*Труды Института математики. Минск. 2004. Том 12. № 1. С. 176–179*

УДК 517.926.4

# РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ПАРЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОТРЕЗКОВ

Л. А. Хвощинская

It is solved in closed form a generalized Riemann boundary value problem on two disjoint intervals.

Рассмотрим обобщенную задачу Римана нахождения функции $\varphi(z)$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-c_2, c_2]$ по краевому условию:

$$\begin{cases} \varphi^+(x) = a_1\varphi^-(x) + b_1\overline{\varphi^-(x)} + f_1(x), & -c_2 < x < -c_1, \\ \varphi^+(x) = a_2\varphi^-(x) + b_2\overline{\varphi^-(x)} + f_2(x), & c_1 < x < c_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_k$, $b_k$ $(k = 1, 2)$ — заданные постоянные, $a_k \neq 0$, $c_k \neq 0$, $f_k(x)$ — заданные функции.

С помощью новых неизвестных вектор-функций $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z)) = (\varphi(z), \overline{\varphi(\bar{z})})$, $\psi(\zeta) = \Phi(1/(z - c_2))$ приходим к краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и четырьмя особыми точками $d_1$, $d_2$, $d_3$, $\infty$ :

$$\begin{cases} \psi^+(t) = A_1\psi^-(t) + F_1(t), & d_1 < t < d_2, \\ \psi^+(t) = \psi^-(t), & d_2 < t < d_3, \\ \psi^+(t) = A_2\psi^-(t) + F_2(t), & d_3 < t < \infty, \end{cases} \tag{2}$$

где $A_k = \dfrac{1}{\bar{a}_k}\begin{pmatrix} |a_k|^2 - |b_k|^2 & b_k \\ -\bar{b}_k & 1 \end{pmatrix}$, $F_k(t) = \dfrac{1}{\bar{a}_k}\begin{pmatrix} \bar{a}_k f_k(t) - b_k\overline{f_k(t)} \\ -\overline{f_k(t)} \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$.

Решение задачи (2) будем искать в классе ограниченных функций. Построим каноническую матрицу однородной краевой задачи, соответствующей задаче (2):

$$\psi^+(t) = B_k\psi^-(t), \quad d_k < t < d_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \quad d_4 = \infty, \tag{3}$$

где $B_1 = A_1$, $B_2 = E$, $B_3 = A_2$. При решении задачи (3) воспользуемся схемой, изложенной в работах [1, 2].

Обозначим через $\alpha_k$, $\beta_k$ характеристические числа матриц $A_k$ и найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k, \quad 0 \le \operatorname{Re}\rho_k < 1, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k, \quad 0 \le \operatorname{Re}\sigma_k < 1, \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, мы знаем характеристические числа $\alpha_k^*$, $\beta_k^*$ $(k = \overline{1,4})$ следующих матриц: $B_1^{-1} = A_1^{-1}$ $(\alpha_1^* = 1/\alpha_1,\ \beta_1^* = 1/\beta_1)$, $B_1B_2^{-1} = A_1$ $(\alpha_2^* = \alpha_1,\ \beta_2^* = \beta_1)$, $B_2B_3^{-1} = A_2^{-1}$ $(\alpha_3^* = 1/\alpha_2,$ $\beta_3^* = 1/\beta_2)$, $B_3 = A_3$ $(\alpha_4^* = \alpha_2,\ \beta_4^* = \beta_2)$ и можем найти числа

$$\rho_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k^*, \quad 0 \le \operatorname{Re}\rho_k^* < 1, \quad \sigma_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k^*, \quad 0 \le \operatorname{Re}\sigma_k^* < 1, \quad k = \overline{1,4}.$$

---

Keywords: *generalized Riemann boundary value problem*
2000 Mathematics Subject Classification: 30E25

(Выбор ветви логарифмов обусловлен выбранным классом решений задачи). Далее мы находим характеристические числа $\alpha_{12}$, $\beta_{12}$ и $\alpha_{23}$, $\beta_{23}$ соответственно матриц $B_1^{-1}\cdot B_1B_2^{-1} = A_1^{-1}A_1 = E$ ($\alpha_{12} = \beta_{12} = 1$) и $B_1B_2^{-1}\cdot B_2B_3^{-1} = B_1B_3^{-1} = A_1A_2^{-1}$, а также числа $\rho_{12} = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{12}$, $\sigma_{12} = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_{12}$, $\omega_3^* = \rho_{12}\sigma_{12}$, $\rho_{23} = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\alpha_{23}$, $\sigma_{23} = \dfrac{1}{2\pi i}\ln\beta_{23}$, $\omega_1^* = \rho_{23}\sigma_{23}$, причем ветви логарифмов выбираются из условий

$$\rho_{12}+\sigma_{12} = \rho_1^*+\sigma_1^*+\rho_2^*+\sigma_2^*, \quad \rho_{23}+\sigma_{23} = \rho_2^*+\sigma_2^*+\rho_3^*+\sigma_3^*.$$

Суммарный индекс $\varkappa$ и частные индексы $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ задачи (3) определяются по формулам

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{4}(\rho_k^*+\sigma_k^*), \quad \varkappa_1 = \left[\frac{1+\varkappa}{2}\right], \quad \varkappa_2 = \left[\frac{\varkappa}{2}\right],$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. После этого находим числа

$$\rho^* = \rho_4^*+\varkappa_2+1 = \rho_2+\varkappa_2+1, \quad \sigma^* = \sigma_4^*+\varkappa_1 = \sigma_2+\varkappa_1,$$

(считаем, что $\operatorname{Re}\rho_2 \le \operatorname{Re}\sigma_2$).

Непосредственные вычисления показывают, что необходимо рассмотреть 4 различных случая, представленные в таблице:

| | $\rho_1^*$ | $\sigma_1^*$ | $\rho_2^*$ | $\sigma_2^*$ | $\rho_3^*$ | $\sigma_3^*$ | $\rho_4^*$ | $\sigma_4^*$ | $\varkappa$ | $\rho^*$ | $\sigma^*$ | $\rho_{12}$ | $\sigma_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\rho_1$ | $-\sigma_1$ | $\rho_1$ | $\sigma_1$ | $-\rho_2$ | $-\sigma_2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2$ | 0 | $\rho_2+1$ | $\sigma_2$ | 0 | 0 |
| 2 | $1-\rho_1$ | $1-\sigma_1$ | $\rho_1$ | $\sigma_1$ | $-\rho_2$ | $-\sigma_2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2$ | $-2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2-1$ | 1 | 1 |
| 3 | $-\rho_1$ | $-\sigma_1$ | $\rho_1$ | $\sigma_1$ | $1-\rho_2$ | $1-\sigma_2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2$ | $-2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2-1$ | 0 | 0 |
| 4 | $1-\rho_1$ | $1-\sigma_1$ | $\rho_1$ | $\sigma_1$ | $1-\rho_2$ | $1-\sigma_2$ | $\rho_2$ | $\sigma_2$ | $-4$ | $\rho_2-1$ | $\sigma_2-2$ | 1 | 1 |

В [1] было показано, что решение задачи (3) выражается через решения дифференциального уравнения класса Фукса, которое после некоторых преобразований может быть записано в виде

$$y'' + \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1-\rho_k^*-\sigma_k^*}{\zeta-d_k} - \frac{1}{\zeta-b}\right)y' + \frac{1}{\prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)}\left(\frac{q^*}{(\zeta-b)^2} + \sum_{k=1}^{3}\frac{(\rho_k^*\sigma_k^*-\omega_k^*)(d_k-b)}{z-b} + \right.$$
$$\left. + \rho^*\sigma^* + \sum_{k=1}^{3}\rho_k^*\sigma_k^*\prod_{j=1,\ j\neq k}^{3}\frac{d_k-d_j}{(d_k-b)(\zeta-d_k)}\right)y = 0, \tag{4}$$

параметры которого $q^*$, $b$ и $\omega_k^*$ ($k=\overline{1,3}$) найдены в замкнутой форме.

Если в уравнении (4) сделать подстановку $y = \prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)^{\rho_k^*}w$, то оно преобразуется в уравнение

$$w'' + \left(\sum_{k=1}^{3}\frac{1+\rho_k^*-\sigma_k^*}{\zeta-d_k} - \frac{1}{\zeta-b}\right)w' + \frac{1}{\prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)}\left(\frac{q}{(\zeta-b)^2} + \sum_{k=1}^{3}\frac{w_k(b-d_k)}{z-b} + \rho\sigma\right)w = 0,$$

где $q = q^* - \sum_{k=1}^{3}\rho_k^*(\zeta-d_k)\prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)^{-1}$, $\rho = \rho^*+\rho_1^*+\rho_2^*+\rho_3^*$, $\sigma = \sigma^*+\rho_1^*+\rho_2^*+\rho_3^*$, $w_k = w_k^* - (\rho_1^*+\rho_2^*+\rho_3^*-\rho_k)(\sigma_1^*+\sigma_2^*+\sigma_3^*-\sigma_k^*)$, причем выполняется равенство

$$w_1+w_2+w_3 = \rho(\sigma-1).$$

Выбирая значения параметров из таблицы, делаем вывод, что во всех четырех случаях

$$\rho_1^*-\sigma_1^* = \sigma_1-\rho_1, \quad \rho_2^*-\sigma_2^* = \rho_1-\sigma_1, \quad \rho_3^*-\sigma_3^* = \rho_2-\sigma_2, \quad \rho = 1, \quad \sigma = \sigma_2-\rho_2,$$

$$w_3 = 0, \quad w_1 + w_2 = \sigma_2 - \rho_2 - 1.$$

Далее по формулам

$$R_k = \frac{1}{\sigma - \rho - 1}\left[\rho\left(\rho + \sum_{k=1}^{3}(\sigma_i^* - \rho_i^*)\right) + \rho_k^* - \sigma_k^* + w_k\right], \quad G_k = R_k(R_k + \rho_k^* - \sigma_k^*), \quad k = \overline{1,3},$$

получаем числа

$$R_1 = \frac{1}{\sigma_2 - \rho_2 - 2}(1 + \sigma_1 - \rho_1 + \rho_2 - \sigma_2 + w_1),$$

$$R_2 = \frac{1 + \rho_1 - \sigma_1 + \rho_2 - \sigma_2 + w_2}{\sigma_2 - \rho_2 - 2} = \frac{1 + \rho_1 - \sigma_1 + \rho_2 - \sigma_2 + \sigma_2 - \rho_2 - 1 - w_1}{\sigma_2 - \rho_2 - 2} = \frac{\rho_1 - \sigma_1 - w_1}{\sigma_2 - \rho_2 - 2},$$

$$R_3 = \frac{1}{\sigma_2 - \rho_2 - 2},$$

$$G_1 = R_1(R_1 - \rho_1 + \sigma_1) = \frac{1}{(2 + \rho_2 - \sigma_2)^2}(1 + \sigma_1 - \rho_1 + \rho_2 - \sigma_2 + w_1)[1 + \rho_2 - \sigma_2 + (\sigma_1 - \rho_1)(\sigma_2 - \rho_2 - 1) + w_1],$$

$$G_2 = \frac{1}{(2 + \rho_2 - \sigma_2)^2}(\sigma_1 - \rho_1 + w_1)[(\rho_1 - \sigma_1)(1 + \rho_2 - \sigma_2) + w_1],$$

$$G_3 = \frac{1}{(2 + \rho_2 - \sigma_2)^2}(1 + \rho_2 - \sigma_2).$$

Обозначив $r = 2 + \rho_2 - \sigma_2$, $r_1 = w_1 + \sigma_1 - \rho_1$, $r_2 = w_1 + (\rho_1 - \sigma_1)(1 + \rho_2 - \sigma_2)$, $r_3 = 1 + \rho_2 - \sigma_2$, можем записать последние формулы в виде

$$R_1 = -\frac{r_1 + r_3}{r}, \quad R_2 = \frac{r_2}{r}, \quad R_3 = -\frac{1}{r}, \quad G_1 = \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{r^2}, \quad G_2 = \frac{r_1 r_2}{r^2}, \quad G_3 = \frac{r_3^2}{r^2}.$$

Далее находим числа

$$M^2 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_1G_2 - 2G_1G_3 - 2G_2G_3 = (G_1 - G_2 - G_3)^2 - 4G_2G_3 =$$

$$= \frac{1}{r^4}[(r_1 + r_3)(r_2 + r_3) - r_1r_2 - r_3^2]^2 - \frac{4}{r^4}r_1r_2r_3^2 = \frac{r_3^2}{r^4}[(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2] = \frac{r_3^2}{r^4}(r_1 - r_2)^2,$$

$$F_3 = G_3 - G_1 - G_2 = \frac{1}{r^2}[r_3^2 - (r_1 + r_3)(r_2 + r_3) - r_1r_2] = -\frac{1}{r^2}[r_1r_2 + r_3(r_1 + r_2)],$$

$$F_3 - M = -\frac{1}{r^2}(2r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + \frac{r_3}{r^2}(r_1 - r_2) = -\frac{2r_2}{r^2}(r_1 + r_3),$$

где для определенности выбрано одно из значений $\sqrt{M^2}$.

Точку $b$ найдем по формуле

$$b = \frac{2G_1d_2(d_1 - d_3) + (F_3 - M)d_1(d_2 - d_3)}{2G_1(d_1 - d_3) + (F_3 - M)(d_2 - d_3)} = \frac{r_1d_2(d_1 - d_3) - (r_1 + r_3)d_1(d_2 - d_3)}{r_1(d_1 - d_3) - (r_1 + r_3)(d_2 - d_3)}$$

или

$$b = -\frac{r_3d_1d_2 - (r_1 + r_3)d_1d_3 + r_1d_2d_3}{r_1d_1 - (r_1 + r_3)d_2 + r_3d_3}, \tag{4}$$

при этом

$$d_1 - b = \frac{r_1}{r_4}(d_1 - d_2)(d_1 - d_3), \quad d_2 - b = \frac{r_1 + r_3}{r_4}(d_1 - d_2)(d_2 - d_3), \quad d_3 - b = \frac{r_3}{r_4}(d_3 - d_1)(d_3 - d_2),$$

где $r_4 = r_1d_1 - (r_1 + r_3)d_2 + r_3d_3$.

Теперь мы можем найти акцессорный параметр $q$ :

$$q = R_1(d_2 - b)(d_3 - b) + R_2(d_1 - b)(d_3 - b) + R_3(d_1 - b)(d_2 - b) =$$

$$= \frac{1}{rr_4^2}(d_2-d_1)(d_3-d_1)(d_3-d_2)\left[(r_1+r_3)^2r_3(d_2-d_3)+r_1^2r_3(d_3-d_1)+r_1(r_1+r_3)(d_1-d_2)\right]. \quad (5)$$

Таким образом, решение краевой задачи (3) выражается через решения дифференциального уравнения вида

$$w'' + \left(\frac{1+\sigma_1-\rho_1}{\zeta-d_1} + \frac{1+\rho_1-\sigma_1}{\zeta-d_2} + \frac{1+\rho_2-\sigma_2}{\zeta-d_3} - \frac{1}{\zeta-b}\right)w' +$$

$$+\frac{1}{\prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)}\left(\frac{q}{(\zeta-b)^2} + \frac{w_1(b-d_1)+w_2(b-d_2)}{\zeta-b} + \sigma_2-\rho_2\right)w = 0, \quad (6)$$

параметры $b$ и $q$ которого определяются по формулам (4) и (5). В окрестности каждой особой точки $d_k$ ($k=\overline{1,4}$, $d_4=\infty$) уравнение (6) имеет 2 линейно независимых решения $u_k$, $v_k$ [2]. Эти решения представляют собой ряды, коэффициенты которых определяются из рекуррентных соотношений.

Каноническая матрица $X(\zeta)$ задачи (3) в окрестности каждой особой точки $d_k$ ($k=\overline{1,4}$) строится по формуле

$$X(z) = \prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)^{\rho_k^*}D_k\begin{pmatrix}u_k & u_k'\\ v_k & v_k'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \zeta-q/(\zeta-b)\\ 0 & \prod_{k=1}^{3}(\zeta-d_k)/(\zeta-b)\end{pmatrix},$$

где $D_k$ ($k=\overline{1,4}$) — некоторые фиксированные матрицы, приводящие матрицы $B_{k-1}B_k^{-1}$ ($B_0 = B_2 = B_4 = E$) к жордановой форме и связанные между собой определенными соотношениями [1].

Поскольку частные индексы $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ удовлетворяют неравенствам

$$-2 \le \varkappa_1 \le 0, \quad -2 \le \varkappa_2 \le 0,$$

то неоднородная краевая задача (2) безусловно разрешима при $\varkappa=0$, а для ее разрешимости при $\varkappa=-2$ и $\varkappa=-4$ требуется выполнение соответственно одного или двух матричных условий разрешимости [3]. При их выполнении решение задачи (2) строится по формуле

$$\psi(\zeta) = X(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{d_1}^{d_2}[X^+(t)]^{-1}F_1(t)\frac{dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{d_3}^{\infty}[X^+(t)]^{-1}F_2(t)\frac{dt}{t-\zeta}\right].$$

Возвращаясь к функции $\Phi(z)=\psi(\zeta^{-1}+c_2)$, решение исходной задачи (1) находим по формуле $\varphi(z)=\Phi_1(z)+\overline{\Phi_2(\bar z)}$.

## Литература


1. **Хвощинская Л.А.** К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек // Тр. Междунар. конф. "Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление". Мн., 1996. С. 377–382.

2. **Хвощинская Л.А.** Нахождение акцессорных параметров при решении некоторых краевых задач // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 5. С. 150–160.

3. **Литвинчук Г.С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения. М., 1977.


*Белорусский аграрно-технический университет, г. Минск, Беларусь*