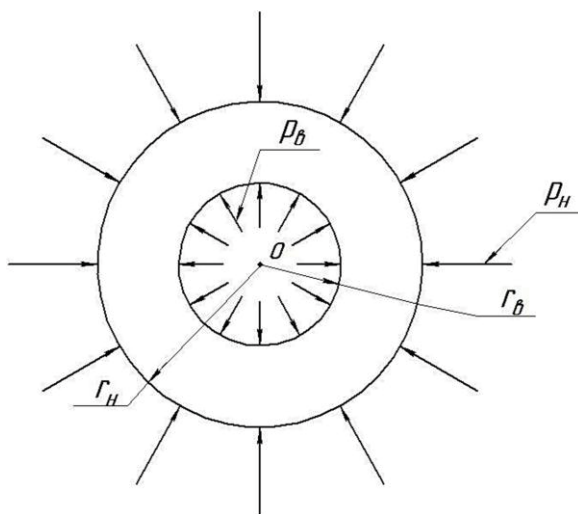


Рисунок 4. Схема сферической нагруженности поры

Данное условие равновесия обеспечивает сохранение начальной пористости почвы Π_0 [8]. В случае сферы

$$\Pi_0 = \frac{r_{0в}^3}{r_{0н}^3 - r_{0в}^3}, \quad (3)$$

где $r_{0н}$ – начальный наружный радиус поры, м;
 $r_{0в}$ – начальный внутренний радиус поры, м.
В случае цилиндра

$$\Pi_6 = \frac{r_{0в}^2}{r_{0н}^2 - r_{0в}^2}.$$

Распишем уравнения системы (2).

Первое уравнение системы (2) (рис. 5) будет [9]

$$P_z = \sigma_z^6 dF = \sigma_z^H dF, \quad (dF = drd\theta)$$

или

$$\sigma_z^6 = \sigma_z^H = \sigma_z, \quad (4)$$

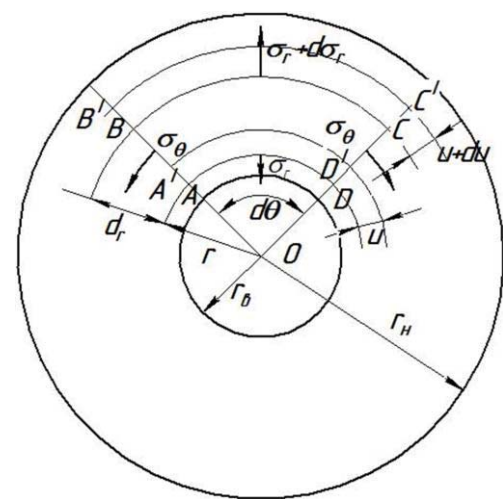


Рисунок 5. Схема поры равновесного и деформированного состояния

где σ_z^6, σ_z^H – напряжение на верхней и нижней поверхностях элемента ABCD, Па.

Рассмотрим второе уравнение системы (2), в котором силы будут действовать со стороны AB и CD. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta(AB)} dr \cdot dz \cdot \cos \frac{d\theta}{2} &= \\ &= \sigma_{\theta(CD)} dr \cdot dz \cdot \cos \frac{d\theta}{2} \end{aligned}$$

или

$$\sigma_{\theta(AB)} = \sigma_{\theta(CD)} = \sigma_{\theta}. \quad (5)$$

Третье уравнение системы (2) будет [9]

$$\begin{aligned} (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \\ - 2\sigma_{\theta} dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

При малых углах $d\theta$ можно сделать замену $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, а также отбрасывая величины второго порядка малости $d\sigma_r dr$, путем несложных преобразований получим дифференциальное уравнение равновесия элементов стенок пор:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}. \quad (7)$$

Уравнение (7) выражает связь между радиальным σ_r и окружным σ_θ напряжениями. Если предположить, что на стенке поры основное влияние оказывают радиальные напряжения, то можно считать $\sigma_\theta = \text{const}$. Тогда из уравнения (7) получим:

$$\ln|\sigma_r - \sigma_\theta| = -\ln r + C_1.$$

Полагая начальные условия в виде $r = r_o$; $\sigma_r = \sigma_{ro}$, получим:

$$\sigma_r = \sigma_\theta \left(1 - e^{-\ln \frac{r}{r_o}}\right) + \sigma_{ro} e^{-\ln \frac{r}{r_o}}.$$

Рассматриваемый элемент $ABCD$ после деформирования примет положение $A'B'C'D'$ (рис. 5) [9].

Относительная деформация вдоль r будет

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(dr - du) - dr}{dr} = -\frac{du}{dr}. \quad (8)$$

Относительная окружная деформация

$$\varepsilon_\theta = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{(rd\theta - ud\theta) - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}. \quad (9)$$

Откуда

$$u = \varepsilon_\theta \cdot r. \quad (10)$$

Получим

$$\frac{du}{dr} = \varepsilon_\theta + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}. \quad (11)$$

С учетом (8) уравнение (11) связывают радиальные и окружные деформации

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr}. \quad (12)$$

При перемещении точек стенки поры изменится пористость, которая будет определяться для полый сферы [8]:

$$P = \frac{r_H^3}{r_H^2 - r_B^3}.$$

Для полого цилиндра:

$$P = \frac{r_H^2}{r_H^2 - r_B^2},$$

где r_H и r_B – наружный и внутренний текущие радиусы поры, м.

Согласно работе [8], связь между r и r_o в зависимости от изменения объема пор будет в случае сферической поры

$$r = \sqrt[3]{r_o^3 - r_{o\theta}^3 \cdot \frac{P_o - P}{P_o - 1}}.$$

В случае полого цилиндра

$$r = \sqrt{r_o^2 - r_{o\theta}^2 \cdot \frac{P_o - P}{P_o - 1}}.$$

Уравнения (7) и (12) можно использовать в исследовании напряженного и деформированного состояния с учетом реологии свойств материалов, т.е. моделями, приведенными в начале статьи. В случае упругих свойств материала стенок поры закон Гука можно записать в форме:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)], \quad (14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)]. \quad (15)$$

Переход в пластическую область будет определяться условием:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} = K, \quad (16)$$

где σ_r – главное максимальное напряжение, Па;
 σ_θ – главное минимальное напряжение, Па.

Если умножить равенство (12) на модуль упругости E , и подставив выражения (13) и (14), после некоторых преобразований получим уравнение Эйлера [9]

$$-r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \quad (17)$$

Опуская промежуточные выкладки, решения уравнения (17) при граничных условиях при $r = r_{o\theta}$; $\sigma_r = P_n$, окончательно можно записать:

$$\sigma_r = \frac{P_\theta r_\theta^2 - P_n r_n^2}{r_n^2 - r_\theta^2} - \frac{P_\theta - P_n}{r_n^2 - r_\theta^2} \cdot \frac{r_\theta^2 \cdot r_n^2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_\theta r_\theta^2 - P_n r_n^2}{r_n^2 - r_\theta^2} + \frac{P_\theta - P_n}{r_n^2 - r_\theta^2} \cdot \frac{r_\theta^2 \cdot r_n^2}{r^2}.$$

Напряжение σ_z найдем из равенства

$$\sigma_z \pi(r_n^2 - r_\theta^2) = \pi(P_n r_n^2 - P_\theta r_\theta^2),$$

которое в случае цилиндрической поры соответствует закрытию ее на торцах.

Откуда осевое напряжение, действующее на торцы, будет

$$\sigma_z = \frac{P_B r_B^2 - P_H r_H^2}{r_H^2 - r_B^2}. \quad (18)$$

В случае открытой цилиндрической поры осевое напряжение равно нулю.

Заключение

Предложенные в работе теоретические модели упруговязкопластических пористых тел позволяют оценить напряженное и деформированное состояние цилиндрической и сферической поры в зависимости от изменения пористости почвы под действием внешних и внутренних нагрузок.

Получены формулы для определения радиальных и окружных напряжений, возникающих на стенках поры.

Полученные результаты могут использоваться при исследовании закономерностей деформирования различных пористых материалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ляхов, Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / Г.М. Ляхов. – М.: Наука, 1982. – С. 288.

2. Бодренко С.И. Исследование распространения ударных волн в пенополистироле / С.И. Бодренко, Ю.А. Крысанов, С.А. Новиков // Прикладная механика и техническая физика. – 1979. – № 6. – С. 140-144.

3. Batcher, В.М. Dynamic response of partially compacted porous aluminum during unloading / В.М. Batcher // J. Appl. Phys. – 1973. – V. 44. – № 10. – P. 4576-4582.

4. Boade, R.R. Principal Hugoniot, Second-shock Hugoniot, and release behavior of pressed copper powder / R.R. Boade // J. Appl. Phys. – 1970. – V. 41. № – 11. – P. 4542-4551.

5. Численная модель деформирования противосколочной сетки при взрывном нагружении /

А.И. Абакумов [и др.] // Труды ВНИИЭФ. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2006. – № 10. – С. 16-30.

6. Садовский, В.М. Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор / В.М. Садовский, О.В. Садовская // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57. – № 5. – С. 53-65.

7. Бунтов, А.Е. Устойчивость монолитных крепей подземных сооружений с учетом пористой структуры материала и сложной реологии сжатого скелета: дисс. ... канд. ф.-м. наук: 01.02.04 / А.Е. Бунтов. – Воронеж, 2017. – 201 с.

8. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А.П. Коликов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1986. – С. 351.

9. Феодосьев, В.И. Сопrotивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – С. 592.

10. Крук И.С. Научные основы проектирования устройств для разделки и поверхностной обработки почвенных пластов к оборотным плугам / И.С. Крук, Ф.И. Назаров, Ю.В. Чигарев. – Минск: БГАТУ, 2021. – 228 с.

11. Чигарев, Ю.В. Методики лабораторных и аналитических исследований сельскохозяйственных сред с пористой структурой / Ю.В. Чигарев, И.С. Крук, В. Романюк, Ф.И. Назаров // Проблемы интенсификации животноводства с учетом охраны окружающей среды и производства альтернативных источников энергии, в том числе биогаза: сб. статей / Институт технологических и естественных наук в Фалентах (отделения в Варшаве); ред.: В. Романюк. – Фаленты – Варшава, 2017. – С. 27-37.

12. Терлеев, В.В. Моделирование гидрофизических свойств почвы как капиллярно-пористого тела и усовершенствование метода Муалема-Ван Генухтена: теория / В.В. Терлеев, М.А. Нарбут, А.Г. Топаж, В. Миршель // Агрофизика. – 2014. – № 2. – С. 35-44.

13. Физика почв / А.И. Ивлев [и др.]. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного федерального ун-та, 2020. – 108 с.

ПОСТУПИЛА В РЕДАКЦИЮ 09.02.2022