Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 49–55

А. В. Чигарев[1], *Ю. В. Чигарев*[2]

СТОХАСТИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА В УСЛОВИЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

[1] *Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь*
[2] *Белорусский государственный агротехнический университет, г. Минск, Беларусь*

Аннотация. Рассматриваются колебания заполненного жидкостью трубопровода относительно горизонтальной оси, опирающегося на две опоры — одна из которых неподвижна, другая может смещаться в горизонтальном направлении. Начальное движение трубы характеризуется её изгибным отклонением в вертикальной плоскости, угловым во вращательном движении вокруг горизонтальной оси и гидравлическим ударом, при действии которого внутреннее давление на стенки трубы приобретает вид δ-толчков. Исходная система уравнений колебаний трубопровода приводится к уравнению Дуффинга. В переменных «действие-угол» получена граница стохастичности, которая отделяет детерминированную область решения от стохастической. Получено диффузионное уравнение типа Фоккера–Планка–Колмогорова, решение которого определяет функцию плотности вероятности, с помощью которой можно находить случайные параметры колебаний трубы для оценки её движения.

Ключевые слова: трубопровод, колебания, уравнение Дуффинга, переменные действие-угол, граница стохастичности, стохастическое уравнение.

DOI: 10.37972/chgpu.2020.84.77.004

УДК: 539.3

Введение. Трубопроводы являются одним из ключевых компонентов современной промышленности, энергетики, сельского хозяйства и других многих развиваемых технологических процессов, связанных с транспортировкой жидкости и газа. Прокладка трубопроводов проходит в разных климатических и ландшафтных условиях, которые вместе с переменными внутренними нагрузками могут вызывать на его отдельных участках колебательные движения. Колебания могут носить регулярный и нерегулярный характер. Вопросами деформирования труб и шлангов при статическом и динамическом нагружении занимались многие ученые. Ссылки на некоторые из них можно найти в работе [1]. В работах [1, 2] рассмотрены пространственные колебания

Чигарев Анатолий Власович
`e-mail`: chigarev@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь.
Чигарев Юрий Власович
`e-mail`: yuri.chigarev.44@bk.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный агротехнический университет, г. Минск, Беларусь.

Поступила 29.06.2020

трубопровода под действием переменного внутреннего давления с учётом гидравлического удара и сил инерции. В [2] исследованы свободные колебания трубопровода. Показано, что при учёте сил Архимеда и сил инерции Кориолиса происходит рост вращательных и изгибных колебаний. В работе [1] на примере стального трубопровода с учетом окружной и продольной деформаций трубы исследована инерционная и инерционно-упругая стадия колебаний. В данной работе, используя условия нагружения трубопровода работ [1, 2], приводится условие, при котором колебательный процесс стохастизируется без априорных предположений о наличии в системе случайных параметров [3–6].

Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания трубы, закрепленной по концам к неподвижной и подвижной опорам [1, 2]. В начальный момент времени под действием собственного веса и внутреннего давления на стенки со стороны жидкости труба имеет прогиб w_0 и отклонена на угол ϑ_0 от вертикальной плоскости. Предполагается, что с одновременным отпусканием без начальной скорости трубы ($t_0 = 0$) происходит гидравлический удар, который приводит к изменению внутреннего давления — появлению δ-толчков. Колебательный процесс учитывает силу сопротивления, инерционные силы переносного и относительного движения, силу Архимеда.

Главная часть. Пусть длина трубы l, внутренний радиус r, толщина стенки трубы h и суммарная масса трубы и жидкости m.

На элемент трубы длины dx и массой $dm = (m/l)\,dx$ действуют силы сопротивления [1, 2]

$$d\vec{F}_{\text{c}} = -\mu \vec{V}_a\, dx, \tag{1}$$

где μ — коэффициент сопротивления; $\vec{V}_a$ — абсолютная скорость, равная сумме переносной $\vec{V}_e$ и относительной $\vec{V}_r$ скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{2}$$

Здесь

$$V_r = \frac{dw}{dt} = \dot{w}, \quad V_e = \frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta}. \tag{3}$$

Сила сопротивления (1) с учетом (2) распадается на две силы:

$$d\vec{F}_{\text{c}} = d\vec{F}_{\text{c}e} + d\vec{F}_{\text{c}r}, \tag{4}$$

где

$$dF_{\text{c}e} = \mu w \theta\, dx, \quad dF_{\text{c}r} = \mu w\, dx. \tag{5}$$

Силы инерции нормальная, касательная и Кориолисова соответственно будут

$$dF_n^i = w\dot{\vartheta}^2\, dm, \quad dF_\tau^i = w\ddot{\vartheta}\, dm, \quad dF_k^i = 2\dot{\vartheta}\dot{w}\, dm. \tag{6}$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний трубы с учетом окружной и осевой деформаций будет [1, 2]

$$\ddot{w} + \frac{EIl}{m} w^{IV} - \frac{(K - PS)\vartheta}{m} w'' - w\dot{\vartheta}^2 + \mu\frac{l}{m} w - g + \frac{B}{m} = 0; \tag{7}$$

здесь штрихами обозначены производные по x; E — модуль Юнга среды; S — площадь поперечного сечения трубы; I — осевой момент инерции; K — сила продольного натяжения трубы [1, 2]:

$$K = \frac{ES}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx;$$

B — сила Архимеда, действующая на всю трубу: $B = \pi\rho lg(r+h)$, где ρ — плотность среды.

Решение задачи запишем в одномодовом приближении в виде

$$w(x,t) = f(t)\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{8}$$

С помощью метода Бубнова–Галеркина получим уравнения, которые можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\ddot{\vartheta} f^2 + \frac{\mu l^3}{m}\dot{\vartheta} + f\left(\frac{2(gm-K)}{m\pi}\sin\vartheta + \dot{\vartheta}\dot{f}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\ddot{f} + \frac{\mu l}{m}\dot{f} + \frac{EI\pi^4}{ml^3}f = \frac{4}{\pi}\left(g - \frac{K}{m}\right) - \left[\frac{ES\pi^4}{4ml^3}f^3 - S\frac{\pi^2}{ml}(P_0 + P_1\sin(\varphi t + \varphi_0))f\right]. \tag{10}$$

Полагая в (9)–(10) угловые перемещения и затухание малыми, придем к уравнению изгибных колебаний типа Дуффинга:

$$\ddot{f} + \frac{EI\pi^4}{ml^3}f + \frac{ES\pi^4}{4ml^3}f^3 = \frac{4}{\pi}\left(g - \frac{K}{m}\right) + S\frac{\pi^2}{ml}(P_0 + P_1\sin(\varphi t + \varphi_0))f. \tag{11}$$

Правую часть данного уравнения, состоящую из двух переменных слагаемых, представим в виде функциональных δ-толчков, длящихся бесконечно малое время и следующих периодически с периодом $T = 2\pi/\Omega$ [3, 4]:

$$\Phi(t) = \omega_0 f\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT). \tag{12}$$

Здесь ω_0 — собственная частота; Ω — частота возмущаюшей силы, $n = 1, 2, \ldots$.

Предполагается δ-образность какой-либо производной, что соответствует присутствию большого числа гармоник в спектральном составе внешнего возмущения.

Между двумя толчками решение запишем в виде [4]

$$f = A\cos\left[\left(1 + \frac{3}{32}\frac{S}{I}A^2\right)\omega_0 t + \varphi\right]. \tag{13}$$

С помощью комплексного вектора и оператора сдвига аналогично работам [3, 5] можно получить уравнения в конечных разностях для амплитуды и фазы колебаний трубопровода:

$$A_{n+1} = 0{,}5A_n(2 + \epsilon\sin 2\varphi), \tag{14}$$

$$\varphi_{n+1} = \left\{\varphi_n + 2\pi\frac{\omega}{\Omega} + (2\Gamma_n\cos\varphi_n - \varepsilon\sin\varphi_n) + \varepsilon\cos^2\varphi_n\right\}, \tag{15}$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть аргумента;

$$\Gamma_n = \frac{3SA_n^2}{32I\Omega}\epsilon\omega. \tag{16}$$

Если вычисление корреляционной функции $U(\varphi)$ приводит к соотношению

$$U_n = \frac{1}{\Gamma_n}, \tag{17}$$

то условие выполнения некоррелированности фаз $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ будет, когда

$$\Gamma_n \gg 1. \tag{18}$$

Выполнение (18) эквивалентно закону релаксации (расцеплению корреляций). Затухание корреляций ведет к стохастизации процесса [5, 6].

Вычислим корреляционную функцию U_n для фазы φ. Для $n = 1$ имеем

$$U_1 = 6\left[2\int\limits_0^1 \varphi\{\Gamma\varphi\}\,d\varphi - \int\limits_0^1 \{\Gamma\varphi\}\,d\varphi\right]. \tag{19}$$

Аналогичные выкладки приводят к формуле

$$U_n \approx \frac{c_n}{\Gamma_n} = c_n e^{-nlg\Gamma}, \tag{20}$$

где c_n — медленно меняющаяся предэкспонента. Формула выражает расцепление фазовых корреляций, что приводит к случайной последовательности фаз. Расцепление корреляций происходит за время $t' = (lg\Gamma)^{-1}$, которое намного меньше единицы и много меньше периода изменения последовательных значений фаз. При выполнении условия $\Gamma_n \gg 1$ для изучения процесса колебаний трубопровода нужно привлекать методы теории вероятностей. $\Gamma_n = 1$ будет границей стохастичности [3, 4]. Гамильтониан H для переменных $p(t) = \dot f(t)$, $f(t)$, где $\dot f = \partial H/\partial p$, $dotp = -\partial H/\partial f$, будет

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{21}$$

$$H_0 = 0{,}5\left(p^2 + \omega_0^2 f^2 - \frac{S\omega_0^2}{8I} f^4\right), \quad H_1 = 0{,}5 f^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

В переменных действие-угол (I, θ) уравнение движения можно записать в виде [3]

$$\dot I = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \theta}, \tag{22}$$

$$\vartheta = \omega(\dot I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \tag{23}$$

В дальнейшем членом $\varepsilon\partial H_1/\partial I$ в силу малости можно пренебречь.

Введем функцию плотности вероятности $G(I, \theta, t)$ и запишем уравнение Лиувиля

$$\frac{\partial G}{\partial t} = (M_0 + \varepsilon\delta M)w, \tag{24}$$

где

$$M_0 = -\omega\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad \delta M = \left(\frac{\partial H_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Разложим функции $G(I, \theta, t)$, $R(I, \theta, t) = \frac{\partial H_1}{\partial \theta}(I, \theta, t)$ в ряды Фурье:

$$G(I, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(I, t)\exp(in\theta), \tag{25}$$

$$R(I, \theta, t) = \sum_{n,k=-\infty}^{\infty} R_{n,k}(I)\exp[i(n\omega + k\Omega t)]. \tag{26}$$

Подставляя (25)–(26) в (24), получим уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова [3–6]:

$$\frac{\partial G_n}{\partial t} + in\dot{\theta} w_n + \varepsilon \frac{\partial}{\partial I}\left[\sum_{n,k} R_{n,k}(I) w_{n-k}\right] = 0. \tag{27}$$

Для начального распределения $\Gamma_n(I,0) = \Gamma_0(I,0)\delta_{n,0}$, где $\delta_{n,0}$ — символ Кронекера, уравнение (27) приводится к виду

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial I}[\gamma I w_0] - 0{,}5\frac{\partial^2}{\partial I^2}[2\gamma I^2 G_0] = 0. \tag{28}$$

Здесь $\gamma = 8\varepsilon^2\pi\Omega$. По данному уравнению можно составить единственным образом дифференциальное уравнение, описывающее случайный процесс, особенностью которого является наличие внешней возмущающей силы в виде «белого шума» $\surd(t)$:

$$\langle\surd(t)\rangle = 0, \quad \langle\surd(t)\surd(t+\Delta t)\rangle = \frac{N_0}{2}\delta(\Delta t), \tag{29}$$

где N_0 — постоянная спектральная плотность белого шума.

Стохастическое дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (28), будет

$$\dot{I} = 2I\sqrt{\frac{\gamma}{N_0}}\,\surd(t). \tag{30}$$

В старых переменных колебания трубы будут

$$\dot{f} = 0{,}5f\sqrt{2\gamma}\,\surd_0(t). \tag{31}$$

В (31) сделано предположение, что белый шум имеет единичную спектральную плотность на всей оси частот.

Уравнение ФПК, соответствующее уравнению (31), имеет вид

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{\gamma}{4} + G_0\right) + 0{,}5\frac{\partial^2}{\partial f^2}(\gamma f^2 G_0). \tag{32}$$

Решение (32) дает значение функции плотности состояния, с помощью которой можно проводить исследования в стохастической области случайных колебаний трубопровода, в частности, оценивать устойчивость колебаний в среднем квадратическом и по вероятности.

Заключение. Рассмотрены пространственные колебания трубы, закрепленной по концам к неподвижной и подвижной опорам, под действием собственного веса, внутреннего давления с учётом силы сопротивления, инерционных сил и гидравлического удара. Сложное динамическое нагружение трубы дает возможность выделения возмущающей силы в виде функциональных δ-толчков. Получена граница стохастичности, отделяющая детерминированную область решения от стохастической.

Приводится стохастическое диффузионное уравнение типа Фоккера–Планка–Колмогорова, решение которого определяет функцию плотности вероятности, с помощью которой можно находить случайные параметры колебаний трубы для оценки её состояния.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления / Р. Ф. Ганиев, М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов [и др.] // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.

[2] Хакимов А. Г., Шакирьянов М. М. Пространственные параметрические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2011. № 6. С. 130–146.

[3] Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. Москва: Наука, 1970. 270 с.

[4] Чигарев А. В., Чигарев Ю. В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах // Акустический журнал. 1978. Т. 24, № 5. С. 765–771.

[5] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. Москва: Наука, 1988. 368 с.

[6] Чигарев А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. Минск: УП «Технопринт», 2000. 426 с.

A. V. Chigarev[1], *Y. V. Chigarev*[2]

STOCHASTICS OF PIPELINE VIBRATIONS UNDER DYNAMIC INTERNA

[1]*Belarusian state University, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian state agrotechnical University, Minsk, Belarus*

Abstract. Vibrations of a liquid-filled pipeline relative to the horizontal axis are considered. The pipe is supported by two supports — a movable and a fixed one. The initial movement of the pipe is characterized by is bending, angular deflection and hydraulic shok, after which the internal pressure on the pipe walls takes the form of δ-shoks. The system of equations for pipeline vibrations is reduced to the Duffing equation. A stochasticity boundary is obtained that divides the deterministic domain of the solution from the stochastic one. The Fokker–Plank–Kolmogorov diffusion equation is obtained, which makes it possible to determine the standard deviation of the bending vibrations of the pipe.

Keywords: pipeline, oscillation, Duffing equation, action-angle variables, stochastic boundary, stochastic equation.

REFERENCES

[1] Spatial vibrations of the pipeline with up -py -th-change -shaya -shaya -shaya support at the action of internal shock pressure / P. F. Ganiev, M. A. Ilgamov, A. G. Khakimov et al. // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2018. no. 6. P. 3–12.
[2] Khakimov A. G., Shakiryanov M. M. Spatial parametric vibrations of the pipeline under the action of variable internal pressure // Oil and Gas Business. 2011. no. 6. P. 130–146.
[3] Zaslavsky G. M. Statistical irreversibility in nonlinear systems. Moscow: Nauka, 1970. 270 p.
[4] Chigarev A. V., Chigarev Y. V. On the possibility of the appearance of stochastic instability of rays in inhomogeneous media // Acoustic journal. 1978. Vol. 24, no. 5. P. 765–771.
[5] Zaslavsky G. M., Sagdeev R. Z. Introduction to nonlinear physics. From a pendulum to turbulence and chaos. Moscow: Nauka, 1988. 368 p.
[6] Chigarev A. V. Stochastic and regular dynamics of inhomogeneous media. Minsk: Technoprint, 2000. 426 p.

Chigarev Anatoly Vlasovich, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Belarusian state University, Minsk, Belarus.
Chigarev Yuri Vlasovich, Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Belarusian state agrotechnical University, Minsk, Belarus.