ISSN 2712-8873 Математические методы в технологиях и технике. 2021. №4

УДК 517.91 DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2021_4_16

ОСОБЕННОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Л.А. Хвощинская[1], О.В. Рыкова[2]

[1] *Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com*
[2] *Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, Минск, oly8521@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрена система дифференциальных уравнений Фукса 3-го порядка с четырьмя особыми точками, построенная по заданной группе монодромии. Система сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению 3-го порядка с пятью особыми точками. Дополнительная особая точка найдена в явном виде.

Ключевые слова: проблема Римана, группа монодромии, дифференциальное уравнение класса Фукса.

FEATURES OF THE COEFFICIENTS OF THE THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OF THE RIEMANN PROBLEM

L.A. Khvostchinskya[1], O.V. Rykova[2]

[1] *Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com*
[2] *Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Republic of Belarus, Minsk, oly8521@yandex.ru*

Abstract: We obtain a system of 3rd-order Fuchs differential equations with four singular points constructed from a given monodromy group. The system is reduced to an ordinary differential equation of the 3rd-order with five special points. An additional singular point is found explicitly.

Keywords: Riemann problem, monodromy group, Fuchs class differential equation.

Проблема Римана об определении системы аналитических функций по заданной группе монодромии известна с 1857 года. Она является одной из 23 задач, которые Давид Гильберт предложил в 1900 году на Международном конгрессе математиков. Решением проблемы Римана занимались Гильберт, Племель, Карлеман, Гахов, Мусхелишвили, Векуа, Лаппо-Данилевский, Еругин, Болибрух и др. [1]. Например, Лаппо-Данилевский предлагал применять ряды гиперлогарифмов, которые, к сожалению, сходятся лишь в окрестности единичной матрицы. Поиск новых методов решения проблемы Римана актуален в связи с ее приложениями.

В работе [2] для решения проблемы Римана с 3×3 матрицами монодромии и тремя особыми точками построены как система дифференциальных уравнений, так и обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка, через фундаментальную систему которого и выражается решение. Увеличивая число особых точек с трех до четырех, с помощью «метода логарифмирования произведения матриц» удалось также построить систему дифференциальных уравнений Фукса 3-го порядка [3, 4]

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_1}{z-a_1} + \frac{U_2}{z-a_2} + \frac{U_3}{z-a_3}\right), \tag{1}$$

причем элементы дифференциальных матриц найдены в явном виде. Покажем, что при сведении системы (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению 3-го порядка в коэффициентах уравнения кроме точек появляется еще одна особая точка, связанная с особыми точками задачи и элементами матриц монодромии.

Пусть система трех функций $Y(z) = (y_1, y_2, y_3)$, аналитических в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением четырех точек $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ и при обходе вокруг этих точек испытывает линейные преобразования с использованием постоянных невырожденных 3×3 матриц V_1, V_2, V_3, V_4, образующих группу монодромии, $V_1V_2V_3V_4 = E$.

Обозначим характеристические числа матриц V_k через $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, $k = 1,\dots,4$, и найдем числа

$$\rho_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k,\quad \sigma_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k,\ \omega_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_k,\ \operatorname{Re}\rho_k,\operatorname{Re}\sigma_k,\operatorname{Re}\omega_k\in(-1,0],\ k=1,\dots,4,$$

$$\varkappa=-\sum_{k=1}^{4}\left(\rho_k+\sigma_k+\omega_k\right),\quad 0\le\varkappa\le 11.$$

В качестве $\alpha_4,\beta_4,\gamma_4$ выберем числа, для которых $\operatorname{Re}\rho_4\le\operatorname{Re}\sigma_4\le\operatorname{Re}\omega_4$. Обозначим

$$\rho=-\rho_3-\left[(\varkappa+2)/3\right],\quad \sigma=1-\sigma_3-\left[(\varkappa+1)/3\right],\quad \omega=2-\omega_3-\left[\varkappa/3\right],$$

$$\rho_1+\sigma_1+\omega_1+\rho_2+\sigma_2+\omega_2+\rho_3+\sigma_3+\omega_3=\rho+\sigma+\omega.$$

Пусть $\alpha_{12},\beta_{12},\gamma_{12}$ и $\alpha_{23},\beta_{23},\gamma_{23}$ - характеристические числа матриц $V_1\cdot V_2$ и $V_2\cdot V_3$,

$$\rho_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{12},\sigma_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{12},\omega_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_{12},\qquad \rho_{23}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{23},\sigma_{23}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{23},$$

$$\omega_{23}=\frac{1}{2\pi i}\ln\gamma_{23},$$

ветви которых выбраны из условий:

$$\rho_{12}+\sigma_{12}+\omega_{12}=\rho_1+\sigma_1+\omega_1+\rho_2+\sigma_2+\omega_2,\ \rho_{23}+\sigma_{23}+\omega_{23}=\rho_2+\sigma_2+\omega_2+\rho_3+\sigma_3+\omega_3.$$

Обозначим также $s_k=\rho_k+\sigma_k+\omega_k$, $r_k=\rho_k\sigma_k+\sigma_k\omega_k+\rho_k\omega_k$, $d_k=\rho_k\sigma_k\omega_k$, $k=1,2,3$,

$$r_{12}=\rho_{12}\sigma_{12}+\sigma_{12}\omega_{12}+\rho_{12}\omega_{12},\ r_{23}=\rho_{23}\sigma_{23}+\sigma_{23}\omega_{23}+\rho_{23}\omega_{23},\ d_{12}=\rho_{12}\sigma_{12}\omega_{12},\ d_{23}=\rho_{23}\sigma_{23}\omega_{23}.$$

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. Каноническая матрица $X(z)$ проблемы Римана с 3×3 матрицами монодромии и четырьмя особыми точками $a_1,a_2,a_3,a_4=\infty$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) с матрицами

$$U_1=\begin{pmatrix}\rho & cu_1 & c^2\left[u_1(\omega-u_3)-d_{23}\right]\\ -1/c & u_2 & c\left[r_{23}-u_1-(\sigma-u_2)(\omega-u_3)\right]\\ 0 & -1/c & u_3\end{pmatrix},$$

$$U_3=\begin{pmatrix}0 & c/\tau\, v_1 & c^2/\tau^2\left[v_1(v_3-\omega)-d_3\right]\\ \tau/c & v_2 & c/\tau\left[(\sigma-v_2)(\omega-v_3)-r_3+v_1\right]\\ 0 & \tau/c & v_3\end{pmatrix},\quad U_2=\begin{pmatrix}\rho&0&0\\0&\sigma&0\\0&0&\omega\end{pmatrix}-U_1-U_3, \tag{2}$$

элементы которых находятся по формулам

$$u_1=\left[d_{23}-(\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)(\rho-\omega_1)\right]/(\sigma-\rho),$$

$$v_1=\left[(\rho-\rho_{12})(\rho-\sigma_{12})(\rho-\omega_{12})-d_3\right]/(\sigma-\rho),$$

$$u_2=\left[(\rho+\sigma)(\rho-s_1)+\sigma\omega+r_1-r_{23}\right]/(\omega-\sigma),\quad v_2=\left[(\rho+\sigma)(\omega-s_3)+\rho\omega+r_3-r_{12}\right]/(\omega-\sigma),$$

$$u_3=\left[(\rho+\omega)(s_1-\rho)-\sigma\omega-r_1+r_{23}\right]/(\omega-\sigma),\quad v_3=\left[(\rho+\omega)(s_3-\sigma)-\rho\omega-r_3+r_{12}\right]/(\omega-\sigma),$$

$$\gamma_1\tau^2+\left(\gamma_2-\gamma_1-\gamma_3\right)\tau+\gamma_3=0,\ \gamma_1=r_1-u_2u_3-\rho(u_2+u_3),\ \gamma_2=r_2-(\sigma-u_2-v_2)(\omega-u_3-v_3),$$

$\gamma_3=r_3-v_2v_3$, $c-$ произвольная постоянная.

Составим дифференциальное уравнение 3-го порядка, соответствующего системе (1) с матрицами (2). Для этого достаточно рассмотреть следующую систему дифференциальных уравнений:

$$(y_1',y_2',y_3')=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}u_{11}(z) & u_{12}(z) & u_{13}(z)\\ u_{21}(z) & u_{22}(z) & u_{23}(z)\\ 0 & u_{32}(z) & u_{33}(z)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $u_{11}(z)=\dfrac{\rho}{z-a_1}$, $\quad u_{12}(z)=c\left[u_1\left(\dfrac{1}{z-a_1}-\dfrac{1}{z-a_2}\right)+\dfrac{v_1}{\tau}\left(\dfrac{1}{z-a_3}-\dfrac{1}{z-a_2}\right)\right]$,

$$u_{13}(z)=c^2\left[\left(u_1(\omega-u_3)-d_{23}\right)\left(\frac{1}{z-a_1}-\frac{1}{z-a_2}\right)+\frac{v_1(v_3-\omega)-d_3}{\tau^2}\left(\frac{1}{z-a_3}-\frac{1}{z-a_2}\right)\right],$$

$$u_{21}(z)=\frac{1}{c}\left[\left(\frac{1}{z-a_2}-\frac{1}{z-a_1}\right)+\tau\left(\frac{1}{z-a_3}-\frac{1}{z-a_2}\right)\right]=\frac{\left[(a_2-a_1)+\tau(a_3-a_2)\right]z-a_3(a_2-a_1)-\tau a_1(a_3-a_2)}{c\left(z-a_1\right)\left(z-a_2\right)\left(z-a_3\right)}$$

$$u_{13}(z)=c\left[\left(r_{23}-u_1-(\sigma-u_2)(\omega-u_3)\right)\left(\frac{1}{z-a_1}-\frac{1}{z-a_2}\right)+\frac{1}{\tau}\left((\sigma-v_2)(\omega-v_3)-r_3+v_1\right)\left(\frac{1}{z-a_3}-\frac{1}{z-a_2}\right)\right]$$

$$u_{22}(z)=\frac{u_2}{z-a_1}+\frac{\sigma-u_2-v_2}{z-a_2}+\frac{v_2}{z-a_3},\quad u_{33}(z)=\frac{u_3}{z-a_1}+\frac{\omega-u_3-v_3}{z-a_2}+\frac{v_3}{z-a_3},\quad u_{21}(z)=u_{32}(z)\,.$$

Систему (3) можно переписать в виде трех уравнений:

$$\begin{cases} y_1'=u_{11}(z)y_1+u_{12}(z)y_2,\\ y_2'=u_{21}(z)y_1+u_{22}(z)y_2+u_{23}(z)y_3,\\ y_3'=u_{31}(z)y_1+u_{32}(z)y_2+u_{33}(z)y_3. \end{cases} \tag{4}$$

Выражая из первого уравнения системы (4) $y_2=\dfrac{y_1'-u_{11}y_1}{u_{21}}$ и подставляя во второе уравнение, получим уравнение

$$\left(\frac{y_1'-u_{11}y_1}{u_{21}}\right)'=u_{21}y_1+u_{22}\left(\frac{y_1'-u_{11}y_1}{u_{21}}\right)+u_{23}y_3,$$

из которого выражаем y_3:

$$y_3=\frac{1}{u_{21}}\left[-\frac{u_{21}'}{u_{21}^2}\left(y_1'-u_{11}y_1\right)-u_{12}y_1-u_{22}\left(\frac{y_1'-u_{11}y_1}{u_{21}}\right)+\frac{y_1''-u_{11}y_1'-u_{11}'y_1}{u_{21}}\right]=$$

$$=\frac{1}{u_{21}^2}\left[y_1''-\left(\frac{u_{21}'}{u_{21}}+u_{11}+u_{22}\right)y_1'+\left(\frac{u_{21}'}{u_{21}}u_{11}+u_{11}u_{22}-u_{12}u_{21}-u_{11}'\right)y_1\right]=\frac{1}{u_{21}^2}\left(y_1''-My_1'+Ny_1\right),$$

где $M=\dfrac{u_{21}'}{u_{21}}+u_{11}+u_{22},\quad N=\dfrac{u_{21}'}{u_{21}}u_{11}+u_{11}u_{22}-u_{12}u_{21}-u_{11}'$.

Подставим теперь полученные выражения для y_2 и y_3 в третье уравнение системы (4)

$$\frac{-2}{u_{21}^3}u_{21}'\left(y_1''-My_1'+Ny_1\right)+\frac{1}{u_{21}^2}\left(y_1'''-My_1''-M'y_1'+Ny_1'+N'y_1\right)=$$

$$=u_{13}y_1+\frac{u_{23}}{u_{21}}\left(y_1'-u_{11}y_1\right)+\frac{u_{33}}{u_{21}^2}\left(y_1''-My_1'+Ny_1\right)$$

и преобразуем его, записывая y вместо y_1:

$$\begin{gathered} y'''-\left(3\frac{u_{21}'}{u_{21}}+u_{11}+u_{22}+u_{33}\right)y''+\left[M\left(2\frac{u_{21}'}{u_{21}}+u_{33}\right)-M'+N-u_{23}u_{21}\right]y'+\\ +\left[u_{21}\left(u_{11}u_{23}-u_{13}u_{21}\right)-N\left(2\frac{u_{21}'}{u_{21}}+u_{33}\right)+N'\right]y=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Получили дифференциальное уравнение 3-го порядка с рациональными коэффициентами вида

$$y''' + P_1(z)y'' + P_2(z)y' + P_3(z)y = 0,$$

называемое уравнением Фукса. Запишем вид коэффициентов этого уравнения. Прежде всего найдем

$$\frac{u_{21}'}{u_{21}} = \left(\ln u_{21}\right)' = \left(\ln \frac{\left[(a_2-a_1)+\tau(a_3-a_2)\right]z - a_3(a_2-a_1) - \tau a_1(a_3-a_2)}{c\left(z-a_1\right)\left(z-a_2\right)\left(z-a_3\right)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a_1} - \frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_3}, \text{ где}$$

$$b = \frac{a_3(a_2-a_1)+\tau a_1(a_3-a_2)}{(a_2-a_1)+\tau(a_3-a_2)}. \tag{6}$$

Заметим также несмотря на то, что в формулах для функций $u_{ij}(z)$ присутствует постоянная c, в дифференциальное уравнение (5) входят такие произведения этих функций, которые аннулируют эту постоянную. Тогда

$$P_1(z) = -\left(3\frac{u_{21}'}{u_{21}} + u_{11} + u_{22} + u_{33}\right) = -3\left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a_1} - \frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_3}\right) - \frac{\rho + u_2 + u_3}{z-a_1} -$$

$$- \frac{\sigma + \omega - u_2 - v_2 - u_3 - v_3}{z-a_2} - \frac{v_2+v_3}{z-a_3} = \frac{3-s_1}{z-a_1} + \frac{3-s_2}{z-a_2} + \frac{3-s_3}{z-a_3} - \frac{3}{z-b},$$

$$P_2(z) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1+r_k-s_k}{\left(z-a_k\right)^2} + \frac{3}{\left(z-b\right)^2} + \frac{Q_2(z)}{\prod_{k=1}^{3}\left(z-a_k\right)\left(z-b\right)},$$

$$P_3(z) = \sum_{k=1}^{3} \frac{d_k}{\left(z-a_k\right)^3} + \frac{Q_4(z)}{\prod_{k=1}^{3}\left(z-a_k\right)^2\left(z-b\right)^2}, \text{ где } Q_2(z),\ Q_4(z) \text{ – многочлены.}$$

Результат исследования можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Система дифференциальных уравнений 3-го порядка (1) с четырьмя особыми точками сводится к обыкновенному дифференциальных уравнений 3-го порядка (1) с четырьмя особыми точками $a_1, a_2, a_3, a_4 = \infty$ дифференциальному уравнению 3-го порядка (5) с пятью особыми точками $a_5 = b$. Точка b находится по формуле (6) и является регулярной.

В окрестности каждой особой точки $a_k, k = 1,....,5$, имеет 3 линейно независимых решения, которые находятся в виде обобщенных степенных рядов вида

$$y_j^{(k)} = \left(z-a_k\right)^{v_j} \sum_{n=0}^{\infty} C_{nj}^{(k)} \left(z-a_k\right)^n, \quad j = 1,2,3,$$

коэффициенты которых без труда находятся по рекуррентным формулам. В окрестностях точек $a_k, k = 1,....,4$, показатели принимают значения $\rho_k, \sigma_k, \omega_k$, а окрестности точки $a_5 = b$ значения 0, 2, 4.

Библиографический список

1. Еругин Н. П. Проблема Римана. Мн.: Наука и техника. 1982. 336 с.
2. Хвощинская Л.А. Построение дифференциального уравнения с группой монодромии третьего порядка и тремя особыми точками // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXXII Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т. 12: в 3 ч. Ч. 3 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2019. С. 3–6.
3. Хвощинская Л.А., Жоровина Т.Н. Метод логарифмирования произведения матриц группы монодромии третьего порядка Проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. XXXIII Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т. 9 / под общ. ред. А.А. Большакова. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2020. С.3–6.
4. Khvostchinskaya L., Rogosin S. On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers. 2020. pp. 79–112.