Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2000. Том 5. С. 136 — 141.

УДК 517.948

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. А. Хвощинская

A mixed problem for an elastic plate is reduced to the nonhomogeneous vector-matrix Riemann boindary value problem with piece-wise constant matrix and three singular points. Canonical matrix is constructed to solve the problem in closed form.

Рассмотрим задачу, которая возникает при решении одной задачи о штампе. Найти функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, непрерывно продолжимых на $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha\}\cup\{\alpha\}$, $\alpha>0$, по условиям

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{Im} F_1(x)=\operatorname{Re} F_2(x), & -\infty<x<-\alpha,\\
\operatorname{Im} F_1(x)=-\operatorname{Re} F_2(x), & \alpha<x<+\infty,\\
\operatorname{Re} F_1(x)=f_1(x), & -\infty<x<\alpha,\\
\operatorname{Im} F_2(x)=f_2(x), & -\alpha<x<+\infty.
\end{array}\tag{1}$$

Решение ищется в классе функций, ограниченных при $z\to\pm\alpha$, $z\to\infty$.

Применив известные формулы

$$\operatorname{Re} F=\frac{1}{2}(F+\overline{F}),\quad \operatorname{Im} F=\frac{1}{2i}(F-\overline{F}),$$

приходим к трем системам уравнений, которым удовлетворяют функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ на интервалах $(-\infty,-\alpha)$, $(-\alpha,\alpha)$, $(\alpha,+\infty)$:

$$\begin{array}{ll}
\begin{cases} F_1(x)-\overline{F}_1(x)=iF_2(x)+i\overline{F}_2(x),\\ F_1(x)+\overline{F}_1(x)=2f_1(x),\end{cases} & -\infty<x<-\alpha,\\
\begin{cases} F_1(x)+\overline{F}_1(x)=2f_1(x),\\ F_2(x)-\overline{F}_2(x)=2if_2(x),\end{cases} & -\alpha<x<\alpha,\\
\begin{cases} F_1(x)-\overline{F}_1(x)=-iF_2(x)-i\overline{F}_2(x),\\ F_2(x)-\overline{F}_2(x)=2if_2(x),\end{cases} & \alpha<x<+\infty.
\end{array}\tag{2}$$

Далее введем две новые неизвестные вектор-функции

$$\Phi^+=(F_1(z),\overline{F_2(\overline{z})}\,),\quad \Phi^-(z)=(\overline{F_1(\overline{z})},F_2(z)),$$

аналитические в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ удовлетворяют условию симметрии $\Phi^+(z)=\overline{\Phi^-(\overline{z})}$. С помощью этих функций перепишем системы (2) в виде

$$
\begin{cases}
\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = i\Phi_2^-(x) + i\Phi_2^+(x), \\
\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x),
\end{cases} \qquad -\infty < x < -\alpha,
$$
$$
\begin{cases}
\Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\
\Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x),
\end{cases} \qquad -\alpha < x < \alpha, \tag{3}
$$
$$
\begin{cases}
\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\
\Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x),
\end{cases} \qquad \alpha < x < +\infty,
$$

или в виде

$$
\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2\begin{pmatrix} 0 \\ f_1(x) \end{pmatrix}, \qquad -\infty < x < -\alpha,
$$
$$
\Phi^+(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2\begin{pmatrix} f_1(x) \\ -if_2(x) \end{pmatrix}, \qquad -\alpha < x < \alpha, \tag{4}
$$
$$
\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -if_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \alpha < x < +\infty.
$$

Упростив системы (4), приходим к неоднородной краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и тремя особыми точками $-\alpha, \alpha, \infty$:

$$
\begin{cases}
\Phi^+(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2f_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, & -\infty < x < -\alpha, \\
\Phi^+(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2\begin{pmatrix} f_1(x) \\ -if_2(x) \end{pmatrix}, & -\alpha < x < \alpha, \\
\Phi^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(x) + 2f_2(x)\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, & \alpha < x < +\infty.
\end{cases} \tag{5}
$$

Введем еще две новые неизвестные вектор-функции:

$$
\Psi^+(z) = \Phi^+(z), \quad \Psi^-(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi^-(z). \tag{6}
$$

Тогда краевые условия (5) переходят в условия

$$
\begin{cases}
\Psi^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix} \Psi^-(x) + 2f_1(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, & -\infty < x < -\alpha, \\
\Psi^+(x) = \Psi^-(x) + 2\begin{pmatrix} f_1(x) \\ -2if_2(x) \end{pmatrix}, & -\alpha < x < \alpha, \\
\Psi^+(x) = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi^-(x) + 2f_2(x)\begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}, & \alpha < x < +\infty.
\end{cases} \tag{7}
$$

Найдем каноническую матрицу $\Psi_0(z)$ задачи (7). Для этого рассмотрим однородную краевую задачу, соответствующую задаче (7):

$$
\begin{cases}
\Psi^+(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix} \Psi^-(x), & -\infty < x < -\alpha, \\
\Psi^+(x) = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi^-(x), & \alpha < x < +\infty.
\end{cases}
$$

Сделаем замену переменной по формулам

$$\xi = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}, \quad t = \frac{x-\alpha}{x+\alpha}$$

и обозначим

$$\Psi(z) = \Psi\left(\alpha\frac{1+\xi}{1-\xi}\right) = \Omega(\xi), \quad \Psi(x) = \Psi\left(\alpha\frac{1+t}{1-t}\right) = \Omega(t). \tag{8}$$

Приходим к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и тремя особыми точками:

$$\begin{aligned} \Omega^+(t) &= A_1\Omega^-(t), \quad 0 < t < 1, \\ \Omega^+(t) &= A_2\Omega^-(t), \quad 1 < t < +\infty, \end{aligned} \tag{9}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}$.

При решении задачи (9) воспользуемся схемой, изложенной в [1].

Находим характеристические числа α_k, β_k $(k = 1,2,3)$ матриц A_1^{-1}, $A_1A_2^{-1}$, A_2, которые соответственно равны

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \beta_1 = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = 2\sqrt{2}-3, \\ \beta_2 = -2\sqrt{2}-3 = 1/\alpha_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = -1, \\ \beta_3 = 1. \end{cases}$$

Выбирая ветвь логарифма из условия $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, определяем числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ $(k = 1,2,3)$:

$$\begin{cases} \rho_1 = 0, \\ \sigma_1 = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi i}\ln(3-2\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}-1), \\ \sigma_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\pi i}\ln(3-2\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}-1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho_3 = \dfrac{1}{2}, \\ \sigma_3 = 0. \end{cases}$$

$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{3}(\rho_k + \sigma_k) = 2.$

Индекс $\varkappa$ и частные индексы $\varkappa_1, \varkappa_2$ краевой задачи (9) равны

$$\varkappa = -\Delta = -2, \quad \varkappa_1 = \left[\frac{1-\Delta}{2}\right] = -1, \quad \varkappa_2 = \left[\frac{-\Delta}{2}\right] = -1.$$

Далее находим параметры

$$\begin{aligned} a &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \varkappa_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}-1) - 1 = \frac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}-1), \\ b &= \rho_1 + \rho_2 + \sigma_3 + \varkappa_2 + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}-1) = a + \frac{1}{2}, \\ c &= 1 + \rho_1 - \sigma_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Каноническая матрица задачи (9) имеет вид

$$\Omega_0(\xi) = \xi^{\rho_1}(1-\xi)^{\rho_2}C\begin{pmatrix} u_1(\xi) & v_1(\xi) \\ u_2(\xi) & v_2(\xi) \end{pmatrix},$$

где C — некоторая матрица, приводящая матрицу A_1 к нормальной жордановой форме; $u_1(\xi), u_2(\xi)$ — фундаментальная система решений гипергеометрического уравнения в окрестности точки $\xi = 0$ [2], т. е.

$$u_1(\xi) = F(a,b;c;\xi) = F\left(a, a+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right) = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{\xi})^{-2a} + (1-\sqrt{\xi})^{-2a}\right],$$

$$u_2(\xi)=\xi^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;\xi)=\sqrt{\xi}F\Big(a+\frac{1}{2},a+1;\frac{3}{2};\xi\Big)=$$

$$=\frac{\sqrt{\xi}}{a(2a+1)}(1-\xi)^{-2a}\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi)^{2a+1}F\Big(a+\frac{1}{2},a+1;\frac{1}{2};\xi\Big)\right]=\frac{1}{4a}\left[(1-\sqrt{\xi})^{-2a}-(1+\sqrt{\xi})^{-2a}\right];$$

$$v_1(\xi)=(1-\xi)\left[au_1(\xi)+\xi u_1'(\xi)\right]=\frac{a}{2}\left[(1-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})^{-2a}+(1+\sqrt{\xi})(1-\sqrt{\xi})^{-2a}\right],$$

$$v_2(\xi)=(1-\xi)\left[au_2(\xi)+\xi u_2'(\xi)\right]=\frac{1}{4}\left[(1+\sqrt{\xi})(1-\sqrt{\xi})^{-2a}-(1-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})^{-2a}\right].$$

Матрица C определяется следующим образом.

Находим любые фиксированные матрицы C_1 и C_2, приводящие матрицы A_1, $A_1A_2^{-1}$ к нормальной жордановой форме, например,

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ i & 0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}i & i\\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix},$$

а также матрицу

$$S=(s_{ij})=C_1^{-1}C_2=i\begin{pmatrix}1-\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\\ 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Найдем число

$$\gamma=\frac{s_{21}}{s_{11}}\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(2-c)}=-\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1/2-a)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-a)\Gamma(-a)\Gamma(3/2)}=2a.$$

Тогда

$$C=C_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Omega_0(\xi)=\frac{1}{2}(1-\xi)^{a+1/2}C_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}(1+\xi)^{-2a}+(1-\xi)^{-2a} & a\left[(1-\xi)(1+\xi)^{-2a}+(1+\sqrt{\xi})(1-\sqrt{\xi})^{-2a}\right]\\ \frac{1}{2a}\left[(1-\sqrt{\xi})^{-2a}-(1+\sqrt{\xi})^{-2a}\right] & \frac{1}{2}\left[(1+\xi)(1-\xi)^{-2a}-(1-\sqrt{\xi})(1+\sqrt{\xi})^{-2a}\right]\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1-\xi}\,C_1\begin{pmatrix}\omega_1(\xi) & \sqrt{\xi}\,\omega_2(\xi)\\ \omega_2(\xi) & \sqrt{\xi}\,\omega_1(\xi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & a\end{pmatrix},$$

где введены обозначения

$$\omega_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}\right)^b+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right)^b,\quad \omega_2(\xi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}}\right)^b-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right)^b.$$

Возвращаясь по формулам (8) к переменной z, получим каноническую матрицу $\Psi_0(z)$ краевой задачи (7)

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{z+\alpha}C_1\begin{pmatrix}\sqrt{z+\alpha}\,y_1(z) & \sqrt{z-\alpha}\,y_2(z)\\ \sqrt{z+\alpha}\,y_2(z) & \sqrt{z-\alpha}\,y_1(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & a\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$y_1(z)=\omega_1\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha^a}\left[(z-\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a+(z+\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a\right],$$

$$y_2(z)=\omega_2\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha^a}\left[(z-\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a-(z+\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a\right].$$

Каноническую матрицу $\Phi_0(z)$ задачи (5) можно найти по формулам (6):

$$\Phi_0^+(z) = \Psi_0^+(z) = \Psi_0(z), \quad \Phi_0^-(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_0^+(z).$$

Поскольку

$$\overline{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} C_1, \quad \overline{y_1(\overline{z})} = y_1(z), \quad \overline{y_2(\overline{z})} = -y_2(z),$$

то получаем

$$\overline{\Phi_0^-(\overline{z})} = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{z+\alpha}\, y_1(z) & -\sqrt{z-\alpha}\, y_2(z) \\ -\sqrt{z+\alpha}\, y_2(z) & \sqrt{z-\alpha}\, y_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что равенство $\Phi_0^+(z) = \overline{\Phi_0^-(\overline{z})}$ не выполняется, т. е. функции $\Phi_0^\pm(z)$ не удовлетворяют условию симметрии. Однако этому условию будут удовлетворять функции

$$X^+(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_0^+(z) + \overline{\Phi_0^-(\overline{z})}\right), \quad X^-(z) = \frac{1}{2}\left(\Phi_0^-(z) + \overline{\Phi_0^+(\overline{z})}\right).$$

На основании формул (10) и (11) получаем

$$X^+(z) = \frac{1}{\sqrt{z+\alpha}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\, y_2(z) & a\left(1 + \sqrt{2\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}}\right) y_1(z) \\ 0 & iay_1(z) \end{pmatrix}.$$

Решение неоднородной задачи (5) найдем по формулам:

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} X^+(z) \int_{-\infty}^{+\infty} X^+(x)^{-1} G(x) \frac{dx}{x-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} w_{11}(x,z) & -iw_{12}(x,z) \\ 0 & w_{22}(x,z) \end{pmatrix} G(x) \frac{dx}{x-z},$$

где

$$w_{11} = \sqrt{\frac{x+\alpha}{z+\alpha}}\, \frac{y_2(z)}{y_2(x)} = \sqrt{\frac{x+\alpha}{z+\alpha}}\, \frac{(z-\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a - (z+\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a}{(x-\sqrt{x^2-\alpha^2}\,)^a - (x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\,)^a},$$

$$w_{22} = \sqrt{\frac{x+\alpha}{z+\alpha}}\, \frac{y_1(z)}{y_1(x)} = \sqrt{\frac{x+\alpha}{z+\alpha}}\, \frac{(z-\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a + (z+\sqrt{z^2-\alpha^2}\,)^a}{(x-\sqrt{x^2-\alpha^2}\,)^a + (x+\sqrt{x^2-\alpha^2}\,)^a},$$

$$w_{12}(x,z) = \sqrt{\frac{x+\alpha}{z+\alpha}}\left[w_{22}(x,z)\left(1+\sqrt{2\frac{z-\alpha}{z+\alpha}}\right) - w_{11}(x,z)\left(1+\sqrt{2\frac{x-\alpha}{x+\alpha}}\right)\right],$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ ig_2(x) \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 2f_1(x), & -\infty < x < \alpha, \\ -2f_2(x), & \alpha < x < +\infty, \end{cases} \quad g_2(x) = \begin{cases} -2f_1(x), & -\infty < x < -\alpha, \\ -2f_2(x), & -\alpha < x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$F_1(z) = \Phi_1^+(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{w_{11}(x,z) f_1(x)}{x-z}\, dx + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{w_{12}(x,z) f_1(x)}{x-z}\, dx +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{+\infty}\frac{w_{12}(x,z)f_2(x)}{x-z}\,dx-\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{w_{11}(x,z)f_2(x)}{x-z}\,dx,$$

$$F_2(z)=\overline{\Phi_2(\overline{z})}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{w_{22}(x,z)f_1(x)}{x-z}\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\infty}\frac{w_{22}(x,z)f_2(x)}{x-z}\,dx.$$

Так как частные индексы $\varkappa_1,\varkappa_2$ задачи (5) отрицательны, то задача (1) имеет единственное решение при выполнении двух условий разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[X^+(x)\right]^{-1}G(x)\,dx=0$$

или

$$\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_1(x)}f_1(x)\,dx+\int_{-\alpha}^{+\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_2(x)}f_2(x)\,dx=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_2(x)}f_1(x)\,dx+\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_2(x)}f_1(x)\left(1+\sqrt{2\frac{x-\alpha}{x+\alpha}}\right)dx+$$

$$+\int_{-\alpha}^{+\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_2(x)}f_2(x)\left(1+\sqrt{2\frac{x-\alpha}{x+\alpha}}\right)dx-\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{y_2(x)}f_2(x)\,dx=0.$$

Литература

1. **Хвощинская Л. А.** К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек // Тр. междунар. конф. "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление". Мн., 1996. С. 377 — 382.

2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 3.

Белорусский аграрно-технический университет