Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений - 2001
Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2001. Том 9. С. 145–150

УДК 517.948

НАХОЖДЕНИЕ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Л. А. Хвощинская

The Riemann problem for four singular points is reduced to the vector-matrix boundary value problem with piecewise constant matrix. Accessor parameters are calculated.

Настоящая работа является продолжением работ [1, 2] и связана с решением проблемы Римана для двух функций и четырех особых точек.

Пусть a_1, a_2, a_3 – произвольные различные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Проведем через точки a_1, a_2, a_3, ∞ кусочно-гладкий контур L. Рассмотрим краевую задачу: найти вектор-функцию $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2)$, аналитическую в $\mathbb{C}\backslash L$, непрерывно продолжимую на L, за исключением, быть может, точек a_1, a_2, a_3, предельные значения которой справа и слева от контура L удовлетворяют краевым условиям

$$\Phi^+(t) = A_k \Phi^-(t), \quad t \in (a_k \breve{,} a_{k+1}), \quad k = 1, 2, 3, \, a_4 = \infty, \tag{1}$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные невырожденные матрицы второго порядка. Решение задачи ищем в классе функций, интегрируемых при $z \to a_k$ $(k = 1, 2, 3)$ и почти ограниченных при $z \to \infty$ (в этом классе задача разрешима).

Обозначим характеристические числа матриц $V_k = A_{k-1}A_k^{-1}$ $(k = \overline{1,4}$, $A_0 = A_4 = E)$ через α_k, β_k. Введем обозначения

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \alpha_k, \ -1 < \operatorname{Re} \rho_k \le 0; \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln \beta_k, \ -1 < \operatorname{Re} \sigma_k \le 0,$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{4} (\rho_k + \sigma_k), \quad \Delta \text{ целое}, \ -7 \le \Delta \le 0,$$

$$\rho = \varepsilon + \left[\frac{2-\Delta}{2}\right], \quad \sigma = \rho_4 + \sigma_4 - \varepsilon + \left[\frac{1-\Delta}{2}\right], \text{ где } \varepsilon = \begin{cases} \rho_4, & \text{если } \operatorname{Re}(\rho_4 - \sigma_4) \le 0, \\ \sigma_4, & \text{если } \operatorname{Re}(\rho_4 - \sigma_4) \ge 0. \end{cases}$$

В работе [2] показано, что каноническая матрица $X(z)$ задачи (1) является решением регулярной системы дифференциальных уравнений (ДУ)

$$\frac{dX}{dz} = X \sum_{k=1}^{3} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{2}$$

где $U_k = \begin{pmatrix} -\eta_k & \dfrac{(\eta_k + \rho_k)(\eta_k + \sigma_k)}{(b - a_k)\,\omega_k} \\ (a_k - b)\,\omega_k & \eta_k + \rho_k + \sigma_k \end{pmatrix}$, $\omega_k = \left(\prod\limits_{j=1,\, j\ne k}^{3} (a_k - a_j)\right)^{-1}$, $\eta_k = [\rho a_k(a_k - b) - - q]\omega_k$, q и b – неизвестные (акцессорные) параметры.

Keywords: *boundary value problem for vector-functions, Riemann problem for four singular points*
2000 Mathematics Subject Classification: 30E25, 34M35

Система (2) сводится к ДУ класса Фукса с пятью особыми точками a_1, a_2, a_3, b, ∞ :

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1-\rho_k-\sigma_k}{z-a_k} - \frac{1}{z-b}\right) y' + \frac{z-b}{\prod\limits_{k=1}^{3}(z-a_k)} \left[\frac{q}{(z-b)^2} + \frac{q}{z-b}\left(\frac{q}{\prod\limits_{k=1}^{3}(a_k-b)} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\nu_k+\sigma_k}{a_k-b}\right) + \right.$$

$$\left. +\rho\sigma + \sum_{k=1}^{3} \rho_k\sigma_k \prod_{j=1,\, j\neq k}^{3} \frac{(a_k-a_j)}{(a_k-b)(z-a_k)}\right] y = 0. \tag{3}$$

В окрестности каждой особой точки решение ДУ (3) имеет два линейно независимых решения вида

$$u_k(z) = (z-a_k)^{\rho_k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)}(z-a_k)^n,\ v_k(z) = (z-a_k)^{\sigma_k} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)}(z-a_k)^n, \text{ если } \rho_k \neq \sigma_k\ (k=1,2,3),$$

$$v_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln(z-\alpha_k)u_k(z) + w_k(z), \text{ если } \rho_k = \sigma_k, \quad u_4(z) = \frac{1}{z^\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n^{(4)}}{z^n}, \tag{4}$$

$$u_4(z) = \frac{1}{z^\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_n^{(4)}}{z^n}, \text{ если } \rho_4 \neq \sigma_4, \text{ или } v_4(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln z \cdot u_4(z) + w_4(z), \text{ если } \rho_4 = \sigma_4,$$

$w_k(z)$ – регулярная функция.

В окрестности точки $z = b$ ДУ (3) имеет два линейно независимых решения вида

$$\begin{aligned} u_b(z) &= c_0 + c_1(z-b) + \ldots + c_n(z-b)^n + \ldots, \\ v_b(z) &= d_2(z-b)^2 + d_3(z-b)^3 + \ldots + d_n(z-b)^n + \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. $z = b$ является регулярной особой точкой.

Из теории ДУ класса Фукса известно, что в окрестности каждой особой точки $z = a_k$ решения ДУ связаны между собой линейными соотношениями:

$$\begin{pmatrix} u_k(z) \\ v_k(z) \end{pmatrix} = \Lambda_k \begin{pmatrix} u_{k+1}(z) \\ v_{k+1}(z) \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,3},$$

где $\Lambda_k = (\lambda_{ij}^{(k)})$ – постоянные невырожденные матрицы, элементы которых можно найти по формулам

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} u_k(z_0) & u_k'(z_0) \\ v_k(z_0) & v_k'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k+1}(z_0) & u_{k+1}'(z_0) \\ v_{k+1}(z_0) & v_{k+1}'(z_0) \end{pmatrix}^{-1}, \tag{6}$$

z_0 – некоторая фиксированная точка.

Запишем формулы для нахождения параметров q и b.

Обозначим $\tilde{D}_k$ $(k = \overline{1,4})$ произвольные фиксированные матрицы, приводящие матрицы $V_k = A_{k-1}A_k^{-1}$ к нормальной жордановой форме, $S_k = (S_{ij}^{(k)}) = \tilde{D}_k^{-1}\tilde{D}_{k+1}$ $(k = \overline{1,3})$.

Для определения параметров q, b в [2] составлена система двух трансцендентных уравнений

$$\frac{\det\Lambda_k}{\det S_k} = \frac{\lambda_{12}^{(k)}\lambda_{ij}^{(k)}}{S_{12}^{(k)}S_{ij}^{(k)}}, \quad k = 1,2, \tag{7}$$

$$i = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha_k = \beta_k, \\ 2, \text{ если } \alpha_k \neq \beta_k, \end{cases} \quad j = \begin{cases} 2, \text{ если } \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \\ 1, \text{ если } \alpha_{k+1} \neq \beta_{k+1}. \end{cases}$$

Однако конечные формулы для параметров q и b так и не были получены. Выведем теперь эти формулы.

Вернемся к системе (2). Характеристические числа матриц U_k равны ρ_k, σ_k $(k=\overline{1,3})$ и совпадают с характеристическими числами матриц $\frac{1}{2\pi i}\ln V_k$. Характеристические числа матриц $U_1+U_2+U_3$ и $\frac{1}{2\pi i}\ln V_1V_2V_3=\frac{1}{2\pi i}\ln A_3^{-1}$ также совпадают и равны $-\rho$, $1-\sigma$. Следовательно,

$$U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k \quad (k=1,2,3), \qquad U_1+U_2+U_3 \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_1V_2V_3.$$

А что можно сказать о матрицах U_1+U_2, U_1+U_3, U_2+U_3?

Обозначим характеристические числа матрицы V_1V_2 через α_{12}, β_{12}, матрицы V_1V_3 через α_{13}, β_{13}, матрицы V_2V_3 через α_{23}, β_{23}.

Так как $\det(V_1V_2)=\det V_1\det V_2$, то $\frac{1}{2\pi i}\ln(\alpha_{12}\beta_{12})=\frac{1}{2\pi i}\ln(\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2)$.

Обозначая $\rho_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{12}$, $\sigma_{12}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{12}$, получим при соответствующем выборе ветвей логарифмов равенство $\rho_{12}+\sigma_{12}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=\sigma(U_1+U_2)$. Здесь и в дальнейшем через $\sigma(X)$ обозначаем след матрицы X.

Аналогично, обозначив $\rho_{k3}=\frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{k3}$, $\sigma_{k3}=\frac{1}{2\pi i}\ln\beta_{k3}$, $k=1,2$, получаем равенства

$$\rho_{13}+\sigma_{13}=\sigma(U_1+U_3), \qquad \rho_{23}+\sigma_{23}=\sigma(U_2+U_3),$$

где ветви логарифмов выбираются из условий $\rho_{k3}+\sigma_{k3}=\rho_k+\sigma_k+\rho_3+\sigma_3$, $\quad k=1,2$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$D(U_1+U_2)=\frac{1}{r}(\eta_1r-\eta_2)^2+(\sigma(U_1)r-\sigma(U_2))(r\eta_1-\eta_2)+(D(U_1)r+D(U_2))(1+r), \tag{8}$$

где $r=\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{a_2-b}{a_1-b}=-\frac{(a_1-a_3)(a_2-b)}{(a_2-a_3)(a_2-b)}$. Поскольку

$$r\eta_1-\eta_2=(\rho a_1(a_1-b)-q)\frac{r}{\omega_1}-(\rho a_2(a_2-b)-q)\frac{1}{\omega_2}=-\frac{\rho(a_1-b)(a_2-b)+q}{(a_1-b)(a_2-a_3)}, \tag{9}$$

то определитель матрицы U_1+U_2 (так же как и определители матриц U_1+U_3, U_2+U_3) зависит от параметров q и b. Если потребовать выполнение условий

$$D(U_1+U_2)=\rho_{12}\sigma_{12}, \quad D(U_2+U_3)=\rho_{23}\sigma_{23}, \quad D(U_1+U_3)=\rho_{13}\sigma_{13}, \tag{10}$$

то подобными становятся следующие матрицы:

$$U_1+U_2\sim\frac{1}{2\pi i}\ln V_1V_2, \quad U_1+U_3\sim\frac{1}{2\pi i}\ln V_1V_3, \quad U_2+U_3\sim\frac{1}{2\pi i}\ln V_2V_3.$$

Покажем, что система (10) разрешима относительно q и b.

Учитывая формулы (8) и (9), запишем первое уравнение системы (10) в виде

$$\begin{gathered}(\rho(a_1-b)(a_2-b)+q)^2+[\sigma(U_1)(a_1-a_3)(a_2-b)+\sigma(U_2)(a_2-a_3)(a_1-b)](\rho(a_1-b)(a_2-b)+q)+\\ +[D(U_1)(a_1-a_3)(a_2-b)+D(U_2)(a_2-a_3)(a_1-b)](a_1-a_2)(a_3-b)+\\ +(a_1-a_3)(a_2-a_3)(a_1-b)(a_2-b)\rho_{12}\sigma_{12}=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Преобразовывая последнее уравнение и обозначая $b_k=a_k-b$ $(k=\overline{1,3})$, получим квадратное уравнение вида

$$q^2+m_1q+n_1=0, \tag{12}$$

где

$$m_1=(1+\rho-\sigma)b_1b_2-\sigma(U_1)b_2b_3-\sigma(U_2)b_1b_3-\sigma(U_3)b_1b_2,$$

$$n_1 = \rho b_1 b_2[\rho b_1 b_2 + \sigma(U_1)(a_1 - a_3)b_2 + \sigma(U_2)(a_2 - a_3)b_1] + D(U_1)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)b_2 b_3 + \\ + D(U_2)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)b_1 b_3 + \rho_{12}\sigma_{12}(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)b_1 b_2. \quad (13)$$

Второе и третье уравнения системы (10) преобразуются соответственно в уравнения вида

$$q^2 + m_2 q + n_2 = 0, \quad (14)$$

$$q^2 + m_3 q + n_3 = 0, \quad (14')$$

в которых формулы для m_2, n_2 и m_3, n_3 получаются из формул (13) путем круговой замены индексов $1, 2, 3$ на индексы $2, 3, 1$ и $3, 1, 2$.

Вычитая уравнения (12) и (14), получим формулу

$$q = -\frac{n_1 - n_2}{m_1 - m_2} = (a_2 - b)(a_3 - b)R_1 + (a_1 - b)(a_3 - b)R_2 + (a_1 - b)(a_2 - b)R_3, \quad (15)$$

где $R_k = \dfrac{1}{1+\rho-\sigma}\left[(\rho(\sigma - 1 + \rho_k + \sigma_k) + \rho_k\sigma_k - \tau_k)\right]$, $\tau_1 = \rho_{23}\sigma_{23}$, $\tau_2 = \rho_{13}\sigma_{13}$, $\tau_3 = \rho_{12}\sigma_{12}$, причем

$$R_1 + R_2 + R_3 = -\rho. \quad (16)$$

Уравнение (14′) является следствием уравнений (12) и (14).

Подставив выражение для q из формулы (15) в (11) и использовав соотношение (16), получим квадратное уравнение для определения параметра b :

$$(R_1(a_2 - b)(a_3 - a_1) + R_2(a_2 - b)(a_3 - a_2))^2 + (\sigma(U_1)(a_1 - a_3)(a_2 - b) + \sigma(U_2)(a_2 - a_3)(a_1 - b))\times \\ \times(R_1(a_2 - b)(a_3 - a_1) + R_2(a_2 - b)(a_3 - a_2)) + D(U_1)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - b)(a_3 - b) + \\ + D(U_2)(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_1 - b)(a_3 - b) + \rho_{12}\sigma_{12}(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_1 - b)(a_2 - b) = 0. \quad (17)$$

Введем обозначения: $G_k = R_k^2 + \sigma(U_k)R_k + D(U_k) = (R_k + \rho_k)(R_k + \sigma_k)$, $F_k = G_1 + G_2 + G_3 - G_k$, $k = 1, 2, 3$, $g_1 = (a_1 - a_3)^2 G_1$, $g_2 = (a_2 - a_3)^2 G_2$, $f_3 = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)F_3$.

Величины G_k, F_k $(k = 1, 2, 3)$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{array}{lll} G_1 + G_2 + F_3 = G_3, & G_1 + G_3 + F_2 = G_2, & G_2 + G_3 + F_1 = G_1, \\ F_1 + F_2 = -2G_3, & F_1 + F_3 = -2G_2, & F_2 + F_3 = -2G_1. \end{array} \quad (18)$$

После преобразований уравнение (17) можно записать в виде

$$(g_1 + g_2 + f_3)b^2 - (2a_2 g_1 + 2a_1 g_2 + (a_1 + a_2)f_3)b + a_2^2 g_1 + a_1^2 g_2 + +a_1 a_2 f_3 = 0. \quad (19)$$

С помощью формул (18) уравнение (19) можно переписать в форме, симметричной относительно a_1, a_2, a_3.

Дискриминант квадратного уравнения (19) равен $D = (2a_2 g_1 + 2a_1 g_2 + (a_1 + a_2)f_3)^2 - 4(g_1 + g_2 + f_3)(a_2^2 g_1 + a_1^2 g_2 + a_1 a_2 f_3) = (a_1 - a_2)^2(f_3^2 - 4g_1 g_2) = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2(F_3^2 - 4G_1 G_2) = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2 M^2$, где $M^2 = F_3^2 - 4G_1G_2 = F_2^2 - 4G_1G_3 = F_1^2 - 4G_2G_3 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_1G_2 - 2G_1G_3 - 2G_2G_3 = -F_1F_2 - F_1F_3 - F_2F_2$. Таким образом,

$$b = \frac{a_2(a_1 - a_3)^2 G_1 + a_1(a_2 - a_3)^2 G_2 + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)((a_1 + a_2)F_3 + (a_2 - a_1)M)/2}{(a_1 - a_3)^2 G_1 + (a_2 - a_3)^2 G_2 + (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)F_3}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби можно представить в виде квадратного трехчлена относительно $\dfrac{(a_1 - a_3)}{(a_1 - a_2)}$, разложить на линейные множители и сократить. Тогда

$$b = \frac{2G_1 a_2(a_1 - a_3) + a_1(F_3 - M)(a_2 - a_3)}{2G_1(a_1 - a_3) + (F_3 - M)(a_2 - a_3)}, \quad (20)$$

$$a_1 - b = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\frac{2G_1}{G}, \quad a_2 - b = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\frac{F_3 - M}{G},$$

$$a_3 - b = -(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\frac{2G_1 + F_3 - M}{G} = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\frac{F_2 + M}{G},$$

где $G = 2G_1(a_1 - a_3) + (F_3 - M)(a_2 - a_3)$.

Из последних формул следует, что

$$\frac{a_1 - b}{a_2 - b} = -\frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3}\frac{2G_1}{F_3 - M}, \quad \frac{a_3 - b}{a_1 - b} = -\frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2}\frac{F_2 + M}{2G_1}, \quad \frac{a_2 - b}{a_3 - b} = -\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}\frac{F_3 - M}{F_2 + M}.$$

Поскольку $F_1^2 - M^2 = 4G_2G_3$, $F_2^2 - M^2 = 4G_1G_3$, $F_3^2 - M^2 = 4G_1G_2$ и $\dfrac{F_3 - M}{F_2 + M} = \dfrac{2G_2}{F_1 - M}$, то справедливы соотношения, связывающие точки a_1, a_2, a_3 и b :

$$\frac{a_1 - b}{a_2 - b} : \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = -\frac{2G_1}{F_3 - M} = -\frac{F_3 + M}{2G_2}; \quad \frac{a_3 - b}{a_1 - b} : \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2} = -\frac{2G_3}{F_2 - M} = -\frac{F_2 + M}{2G_1};$$

$$\frac{a_2 - b}{a_3 - b} : \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = -\frac{2G_2}{F_1 - M} = -\frac{F_1 + M}{2G_3}.$$

Покажем, что формулы (15) и (20) дают решения системы (7).

Предположим, что $\rho_1 \neq \sigma_1$, $\rho_2 \neq \sigma_2$, т.е. матрицы A_1^{-1} и $A_1A_2^{-1}$ приводятся к диагональной жордановой форме. Тогда первое уравнение системы (7) имеет вид

$$\frac{\lambda_{11}^{(1)}\lambda_{22}^{(1)}}{\lambda_{12}^{(1)}\lambda_{21}^{(1)}} = \frac{S_{11}^{(1)}S_{22}^{(1)}}{S_{12}^{(1)}S_{21}^{(1)}} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_{11}^{(1)}\lambda_{22}^{(1)}}{\lambda_{12}^{(1)}\lambda_{21}^{(1)}} = \frac{\alpha_{12} + \beta_{12} - \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_{12} + \beta_{12} - \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}. \tag{21}$$

Если матрицы A_1^{-1} и $A_1A_2^{-1}$ не приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду, то ни числитель, ни знаменатель дробей (21) не обращается в нуль. Кроме того, правая и левая части (21) не равны единице в силу невырожденности матриц Λ_1 и S_1.

При вычислении элементов матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij}^{(1)})$ воспользуемся формулой (6). Нетрудно проверить, что рекуррентные формулы для коэффициентов $c_n^{(1)}$, $d_n^{(1)}$ содержат в знаменателе только ρ_1 и σ_1, но не содержат чисел ρ_2, σ_2, ρ_3, σ_3, ρ, σ. Формулы для коэффициентов функций u_2, v_2 содержат в знаменателе ρ_2, σ_2, но не содержат ρ_1, σ_1, ρ_3, σ_3, ρ, σ и т.д. Поэтому функция $f(\rho_1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2, \rho_3, \sigma_3, \rho, \sigma) = \lambda_{11}^{(1)}\lambda_{22}^{(1)}/(\lambda_{12}^{(1)}\lambda_{21}^{(1)})$ является целой функцией относительно ρ_3, σ_3, ρ, σ, не принимает трех значений: 0, 1, ∞, а следовательно, не зависит от ρ_3, σ_3, ρ, σ.

Положим $\rho_3 = \sigma_3 = 0$. Тогда $\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho + \sigma = 1$ или $\rho_{12} + \sigma_{12} + \rho + \sigma = 1$. Возьмем $\rho = -\rho_{12}$, $\sigma = 1 - \sigma_{12}$ и найдем

$$R_3 = \frac{1}{1 + \rho - \sigma}(\rho(\sigma - 1) - \rho_{12}\sigma_{12} + \rho_3\sigma_3 + \rho(\sigma_3 + \rho_3)) = 0, \quad G_3 = (R_3 + \rho_3)(R_3 + \sigma_3) = 0,$$

$$F_3 = -(G_1 + G_2), \quad M^2 = F_3^2 - 2G_1G_2 = (G_1 - G_2)^2, \quad M = G_1 - G_2,$$

$$b = \frac{2G_1a_2(a_1 - a_3) + a_1(a_2 - a_3)(-G_1 - G_2 - G_1 + G_2)}{2G_1(a_1 - a_3) + (-G_1 - G_2 - G_1 + G_2)(a_2 - a_3)} =$$

$$= \frac{a_2(a_1 - a_3) - a_1(a_2 - a_3)}{(a_1 - a_3) - (a_2 - a_3)} = \frac{(a_1 - a_2)a_3}{a_1 - a_2} = a_3, \quad q = 0.$$

Уравнение (3) переходит в уравнение

$$y'' + \left(\frac{1 - \rho_1 - \sigma_1}{z - a_1} + \frac{1 - \rho_2 - \sigma_2}{z - a_2}\right)y' +$$

$$+ \left(\rho_{12}(\sigma_{12} - 1) + \frac{\rho_1\sigma_1(a_1 - a_2)}{z - a_1} + \frac{\rho_2\sigma_2(a_2 - a_1)}{z - a_2}\right)\frac{y}{(z - a_1)(z - a_2)} = 0,$$

решением которого являются гипергеометрические функции. Но для гипергеометрических функций равенство (21) выполняется тождественно. Схема доказательства не меняется, если хотя бы одна из матриц A_1^{-1}, $A_1A_2^{-1}$ приводится к треугольной жордановой форме.

Аналогично доказывается, что формулы (15) и (20) для q и b дают решение второго уравнения системы (7).

Таким образом, формулы (15) и (20) позволяют вычислить все параметры ДУ (3). Из решений этого уравнения составим матрицу

$$X(z) = \begin{pmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho z - \dfrac{q}{z-b} \\ 0 & \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}{z-b} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

где $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = D_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$ в окрестности точки $z = a_k$ $(k = \overline{1,4})$, $D_k = \tilde{D}_k T_k$, $T_k = \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \delta_k \end{pmatrix}$, если $\alpha_k \neq \beta_k$, $T_k = \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ \delta_k & \gamma_k \end{pmatrix}$, если $\alpha_k = \beta_k$, а элементы матриц T_k легко определяются из системы уравнений $T_k\Lambda_k = S_kT_{k+1}$ $(k = \overline{1,3})$.

Покажем, что матрица (22) является канонической матрицей задачи (1). Подставим разложение (5) в ДУ (3):

$$\prod_{k=1}^{3}(z-b+b-a_k)(2c_2+6c_3(z-b)+\ldots) + \prod_{k=1}^{3}(z-b+b-a_k)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1-\rho_k-\sigma_k}{z-a_k} - \frac{1}{z-b}\right)\times$$

$$\times(c_1+2c_2(z-b)+\ldots) + (z-b)\left(\frac{q}{(z-b)^2} + \frac{\tilde{q}}{z-b} + \rho\sigma + \sum_{k=1}^{3}\frac{\tilde{d}_k}{z-a_k}\right)(c_0+c_1(z-b)+\ldots) = 0.$$

Получим соотношение $-\prod_{k=1}^{3}(b-a_k)c_1 + qc_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = c_0q/\prod_{k=1}^{3}(b-a_k)$. После этого непосредственная проверка показывает, что функции второго столбца матрицы $X(z)$ регулярны в точке $z = b$ и $\det X(z) \neq 0$.

Кроме того, порядки p_1 и p_2 столбцов матрицы $X(z)$ соответственно равны

$$p_1 = \min\{\mathrm{Re}\,\rho, \mathrm{Re}\,\sigma\}, \quad p_2 = \max\{\mathrm{Re}\,\rho, \mathrm{Re}\,\sigma\} - 1,$$

т.е. $p_1 + p_2 = \mathrm{Re}\,(\rho + \sigma - 1)$, что совпадает с порядком определителя матрицы $X(z)$.

Следовательно, матрица $X(z)$ является канонической матрицей задачи (1) [3].

Литература

1. **Хвощинская Л.А.** Однородная краевая задача Римана для двух пар функций с кусочно-постоянной матрицей в случае четырех и большего числа особых точек. Мн., 1993. Деп. в ВИНИТИ, № 2400-В93.

2. **Хвощинская Л.А.** К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек // Тр. междунар. конф. "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление". Мн., 1996. С. 377–382.

3. **Литвинчук Г. С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения. М., 1977.

Белорусский аграрно-технический университет, г. Минск