Министерство сельского хозяйства и продовольствия
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЧИГАРЕВ Юрий Власович

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОНТАКТНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ СРЕД

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Минск 1993

Работа выполнена в Белорусском аграрном техническом университете.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор И.Ю.Бабич

- доктор физико-математических наук, профессор М.И.Ерхов

- доктор физико-математических наук, профессор М.Д.Мартыненко

Ведущая организация - Чувашский государственный университет

Защита состоится "30" июня 1993 г. в 10 часов на заседании специализированного совета Д 056.02.05 в Белорусской государственной политехнической академии по адресу: 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины, 65.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке БГПА.

Автореферат разослан "28" мая 1993 г.

Ученый секретарь специализированного совета, кандидат физико-математических наук, доцент Н.И.Чепелев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Важной проблемой современного машиностроения, кораблестроения, строительного и горного дела являются задачи о повышении надежности машин и конструкций, снижения их веса и размеров с учетом экологической безопасности для окружающей среды. Это может быть достигнуто в результате проектирования и конструирования узлов и деталей из материалов сохраняющих устойчивое состояние при больших давлениях и обладающих высокой прочностью и жесткостью при контактном взаимодействии. В решении данной проблемы все шире используются методы математической статистики и теории вероятностей. Это дает возможность учесть различные физико-механические эффекты, определяемые структурной неоднородностью материала. Неоднородность может быть вызвана радиационными, температурными, силовыми и другими воздействиями и может проявляться как в пределах, так и за пределом упругости. Появление неоднородности может быть обусловлено и природными факторами (например, в грунтах, почвах, горных породах). Композиционные материалы проектируются с заранее заданными свойствами за счет построения структуры.

Практически все современные материалы при деформировании в той или иной мере одновременно проявляют упругие, вязкие и пластические свойства. Поэтому особый интерес вызывают процессы, связанные с упруговязкопластическим деформированием. Неоднородность материала играет существенную роль в явлениях устойчивости конструкций и контактного деформирования.

Проблема устойчивости и контактного деформирования стохастически неоднородных сложных сред в настоящее время недостаточно разработана, хотя работы в этом направлении ведутся. Это прежде всего связано с тем, что уравнения неоднородной упруговязкопластической среды представляют собой нелинейные уравнения, в которых материальные коэффициенты случайным образом зависят от пространственных координат. Общих методов получения точных решений таких уравнений пока нет. Применение численных методов связано с большим объемом вычислений и зачастую ограничено возможностями ЭВМ. Кроме того при исследовании устойчивости реологически сложных сред, даже в одномерном случае, при линеаризации уравнений сталкиваются с необходимостью различать нагружение и разгрузку, знать историю нагружения, а также учитывать ряд других факторов, обусловленных неоднородностью материала и влияющих на его поведение.

Поэтому аналитическое исследование процессов устойчивости и контактного деформирования тел и элементов конструкций со сложными неоднородными реологическими свойствами является одной из актуальных проблем современной механики деформируемого твердого тела как в теоретическом, так и прикладном отношении.

Целью работы является исследование процессов устойчивости и контактного деформирования неоднородных сложных сред с помощью методов теории вероятности и математической статистики: I) разработка методов вычисления эффективных модулей упруговязкопластических сред с учетом разброса физико-механических свойств; 2) построение общих решений трехмерных уравнений устойчивости в операторном виде в случае эффективной упруговязкопластической среды и среды описываемой с привлечением теории случайных флуктуаций; 3) оценка влияния эффективных свойств и дисперсии неоднородности среды на величину критической силы; 4) исследование устойчивости динамических процессов в неоднородных и нелинейных средах с определением условий перехода от детерминированного описания к статистическому (выполнение критерия стохастичности); 5) исследовать влияние неоднородности материала на параметры контактного взаимодействия двух тел.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем: I) определены эффективные коэффициенты упруговязкопластических сред с учетом разброса физико-механических свойств; 2) получены трехмерные уравнения устойчивости и приведены общие решениях этих уравнений; I) в случае эффективной упруговязкопластической среды и 2) среды со случайными флуктуациями; 3) в задачах плоского деформирования исследована зависимость критических нагрузок от эффективных свойств, средних коэффициентов среды, дисперсии неоднородности материала. Установлено, что в случае двухкомпонентного материала при заданных значениях компонент и концентрации учет дисперсии неоднородности ведет к снижению критических нагрузок по сравнению с однородной средой; 4) в динамической постановке исследована устойчивость поведения возмущений, распространяющихся в неоднородной упруговязкопластической среде. Получен критерий стохастичности при исследовании поведения возмущений в случае когда параметры среды меняются от точки к точке детерми -

нированным образом. Установлена граница стохастичности, которая зависит от характера изменения коэффициентов среды вдоль характеристик и определяет области детерминированных и стохастических решений. В стохастической области на основе кинематических и моментных уравнений исследована устойчивость траекторий и возмущений; 5) для нелинейных колебаний вязко-упругого тела и шарнирно опертой пластинки при импульсном нагружении определены критерий стохастичности. Установлена граница детерминированных и стохастических решений. В области стохастических решений устойчивость тела определяется в среднем и среднеквадратичном; 6) решена задача о контактном деформировании жесткого штампа с предварительно напряженной случайно-неоднородной упруговязкопластической средой. Установлено, что учет неоднородности и предварительно напряженного состояния материала ведет к увеличению области контакта; 7) решена задача о скольжении и качении катка по горизонтальному основанию, когда контактирующие тела характеризуются одинаковыми упруговязкопластическими свойствами и предварительно напряженным состоянием. Определены зоны сцепления и скольжения. Получен критерий агротехнической повреждаемости почвы в случае эффективной модели.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обеспечивается тем, что они получены на основе корректных постановок задач в рамках теории устойчивости, и контактного деформирования, точностью аналитического аппарата исследований, совпадением частных случаев получаемых решений с результатами классических задач и с данными других авторов, экспериментальной проверкой некоторых аналитических решений.

Практическая ценность работы заключается в том, что учет случайных неоднородностей современных материалов в задачах устойчивости и контактного взаимодействия дает картину деформирования ближе к достоверной, чем в однородных моделях.

Результаты работы могут быть применены при проектировании композиционных материалов, при исследовании устойчивости деформирования случайно армированных конструкций в машиностроении, строительной механике, горном деле. Критерии стохастизации позволяют оценить область параметров и основного напряженного состояния, в котором процесс деформирования имеет детерминированный (или случайный) характер, что является необходимо важным при прогнозировании поведения сред и конструкций в задачах сейсмологии, складкообразования, техногенных процессов. Выбирать оптимальные параметры при проектировании и конструировании узлов, деталей и машин из материалов обладающих высокой прочностью при контактном взаимодействии. Делать оценку уплотняющего воздействия колесных движителей на почвогрунты.

Апробация работы. Основные положения по диссертации докладывались: на VI Всесоюзной конференции по прочности и пластичности (Москва, февраль, 1975), IV Всесоюзной конференции по проблемам надежности в строительной механике (Вильнюс, июнь, 1975), Всесоюзной школе-симпозиуме по механике деформируемого твердого тела (Куйбышев, июнь, 1974, 1976-1978), V Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике (Ленинград, февраль, 1977), VII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (Ростов-на-Дону, сентябрь, 1977), Всесоюзной конференции по устойчивости пространственных конструкций (Киев, октябрь, 1978), рабочем семинаре в Институте механики АН УССР под руководством профессора Л.П.Хорошуна (Киев, 1979), рабочем семинаре в Институте геохимии и геофизики АН БССР под руководством профессора Е.П.Хотько (Минск, 1979), Всесоюзном симпозиуме по устойчивости в механике деформируемого твердого тела (Калинин, сентябрь, 1981), Всесоюзной научно-методической конференции по взаимодействию ходовых систем с почво-грунтами (Минск, декабрь, 1983), III Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемого тела (Харьков, июнь, 1985), Всесоюзной научной конференции по методам функций А.М.Ляпунова в современной математике (Харьков, май, 1986), III Европейской конференции "JST VS" по взаимодействию землеройных и сельскохозяйственных машин с почво-грунтами (Варшава, сентябрь, 1986), Всесоюзной научно-технической конференции "Роль энергетики и агрегатирования в повышении технического уровня сельскохозяйственных машин" (Москва, сентябрь, 1987), II Всесоюзной конференции по использованию достижений нелинейной механики грунтов в проектировании оснований и фундаментов в проектировании оснований и фундаментов (Йошкар-Ола, 1989), Всесоюзной конференции по современным проблемам земледельческой механики (Мелитополь, июнь, 1989), III Всесоюзная конференция по нелинейной теории упругости (Сыктывкар, сентябрь, 1989), III Межотраслевая конференция "Неразрушающие методы контроля изделий из полимерных материалов" (Туапсе, октябрь, 1989), Всесоюзной научно-технической конференции по акустической экологии (Ленинград, май, 1990), Симпозиуме по терра механике с международным участием "Оптимальное взаимодействие" (Суздаль, январь, 1992), IУ симпозиуме по проблемам шин и резинокордных композитов, экологии и ресурсосбережения (Москва, октябрь, 1992), Международной математической конференции посвященной 200-летию Н.И.Лобачевского (Минск, декабрь, 1992).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 44 работ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести разделов, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 312 страниц машинописного текста, в том числе 66 иллюстраций и списка литературы, содержащего 309 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор работ по устойчивости и контактному деформированию наиболее близко примыкающих к теме диссертации.

Отмечено, что статистические методы в механике получили широкое развитие благодаря работам В.В.Болотина, С.Д.Волкова, Э.Кренера, В.А.Ломакина, В.А.Пальмова, Ю.П.Самарина, Ю.В.Соколкина, В.П.Ставрова, Л.П.Хорошуна, Т.Д.Шермергора и др.

Систематическому применению статистических методов в механике посвящены монографии В.В.Болотина, В.А.Ломакина, Т.Д.Шермергора.

Общая теория устойчивости пластин и оболочек на основе деформационной теории была создана Ильюшиным А.А.

Устойчивость стержней, пластин и оболочек в условиях ползучести изучалась в работах В.В.Болотина, Э.И.Григолюка, Ю.Н.Работнова, С.А.Шестерикова и др.

Дальнейшее развитие устойчивости за пределом упругости содержится в работах Б.Д.Аннина, В.Г.Зубчанинова, А.Ю.Ишлинского, Д.В.Ершова, Д.Д.Ивлева, В.Д.Клюшникова, М.А.Колтунова, Б.Сторакерса, Л.А.Толоконникова, Р.Хилла, Е.И.Шемякина, Н.Ю.Швайко и др.

Построение общих трехмерных уравнений устойчивости в инвариантном виде и операторному методу их решения для упругих и неупругих сред посвящены работы И.Ю.Бабича, А.Н.Гузя, А.Н.Спорыхина.

Существенную роль в развитии методов решения контактных задач сыграли работы Н.Х.Арутюняна, В.М.Александрова, В.А.Бабешко, И.И.Воровича, Л.А.Галина, Н.И.Глаголева, Г.А.Друянова, М.И.Ерхова, А.Ю.Ишлинского, Д.Д.Ивлева, М.Д.Мартыненко, В.И.Моссаковского, Н.И.Мусхелишвили, И.Я.Штаермана и др.

Во введении обоснована актуальность проблемы, сформулированы цели исследования и практическая значимость, приведена краткая аннотация всех разделов диссертации.

<u>В первом разделе</u> выписываются основные соотношения упруговязкопластических неоднородных сред чувствительных к скорости пластических деформаций. Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил имеют вид

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0 . \qquad (1)$$

На граничной поверхности S заданы силы; P_i, которые считаем детерминированными

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})] n_j = P_i . \qquad (2)$$

При упругом деформировании связь между напряжениями и деформациями определяется обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijke} e^{e}_{ke} . \qquad (3)$$

В (1)-(3) σ_{ij} - тензора напряжений, u_i - вектор перемещений, e^{e}_{ij} - тензор упругих деформаций, λ_{ijke} - тензор упругих модулей.

Функцию нагружения выбираем в виде

$$F = S^{0}_{ij} S^{0}_{ij} - K^2 = 0 , \qquad (4)$$

где $S^{0}_{ij} = S_{ij} - c e^{p}_{ij} - \eta \dot{e}^{p}_{ij}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{kk}\delta_{ij}$; e^{p} - тензор пластических деформаций, $\dot{e}^{p} = de^{p}/dt$, K - коэффициент пластичности, c - коэффициент упрочнения, η - коэффициент вязкости.

Материальные коэффициенты $\eta, K, c, \lambda_{ijke}$ - зависят от пространственных координат x_i .

Ассоциированный закон течения имеет вид

$$\dot{e}^{p}_{ij} = 2\mu S^{0}_{ij} , \qquad (5)$$

$$\mu = \frac{\mathcal{D}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} \quad ,$$

где $\mathcal{D}$ - скорость диссипации.

Полные деформации выражаются суммой

$$e_{ij} = e_{ij}^{e} + e_{ij}^{p} \quad , \tag{6}$$

а геометрические соотношения имеют вид

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i;k} u_{k,j} . \tag{7}$$

Система уравнений (I), (3), (4), (5) замкнута относительно неизвестных функций u_i , $\dot{e}_{ij}^{p}$, σ_{ij} , μ и при заданных граничных условиях (2) имеет единственное решение.

Отметим, что идейные стороны выбранной реологической модели апробированы в работах А.Ю.Ишлинского, В.В.Новожилова и Ю.И.Кадашевича, Д.Д.Ивлева, Г.И.Быковцева, А.Н.Спорыхина.

Обсуждаются два подхода в исследовании процессов деформирования упруговязкопластических неоднородных сред - детерминированный и статистический. В тех случаях, когда невозможно задать измене - ние материальных коэффициентов среды детерминированным образом применяется статистический способ. При этом имеется два пути с помощью которых осуществляется переход от детерминированного описания к статистическому. Первый связан с применением статистической механики к тем процессам, где взаимодействующих частиц нахо - дится достаточно много и весь вопрос, как правило, упирается в то, какие гипотезы и предположения необходимо вводить в дополнение к первым принципам механики (например, эргодическая гипотеза, предположение о случайных параметрах свойств среды и т.д.). Второй подход связан с понятием перемешивающегося движения, которое было введено в статистическую механику в работах Гиббса и формально выражается условием

$$\lim_{T \to \infty} R(f_0 , g_0 / T) = 0 \ ; \tag{8}$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(f_0 , g_0) = 0 \quad , \tag{9}$$

где f_0, g_0 – две произвольные интегрируемые функции динамических переменных, T – время.

Уравнение (8) соответствует непрерывному времени, уравнение (9) – дискретному. Н.С.Крыловым и Э.Хопфом было отмечено, что возникновение перемешивающегося движения связано со свойством неустойчивости динамических систем. Условия (8) и (9) также означают расцепление временных корреляций с ростом времени. В работах А.Н.Колмогорова, В.И.Арнольда, Ю.И.Неймарка, Г.М.Заславского, Б.В.Чирикова, показано, что в этом случае движение системы носит нерегулярный характер и для его описания следует переходить к вероятностным методам.

В данной работе используются оба подхода. Приводится вариант метода осреднения для исследования процессов деформирования упруговязкопластической среды описываемой исходными соотношениями. При этом материальные коэффициенты представляются в виде

$$\lambda_{ijke}(x) = \lambda^*_{ijke} + \lambda'_{ijke} ; \qquad (10)$$

$$c(x) = c^* + c'; \ \eta(x) = \eta^* + \eta'; \ \kappa(x) = \kappa^* + \kappa',$$

где λ^*_{ijke}, c^*, η^*, κ^* – упругие, вязкие и пластические коэффициенты эффективного тела эквивалентного данному неоднородному в среднем. Поля перемещений, напряжений, деформаций записываются в виде, суммы

$$u_i = \langle u_i \rangle + \sum_{\kappa=1}^{\infty} u_i^{(\kappa)}; \quad e^p_{ij} = \langle e^p_{ij} \rangle + \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{p(\kappa)}_{ij};$$

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sigma^{(\kappa)}_{ij} . \qquad (11)$$

Подставляя (10), (11) в уравнения (1), (3), (5), (4), (2) получим для нулевого приближения (средних) систему уравнений в форме

$$\begin{cases} [\langle \sigma_{jk} \rangle (\delta_{ik} + \langle u_i \rangle_{,k})]_{,j} = 0 , \\ \langle \lambda_{ijke} e_{ke} \rangle = \lambda^*_{ijke} \langle e_{ke} \rangle , \\ \langle \dot{e}^p_{ij} \rangle = M^*_1 \langle S_{ij} \rangle - M^*_2 \langle e^p_{ij} \rangle - M^*_3 \langle \dot{e}^p_{ij} \rangle , \\ (\langle S_{ij} \rangle - c^* \langle e^p_{ij} \rangle - \eta^* \langle \dot{e}^p_{ij} \rangle)(\langle S_{ij} \rangle - \\ - c^* \langle e^p_{ij} \rangle - \eta^* \langle \dot{e}^p_{ij} \rangle) - \kappa^{*2} = 0 ; \end{cases} \qquad (12)$$

$$[\langle \sigma_{jk} \rangle (\delta_{ik} + \langle u_i \rangle_{,k})] n_j = P_i \ ; \qquad (13)$$

$$M_1 = 2\mu \ ; \quad M_2 = 2\mu c \ ; \quad M_3 = 2\mu\eta .$$

Для приближения K -го порядка получена система рекуррентных уравнения с граничными условиями в виде

$$[\sigma_{ij}^{(p)} + \sum_{m=0}^{p} \sigma_{jk}^{(m)} u_{i,k}^{(p-m)}] n_j = 0 . \qquad (14)$$

Используя теорию случайных полей вычисляются эффективные коэффициенты неоднородной среды, причем осреднение проводим по реализациям. Подставив эффективные коэффициенты в (12) при граничных условиях (13) получим нулевые приближения (средние) $\langle C_{ij} \rangle, \langle e_{ij}^{p} \rangle$, $\langle u_i \rangle$. Для первого и последующих приближений дифференциальные уравнения имеют вид уравнений эффективной среды, но с правой частью, учитывающей вид конкретных реализаций материальных коэффициентов неоднородной среды. Достоинства развиваемого варианта метода осреднения в том, что в нулевом приближении используются эффективные материальные коэффициенты, содержащие информацию о структуре среды, а в следующих приближениях могут быть получены детерминированные зависимости напряжений в точках данного неоднородного тела.

Рассмотрены предельные соотношения осредненного состояния упругопластических сред: эллиптическое, цилиндрическое, коническое пирамидальное.

<u>Во втором</u> разделе рассматривается расчет эффективных материальных коэффициентов неоднородной упруговязкопластической среды. В общем случае одновременное определение коэффициентов пластичности, вязкости, упрочнения, упругости невозможно, то расчет проводится последовательно. Когда неоднородное деформируемое тело находится в упругом состоянии ставится задача нахождения упругих модулей. Предложена методика вычисления коэффициентов теплопроводности неоднородной среды, которая используется в дальнейшем при расчете коэффициентов пластичности, вязкости, упрочнения. Вы-

числение коэффициентов пластичности проводится для случая, когда во всех точках среды (компонентах) имеет место пластическое течение. Так как соотношения ассоциированного закона течения нелинейные, то для применения метода функций Грина их требуется линеаризировать. Предполагается, что диссипация в неоднородном и эффективном телах равны. Вычисление эффективных коэффициентов пластичности как и модулей упругости, теплопроводности проводится для неоднородных сред с непрерывным распределением неоднородности (композиционный материал с разбросом свойств компонентов). Плотность распределения вероятности материальных коэффициентов берется в виде n -треугольного распределения.

В случае пористой среды учет разброса компонентов не дает обращения в нуль эффективного коэффициента пластичности ни при каких значениях концентрации пор вплоть до единицы.

Вычисление эффективного коэффициента вязкости проводится на основе уравнений вязкопластического тела, причем эффективный коэффициент пластичности берется равным эффективному пределу пластичности вычисленному ранее. Аналогично эффективный коэффициент упрочнения определяется на основе уравнений упрочняющейся пластической среды.

В третьем разделе строятся общие решения трехмерных уравнений устойчивости для стохастически неоднородных упруговязкопластических сред. Рассмотрены два случая. Первый связан с исследованием усточивости эффективной среды, когда свойства материала описываются эффективными модулями. Второй связан с привлечением теории случайных флуктуаций.

В настоящее время теория устойчивости стохастически неоднородных сред недостаточно разработана, хотя работы в этом направлении ведутся. Наибольшее распространение при некоторых упрощающих предположениях получил подход связанный с исследованием устойчивости среднего состояния случайно-неоднородных сред. В этом случае об устойчивости состояния равновесия или движения тела с реологическими свойствами судят по поведению малых детерминированных возмущений во времени в рамках линеаризованной задачи. Состояние равновесия и движения считается устойчивым, если возмущения во времени затухают, а не устойчивым - если возмущения во времени возрастают.

При квазис татическом подходе об устойчивости тела судят по предельной системе, которая получается из линеаризованной, если в коэффициентах последней положить $t \to \infty$.

Исследуется устойчивость случайно неоднородной упруговязкопластической упрочняющейся среды в которой свойства упругости упрочнения, вязкости, пластичности определяются эффективными модулями, определенными во втором разделе.

Явление разгрузки в процессе потери устойчивости не учитывается. Критические нагрузки определяются как для физически нелинейного тела, т.е. по местным касательным модулям.

Если

$$< s_{ij} >< s_{ij} > < \kappa^{*2} \ (0) \ , \tag{15}$$

то эффективная среда характеризуется только упругими модулями λ^* и μ^* , а связь между средними напряжениями и деформациями записываются в виде

$$<\sigma_{ij}> = \lambda^* < e^e_{kk} > \delta_{ij} + 2\mu^* < e^e_{ij} > . \tag{16}$$

Средние скорости пластических деформаций равны нулю, если

$$(< s_{ij} > - c^* < e^p_{ij} >)(< s_{ij} > - c^* < e^p_{ij} >) < \kappa^2 \, (\varkappa) . \tag{17}$$

В случае

$$\begin{gathered}(< s_{ij} > - c^* < e^p_{ij} > - \eta^* < \dot{e}^p_{ij} >)(< s_{ij} > - c^* < e^p_{ij} > - \\ - \eta^* < \dot{e}^p_{ij} >) = \kappa^{*2}(\varkappa) \ ,\end{gathered} \tag{18}$$

то средние скорости пластических деформаций связаны со средними напряжениями соотношениями

$$\begin{gathered}< \dot{e}^p_{ij} > = \psi(< s_{ij} > - c^* < e^p_{ij} > - \eta < \dot{e}^p_{ij} >) \\ (\psi > 0) \ .\end{gathered} \tag{19}$$

К данной системе уравнений следует добавить уравнения равновесия (12) и граничные условия (13). Обозначим решение системы

$$\begin{gathered}< \sigma_{ij}(x_k, t) > = \sigma^0_{ij}(x_k, t); \\ < e_{ij}(x_k, t) > = e^0_{ij}(x_k, t) \ ;\end{gathered} \tag{20}$$

$$< e_{ij}^{p}(x_k,t) > = e_{ij}^{p0}(x_k,t);$$

$$< u_i(x_k,t) > = u_i^0(x_k,t).$$

Будем предполагать, что эти решения с ростом времени стремятся к $\sigma_{ij}^0(x_k)$, $e_{ij}^0(x_k)$, $e_{ij}^{p0}(x_k)$, $u_i^0(x_k)$.

Решение для возмущенного движения ищем в виде

$$< \sigma_{ij}(x_k,t) > = \sigma_{ij}^0(x_k,t) + \sigma^+ \ldots; \qquad (21)$$

$$< u_i(x_k,t) > = u_i^0(x_k,t) + u_i^+ .$$

Подставляя (21) в исходную систему уравнений получим выражения описывающие возмущенное состояние эффективной упруговязкопластической среды. При квазистатическом подходе получена предельная система, которая, после выделения в ней временного множителя $exp(i\omega t)$ в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, записывается в виде

$$\Sigma_{ij} = \delta_{ij} B_{ik}^* u_{k,k}^+ + (A_{ij}^* - \delta_{ij} A_{ij}^*)(u_{i,j}^+ + u_{j,i}^+) . \qquad (22)$$

Здесь $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ / e^{i\omega t}$; $(\not\Sigma i,j; \Sigma k)$.

Коэффициенты B_{ik}^* и A_{ij}^* – зависят от эффективных модулей упругости, вязкости, пластичности, упрочнения, основного напряженного состояния.

Уравнения равновесия и граничные условия соответствующие возмущенному состоянию примут вид

$$[\Sigma_{im} + \sigma_{in}^0 u_{m,n}^+ (1-\delta_{mn})]_{,i} = 0 ;$$

$$[\Sigma_{im} + \sigma_{in}^0 u_{mn}^+ (1-\delta_{mn})] n_i = P_m^+ ; \ (\not\Sigma m). \qquad (23)$$

Соотношения (22), (23) можно трактовать, как уравнения описывающие напряженное и деформированное состояние анизотропного упругого тела с эффективным комплексным модулем упругости. Подстановка (22) в первое уравнение (23) дает

$$\delta_{kj} B^*_{ik} u^+_{r,ri} + 0{,}5 A^*_{im} \delta_{im} (u^+_{i,mi} + u^+_{m,ii}) +$$
$$+ \sigma^0_{in} (1 - \delta_{mn}) u^+_{m,ni} = 0 \; ; \quad (\neq n) \tag{24}$$

или в операторном виде

$$R^*_{ij} u^+_j = 0 \; , \tag{25}$$

где R^*_{ij} – дифференциальные операторы, которые содержат средние начальные деформации, напряжения и эффективные модули стохастически неоднородной упруговязкопластической среды. Решение (25) представляется в форме

$$u^{(j)}_i = \frac{\partial}{\partial R^*_{ij}} \begin{pmatrix} R^*_{11} & R^*_{12} & R^*_{13} \\ R^*_{21} & R^*_{22} & R^*_{23} \\ R^*_{31} & R^*_{32} & R^*_{33} \end{pmatrix} \Phi^{(j)} = 0 \; . \tag{26}$$

Далее развивается операторный метод решения трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости, разработанный в исследованиях А.Н.Гузя, И.Ю.Бабича для упругих, упруго-пластических, вязкопластических сред и А.Н.Спорыхиным - для упруговязкопластических тел. Отметим, что применение операторного метода к исследованию эффективной упруговязкопластической среды обобщает исследования перечисленных авторов, так как в данном случае через эффективные коэффициенты свойств среды учитывается структурная неоднородность материала.

Исследуется устойчивость стохастически неоднородной упруговязкопластической упрочняющейся среды с применением аппарата теории случайных флуктуаций.

Определяющие уравнения неоднородного упруговязкопластического тела объема V , ограниченного поверхностью S ,к которой приложены внешние воздействия P_i описываются системой уравнений рассмотренные в первом разделе при условии, что параметры среды случайным образом зависят от пространственных координат.

Предполагается, что случайный характер неоднородности параметров среды определяется соотношениями

$$\eta = \langle \eta \rangle f; \; C = \langle C \rangle f; \; K = \langle K \rangle f; \; G = \langle G \rangle f, \tag{27}$$

где $f(x_i)$ – статистически однородная изотропная функция. Данное предположение хотя и сужает класс сред, для которых решаемые задачи верны, но должно быть достаточно правдоподобным для композитных материалов с изотропными компонентами. Очевидно, что качественно полученные результаты могут быть применены и к более широкому классу материалов.

Считая, что основное состояние в стохастически неоднородном теле при детерминированных нагрузках определяется своими моментами, в частности, средними полями напряжений и деформаций, решается задача получения замкнутой системы уравнений для средних полей. Проводится статистическая линеаризация уравнений с последующим применением метода функций Грина.

Пренебрегая регулярной составляющей тензора Грина получены уравнения, которые описывают некоторую невозмущенную форму равновесия, устойчивость которой исследуется

$$A^0_{ij} = A^1_{ij} + A^2_{ij}, \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{28}$$

где A^α_{ij} – совокупность слагаемых содержащих моментные функции первого и второго порядка от напряжений σ_{ij}, деформаций e_{ij}, модуля сдвига G, коэффициента пластичности K, коэффициента вязкости η, коэффициента упрочнения C; (α = 0, I, 2). Уравнения равновесия и граничные условия соответственно будут

$$\left[\langle \sigma_{ij} \rangle (\delta_{ik} + \langle u_{i,k} \rangle) + \langle f'^2 \rangle F_{ij}(\langle \sigma_{sp} \rangle, \langle u_{s,p} \rangle)\right]_{,j} = 0; \tag{29}$$

$$\left[\langle \sigma_{ij} \rangle (\delta_{ik} + \langle u_{i,k} \rangle) + \langle f'^2 \rangle F_{ij}(\langle \sigma_{sp} \rangle \langle u_{s,p} \rangle)\right] n_j = 0; \tag{30}$$

F_{ij} – нелинейный оператор, а функция удовлетворяет условию $\langle f \rangle = 1; \; f' = f - \langle f \rangle$.

Путем наложения на основное среднее состояние (28)-(30) детерминированных возмущений в виде (25) получена линеаризованная система уравнений устойчивости. Построены общие решения трехмерных уравнений устойчивости в амплитудных величинах перемещений в инвариантном виде

$$R_{ij} u_i^+ = 0 \ ; \qquad (31)$$

R_{ij} – дифференциальные операторы.

Отметим, что соотношения (25) и (31) получены, исходя из концепции устойчивости, связанные с переходом к предельной системе (концепция И.Г.Четаева). Аналогичное построение можно провести и для случая, когда устойчивость основного процесса деформирования исследуется в зависимости от поведения возмущений на небольшом интервале времени, а для коэффициентов линеаризованной системы и граничных условий вводится "свое" время t_0. (Концепция Ю.Н.Работнова и С.А.Шестерикова).

<u>В четвертом разделе</u>, исходя из общих соотношений трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости деформирования упруговязкопластических хоатически неоднородных сред, решен ряд задач в 2-х случаях: I) когда свойства материала определяются соотношениями (27) и 2) когда описываются эффективными модулями.

Во всех задачах этого раздела используется квазистатический подход. Среда выбирается двухкомпонентной, а параметры свойств материала зависят от двух пространственных координат. К исследованию устойчивости применяется концепция касательно-модульных нагрузок. Масштаб корреляции неоднородностей считаем значительно меньше размера характерной области, а условие эргодичности предполагается выполненным.

Получено решение задачи о поверхностной неустойчивости стохастически неоднородного упруговязкопластического полупространства. Показано, что явление поверхностной неустойчивости наблюдается. При этом величина критической силы значительно меняется от концентрации включений, величины дисперсии неоднородности и значений параметров компонентов.

Исследована устойчивость хаотически неоднородной упруговязкопластической пластинки при сжатии в одном направлении в случае малых докритических деформаций и углов поворота. Задача приводится к системе уравнений в амплитудных величинах перемещений

$$R_{ij} u_j^+ = 0 \ , \qquad (i,j = 1,2) \qquad (32)$$

где дифференциальные операторы имеют вид

$$R_{11} = \left(\alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right);$$

$$R_{22} = \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (\alpha - p) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right]; \qquad (33)$$

$$R_{12} = R_{21} = (\alpha_{12} + \alpha) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha$ – коэффициенты зависящие от средних параметров свойств среды, основного напряженного состояния и дисперсии неоднородности. Получено трансцендентное уравнение для определения критической силы.. Приведены численные расчеты зависимости величины критической силы от геометрических размеров пластинки при разных коэффициентах пластичности и значениях дисперсии неоднородности.

Исследована задача на устойчивость полосы при сжатии в одном направлении в предположении малых деформаций. Углы поворота считаются меньшими, чем единица, но значительно превосходящими средние докритические деформации. Используя операторный метод, получено трансцендентное уравнение для определения критических сил. В случае тонкостенных конструкций гиперболические функции разлагаются в степенной ряд до членов третьего порядка, что дает возможность получить алгебраическое уравнение,из которого определяется критическая нагрузка. Для композиционного материала приведены численные расчеты зависимости значений критической силы от геометрических размеров полосы при разных коэффициентах пластичности и значениях дисперсии неоднородности.

Получено трансцендентное уравнение для определения значений критических сил для стохастически неоднородной упруговязкопластической полосы, армированной в направлении Ox_3 и сжимаемой в направлении Ox_1 и Ox_2 внешними детерминированными усилиями. Решение полученного уравнения можно находить численными методами.

Рассмотрена устойчивость трехслойной пластинки при сжатии в одном направлении. Свойства крайних слоев считаем одинаковыми и отличными от свойств внутреннего слоя. Все слои характеризуются упруговязкопластическими свойствами. Получено выражение для определения критической силы. Показана зависимость критической силы от изменения среднего модуля сдвига внутреннего слоя пластинки. При этом боковые слои пластинки считались однородными. В этом случае увеличение модуля сдвига внутреннего слоя как для однородного, так и неоднородного материала ведет к росту критической силы, причем, в случае, однородного материала увеличение критической силы происходит несколько быстрее.

В рамках плоской деформации рассмотрена задача об устойчивости стохастически неоднородного слоистого материала сжимаемого вдоль одной оси детерминированными усилиями. Приведено выражение для определения критической силы, которое зависит от средних параметров свойств среды, основного напряженного состояния, дисперсии неоднородности, толщины наполнителя и связующего.

Показано влияние неоднородности среды на величину критической силы при различных значениях интенсивности боковой нагрузки. Учет неоднородности материала оказывает большое влияние на величину критической силы при меньших интенсивностях боковой нагрузки. Рассмотрен случай учета неоднородности материала по отдельности в связующем и наполнителе. Критические нагрузки получаются несколько выше, чем при учете неоднородности одновременно в связующем и наполнителе. Особенно это заметно, когда наполнитель является неоднородным материалом, а связующее - однородным.

Показано влияние среднего модуля сдвига в связующем и среднего модуля сдвига в наполнителе на величину критической силы.

Решена задача об устойчивости стохастически неоднородной упруговязкопластической полуплоскости со свободной границей при сжатии в одном направлении детерминированными усилиями. Потеря устойчивости имеет место в непосредственной близости от свободной поверхности и затухает при удалении от нее. Свойства среды характеризуются эффективными параметрами упругости λ^*, μ^*, упрочнения c^*, пластичности K^* и вязкости η^*.

Применяя операторный метод к решению задачи приходим к трансцендентному уравнению для определения критической силы. Эффективные параметры определяются на основе результатов изложенных во втором разделе. Показана зависимость критической силы от эффективного коэффициента пластичности. Возрастание коэффициента пластичности обусловлено увеличением концентрации наполнителя. Установлено влияние разброса пластических свойств от основных в компонентах значений на величину критической нагрузки.

Рассмотрена задача об устойчивости полосы с эффективными упруговязкопластическими свойствами армированной в направлении оси OX_3 и сжимаемой усилиями вдоль оси OX_1. Потеря устойчивости исследуется в плоскости X_1OX_2 в предположении малости докритических деформаций и углов поворота. Получено выражение для определения критической силы. Приводятся численные расчеты, показывающие зависимость критической силы от геометрических размеров полосы и эффективных модулей пластичности.

В пятом разделе исследуется устойчивость динамических процессов в неоднородных и нелинейных средах с определением условий перехода от детерминированного описания к статистическому (выполнение критерия стохастичности).

Рассматривается задача о поведении нестационарных возмущений в неоднородной упруговязкопластической среде. Предполагается, что деформирование тела описывается соотношениями (I), (3), (4),(5), в которых коэффициент упрочнения равен нулю ($c = 0$). В некоторый момент времени происходит возмущение граничных условий в виде некоторого нестационарного воздействия, которое от места приложения распространяется в теле. Решение для возмущенного движения ищется в виде (2I).

Предполагается, что возмущения в среде распространяются в виде поверхности Q_t, на которой величины σ_{ij}^+, e_{ij}^+ испытывают скачок, а величины σ_{ij}^0, e_{ij}^0 непрерывны при переходе через поверхность скачка возмущений. Параметры $\lambda(x_i), \mu(x_i), \eta(x_i)$, $\kappa(x_i)$, $\rho(x_i)$ являются непрерывными дифференцируемыми функциями x_i и при переходе через поверхность скачка возмущений остаются непрерывными.

Показано, что возмущения распространяются в теле в виде продольной и поперечной волн соответственно со скоростями

$$c_e^2 = \frac{\lambda + 2\mu + \sigma_{jt}^0 \nu_j \nu_t}{\rho}; \quad c_t^2 = \frac{\mu + \sigma_{jt}^0 \nu_j \nu_t}{\rho}; \qquad (34)$$

ρ – плотность; ν_i – единичная нормаль к поверхности фронта возмущений.

Получены уравнения для изменения интенсивности возмущений вдоль траекторий, которые зависят от параметров внутренней геометрии поверхности скачков, модулей свойств среды, основного напряженного состояния и координат выбранной траектории. К этим уравнениям добавляются уравнения геометрии и уравнения трактории, вдоль которой рассматривается изменение возмущений. Полученная система уравнений динамики возмущений, геометрии и траектории замкнута и имеет единственное решение при выбранных начальных условиях.

Далее рассматривается распространение возмущений в направлении оси Ox вдоль траектории, координаты которой удовлетворяют полученным уравнениям. За счет неоднородности среды и напряжений траектория отклоняется от прямолинейной. Для однородной среды и однородного напряженного состояния $\sigma_{ij}^{0}(x) = const$ скорость $V(x)=V_0$ и траектория совпадает с осью Ox. Рядом преобразований уравнение траектории приводится к виду

$$\ddot{z} + N(x)z + M(x)z^2 + L(x)z^3 - \varepsilon F(x, z) = 0 ; \tag{35}$$

$$z = y\sqrt{n} ;$$

$n(x)$ - коэффициент преломления.

Полагаем $F(x, z) = zF(x); \; F(x) = \omega \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX) ;$

$$X = \frac{2\Pi}{\Omega} ; \quad \Omega \ll \omega ; \quad \omega^2 = N ; \quad M = 0 ;$$

$$L = \omega^2 \alpha ;$$

здесь δ - функция характеризует наличие тонких неоднородностей среды, ω - частота собственных колебаний траектории, Ω - характеризует частоту включений неоднородности по оси Ox.

Между включениями решение уравнения (35) будет

$$z = A\cos\left[(\omega + \Delta\omega)x + \varphi\right] ; \tag{36}$$

A - амплитуда, φ - фаза траектории.

Для амплитуд и фаз, находящихся слева и справа от δ-функции в точке $x_n = nX$ выписаны уравнения в конечных разностях с точностью до ε

$$A_{n+1} = A_n\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon \sin 2\varphi_n\right) ; \tag{37}$$

$$\varphi_{n+1} = \left\{\varphi_n + \omega_n X + q_n \sin 2\varphi_n + \varepsilon \cos^2\varphi_n\right\} ;$$

$$q_n = \varepsilon \Delta \omega_n X = \frac{3}{8} \alpha A_n^2 \varepsilon \frac{\omega}{\Omega}; \quad 0 < \varphi < 1$$

фигурные скорбки означают дробную часть аргумента.

Вычисляется корреляционная функция для фазы φ

$$L_1 = \frac{1}{q_1} = \frac{\Omega}{\varepsilon \Delta \omega}. \tag{38}$$

Так как условие некоррелированности фаз имеет вид $\lim L_n \to 0$, то фазы траектории будут вести себя близко к хаотичному при выполнении условия

$$q_1 = \frac{\varepsilon \Delta \omega}{\Omega} = \frac{\varepsilon \Delta \omega X}{2\Pi} \gg 1. \tag{39}$$

При выполнении (39) (критерия стохастичности) определено расстояние x_*, начиная с которого колебания траектории становятся стохастическими

$$x_* = \frac{X}{2 \ln q_1} = \frac{1}{2 \Omega \ln q_1}. \tag{40}$$

Дальнейшее исследование проводим для области $x \geqslant x_*$. Для этого привлекаем статистические методы. С помощью уравнения Лиувилля, записанного в переменных "действие-фаза", построено стохастическое дифференциальное уравнение первого порядка приближенно описывающее отклонение траектории y от оси Ox. В соответствии с указанным уравнением составляется уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) и осуществляется переход к старым переменным

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\alpha_1}{4} - \frac{1}{2}\frac{\dot{n}}{n}\right) y P\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\alpha_1}{2} y^2 P\right]; \tag{41}$$

$\alpha_1 = \varepsilon^2 8 \Pi \Omega$;

$P(y, x)$ – плотность вероятности.

Приводятся решения уравнения (41) для стационарного и нестационарного случая. Устойчивость траектории рассмотрена в среднем, среднеквадратичном и по вероятности. Для исследования устойчивости возмущений получена система моментных уравнений. Ограничиваясь моментами до второго порядка включительно получены условия устойчивости возмущений в среднем и среднеквадратичном.

Исследована устойчивость нелинейных колебаний вязкоупругого тела объема V, ограниченного поверхностью S.

Методом Бубнова-Галеркина несамосопряженная задача сведена к исследованию систем дифференциальных уравнений относительно координатных функций времени

$$\ddot{\xi} + \beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi + K(\xi) = \varepsilon\Phi(\xi,t)$$

здесь $\Phi(\xi,t) = \omega_0\xi\Sigma\delta(t-nT)$ – внешнее возмущение, β – коэффициент вязкости, ω_0 – собственная частота, $K(\xi)$ – выражает нелинейную часть зависимости между упругой силой и перемещением, T – период функции $\Phi(\xi,t)$.
При выполнении критерия стохастичности $q_n \gg 1$ для исследования устойчивости привлекается уравнение ФПК и его решение.

Исследована устойчивость нелинейных колебаний шарнирно опертой пластинки при малом коэффициенте затухания. С помощью метода Бубнова-Галеркина получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, для которого получены условия по выполнению критерия стохастичности. Исследование устойчивости нелинейных колебаний проводим для случая $q_n \gg 1$. Для функции плотности вероятности от переменных "действие-фаза" получено уравнение ФПК. Показано, что колебания пластинки будут аналогичны колебаниям под действием случайной нагрузки в виде "белого шума". Устойчивость пластинки исследована в среднеквадратичном.

<u>В шестом разделе</u> решаются задачи контактного деформирования структурно-неоднородных сред.

Рассматривается задача о внедрении жесткого штампа в предварительно напряженное неоднородное упруговязкопластическое полупространство. Напряженно-деформированное состояние среды описывается системой уравнений (15)-(19).

В случае случайного характера изменения свойств среды ее среднее напряженное и деформированное состояние будет описываться системой уравнений (28). Предполагаем, что действие штампа вызывает малые возмущения основного (среднего) напряженного состояния.

Решение (28) ищем в виде (21). В результате линеаризации указанных уравнений, выделения в компонентах векторов и тензоров временного множителя $exp(i\omega t)$, а также, полагая основное среднее напряженно-деформированное состояние однородным, получим систему уравнений

$$\sigma_j^i = \delta_j^k a_i^k e_{kk} + (1-\delta_{ij}) b_{ij} e_{ij}; (\not\Sigma i,j) \quad ; \qquad (42)$$

коэффициенты a_i^k, b_{ij} комплексные величины и зависят от свойств рассматриваемой среды $<C>,<\eta>,<K>,<G>$, основного напряженного состояния и дисперсии неоднородности.

Предполагается, что при действии штампа разгрузка возникает в областях полупространства, достаточно удаленных от границ зоны контакта и незначительно влияет на характер напряженно-деформированного состояния вблизи области контакта. Выражение (42) трактуется как зависимость между напряженным и деформируемым состоянием в анизотропном упругом теле с комплексными модулями упругости. Соотношения (42) совместно с уравнениями равновесия и формулами Коши приводятся к системе уравнений относительно перемещений. Решение полученной системы уравнений для полупространства ищем в форме интегралов Ханкеля.

Определено вертикальное перемещение штампа и интегральное уравнение относительно контактного давления. Приводится выражение для определения радиуса области контакта, которое зависит от предварительно напряженного состояния, от свойств вязкости, пластичности, упрочнения, дисперсии неоднородности, радиуса кривизны штампа.

Полученные результаты обобщают исследования В.М.Александрова, Б.Л.Ромалис, проведенные ими для предварительно напряженного упругопластического полупространства на основе деформационной теории.

Рассматривается плоская задача о скольжении гладкого упругого вязкопластического тела по границе упруговязкопластического основания. Тело и основание описываются уравнениями (15)-(19), в которых i и j пробегают значения от 1 до 2. Основание нагружено равномерно распределенными на бесконечности усилиями $\sigma_{x_1}^0 = p$, а тело осевой нагрузкой q_0. В момент скольжения к телу прикладывается горизонтальная сила Q, действие которой вызывает в обоих телах малые возмущения основного напряженного и деформированного состояния.

Задача решается в квазистатической постановке.

Предполагается, что I) основное (среднее) напряженно деформированное состояние однородное, 2) материал обоих тел одинаков, 3) масштаб неоднородности мал по сравнению с характерным масштабом рассматриваемых тел, 4) радиус кривизны движущегося тела велик по сравнению с размерами площадки контакта, 5) разгрузка возникает в областях достаточно удаленных от границ зоны контакта и незначительно влияет на характер напряженно-деформированного состояния в области контакта.

Получена линеаризованная система уравнений возмущенного состояния в виде

$$a_1 T_{ij}^{+} + b_1 J_{ij}^{+} = \langle G \rangle (c_1 \dot{e}_{ij}^{+} + d_1 e_{ij}^{+}) , \qquad (43)$$

где

$$T_{ij}^{+} = \dot{\sigma}_{ij}^{+} - 3\gamma \delta_{ij} \dot{\sigma}^{+};$$

$$J_{ij}^{+} = \sigma_{ij}^{+} (2\langle G \rangle + \langle c \rangle) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma^{+} (2\langle G \rangle + 3\gamma \langle c \rangle);$$

$$\gamma = \frac{\nu}{1+\nu} .$$

Коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 – зависят от средних параметров свойств среды, дисперсии неоднородности и основного напряженного состояния. При равномерном движении тела смещение и напряжение не будут зависить явно от времени и будут функциями только координат. Тогда, применяя к преобразованным уравнениям (43), методику известного подхода Л.А.Галина и И.Г.Горячевой к вязкоупругим средам, для изображений напряжений и деформаций получены уравнения эквивалентные уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела. Определение изображений напряжений и деформаций проводим методом решения плоских контактных задач разработанного Л.А.Галиным. На заключительном этапе истинные контактные напряжения определяются из дифференциального уравнения. Определена точка приложения силы T. Показана зависимость истинных напряжений от коэффициента безразмерной дисперсии неоднорости среды.

Решена задача о качении катка по горизонтальному основанию, когда оба тела описываются уравнениями возмущенного состояния в виде (43), а предварительно напряженное состояние характеризуется уравнениями (28). Малые возмущения в обоих телах обусловлены действием силы T момента M.

Предполагается, что вся площадь контакта состоит из двух участков: участка с проскальзыванием, на котором касательные напряжения пропорциональны нормальному давлению и участка сцепления. Рассмотрен случай качения катка по основанию с постоянной скоростью, что дает возможность ввести в рассмотрение изображение напряжений и деформаций. Применен метод Л.А.Галина для определения изображений напряжений и деформаций.

Истинное давление σ_{x_2} на всей площадке контакта определяется из дифференциального уравнения. Из условия $\sigma_{x_1x_2}=-\rho\sigma_{x_2}$ (ρ - коэффициент трения скольжения) на участке проскальзывания определяем $\sigma_{x_1x_2}$. Касательные напряжения на участке сцепления определяем из решения неоднородной задачи Римана-Гильберта. Полученные соотношения для σ_{x_2} и $\sigma_{x_1x_2}$ зависят от средних параметров упругости, вязкости, пластичности, среднего предварительно напряженного состояния и дисперсии неоднородности.

Показано влияние неоднородности на величину момента сопротивления качению.

Рассмотрена задача о качении упругого катка по почве, свойства которой описываются эффективными упруговязкопластическими параметрами. На основе решения контактной задачи выводится критерий агротехнической неповреждаемости почвы колесными движителями. Приведены зависимости линии контакта, осевой нагрузки, средних нормальных контактных напряжений от меры агротехнической повреждаемости почвы. Показано влияние скорости движения оси катка на средние нормальные контактные напряжения в зоне загрузки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В результате выполненных исследований получены новые теоретические результаты:

- разработан подход обобщающий метод самосогласования вычисления эффективных коэффициентов пластичности, упругости, вязкости, упрочнения неоднородной упруговязкопластической среды с учетом разброса свойств компонентов от их основных значений и с непрерывным распределением неоднородности.

- Разработана схема последовательного вычисления эффективных коэффициентов упругости, пластичности, вязкости и упрочнения, использующая эффективные коэффициенты пластичности для вычисления эффективных коэффициентов вязкости и упрочнения.

- Установлено, что учет разброса свойств компонентов от их основных значений в предельном случае пористой среды позволяет получить зависимость эффективных коэффициентов от концентрации пор во всем диапазоне от нуля до единицы.

- В случае теории эффективных модулей и в случае теории случайных флуктуаций, в квазистатической постановке исследованы вопросы устойчивости деформирования стохастически неоднородных упруговязкопластических сред. Для обоих случаев построены общие трехмерные уравнения устойчивости в инвариантном виде и предложен операторный метод их решения. Общие решения получены в рамках теории малых деформаций.

- Показано, что в композитных материалах с малой сдвиговой жесткостью при малых деформациях может наблюдаться явление поверхностной неустойчивости. При этом величина критической силы существенно меняется в зависимости от концентрации включений и величины коэффициентов компонентов.

- Установлено, что для тонкостенных пластин критическая сила зависит от геометрических размеров полосы, основного (в среднем) напряженно-деформируемого состояния, средних параметров пластичности, упрочнения, упругости и дисперсии неоднородности. Критическая нагрузка в случае учета неоднородности материала меньше, чем при рассмотрении однородного материала.

- Показано, что при исследовании устойчивости слоистых материалов, когда слои теряют устойчивость по одинаковым формам, критическая сила будет больше, если свойства неоднородности проявляются в слоях наполнителя, а слои связующего являются однородным материалом. Модуль сдвига в связующем оказывает большее влияние на величину критической силы, чем модуль сдвига в наполнителе.

- Показано, что учет разброса пластических свойств от их основных в компонентах значений снижает значение критической силы при исследовании задач о поверхностной неустойчивости и устойчивости тонкостенных пластин.

- Получена система уравнений, определяющая изменение интенсивности возмущений при движении вдоль выбранной траектории в неоднородной упруговязкопластической среде.

- Показано, что возмущения в изотропной, неоднородной упруговязкопластической среде распространяются в виде поперечной и продольной волн со скоростями зависящими от параметров среды и основного напряженного состояния.

-Получено уравнение движения траектории вдоль которой распространяются возмущения в неоднородной упруговязкопластической среде.

- Впервые к реологическим средам применен метод, позволяющий решить вопрос о возникновении стохастичности в поведении траектории в зависимости от вида неоднородности среды.

- Установлено, что при выполнении критерия стохастичности движение траектории будет описываться стохастическим дифференциальным уравнением, решения которого дают возможность исследовать устойчивость траектории в среднем, среднеквадратичном и по вероятности.

- Развит подход для получения системы моментных уравнений, с помощью которой исследована устойчивость возмущений в среднеквадратичном.

- Получен критерий стохастичности для нелинейных колебаний упруговязких тел. Выведено уравнение Лиувилля и соответствующее стохастическое уравнение. Сформулирован критерий устойчивости в случае тривиального решения в среднем квадратическом и по вероятности.

Исследованы условия стохастизации процесса в случае нелинейных колебаний шарнирно-опертой пластинки при действии нагрузки импульсного типа.

Получено стохастическое дифференциальное уравнение, которое описывает колебания пластинки под действием случайной нагрузки в виде "белого шума", что характерно для пластин, подверженных акустическому давлению вблизи реактивного двигателя и некоторых тонкостенных конструкций строительного типа. Стохастическая устойчивость пластинки определена по среднему квадрату прогиба.

- Получено решение контактной задачи о вдавливании сферического штампа в предварительно напряженное стохастически неоднородное упруговязкопластическое полупространство. Приводится выражение для определения области контакта в зависимости от предварительно-напряженного состояния и средних параметров свойств среды.

Выявлено, что учет неоднородности материала ведет к увеличению области контакта.

– Развит метод решения плоской контактной задачи о скольжении упруговязкопластического тела по границе упруговязкопластического основания, обобщающий метод Л.А.Галина и И.Г.Горячевой для вязкоупругих тел. Изучено влияние неоднородности на величину контактных напряжений.

– Дано решение контактной задачи о качении катка по горизонтальному основанию, когда оба тела из одинакового материала со случайно неоднородными упруговязкопластическими свойствами и до контактного взаимодействия предварительно нагружены. Получены соотношения для нормальных и касательных напряжений зависящие от средних параметров упругости, вязкости, пластичности, среднего предварительно напряженного состояния и дисперсии неоднородности.

На основе теории эффективных модулей и результатов решения контактной задачи обоснован критерий аналитического моделирования агротехнических свойств машин. Показано, что в соответствии с заданной мерой агротехнического повреждения почвы можно подбирать конструктивные параметры колеса, имеющего допустимое давление на почву.

Установлена зависимость контактных напряжений от скорости движения оси колеса.

– Приведено выражение для распределения средних нормальных напряжений вдоль линии контакта в зоне загрузки.

Показано, что учет пористости в реологической модели почвы ведет к уменьшению контактных напряжений по отношению к однородной модели.

– Предложено устройство для определения динамических характеристик грунтов. Устройство навешивается на трактор, а вибродинамические нагрузки создаются при помощи вибратора, перемещение которого по грузовой балке может обеспечить данное значение амплитуды колебаний нагрузки. Перемещением набора грузов обеспечивается определенная нагрузка на колесо. Данное устройство может использоваться при моделировании агротехнических свойств машин.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Об устойчивости деформирования стохастически неоднородной упрочняющейся упруговязкопластической среды "Прикладная механика", т. 13, № 3, 1977, с. 24-32 (совм. с А.Н.Спорыхиным).

2. К устойчивости деформирования упругого тела со случайными

неоднородностями. Межв. сб. "Исследование по механике сплошных сред". Воронеж, вып. I, 1974. - С. 12-15 (совм. с А.Н.Спорыхиным).

3. Устойчивость стохастически неоднородных упруговязкопластических сред. В сб. "Проблемы надежности в строительной механике". Вильнюс, 1975. - С. 179-180 (совм. с А.Н.Спорыхиным).

4. К устойчивости волноводного распространения лучей в неоднородных средах. В сб. "Всесоюзн. конф. "Теория дифракции и распространение волн". Т. 2, 1977. - С. III, Москва (совм. с А.В.Чигаревым).

5. К стохастической неустойчивости нелинейных колебаний реологических материалов. В сб. "Пятая Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике", Ленинград, 1977. - С. 122-123 (совм. с А.Н.Спорыхиным).

6. К устойчивости колебаний нелинейных упругих тел. Межв. сб. "Механика деформируемого твердого тела". Куйбышев, вып. I, 1975. - С. 90-92 (совм. с Спорыхиным А.Н.).

7. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. Акустический журнал. Т. 24, № 5, 1978. - С. 705-771 (совм. с А.В.Чигаревым).

8. К поверхностной стохастической неустойчивости упруговязкопластических сред. В сб. "Механика деформируемого твердого тела". Всесоюзн. школа и конференция молодых ученых, Куйбышев, 1978. - С. 113.

9. К стохастической неустойчивости нелинейных колебаний пластинки при импульсном нагружении. В кн.: "Устойчивость пространственных конструкций", Киев, 1978. - С. 78-82.

10. К устойчивости плоского деформирования случайно неоднородных сложных сред. В сб.: "Состояние и меры по повышению эффективности научно-исследовательских работ по механизации, электрификации и автоматизации сельскохозяйственного производства и подготовке инженерных кадров". Минск, ч. II, 1979. - С. 115-117.

11. Математические исследования элементов систем автоматического регулирования при случайном возмущении. В сб.: "Автоматизация и средства технического контроля в сельскохозяйственном производстве". Горки, вып. 74, 1981. - С. 39-42.

12. К устойчивости упруго-пластического деформирования при случайных возмущениях. В сб.: "Всесоюзный симпозиум по устойчивости в механике деформируемого твердого тела". Калинин, 1981, - С.

43-44.

13. Математические исследования одной модели процесса взаимодействия колеса и грунта. В сб.: "Улучшение эксплуатационных качеств и конструкций тракторов и сельскохозяйственных машин". Горки, вып. 84, 1982. - С. 93-99 (совм. с В.А.Скотниковым).

14. О взаимодействии эластичного колеса и грунта со сложными свойствами. В сб. "Механизация возделывания и уборки технических культур в БССР", Горки, вып. 113, 1983. - С. 45-50.

15. Качение колесного движителя с пневматической шиной по грунту с упруговязкопластическими свойствами. В сб.: "Взаимодействие ходовых систем с почво-грунтами". Тезисы докл. Всесоюзн. конферен. Минск, 1983. - С. 8-11. (совм. с В.А.Скотниковым).

16. Определение контактных напряжений при колебании колеса на деформируемом грунте. В сб.: "Взаимодействие ходовых систем с почво-грунтами". Тезисы докл. Всесоюзн. конф., Минск, 1983. - С. 12-13.

17. Некоторые вопросы взаимодействия колеса с грунтом с учетом гистерезисных явлений. В сб.: "Улучшение проходимости и конструкции тракторов и сельскохозяйственных машин, работающих на торфяно-болотных почвах". Горки, вып. 99, 1983. - С. 3-8.

18. Устройство для определения динамических характеристик грунтов. А.с. № 1131972 СССР (совм. с Синкевич П.Н., Синкевич Н.Н., Галкин Е.М.).

19. О качении катка по упруговязкопластическому основанию. В сб.: "Смешанные задачи механики деформируемого тела. Ш Всесоюзн. конференция". Харьков, 1985, - С. 76-77 (совм. с В.А.Скотниковым).

20. Устойчивость траекторий лучей на неоднородных и неровных поверхностях. Тезисы докл. Всесоюзн. научн.конф. "Метод функций А.М.Ляпунова в современной математике". Харьков, 1986. - С. 130 (совм. с Чигаревым А.В.).

21. Качение жесткого катка по зернистой среде. В сб. "Применение порошковых, композиционных материалов и покрытий в машиностроении". Уральская регион. конф. по порошковой металлургии и композиционным материалам. Пермь, 1987. - С. 6-7.

22. Моделирование воздействия сельскохозяйственных агрегатов на почву. Матер. Всесоюзн. конфернц. "Роль энергетики агрегатирования в повышении технического уровня сельскохозяйственных машин".

Москва, 1987. - С. 118-120.

23. Математическая модель подпахотного слоя при динамических воздействиях. Матер. Всесоюзн. конф. "Роль энергетики и агрегатирования в повышении технического уровня сельскохозяйственных машин". Москва, 1987. - С. 123-124.

24. О вдавливании упругого штампа в случайно-неоднородный упруговязкопластический грунт. В сб.: II Всесоюз. конф. "Использование достижений нелинейной механики грунтов в проектировании оснований и фундаментов". Йошкар-Ола, 1989. - С. 83-84.

25. Определяющие параметры свойств почвы при ее уплотнении колесными движителями и их определение. В сб.: "Повышение проходимости сельскохозяйственной техники на почвах с низкой несущей способностью". Горки, 1989. - С. 58-63.

26. Нелинейные свойства пористых композитных материалов. В сб. "III Всесоюзная конференция по нелинейной теории упругости". Сыктывкар, 1989. - С. 149-151. (совм. с С.Э.Петкун, А.В.Чигаревым).

27. К определению критерия агротехнического ресурса плодородия почв. Тез. докл. Всесоюзн. конференции по современным проблемам земледельческой механики. Мелитополь, 1989. - С. 10 (совм. с А.В. Гривицким).

28. Метод определения структуры материала акустическими методами. В сб. III-ей Межотраслевой конференции "Неразрушающие методы контроля изделий из полимерных материалов". Туапсе-Москва, 1989. - С. 141-142 (совм. с А.В.Чигаревым).

29. Аналитическое моделирование агротехнических свойств машин. "Техника в сельском хозяйстве", № 2, 1990. - С. 11-12 (совм. с В.А.Скотниковым).

30. Проектирование акустических материалов стохастической и детерминированной структуры с заданными шумоизолирующими свойствами. В кн.: "Проблемы акустической экологии", часть 2, Ленинград, 1990. - С. 43-49 (совм. с А.В.Чигаревым).

31. Самосогласованный метод вычисления эффективных коэффициентов неоднородных сред с непрерывным распределением физико-механических свойств. ДАН СССР т. 313, № 2, 1990. - С. 292-295 (совм. с А.В.Чигаревым).

32. Влияние физико-механических свойств почвы на тягово-сцепные параметры колесного движителя. В кн.: "Воздействие ходовых систем сельскохозяйственных машинно-тракторных агрегатов на почву".

Горки, 1991. - С. 22-27.

33. Энергетический подход к исследованию процесса взаимодействия колеса с почвой. В кн.: "Воздействие ходовых систем сельскохозяйственных машинно-тракторных агрегатов на почву". Горки, 1991. - С. 68-73.

34. Критерий агротехнической неповреждаемости почвы колесными движителями. Техника в сельском хозяйстве, № 1, 1991. - С. 38-40.

35. Критерий устойчивости агроэкологических систем. Техника в сельском хозяйстве, № 5, 1991. - С. 44-45.

36. Теплопроводность композиционных материалов обладающих разбросом свойств компонентов. ВесцI АН БССР, сер. фIз.-энерг. навук, № 3, 1991. - С. 109-112. (совм. с Н.И.Чепелевым, А.В.Чигаревым).

37. Ацэнка агратэхнIчнага пашкоджання глебы при тэхнIчным дэфармаваннI. ВесцI АН БССР, сер. с/гаспад. навук, № 3, 1991. - С. 51-55.

38. Об устойчивости нестационарных возмущений в упруговязкопластической среде с начальными напряжениями. ВесцI АН БССР, сер. фIз.-тэхн. навук, № 4, 1991. - С. 72-80.

39. Моделирование системы "движитель-почва-урожай" с учетом сохранения агроэкологического равновесия. В сб. "Оптимальное взаимодействие". Симпоз. по террамеханике с международным участием. Суздаль, 1992. - 162-169.

40. Определение эффективных свойств пластичности в трибологических системах. Матер. IУ симпозиума "Проблемы шин и резинокордных композитов. Экология и ресурсосбрежение". Москва, 1992. - С. 157-162.

41. К определению эффективных свойств пластичности структурно-неоднородных упруговязкопластических сред. ВесцI АН БеларусI, сер. фIз.-тэхн. навук, № 1, 1993. - С. 11-15.

42. Влияние структурной неоднородности материала на процесс разрушения. Тез. Междун. матем. конфер. посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского. Ч. П, Минск, 1993. - С. 102.

43. Устойчивость стохастически неоднородных слоистых материалов с упруговязкопластическими свойствами. Тез. Межд. матем. конфер. посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского. Ч. П, Минск, 1993. - С. 103.