УДК 517

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА КАРЛЕМАНА НА ПАРЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОТРЕЗКОВ

Л.А. Хвощинская*, Т.Н. Жоровина**

** Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com*

*** Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, zhorovina@bsu.by*

Аннотация. Рассмотрен один метод решения интегрального уравнения Карлемана на паре непересекающихся отрезков. Задача сведена к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и пятью особыми точками. Решение выражено через решения дифференциального уравнения класса Фукса, в котором удалось определить все параметры.

Ключевые слова: интегральное уравнения типа Карлемана, каноническая матрица, краевая задача Римана, дифференциальное уравнение класса Фукса.

SOLUTION OF THE INTEGRAL EQUATION OF CARLEMANN TYPE ON THE PAIR DISJOINT SEGMENTS

L.A. Khvoshchinskaya*, T.N. Zhorovina**

**Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com*

***Belarusian State University, Republic of Belarus, Minsk, zhorovina@bsu.by*

Abstract. Considered one method of solving integral equations of Carlemann type on the pair disjoint segments. The problem is reduced to boundary problem of Riemann with piecewise constant matrix and five singular points. The solution is expressed via the solution of a differential equation of Fuchs class in which it was possible to define all the parameters.

Keywords: integral equations of Carlemann type, the canonical matrix, Riemann boundary value problem, differential equation of the Fuchs class.

Интегральные уравнения Абеля, Карлемана возникают при решении обратных задач в физике твердого тела. Интегральное уравнение Абеля с постоянными пределами $\int_a^b \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}dt = f(x)$, $0<\alpha<1$, $a<x<b$, решено Карлеманом [1]. Интерес представляют обобщения этого уравнения, когда интегрирование ведется по совокупности отрезков с различными дробными степенями в знаменателях.

Рассмотрим интегральное уравнение Карлемана на паре отрезков

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{\alpha_1}}dt + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\varphi(t)}{|x-t|^{\alpha_2}}dt = f(x),\ x\in[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2], \tag{1}$$

где α_1, α_2 – заданные действительные числа, $0<\alpha_k<1$, $k=1,2$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, $a_1<b_1<a_2<b_2$.

Решение уравнения (1) на смежных отрезках, когда $b_1=a_2$, дано в работе [2]. Решение уравнения в этом случае сведено к решению краевой задачи с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками и представлено рядами. При решении использован метод логарифмирования произведения двух матриц [3]. В отличие от предыдущей задачи отрезки интегрирования в уравнении (1) не пересекаются, что приводит к дополнительной особой точке и усложнению решения уравнения. Цель настоящей работы – построить решение уравнения (1), применив метод логарифмирования произведения трех матриц [4] несколько раз подряд.

Введем две новые неизвестные функции

$$\Phi_k(z) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{\varphi_k(t)}{(t-z)^{\alpha_k}}dt,\ k=1,2,\ \varphi_k(t)=\varphi(t),\ t\in[a_k,b_k],$$

которые аналитичны в комплексной плоскости z с разрезом по лучу (a_1,∞). Найдем предельные значения этих функций на берегах разреза. Для $a_1<x<b_1$ получаем

$$\Phi_1^{\pm}(x) = e^{\pm\pi i\alpha_1}\int_{a_1}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}} + \int_{x}^{b_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}},$$

откуда находим

$$\int_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_1}} = \frac{e^{\pi i\alpha_1}\Phi_1^{+}(x)+\Phi_1^{-}(x)}{1+e^{\pi i\alpha_1}}, \qquad \Phi_2^{+}(x)=\Phi_2^{-}(x)=\int_{a_2}^{b_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha_2}}. \tag{2}$$

Аналогично для $a_2 < x < b_2$ получаем

$$\int_{a_2}^{b_2}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\alpha_2}} = \frac{e^{\pi i\alpha_2}\Phi_2^{+}(x)+\Phi_2^{-}(x)}{1+e^{\pi i\alpha_2}}, \qquad \Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x)=e^{-\pi i\alpha_1}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha_1}}. \tag{3}$$

Для $b_1 < x < a_2$ $\quad \Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x), \quad \Phi_2^{+}(x)=\Phi_2^{-}(x).$

Для $b_2 < x < \infty$ $\quad \Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x), \quad \Phi_2^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_2}\Phi_2^{-}(x).$

С помощью этих формул запишем систему краевых условий для двух функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$:

$$\begin{cases}\Phi_1^{+}(x)=-e^{\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x)-\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)\Phi_2^{-}(x)+\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)f_1(x),\\ \Phi_2^{+}(x)=\Phi_2^{-}(x),\quad a_1<x<b_1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x),\\ \Phi_2^{+}(x)=\Phi_2^{-}(x),\end{cases}\quad b_1<x<a_2.$$

$$\begin{cases}\Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x),\quad a_2<x<b_2,\\ \Phi_2^{+}(x)=-e^{-\pi i\alpha_1}\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)\Phi_1^{-}(x)-e^{-\pi i\alpha_2}\Phi_2^{-}(x)+\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)f_2(x),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi_1^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_1}\Phi_1^{-}(x),\\ \Phi_2^{+}(x)=e^{-2\pi i\alpha_2}\Phi_2^{-}(x),\end{cases}\quad b_2<x<\infty.$$

Таким образом, для вектор-функции $\Phi(z)=\left(\Phi_1(z),\Phi_2(z)\right)$ мы получили краевую задачу Римана с кусочно-постоянной матрицей и 5-ю особыми точками a_1, b_1, a_2, b_2, ∞:

$$\Phi^{+}(x)=A_k\Phi^{-}(x)+F_k(x),\quad x\in l_k,\quad k=1,2,3,4,, \tag{4}$$

$$l_1\in(a_1,b_1),\ l_2\in(b_1,a_2),\ l_3\in(a_2,b_2),\ l_4\in(b_2,\infty),$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-e^{-\pi i\alpha_1} & -\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}e^{-2\pi i\alpha_1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad F_1(x)=\begin{pmatrix}\left(1+e^{-\pi i\alpha_1}\right)f_1(x)\\ 0\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}e^{-2\pi i\alpha_1} & 0\\ -e^{-\pi i\alpha_1}\left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right) & -e^{-\pi i\alpha_2}\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}e^{-2\pi i\alpha_1} & 0\\ 0 & e^{-2\pi i\alpha_2}\end{pmatrix},\quad F_3(x)=\begin{pmatrix}0\\ \left(1+e^{-\pi i\alpha_2}\right)f_2(x)\end{pmatrix},$$

$$F_2(x)=F_4(x)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad f_k(x)=f(x),\ x\in[a_k,b_k],\ k=1,2.$$

Решение задачи (4) ищем в классе функций, ограниченных при $z\to a_k$, $z\to b_k$, $k=1,2$, и исчезающих на бесконечности.

Находим характеристические числа λ_k, μ_k, $k=\overline{1,5}$, матриц группы монодромии $V_k = A_{k-1}\cdot A_k^{-1}, A_0 = A_5 = E$ и числа $\rho_k=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\lambda_k$, $\sigma_k=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\mu_k$, $0\le\operatorname{Re}\rho_k<1$, $0\le\operatorname{Re}\sigma_k<1$, а также характеристические числа и соответствующие логарифмы матриц V_1V_2, V_3V_4, $V_1V_2V_3$, $V_2V_3V_4$:

$V_1 = A_1^{-1}$, $V_2 = A_1A_2^{-1}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -e^{\pi i\alpha_1}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$; $\rho_1 = \rho_2 = (1+\alpha_1)/2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$,

$V_3 = A_2A_3^{-1}, V_4 = A_3A_4^{-1}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $\mu_3 = \mu_4 = -e^{-\pi i\alpha_2}$, $\rho_3 = \rho_4 = 1$, $\rho_3 = \rho_4 = (1+\alpha_2)/2$,

$V_5 = A_4$, $\lambda_5 = e^{-2\pi i\alpha_1}$, $\mu_5 = e^{-2\pi i\alpha_2}$, $\rho_5 = 1-\alpha_1$, $\sigma_5 = 1-\alpha_2$,

$V_{12} = V_1 \cdot V_2 = A_2^{-1}$, $\lambda_{12} = e^{2\pi i\alpha_1}$, $\mu_{12} = 1$, $\rho_{12} = \alpha_1, \sigma_{12} = 1$,

$V_{34} = V_3 \cdot V_4 = A_2 \cdot A_4^{-1}$, $\lambda_{34} = 1$, $\mu_{34} = e^{2\pi i\alpha_2}$, $\rho_{34} = 1, \sigma_{34} = \alpha_2$,

$V_{123} = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = A_3^{-1}$, $\lambda_{123} = e^{2\pi i\alpha_1}$, $\mu_{123} = -e^{-\pi i\alpha_2}$, $\rho_{123} = 1+\alpha_1$, $\sigma_{123} = (1+\alpha_2)/2$,

$V_{234} = V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 = A_1A_4^{-1}$, $\lambda_{234} = -e^{-\pi i\alpha_1}$, $\mu_{234} = e^{2\pi i\alpha_2}$, $\rho_{234} = (1+\alpha_1)/2$, $\sigma_{234} = 1+\alpha_2$.

Ветви логарифмов произведений матриц монодромии выбраны из условий
$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2$, $\rho_{123} + \sigma_{123} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3$ и т.д.

Поведение решения задачи (4) на бесконечности определяют числа
$\rho = \rho_5 - 1 = -\alpha_1$, $\sigma = \sigma_5 - 2 = -\alpha_2 - 1$, если $\alpha_1 > \alpha_2$ и
$\rho = \rho_5 - 2 = -\alpha_1 - 1$, $\sigma = \sigma_5 - 1 = -\alpha_2$, если $\alpha_1 < \alpha_2$.

Числа ρ_k, σ_k ($k = 1,2,3,4$), ρ, σ удовлетворяют соотношению Фукса: $\sum_{k=1}^{4}(\rho_k + \sigma_k) + \rho + \sigma = 1$. Индекс æ и частные индексы æ$_1$, æ$_2$ задачи равны
æ $= -\sum_{k=1}^{5}(\rho_k + \sigma_k) = -4$, æ$_1$ = æ$_2$ $= -2$, т.е. задача (2) имеет единственное решение.

Каноническая матрица $X(x)$ однородной краевой задачи
$X^+(x) = A_k X^-(x)$, $x \in l_k$, $k = 1,2,3,4$,
соответствующей задаче (4), является решением системы дифференциальных уравнений класса Фукса

$$\frac{dX}{dz} = X\sum_{k=1}^{4}\frac{U_k}{z-a_k}, \tag{5}$$

где $U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,2,3,4$. Обозначим $W = \begin{pmatrix} -\min(\rho,\sigma) & 0 \\ 0 & 1-\max(\rho,\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 \end{pmatrix}$.

Матрица W с точностью до постоянного множителя единственным образом представима в виде суммы матриц [4]:

$$W = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + S_{34} = S_{12} + S_3 + S_4, \tag{6}$$

где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $S_{12} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_{12}$, $S_{34} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_{34}$. Зная характеристические числа и их логарифмы матриц группы монодромии и их произведений, запишем два представления матрицы W:

$$S_1 + S_2 + S_{34} = W \Rightarrow \begin{pmatrix} (1+\alpha_1)/2 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\alpha_1-1)/2 & -c \\ (1-\alpha_1)/2c & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\alpha_1-1)/2c & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$S_{12} + S_3 + S_4 = W \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ (\alpha_2-1)/2d & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -d \\ (1-\alpha_2)/2d & (\alpha_2-1)/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & (1+\alpha_2)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_1 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 \end{pmatrix}$$

где c, d – произвольные постоянные. Из (6) и последних формул следует,что

$$S_1+S_2=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ (1-\alpha_1)/2c & 1\end{pmatrix}=S_{12}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ (\alpha_2-1)/2d & 1\end{pmatrix},$$
$$S_3+S_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ (1-\alpha_2)/2d & \alpha_2\end{pmatrix}=S_{34}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ (\alpha_1-1)/2c & \alpha_2\end{pmatrix}.$$
Следовательно, параметры c и d связаны соотношением

$\frac{1-\alpha_1}{2c}=\frac{\alpha_2-1}{2d}$, откуда находим, что $d=\frac{\alpha_2-1}{1-\alpha_1}c$.

Матрицы S_k $(k=1,2,3,4)$ являются дифференциальными матрицами системы (5), которая принимает вид

$$\frac{dX}{dz}=X\left[\frac{\begin{pmatrix}(1+\alpha_1)/2 & (1-\alpha_1)c/2\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{z-a_1}+\frac{\begin{pmatrix}(\alpha_1-1)/2 & (\alpha_1-1)c/2\\ 1/c & 0\end{pmatrix}}{z-a_2}+\frac{\begin{pmatrix}0 & (1-\alpha_2)c/2\\ -1/c & (\alpha_2-1)/2\end{pmatrix}}{z-a_3}+\frac{\begin{pmatrix}0 & (\alpha_2-1)c/2\\ 0 & (\alpha_2+1)/2\end{pmatrix}}{z-a_4}\right]$$

где c – произвольная постоянная. Элементы матрицы $X(z)$ являются решениями дифференциального уравнения класса Фукса с пятью особыми точками a_1, b_1, a_2, b_2, ∞:

$$u''-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1+1}{z-a_1}+\frac{\alpha_1-1}{z-a_2}+\frac{\alpha_2-1}{z-a_3}+\frac{\alpha_2+1}{z-a_4}\right)u'+\frac{1}{4}\left(\frac{2(\alpha_1+1)}{(z-a_1)^2}+\frac{2(\alpha_1-1)}{(z-a_1)(z-a_2)}+\frac{\alpha_1\alpha_2-5\alpha_1+\alpha_2-1}{(z-a_1)(z-a_3)}+\right.$$
$$\left.\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2+1}{(z-a_1)(z-a_4)}+\frac{\alpha_1\alpha_2-\alpha_1+\alpha_2-1}{(z-a_2)(z-a_3)}+\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1-3\alpha_2+1}{(z-a_2)(z-a_4)}+\frac{4\alpha_2}{(z-a_3)(z-a_4)}\right)u=0. \tag{7}$$

В окрестности каждой особой точки уравнение (7) имеет 2 линейно независимых решения, представимые рядами вида

$u_k(z)=(z-a_k)^{\rho_k}\sum_{n=0}^{\infty}c_k(z-a_k)^n$, $v_k(z)=(z-a_k)^{\sigma_k}\sum_{n=0}^{\infty}d_k(z-a_k)^n$,

коэффициенты которых находятся непосредственно из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение.

Единственное решение задачи (4) найдено по формуле [5]

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}X(z)\left[\int_{a_1}^{b_1}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_1(x)\frac{dx}{x-z}+\int_{a_2}^{b_2}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_3(x)\frac{dx}{x-z}\right]$$

Далее, применяя формулы Сохоцкого, а также формулы (3) и (4), находим интегралы

$$\int_{a_k}^{b_k}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{\lambda_k}}=g_k(x),\ k=1,2.$$

Обращая последние уравнения [1], находим единственное решение интегрального уравнения (1) при выполнении двух матричных (четырех скалярных) условий разрешимости [5]:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_1(x)x^k dx+\int_{a_2}^{b_2}\left[X^+(x)\right]^{-1}F_3(x)x^k dx=0, k=1,2.$$

Библиографический список

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Хвощинская Л.А., Решение интегрального уравнения типа Карлемана на паре отрезков // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-30: сб. тр. XXX Междунар. науч. конф.: в 12 т. Т. 12: в 3 ч. Ч. 1 – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2017. С. 9 – 13.
3.Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Матер. междунар. семнадцатой науч. конф. им. акад. М. Кравчука, 19–20 мая 2016. Т.1. Киев: НТУУ «КПИ». 2016. С. 263–266.
4. Хвощинская Л.А. О применении логарифмирования произведения матриц к решению проблемы Римана // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-28: сб. тр. XXVIII Междунар. науч. конф. Т. 7. – Рязань. 2015. С. 28 – 31.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. 448 с.