УДК 539.3

К СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

д. ф.-м. н. [1] **Чигарев Ю.В.**, асп. [2] **Чигарев В.А.**

[1] *Западно-Поморский технологический университет, Щецин, Польша*
[2] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Как показывают некоторые исследования в нелинейных динамических системах возникновение хаоса связано с появлением определенного типа локальной неустойчивости в некоторых областях фазового пространства. Впервые эта проблема применительно к волновым процессам была поднята в работах Ферми, Паста, Улама [1]. Дальнейшее развитие получила в других физических задачах в работах Заславского Г.М., Чирикова Б.В. [2,3] и др. Впервые стохастизация лучей в неоднородных средах была изучена в работе [4]. Существенным свойством данного хаоса является его неустранимость и оказывание большого влияния на физический процесс, например, потерю устойчивости. Поэтому во многих нелинейных динамических задачах к статистическому описанию надо переходить не только в случае присутствия случайных параметров в уравнении движения или граничных условиях, но и в случае возникновения стохастических законов в системе. Переход от регулярного или условно периодического движения к движению, которое становится сильно сложным, нерегулярным, похожим на случайное определяется границей стохастичности.
Вопросы устойчивости пространственных колебаний нитей и стержней с геометрической нелинейностью исследованы в работах [5,6]. Показано, что решение пространственной задачи в первом приближении дает устойчивое движение.

Методика исследований. Рассмотрим колебания стержня длиной l при условии отсутствия кручения и относительного смещения опор. Считаем, что центральная ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат , а главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z. Пусть стержень подвергается нагрузкам $G_v(x,t)$ и $G_w(x,t)$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях параллельно осям y и z вдоль которых перемещения точек средней линии стержня обозначим через v и w. На концах стержня $x = o, x = l.$ Согласно работе [4] пространственные нелинейные колебания стержня можно записать в виде

$$\frac{l^4\omega_0^2\rho F}{EJ_z}\ddot{v} + v^{IV} - 4\eta v''\lambda_0 = G_v(x,t) \tag{1}$$

$$\frac{l^4\omega_0^2\rho F}{EJ_z}\ddot{w} + w^{IV} - 4\eta w''\lambda_0 = G_w(x,t) \tag{2}$$

Здесь λ_0 деформация средней линии

$$\lambda_0 = 0{,}5\int_0^1 (v'^2 + w'^2)dx \tag{3}$$

Параметр $\eta = Fl^2/4J, (\quad J = J_y = J_z)$ - характеризует геометрическую нелинейность

E - модуль упругости, ρ - плотность материала, F - площадь поперечного сечения стержня, $J -$ момент инерции сечения. Штрихами обозначены производные по переменной (x/l), а точками по переменной $t_0 = \omega_0 t$, t - время, $\omega_0 -$ первая собственная частота в плоскости $0xz$

$$\textit{Граничные условия:}\qquad v = 0,\qquad w = 0,\qquad v'' = w'' = 0 \tag{4}$$

Решение (1)-(2) будем искать в виде

$$\begin{cases} v(x,t) = f_1(t)\varphi_1(x,y,z) \\ \\ w(x,t) = f_2(t)\varphi_2(x,y,z) \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $f_i(t) -$ функции времени, $\varphi_i -$ собственные векторы, образующие полную систему функций удовлетворяющих условию ортогональности. С помощью метода Бубнова-Галеркина и ряда преобразований придем к уравнениям

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta(f_1^2 + f_2^2) f_1 = \varepsilon Q_1 \qquad (6)$$

$$\ddot{f}_2 + f_2 + \eta(f_1^2 + f_2^2) f_2 = \varepsilon Q_2 \qquad (7)$$

Где $$Q_1 = \omega_1 \varphi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_1 \sin p_1 t \qquad (8)$$

$$Q_2 = \omega_2 \varphi_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_2 \sin p_2 t \qquad (9)$$

$\delta -$функции характеризуют внешнее возмущение в виде толчков, $T = 2\pi / \theta$-период возмущающей силы, ω-частота собственных колебаний в направлении y, z, θ- частота возмущающей силы.

Будем считать в формулах (6), (7) отклонения f_2 малыми по сравнению с f_1, тогда можно пренебречь второй степенью свободы и уравнение (6) примет вид уравнения Дуффинга

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = \varepsilon Q_1 = \varepsilon \omega_1 f_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_1 \sin p_1 t \qquad (10)$$

Между δ- толчками колебания описываются уравнением

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = h_1 \sin p_1 t \qquad (11)$$

Полагая $\eta = 0$ в первом приближении решение (11) будет

$$f_1^1 = a_1 \sin p_1 t \qquad (12)$$

Второе приближение получим из уравнения

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = (p_1^2 - k^2) f_1 - \eta f_1^3 + h_1 \sin p_1 t \qquad (13)$$

здесь $k^2 = 1$. Данное уравнение преобразуем к виду

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = a_2 \sin p_1 t + \frac{1}{4} a_1^3 \sin 3 p_1 t \qquad (14)$$

(14) получено с учетом (12) и соотношений

$$\sin^3 p_1 t = \frac{1}{4}(3 \sin p_1 t - \sin 3 p_1 t); \qquad a_2 = a_1 (p_1^2 - k^2) - \frac{3}{4} \eta a_1^3 + h_1 \qquad (15)$$

В (14) положим $a_2 = 0$, тогда из второго уравнения (15) можно найти связь между амплитудой a_1 и частотой p_1

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{1}{4} a_1^3 \sin 3 p_1 t \qquad (16)$$

Решение (16) ищем в виде общего и частного

$$f_1 = f_1^{(1)} + f_1^{(2)} \qquad (17)$$

Для однородного уравнения имеем

$$f_1^{(1)} = b_1 \sin p_1 t \qquad (18)$$

Для частного

$$f_1^{(2)} = d \sin 3 p_1 t \qquad (19)$$

После подстановки (19) в (16) найдем

$$d = -\frac{\eta a_1^3}{32 p_1^2} \qquad (20)$$

Решение (17) запишем

$$f_1 = b_1 \sin p_1 t - \frac{\eta a_1^3}{32 p_1^2} \sin 3 p_1 t \qquad (21)$$

Согласно метода последовательных приближений Дуффинга: $a_1 = b_1$. Представим уравнение (16) в виде системы двух уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = -p_1 t; \qquad \frac{df_1}{dt} = -\frac{1}{12 p_1} a_1 \cos 3 p_1 t + \psi \qquad (22)$$

Решение которых ищем в виде

$$\psi = C_1 e^{\lambda t} \qquad f_1 = C_2 e^{\lambda t} \tag{23}$$

Далее применяя обычную процедуру, придем к характеристическому уравнению, корни которого характеризуют устойчивое (неустойчивое) состояние стержня между $\delta -$ толчками

Теперь рассмотрим колебания стержня под действием $\delta -$толчков. В этом случае уравнение колебаний будет

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = \varepsilon f_1 \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{24}$$

Решение представим в виде [2]

$$f_1 = A\cos[(\omega_1 + \Delta\omega_1) + \beta] \tag{25}$$

Здесь A - амплитуда, $\beta -$ фаза, $\Delta\omega_1 = 0{,}37\eta\omega_1 A^2$

Колебания стержня можно описать разностными уравнениями

$$A_{n+1} - A_n = \varepsilon \sin 2\beta \tag{26}$$

$$\beta_{n+1} = \{\beta_n + k_n \sin 2\beta + \omega_{1n}\varpi^{-1} + \varepsilon\cos^2\beta_n\} \tag{27}$$

Где ϖ - частота возмущающей силы

$$k_n = 0{,}37\varepsilon\eta\omega_1 T A_n^2 \tag{28}$$

Фигурные скобки в (27) означают дробную часть аргумента Вычисление корреляционной функции для фазы β дает выражение

$$R_n = k_n^{-1} = (0{,}37\varepsilon\eta\omega_1 T A_n^2)^{-1} \tag{30}$$

При k_n >>1происходит затухание фазовых корреляций, что соответствует выполнению критерия стохастичности [2-4] и исследование устойчивости нелинейных колебаний нужно проводить вероятностными методами. Уравнение (24) перепишем в стандартной форме для функций $q(t) = \dot{f}_1(t); \quad f_1(t)$

$$\dot{f}_1 = \frac{\partial H(f_1, q, t)}{\partial q}; \qquad \dot{q} = \frac{\partial H(f_1, q, t)}{\partial f} \tag{31}$$

где Гамильтониан

$$H = H_0 + \varepsilon H_1; \quad H_0 = \frac{1}{2}[q^2 + (\omega_{10} f_1)^2 - \frac{1}{2}(\eta\omega_{10}^2 + f_1^4)]; \quad H_1 = 0{,}5\omega_{10} f_1^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Перейдем к переменным «действие-угол» , тогда уравнение колебаний

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}, \qquad \dot{\alpha} = \omega_1(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \tag{32}$$

Членом $\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}$ пренебрежем, так как он дает поправку к частоте, которая для достаточно малых ε по сравнению с нелинейностью в $\omega(I)$ имеет меньший порядок. Введем функцию плотности вероятности $W(I, \alpha, t)$ и запишем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (L_0 + \varepsilon\delta L)W\,. \tag{33}$$

Где $\qquad L_0 = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial\alpha}; \qquad \delta L = (\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I}\frac{\partial}{\partial\alpha})$

После несложных преобразований для начального распределения $W_0(I,\ 0)$, $W_n = W_0(I, 0)\delta_{n,0}$ получим диффузионное уравнение типа Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для функции распределения от переменных действия

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I}(8\varepsilon^2\pi\varpi I W_0) + 0{,}5\frac{\partial^2}{\partial I^2}(4\varepsilon^2\pi\varpi I^2 W_0) \tag{34}$$

По уравнению (34) можно составить единственным образом дифференциальное уравнение, описывающее случайный процесс, особенностью которого является наличие внешней возмущающей силы в виде « белого шума» $\nu(t)$ [7]: $<\nu(t)>=0$, $\quad <\nu(t)\nu(t+\tau)>=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$,

$\frac{N_0}{2}$ – есть постоянная спектральная плотность белого шума.

Стохастическое дифференциальное уравнение соответствующее (34) имеет вид $\dot{I}=2I\sqrt{\frac{8\varepsilon^2\pi\varpi}{N_0}}\nu(t)$

В предположении, что белый шум имеет единичную спектральную плотность $N_0=2$ в старых переменных случайные колебания будут описываться уравнением ФПК в виде

$$\dot{f}_1=2f_1\sqrt{\varepsilon^2\pi\varpi}\nu_0,\ \frac{\partial W_0}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(2\varepsilon^2\pi\varpi f_1W_0)+0{,}5\frac{\partial^2}{\partial f^2}(8\pi\varpi\varepsilon^2 f_1^2W_0).$$

Положим $\dot{W}_0=0$, тогда стационарное решение будет $W_{0c}(f_1)=\frac{M}{8\pi\varpi\varepsilon^2 f_1^2}\exp\ln\sqrt{f_1}$

Где M определяется из условия нормировки $M=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{8\pi\varpi\varepsilon^2 f_1^2}\exp\ln\sqrt{f_1}df_1$

Среднеквадратическое отклонение стержня от положения равновесия определяется равенством

$$E[f_1^2]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1^2W_{0c}df_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M}{8\pi\varpi\varepsilon^2 f_1^2}\exp\ln\sqrt{f_1}.$$

Таким образом, об устойчивости стержня в области стохастического движения будем судить по следующей теореме: решение уравнения (24) $f_1^*=0$ назовем устойчивым в среднем квадратическом, если для любого $\xi>0$ найдется такое $\mu(\xi)>0$, что при выполнении условия $|f_{10}|<\mu(\xi)$ для любого $t>t_0$ справедливо неравенство $E[f_1^2]<\xi$.

РЕЗЮМЕ

Пространственные нелинейные колебания стержня под действием двух взаимно перпендикулярных сил приводятся к уравнению Дуффинга, где возмущающая сила представляет сумму двух составляющих: δ- функцию и гармоническую функцию. Рассмотрено решение между δ-толчками, которое для исследования устойчивости сводится к обычной процедуре определения корней характеристического уравнения. В области δ-возмущений получено выражение, определяющее границу стохастичности. Получено уравнение, описывающее стохастические колебания стержня. Приводится критерий стохастической устойчивости (неустойчивости) колебаний стержня в среднем квадратическом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlininear problems. Los Alamos Scientific Report La-1940 (1955).
2. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., Наука, 1970, 234с.
3. Заславская Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Успехи физических наук. Том 105, вып. 3, 1971, с 37-40.
4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. Акустический журнал. Том 24, вып. 5, 1978, с. 765-771.
5. Муницин А.И., Крайнова Л.Н. Аналитическое решение задачи о колебаниях стержня с геометрической нелинейностью. «Вестник ИГЭУ», вып.3, 2007. с. 1-3.
6. Муницин А.И., Крайнова Л.Н. Нелиненые колебания элемента трубопровода малой кривизны. «Вестник ИГЭУ», вып.2, 2009. с. 1-5
7. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев; Под. ред. Е.И. – Мн: УП «Технопринт», – 2000. – 426 с. – ISBN 985-6373-69-7.

SUMMARY

The conditions of possibility emergence of deterministic chaos in rods under effect of oscillator forces are considered. The quantities parameters which characterize a state of deterministic chaos depend on a nonhomogeneity and nonlinearly of a rod material.

Поступила в редакцию 22.08.2013