АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том XXIV | 1978 | Вып. 5

УДК 534.222

О ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛУЧЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев

Рассмотрена задача об устойчивости волноводного распространения лучей в неоднородных средах. Устойчивость в линейном приближении обеспечивается условием минимума скорости на оси, а в нелинейном случае при определенном характере неоднородности вдоль оси возможно возникновение стохастической неустойчивости луча. Исследование устойчивости проводится в вероятностном смысле на основе приближенного стохастического уравнения. Рассмотрена задача синтеза волновода с оптимальными свойствами, обеспечивающими устойчивость луча.

Координаты точек звукового луча в неоднородной среде удовлетворяют нелинейным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами [1–5]. При этом волноводный характер лучевого распространения звука и устойчивость лучей определяются конкретной моделью неоднородности. Вопрос об устойчивости луча в линеаризированной постановке рассматривался в работе [2], диффузия лучей в стохастических средах в том же приближении исследована в работах [4, 5].

В нелинейных детерминированных системах для некоторых видов возмущений поведение системы становится стохастическим [6] и оказывается необходимым переход к вероятностному его описанию. Критерий стохастичности для неоднородной среды определяется характером продольной неоднородности волновода.

При выполнении условия стохастичности, для исследования устойчивости луча с учетом нелинейности можно использовать уравнение ФПК (Фоккера – Планка – Колмогорова) и его решения.

Рассмотрим в плоскости $x0y$ луч, заданный в виде $y=y(x)$. Трехмерная задача принципиальных трудностей не содержит. Неоднородность среды характеризуется зависимостью скорости $G(x,y)$ от пространственных декартовых координат или коэффициента преломления $n(x,y)=G_0/G(x,y)$. Функционал Ферма $\tau(x,y)=\int\limits_{M_0}^{M}\frac{ds}{G(x,y)}=\int\limits_{M_0}^{M}n(x,y)\,ds$ принимает минимальное значение вдоль лучей, удовлетворяющих уравнениям Эйлера [1, 2], которые могут быть преобразованы к виду

$$\ddot{y}+\dot{y}(1+\dot{y}^2)f_1(x,y)-\dot{y}^2(2-\dot{y}^2)f_2(x,y)-f_2(x,y)=0, \tag{1}$$

$$\dot{y}=\frac{dy}{dx},\quad f_1=\frac{\partial\ln n}{\partial x},\quad f_2=\frac{\partial\ln n}{\partial y}.$$

Пусть в однородной среде ось $x(y=0)$ является лучом. В общем случае можно выбрать в качестве оси волновода любую заданную кривую. Рассмотрим распространение волны в неоднородной среде в направлении оси x, тогда луч $y(x)$ представляет отклонение луча от оси волновода $y=0$ вследствие неоднородности.

Разложим функции f_1, f_2 в окрестности оси x:

$$(2)\qquad f_1(x,y)=f_1{}^0(x,0)+f^0_{1,y}(x,0)\,y+\frac{1}{2!}f^0_{1,y^2}(x,0)\,y^2+$$
$$+\frac{1}{3!}f^0_{1,y^3}(x,0)\,y^3+\varepsilon F_1(x,y),$$
$$f_2(x,y)=f_2{}^0(x,0)+f^0_{2,y}(x,0)\,y+\frac{1}{2!}f^0_{2,y^2}(x,0)\,y^2+$$
$$+\frac{1}{3!}f^0_{2,y^3}(x,0)\,y^3+\varepsilon F_2(x,y).$$

Подставим второе выражение (2) в уравнение (1) и пренебрежем членами с $\dot y^2$; тогда мы получим

$$(3)\qquad \ddot y+\dot y f_1-f_2{}^0-f_{2,y}y-\frac{1}{2!}f^0_{2,y^2}-\frac{1}{3!}f^0_{2,y^3}=\varepsilon F(x,y),$$

где ε — малый параметр.

Если ось x является экстремалью, то $y=0$ удовлетворяет уравнению (3) и, следовательно,

$$(4)\qquad f_2{}^0=0,\quad f^0_{2,y}>0\quad \text{при}\quad y=0.$$

Таким образом, флуктуационные отклонения луча от оси удовлетворяют уравнению

$$(5)\qquad \ddot y-\dot y f_1-f^0_{2,y}y-\frac{1}{2!}f^0_{2,y^2}y^2-\frac{1}{3!}f^0_{2,y^3}y^3=\varepsilon F(x,y).$$

Заменой $y=z/n^{1/2}$ уравнение (5) преобразуем к виду

$$(6)\qquad \ddot z+N(x)z+M(x)z^2+L(x)z^3=\varepsilon F(x,\ z),$$
$$N=\frac{1}{4}[(\ln n)']^2-\frac{1}{2}\frac{\ddot n}{n}-f^0_{2,y},$$
$$M=-\frac{1}{2}f^0_{2,y^2}+\frac{1}{2n^{1/2}}f_1{}^0f^0_{1,y}+\frac{1}{n^{1/2}}f^0_{1,yx},$$
$$L=-\frac{1}{6n}f^0_{2,y^3}+\frac{1}{n}(f^0_{1,y}+f_1{}^0f^0_{1,y^2})+\frac{1}{2n}f^0_{1,xy^2}.$$

Здесь $n=n(x)$, так как рассмотрение ведем в окрестности $y=0$.

Аналогично работе [2] рассмотрим линеаризованное уравнение (6) $\ddot z+N(x)z=0$, исследование которого дает следующие результаты: 1) при $N\leqslant 0$ $z\to\infty$ при $x\to\infty$ 2) $N\geqslant m>0$ луч флуктуирует около оси x и при $x\to\infty$ пересекает $y=0$ бесконечное число раз. При начальных условиях $z(0)=0$, $\dot z(0)=c$ и достаточно малом c функция $z(x)$ на $(0,\infty)$ по абсолютной величине не превосходит заданного значения. Луч устойчив в линейном приближении. Условие минимума скорости (4) на оси волновода обеспечивает устойчивость в большом. При учете нелинейности в уравнении (6), когда N, M, L близки к постоянным и ε достаточно мало, колебания луча имеют условно-периодический характер [7, 8].

Пусть нелинейность не очень мала. Функцию $F(x,z)$ будем рассматривать как величину, определяющую внешние воздействия на луч вследствие неоднородности. Рассмотрим случай детерминированной неоднородной среды, позволяющий сравнительно просто получить для данной задачи критерий перехода от динамического описания к статистическому, используя результаты работы [6]. Положим

$$(7)\qquad F(x,z)=zF(x),\quad F(x)=\omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nX),$$

$$X=2\pi/\Omega,\quad \Omega\ll\omega,\quad \omega^2=N,\quad M=0,\quad L=\omega^2\alpha.$$

Здесь δ-функция характеризует наличие тонких неоднородностей вдоль оси волновода. Тогда уравнение (6) примет вид

$$(8)\qquad \ddot z+z\omega^2(1+\alpha z^2)-\varepsilon\omega z\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nX)=0.$$

Уравнение вида (8) рассматривали в работе [6] в связи с другими физическими задачами; был получен критерий стохастизации для систем вида (8).

Условие стохастизации мы определим на основе понятия перемешивающегося движения, когда происходит расцепление корреляций фазовых переменных луча, взятых в разных точках волновода. Беря решение уравнения (8) в виде [6] $z=A\cos[(\omega+\Delta\omega)x+\varphi]$ с точностью до членов порядка α, частоты порядка α^2 и $\varepsilon\ll1$ можем написать приближенно в конечных разностях уравнения для фазы φ и амплитуды A:

$$\varphi_{n+1}=\{\varphi_n+K_n\sin 2\varphi_n+\omega_nX+\varepsilon\cos^2\varphi_n\},$$

$$A_{n+1}=A_n\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin 2\varphi_n\right),\ K_n=\varepsilon\Delta\omega_nX=$$

$$=\frac{3}{8}\alpha A_n{}^2\varepsilon\frac{\omega}{\Omega}.$$

Фигурные скобки обозначают дробную часть аргумента, величина ε определяет относительную величину изменения амплитуды отклонения луча при прохождении тонкого слоя неоднородности в точке $x_n(n)$. Условие некоррелированности фаз в соседних точках имеет вид $R_1=1/K_1=$ $=1/K=0$, что эквивалентно $K=\varepsilon\dfrac{\Delta\omega}{\Omega}\gg1$, т. е. расстояние $X=2\pi/\Omega$ между включениями слоев неоднородности вдоль волновода должно быть достаточно велико. Следуя работе [6], находим оценку длины трассы, начиная с которой поведение луча становится стохастическим:

$$x_*=\frac{X}{2\ln K}=\frac{1}{2\Omega\ln K}.$$

Для исследования устойчивости луча необходимо переходить к статистическому описанию на основе исследования вероятностных характеристик: плотности распределения, моментов, удовлетворяющих соответствующим уравнениям типа ФПК, или моментным уравнениям.

Для достаточно больших K [6] вероятность попадания траектории процесса в фазовой плоскости в область устойчивости мала, а в случае попадания время пребывания фазовой точки в ней уменьшается. При $K<1$ ($\varepsilon\ll1$) движение устойчиво, при $K\gg1$ движение имеет стохастический характер, $K\sim1$ — переходная область.

Роль тонких включений неоднородности в виде δ-функций состоит в том, что в этом случае частотный спектр $F(x)$ имеет бесконечную ширину. Можно рассматривать $F(x)$ с ограниченным спектром, если ширина его достаточно велика, что соответствует случаю, когда эффективная толщина включения много меньше периода колебания луча. При $K\gg1$ происходит перекрытие резонансов системы, движение стохастизируется, а фаза φ изменяется случайным образом в зависимости от x. Для выполнения условия $K \gg 1$ необходимы [6]: а) δ-образность какой-либо производной, что означает присутствие большого числа гармоник в спектре $F(x)$, б) периодичность (почти периодичность) $F(\omega)$ с частотой $\Omega \ll \omega$, в) достаточно большая нелинейность. Зависимость $F(x, z)$ от z может быть отличной от формулы (7), и, в частности, может иметь место независимость от z.

Таким образом, предположения (7) относительно характера неоднородности могут быть значительно расширены, рассматриваемый случай позволяет получить простые оценки возникновения стохастичности в движении луча. Вероятностное исследование устойчивости луча мы будем проводить с помощью функции плотности вероятности, удовлетворяющей уравнению ФПК.

В переменных действие — фаза I, θ уравнение (8) напишем в виде

$$\dot{I}=\varepsilon\Psi(I,\theta,x), \quad \dot{\theta}=\omega(I), \tag{9}$$

$$\Psi=I\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-kX)\sin 2\theta.$$

Вводя функцию плотности состояний $p(x, I, \theta)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля, и представляя

$$p(x,I,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,I)e^{in\theta}+p_{-n}(x,I)e^{-in\theta},$$

$$\Psi(x,I,\theta)=I\sum_{k}\delta(x-kX)\sin 2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x,I)e^{in\theta}+$$

$$+\Psi_{-n}(x,I)e^{-in\theta}, \quad p_{-n}=p_n^*, \quad \Psi_{-n}=\Psi_n^*,$$

получим [6] при граничном условии $p_n(0,I,\theta)=p_0(0,I)\delta_{n0}$ уравнение типа ФПК для $p_0(x,I)$:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial I}(\alpha_1 I p_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial I^2}(2\alpha_1 I^2 p_0), \tag{10}$$

$$\alpha_1=\varepsilon^2 8\pi\Omega.$$

Уравнению (10) поставим в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение, которое определим однозначным образом.

Обозначим коэффициент сноса в уравнении (10) K_1, коэффициент диффузии K_2 тогда, поскольку $K_1=\alpha_1 I$, $K_2=2\alpha_1 I^2$, получим

$$\dot{I}=2\sqrt{\frac{\alpha_1}{N}}I(x)\nu(x). \tag{11}$$

Здесь $\nu(x)$ — чисто случайный процесс, $\langle\nu(x)\nu(x')\rangle=N\delta(x-x')$. Рассматриваемое приближение соответствует приближению хаотических фаз (ПХФ) [6]. Переходя к переменной y, получим приближенное уравнение для y

$$\dot{y}=y\left[-\frac{1}{2}(\ln n)'+\sqrt{\frac{\alpha_1}{N}}\nu\right]. \tag{12}$$

Соответствующее уравнение ФПК имеет вид

$$\frac{\partial f(y,x)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\alpha_1}{4}-\frac{1}{2}(\ln n)'yf\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\alpha_1}{2}y^2 f\right]. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) представим в виде

$$f(y,x)=\frac{1}{y\sqrt{\pi\alpha_1 x}}\exp\left\{-\frac{\ln^2 yn^{1/2}}{\alpha_1 x}\right\}. \tag{14}$$

Стационарное решение уравнения (13) имеет вид

$$f_*(y)=\frac{2c}{\alpha_1 y^2}\exp 2\left[2\frac{|y|-|y_*|}{|yy_*|}-\frac{(\ln n)'}{\alpha_1}\ln\left|\frac{y}{y^*}\right|\right], \tag{15}$$

$$c^{-1}=\frac{4}{\alpha_1}\int_0^\infty\frac{1}{y_2}\exp 2\left[2\frac{y-y_*}{yy_*}-\ln\frac{y}{y_*}\frac{(\ln n)'}{\alpha_1}\right]dy.$$

Здесь $y_*=y(x_*)$, где x_* — координата x, начиная с которой луч ведет себя стохастическим образом.

Среднее значение y определяется выражением

$$\langle y\rangle=\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x}}\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{\ln^2(yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\}dy. \tag{16}$$

Средний квадрат отклонения y^2 вычисляется по формуле

$$\langle y^2\rangle=\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x}}\int_0^\infty y\exp\left\{-\frac{\ln^2(yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\}dy. \tag{17}$$

Вероятность события $P(|y|<d)$ для положительных y имеет вид

$$P(y<d)=\frac{2}{\sqrt{\pi\alpha_1 x}}\int_0^d\frac{1}{y}\exp\left\{-\frac{ln^2(yn^{1/2})}{\alpha_1 x}\right\}dy. \tag{18}$$

Во всех приведенных формулах $n(x)$ есть детерминированная функция, от конкретного вида которой существенно зависит поведение луча. Характеристики процесса $\nu(x)$, эквивалентного включениям неоднородности, в конечные формулы нигде не входят.

Выражения (16)—(18) представляют собой в общем случае функционалы $n(x,y)$, если учитывать зависимость от x и y. Это дает возможность сформулировать вариационные задачи, интересные с точки зрения синтеза сред с заданными волноводными свойствами. Например, на основе соотношения (16) ищем $n(x,y)$, дающий минимум среднего отклонения луча от оси волновода. Минимизируя выражение (17), получим соотношения для $n(x,y)$, обеспечивающие минимум среднему квадрату уклонения. Для функционала (18) требуется найти $n(x,y)$, минимизирующий вероятность выхода из области d. Минимизация соотношений (16)—(18) осуществляется при условии, что y удовлетворяет уравнению (1) или приближенному уравнению (5). Условный экстремум можно искать, используя функционал Ферма. При учете свойств среды в окрестности $y=0$ и использовании разложений (2) функция $n(x)$ зависит только от x. С точки зрения оптимального синтеза $n(x)$, входящий в уравнение (12), имеет смысл управляющего воздействия, $y(x)$ — смысл состояния системы, $\nu(x)$ — смысл случайной помехи. Если $y(x)$ наблюдается с ошибкой, необходимо получить алгоритм оптимальной оценки $y(x)$, а $n(x)$ находить, применяя стохастический вариант динамического программирования [9]. Перепишем уравнение (12) в виде

$$\dot{Y}=-\frac{1}{2}u+\sqrt{\frac{\alpha_1}{N}}\nu,\quad Y=\ln y,\quad u=(\ln n)'. \tag{19}$$

Пусть Y измеряется со случайной ошибкой ξ, которую считаем чист› случайной функцией: $\langle\xi\rangle=0$, $\langle\xi(x)\xi(x')\rangle=R\delta(x-x')$, тогда измеряемая величина Z будет

$$Z=Y+\xi. \tag{20}$$

Причем мы считаем $\langle\nu(x)\xi(x')\rangle=0$ для всех $x, x'>x_*$.

Алгоритм оптимального выбора функции u, минимизирующей критерий качества

$$\left\langle \Lambda Y^2(x_1)+\int\limits_{x_*}^{x_1}\left[\frac{A}{4}Y^2(x)+Bu^2(x)\right]dx\right\rangle, \tag{21}$$

где x_1 — конечная точка интервала (x_*, x_1), на котором осуществляется оптимальный синтез, определяется соотношением

$$u(x)=\frac{1}{2B}W(x)\hat{Y}(x|x). \tag{22}$$

Здесь $\hat{Y}(x|x)=M[Y(x)|Z(x)]$ — оценка $Y(x)$, минимизирующая ошибку оценки, Λ, A, B — размерные коэффициенты.

$$\dot{W}=\frac{1}{4B}W^2-\frac{A}{4}, \tag{23}$$

$$\dot{\hat{Y}}=K(x)[Z-\hat{Y}]-\frac{1}{2}u,\quad K(x)=P(x|x)R^{-1}(x), \tag{24}$$

$$\dot{P}=-R^{-1}P^2+\alpha_1,\ P(x|x)=\langle Y(x)-\hat{Y}(x|x))^2\rangle. \tag{25}$$

Граничные условия для уравнений (23)—(25) имеют вид

$$\begin{aligned}&\hat{Y}(x_*|x_*)=0,\quad P(x_*|x_*)=P(x_*)=\langle Y^2(x_*)\rangle,\\&W(x_1)=\Lambda.\end{aligned} \tag{26}$$

Критерий качества (21) определяет совместный минимум по логарифму квадрата отклонения в заданной конечной точке и интегрально на всем интервале (x_*, x_1). Определяя из (22) $u(x)$ и учитывая формулу (19), находим $n(x)$, оптимальное в смысле критерия (21). Если измерение Y осуществляется точно, то $Y=Z$, $\hat{Y}(x|x)=\langle Y(x)\rangle$, соответствующие изменения в уравнениях (22)—(26) очевидны. Решения уравнений (23)—(26) получаются в эллиптических интегралах [10], решаемых численно.

Таким образом, при выполнении критерия стохастичности $K\gg1$ для $x>x_*$ можно переходить к вероятностному описанию, что эквивалентно использованию стохастического уравнения (12). Устойчивость или неустойчивость луча существенно определяются конкретным видом функции $n(x)$, которая может рассматриваться как функция управления лучом по заданному критерию качества. Синтез волновода с оптимальными свойствами осуществляется на основе алгоритма (22)—(25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернов Л. А.* Волны в случайно неоднородных средах. М., «Наука», 1975, 170.
2. *Булдырев В. С.* Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде. В сб.: Проблемы математической физики. Изд-во ЛГУ, 1968, 5–30.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957, 573.
4. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967, 548.

5. *Кляцкин В. И.* Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М., «Наука», 1975, 239.
6. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., «Наука», 1970, 143.
7. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, *98*, 4, 527–530.
8. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи мат. наук, 1963, *18*, 6, 91–192.
9. *Медич Д.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. М., «Энергия», 1973, 374.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971, 576.

Воронежский технологический институт

Поступила
18 января 1978 г.