УДК 517

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л.А. Хвощинская*, Т.Н. Жоровина**

** Белорусский государственный аграрный технический университет, Беларусь, Минск, ludmila.ark@gmail.com*

*** Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, zhorovina@bsu.by*

Аннотация: Смешанная задача упругости сведена к неоднородной краевой задаче Римана для двух функций с кусочно-постоянной матрицей и шестью особыми точками, для решения которой применен «метод логарифмирования». Построена каноническая матрица задачи, которая позволила найти решение исходной задачи в замкнутой форме.

Ключевые слова: проблема Римана, группа монодромии, каноническая матрица. «метод логарифмирования».

ABOUT ONE METHOD OF SOLVING SOME PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

L.A. Khvostchinskaya*, T.N. Zhorovina**

**Belarusian State Agrarian Technical University, Republic of Belarus, Minsk, ludmila.ark@gmail.com*

***Belarusian State University, Republic of Belarus, Minsk, zhorovina@bsu.by*

Annotation: The mixed problem of elasticity is reduced to the nonhomogeneous boundary value problem of Riemann for two functions with a piecewise constant matrix and six singular points, for the solution of which the “logarithm method” was applied. The canonical matrix of the problem was constructed, which allowed finding the solution of the original problem in closed form.

Keywords: Riemann problem, monodromy group, canonical matrix, “logarithm method”.

Для решения задач теории упругости применяются различные методы, начиная с работ Гука, Бернулли, Эйлера, Навье и др. По мере применения более сложных материалов появлялись и другие методы решения практических задач, один из которых был предложен Н.И.Мусхелишвили [1]. Метод основан на применении теории конформных отображений и интегралов Коши, и с его помощью было дано решение многих задач на плоскости. Покажем, как применить этот метод к решению других более сложных задач [2, 3].

Рассматривается смешанная задача теории упругости, которая после отображения круга на верхнюю полуплоскаость записывается в виде

$$\operatorname{Im} F_1(x) = -\operatorname{Re} F_2(x),\ x \in (-\infty, -\pi/2) \cup (-\psi, 0), \tag{1}$$

$$\operatorname{Im} F_1(x) = \operatorname{Re} F_2(x),\ x \in (0, \psi) \cup (\pi/2, +\infty), \tag{2}$$

$$\operatorname{Re} F_1(x) = f_1(x),\ x \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{3}$$

$$\operatorname{Im} F_2(x) = f_2(x),\ x \in (-\infty, -\psi) \cup (\psi, +\infty). \tag{4}$$

Необходимо определить функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на действительную ось и удовлетворяющие условиям (1)-(4) (рис. 1). Решение задачи ищем в классе функций, ограниченных или почти ограниченных при $z \to 0, z \to \pm\pi/2, z \to \pm\psi, z \to \pm\infty$.

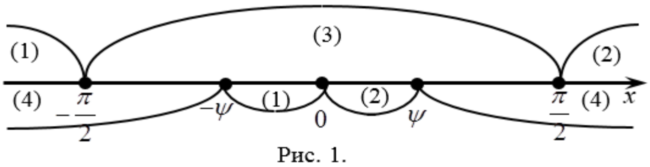

Рис. 1.

С помощью формул $\operatorname{Re} F = \frac{1}{2}(F + \bar{F})$, $\operatorname{Im} F = \frac{1}{2i}(F - \bar{F})$ запишем 6 систем уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x)-\bar F_1(x)=-iF_2(x)-i\bar F_2(x), \\ F_2(x)-\bar F_2(x)=2if_2(x), \end{cases} x\in l_1, \qquad \begin{cases} F_1(x)+\bar F_1(x)=2f_1(x), \\ F_2(x)-\bar F_2(x)=2if_2(x), \end{cases} x\in l_2,$$

$$\begin{cases} F_1(x)+\bar F_1(x)=2f_1(x), \\ F_1(x)-\bar F_1(x)=-iF_2(x)-i\bar F_2(x), \end{cases} x\in l_3, \qquad \begin{cases} F_1(x)+\bar F_1(x)=2f_1(x), \\ F_1(x)-\bar F_1(x)=iF_2(x)+i\bar F_2(x), \end{cases} x\in l_4,$$

$$\begin{cases} F_1(x)+\bar F_1(x)=2f_1(x), \\ F_2(x)-\bar F_2(x)=2if_2(x), \end{cases} x\in l_5, \qquad \begin{cases} F_1(x)-\bar F_1(x)=-iF_2(x)-i\bar F_2(x), \\ F_2(x)-\bar F_2(x)=2if_2(x), \end{cases} x\in l_6,$$

где $l_1=\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right),\ l_2=\left(-\frac{\pi}{2},-\psi\right),\ l_3=(-\psi,0),\ l_4=(0,\psi),\ l_5=\left(\psi,\frac{\pi}{2}\right),\ l_6=\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right).$

Введем 2 новые неизвестные вектор-функции $\Phi^+(z)=\left(F_1(z),\overline{F_2(\bar z)}\right)$, $\Phi^-=\left(\overline{F_1(\bar z)},F_2(z)\right)$ и перепишем систему в виде краевой задачи Римана с кусочно-постоянной матрицей и 6-ю особыми точками:

$$\Phi^+(x)=A_k\Phi^-(x)+G_k(x),\quad x\in l_k,\quad k=1,...,6, \tag{5}$$

где $A_1=\begin{pmatrix}1 & -2i\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_2=A_5=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2i & -1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2i & -1\end{pmatrix}, A_6=\begin{pmatrix}1 & 2i\\ 0 & 1\end{pmatrix},$

$G_1(x)=-2f_1(x)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\quad G_2(x)=G_5(x)=2\begin{pmatrix}f_1(x)\\ -if_2(x)\end{pmatrix},\quad G_3(x)=2f_1(x)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\quad G_4(x)=2f_1(x)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix},$

$G_6(x)=2f_2(x)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}.$

Произведем замену переменной по формулам $\varsigma=\frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}\left(z=\frac{\pi}{2}\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}\right),\ t=\frac{x-\pi/2}{x+\pi/2}\ \left(x=\frac{\pi}{2}\frac{1+t}{1-t}\right)$ и переведем точки $\pm\pi/2, \pm\psi, 0, \infty$

точки $\quad -\psi\to\frac{-\psi-\pi/2}{-\psi+\pi/2}=:a,\ 0\to -1, \psi\to\frac{\psi-\pi/2}{\psi+\pi/2}=\frac{1}{a}:=a', \frac{\pi}{2}\to 0, \infty\to 1, -\frac{\pi}{2}\to\infty$

С помощью новой неизвестной функции $\Psi(\varsigma)=\begin{cases}\Phi^+(z), \text{ если Im z>0},\\ A_2\Phi^-(z), \text{ если Im z<0},\end{cases}$

ликвидируем «скачок» на интервале $(-\infty,a)$ комплексной плоскости ς. Функция $\Psi(\varsigma)$ будет аналитической в плоскости с разрезом вдоль луча $(a,+\infty)$, а краевое условие (5) перепишется в виде

$$\Psi^+(t)=B_k\Psi^-(t)+G_k(t),\ \ a_k<t<a_{k+1},\ \ k=1,\cdots,5, \tag{6}$$

где $a_1=a,\ a_2=-1,\ a_3=1/a=a',\ a_4=0,\ a_5=1,\ a_6=\infty,$

$B_1=A_3A_2^{-1},\ B_2=A_4A_2^{-1},\ B_3=A_5A_2^{-1}=E,\ B_4=A_6A_2^{-1},\ B_5=A_1A_2^{-1}.$

Для того, чтобы решить неоднородную краевую задачу (6), необходимо построить каноническую матрицу $X(\varsigma)$ [4], которая является решением соответствующей однородной краевой задачи, т.е.

$$\mathrm{X}^+(t)=B_k\mathrm{X}^-(t),\ \ a_k<t<a_{k+1},\ \ k=1,\cdots,5. \tag{7}$$

Каноническая матрица $X(\varsigma)$ задачи (7) является решением системы дифференциальных уравнений класса Фукса с 6-ю особыми точками $a_1,\ldots,\ a_6=\infty$

$$\frac{dX}{d\varsigma} = X\sum_{k=1}^{5}\frac{U_k}{\varsigma - a_k}, \tag{8}$$

причем дифференциальные матрицы U_k подобны матрицам $W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln B_{k-1}B_k^{-1}$, $k = 1,...,5$, $B_0 = B_7 = E$. Матрицы $V_k = B_{k-1}B_k^{-1}$, $k = 1,...,6$, $B_0 = B_7 = E$, образуют группу монодромии дифференциального уравнения (8).

Найдем дифференциальные матрицы U_k системы (8) «методом логарифмирования произведения матриц» второго порядка [5]. Отметим, что для решения краевой задачи с шестью особыми точками этот метод будет применен впервые. Ниже изложим суть этого метода.

Пусть V_1, V_2 – постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка, $V_3 = V_1V_2$. Равенство $\ln(V_1V_2) = \ln V_1 + \ln V_2$ справедливо лишь для перестановочных матриц. Обозначим α_k, β_k –характеристические числа матриц V_k, $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ - характеристические числа матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1, 2, 3$. Зафиксируем какие-либо ветви логарифмов ρ_1, σ_1, ρ_2, σ_2 так, чтобы $\left|\mathrm{Re}(\rho_k - \sigma_k)\right| < 1$, $k = 1, 2$. Тогда ветви логарифмов для ρ_3, σ_3 должны быть согласованы и выбираются из условия $\rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3$.

Если $\rho_3 \neq \sigma_3$, то матрица $S = \begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$ единственным образом с точностью до преобразования подобия с помощью диагональной матрицы представима в виде суммы двух матриц $S = S_1 + S_2$, где $S_k \sim W_k$, $k = 1, 2$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s_1 & d\\ c & s_1'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s_2 & -d\\ -c & s_2'\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $s_1 = \dfrac{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \sigma_2)}{\sigma_3 - \rho_3}$, $s_2 = \dfrac{\rho_2\sigma_2 + (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \sigma_1)}{\sigma_3 - \rho_3}$,

$s_1' = \dfrac{(\sigma_3 - \rho_2)(\sigma_3 - \sigma_2) - \rho_1\sigma_1}{\sigma_3 - \rho_3}$, $s_2' = \dfrac{(\sigma_3 - \rho_1)(\sigma_3 - \sigma_1) - \rho_2\sigma_2}{\sigma_3 - \rho_3}$, $cd = s_1s_1' - \rho_1\sigma_1 = s_2s_2' - \rho_2\sigma_2$.

Если $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2, \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$, т.е. матрицы V_1, V_2 приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду, то $cd = 0$ и имеют место более простые представления матрицы S:

$$\begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_1 & c\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\rho_2 & -c\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix}\rho_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_1 & 0\\ c & \sigma_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\rho_2 & 0\\ -c & \sigma_2\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы $V_k\,(k = 1,...,6)$ группы монодромии, их характеристические числа α_k, β_k и характеристические числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, выбирая ветви логарифмов таким образом, чтобы решение было ограниченным в точках a_k $(k=1,\dots,5)$, а ветви ρ_6 и σ_6 удовлетворяли условию $\sum_{k=1}^{5}(\rho_k+\sigma_k)+\rho_6+\sigma_6=0$:

$$V_1=B_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2i&-1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_1=1, & \beta_1=-1,\\ \rho_1=0, & \sigma_1=1/2,\end{matrix}\qquad V_2=B_1B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\4i&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_2=\beta_2=1,\\ \rho_2=\sigma_2=0,\end{matrix}$$

$$V_3=B_2B_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2i&-1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_3=1,\beta_3=-1,\\ \rho_3=0,\sigma_3=1/2,\end{matrix}\qquad V_4=B_3B_4^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2i\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_4=-1,\beta_4=1,\\ \rho_4=1/2,\sigma_4=0,\end{matrix}$$

$$V_5=B_4B_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&4i\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_5=\beta_5=1,\\ \rho_5=\sigma_5=0,\end{matrix}\qquad V_6=B_5=\begin{pmatrix}-1&-2i\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\alpha_6=-1, & \beta_6=1,\\ \rho_6=-1/2,\sigma_6=-1.\end{matrix}$$

Матрица $-W_6=\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_6^{-1}$ приводится к диагональной жордановой форме $S=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}$. Представим S в виде суммы 5-ти матриц $S=\sum_{k=1}^{5}S_k=\sum_{k=1}^{5}\begin{pmatrix}s_k&d_k\\c_k&s_k'\end{pmatrix}$,

где $S_k\sim W_k$, $k=1,\dots,5$. Для этого запишем произведение матриц $V_6^{-1}=V_1\cdot V_2\cdot V_3\cdot V_4\cdot V_5$ в виде произведений двух матриц следующим образом:

$$V_6^{-1}=V_1\cdot(V_2\cdot V_3\cdot V_4\cdot V_5)=V_1\cdot V_{2345},$$

$$V_6^{-1}=(V_1\cdot V_2)\cdot(V_3\cdot V_4\cdot V_5)=V_{12}\cdot V_{345}, \tag{10}$$

$$V_6^{-1}=(V_1\cdot V_2\cdot V_3)\cdot(V_4\cdot V_5)=V_{123}\cdot V_{45},$$

$$V_6^{-1}=(V_1\cdot V_2\cdot V_3\cdot V_4)\cdot V_5=V_{1234}\cdot V_5.$$

Применяя для каждого из произведений формулу (9), мы сможем записать несколько представлений матрицы S в виде суммы двух матриц:

$$S=S_1+S_{2345}=S_{12}+S_{345}=S_{123}+S_{45}=S_{1234}+S_5, \tag{11}$$

где $S_{1\dots i}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{1\dots i}$, $S_{j\dots 5}=\dfrac{1}{2\pi i}\ln V_{j\dots 5}$, $i=1,\dots,4,\ j=2,..,5.$

Найдем характеристические числа и их логарифмы матриц

$$V_{12}=B_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2i&-1\end{pmatrix},\quad V_{123}=B_3^{-1}=E,\quad V_{1234}=B_4^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2i\\0&1\end{pmatrix},\quad V_{45}=B_3B_5^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2i\\0&1\end{pmatrix},\quad V_{345}=B_2B_5^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2i\\2i&-5\end{pmatrix},$$

$$V_{2345}=B_1B_5^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2i\\-2i&3\end{pmatrix},\qquad \begin{matrix}\alpha_{12}=1, & \beta_{12}=-1, & \alpha_{1234}=-1, & \beta_{1234}=1, & \alpha_{45}=-1, & \beta_{45}=-1,\\ \rho_{12}=0, & \sigma_{12}=1/2, & \rho_{1234}=1/2, & \sigma_{1234}=1, & \rho_{12}=1/2, & \sigma_{12}=0,\end{matrix}$$

$$\alpha_{345}=-(\sqrt{2}+1)^2,\quad \beta_{345}=-(\sqrt{2}-1)^2,\ \alpha_{2345}=1,\ \beta_{2345}=1,$$

$$\rho_{345}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}+1),\quad \sigma_{345}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\ln(\sqrt{2}+1),\ \rho_{2345}=0,\ \sigma_{2345}=1,$$

где ветви логарифмов выбирались из условий $\rho_{12}+\sigma_{12}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2=1/2$, $\rho_{123}+\sigma_{123}=\rho_1+\sigma_1+\rho_2+\sigma_2+\rho_3+\sigma_3=1$ и т.д. Применим к произведениям матриц (10) формулы (9), в которых полагаем $\rho_3=1/2,\sigma_3=1$, а числа $\rho_1,\sigma_1,\rho_2,\sigma_2$ заменяем на соответствующие перемножаемым матрицам. Таким образом находим

$s_1=\dfrac{\rho_1\sigma_1-(0.5-\rho_{2345})(0.5-\sigma_{2345})}{1-0.5}=\dfrac{1}{2}$, $s_1'=\rho_1+\sigma_1-s_1=(0+0.5)-0.5=0$, $c_1\cdot d_1=s_1\cdot s_1'-\rho_1\cdot\sigma_1=0\Rightarrow d_1=0$, так как матрица B_1-нижнетреугольная, $S_1=\begin{pmatrix}1/2&0\\c_1&0\end{pmatrix}$, $c_1:=c/2$-произвольная постоянная.

Аналогично находим

$$s_{12}=2\left(\rho_{12}\sigma_{12}-(0.5-\rho_{345})(0.5-\sigma_{345})\right)=-2\left(0.25-0.5(\rho_{345}+\sigma_{345})+\rho_{345}\cdot\sigma_{345}\right)=-2(\rho_{345}\cdot\sigma_{345}-0.25)=(1-\tau)/2,$$

где введено обозначение $\tau = 4\rho_{345}\cdot\sigma_{345} = 1+\frac{4}{\pi^2}\ln^2(\sqrt{2}+1)$,

$s'_{12} = 0.5 - s_{12} = \tau/2,\quad S_{12} = \begin{pmatrix} (1-\tau)/2 & d_{12} \\ c_{12} & \tau/2 \end{pmatrix},\quad c_{12}\cdot d_{12} = s_{12}\cdot s'_{12} - \rho_{12}\cdot\sigma_{12} = \tau(1-\tau)/4$.

Из (11) следует, что $S_2 = S_{12} - S_1 = S_{2345} - S_{345} = \begin{pmatrix} -\tau/2 & d_{12} \\ c_{12}-c_1 & \tau/2 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det S_2 = 0,$ то $\tau^2/4 + (c_{12}-c_1)\cdot d_{12} = 0 \Rightarrow c_1\cdot d_{12} = \tau/4 \Rightarrow d_{12} = \tau/2c$ и $S_2 = \begin{pmatrix} -\tau/2 & \tau/2c \\ -\tau c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}$,

$S_{12} = \begin{pmatrix} (1-\tau)/2 & \tau/2c \\ (1-\tau)c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}$. Далее находим $s_{123} = 2\left(\rho_{123}\sigma_{123} - (0.5-\rho_{45})(0.5-\sigma_{45})\right) = 0,\ s'_{123} = 1-0 = 1,$

$S_{123} = \begin{pmatrix} 0 & d_{123} \\ c_{123} & 1 \end{pmatrix},\quad \det S_{123} = 0 \Rightarrow c_{123}\cdot d_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 0,\ S_3 = S_{123} - S_{12} = \begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & d_{123}-\tau/2c \\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}$.

Так как $\det S_3 = 0,$ то $1-\frac{\tau}{2} - c(d_{123} - \frac{\tau}{2c}) = 0 \Rightarrow c\cdot d_{123} = 1$ и $S_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$S_3 = \begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & (1-\tau/2)c \\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}$. $s_{1234} = 2\left(\rho_{1234}\sigma_{1234} - (0.5-\rho_5)(0.5-\sigma_5)\right) = 0.5,$

$s'_{1234} = 1.5 - 0.5 = 1,\ S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & d_{1234} \\ c_{1234} & 1 \end{pmatrix},\quad \det S_{1234} = 0.5 \Rightarrow c_{1234}\cdot d_{1234} = 0 \Rightarrow d_{1234} = 0$ и

$S_4 = S_{1234} - S_{123} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ c_{1234} & 0 \end{pmatrix},\quad \det S_4 = 0 \Rightarrow c_{1234} = 0$. Следовательно,

$S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а матрицу S_5 можно найти по формуле $S_5 = S - S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицы $S_k\ (k=1,...,5)$ являются дифференциальными матрицами системы (8), которая принимает вид

$$\frac{dX}{d\varsigma} = X\left[\frac{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}}{\varsigma-a} + \frac{\begin{pmatrix} -\tau/2 & \tau/2c \\ -\tau c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}}{\varsigma+1} + \frac{\begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & (1-\tau/2)/c \\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}}{\varsigma-a'} + \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\varsigma}\right] \tag{12}$$

где c – произвольная постоянная.

Пусть $X(\varsigma) = \begin{pmatrix} u(\varsigma) & u_1(\varsigma) \\ v(\varsigma) & v_1(\varsigma) \end{pmatrix}$. Подставив эту матрицу в уравнение (12), получим систему дифференциальных уравнений, связывающую $u(\varsigma)$ и $u_1(\varsigma)$:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a} - \frac{\tau}{\varsigma+1} + \frac{\tau-1}{\varsigma-a'} + \frac{1}{\varsigma}\right)u + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a} - \frac{\tau}{\varsigma+1} + \frac{\tau-1}{\varsigma-a'}\right)u_1, \\ u'_1 &= \frac{1}{2c}\left(\frac{\tau}{\varsigma+1} + \frac{2-\tau}{\varsigma-a'} - \frac{2}{\varsigma}\right)u + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\varsigma+1} + \frac{2-\tau}{\varsigma-a'}\right)u_1 \end{aligned} \tag{13}$$

Функции $v(z)$ и $v_1(z)$ также являются решениями системы (12). Выражая из первого уравнения системы (14) функцию

$u_1 = \frac{2(\varsigma-a)(\varsigma+1)(\varsigma-a')}{c(1+a')(\varsigma-b)}\left[u' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a} - \frac{\tau}{\varsigma+1} + \frac{\tau-1}{\varsigma-a'} + \frac{1}{\varsigma}\right)u\right]$, где $b := \frac{\tau a - a + 1}{\tau + a - 1}$,

и подставляя во второе уравнение, получим дифференциальное уравнение второго порядка, фундаментальной системой решений которой являются функции $u_1(\varsigma)$ и $v(\varsigma)$.

Это дифференциальное уравнение класса Фукса с шестью особыми точками $a, -1, a', 0, 1, \infty$:

$$u'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma - a} + \frac{2}{\varsigma + 1} + \frac{1}{\varsigma - a'} - \frac{1}{\varsigma} - \frac{2}{\varsigma - b} \right) u' + \frac{1}{2\varsigma}\left(\frac{1+\tau/2}{\varsigma+1} - \frac{1-\tau/2}{\varsigma - a'} + \frac{1}{\varsigma} + \frac{1}{\varsigma - b} \right) u = 0. \quad (14)$$

Используя символ Римана, совершим преобразования уравнения (14)

$$P\begin{pmatrix} a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \sqrt{\varsigma} P\begin{pmatrix} a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

и возвратимся к исходной переменной $z = \frac{\pi}{2}\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}$. Функция $y = \sqrt{\frac{z+\pi/2}{z-\pi/2}}u$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$y'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+\psi} + \frac{1}{z-\psi} - \frac{1}{z+\pi/2} - \frac{1}{z-\pi/2} + \frac{2}{z} - \frac{2}{z-b} \right) y' + \frac{(\tau-2)z + \psi\tau}{2z(z^2-\psi^2)(z^2-\pi^2/4)} y = 0. \quad (15)$$

Фундаментальная система решений $\tilde{u}_k(z)$ и $\tilde{v}_k(z)$ этого уравнения в окрестности каждой особой точки $b_1 = -\pi/2, b_2 = -\psi, b_3 = 0, b_4 = \psi, b_5 = \pi/2, b_6 = \infty$ записана в виде рядов, коэффициенты которых найдены из (15) по рекуррентным формулам.

Каноническая матрица $X(z)$ краевой задачи (2) в окрестности особых точек $b_k\ (k=1,...,6)$ имеет вид

$$X^+(z) = \sqrt{\frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}} \cdot C_k \begin{pmatrix} \tilde{u}_k & \tilde{u}'_k \\ \tilde{v}_k & \tilde{v}'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-\tau/2)\psi \\ 0 & z(z^2-\psi^2)/(z-b) \end{pmatrix} \text{ и } X^-(z) = A_2 X^+(z),$$

где C_k – матрица, приводящая матрицу V_k к нормальной жордановой форме.

Решение задачи (2) находим через интеграл типа Коши по формулам

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} X(z) \sum_{k=1}^{5} \int_{L_k} \left[X^+(x) \right]^{-1} G_k(x) \frac{dt}{x-z}, \quad \text{где } L_k = (b_k, b_{k+1}),\ k = 1,...,5.$$

Зная функцию $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z))$, находим функции $F_1(z) = \Phi_1(z)$ и $F_2(z) = \overline{\Phi_2(\overline{z})}$.

Суммарный индекс задачи равен $\chi = -\sum_{k=1}^{6}(\rho_k + \sigma_k) = -2$, т.е. исходная задача имеет единственное решение при выполнении одного матричного условия разрешимости:

$$\sum_{k=1}^{5} \int_{L_k} \left[X^+(x) \right]^{-1} G_k(x) dx = 0.$$

Библиографический список

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 709с.
2. Хвощинская Л.А. Решение одной задачи теории упругости// Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Мн., 2000. Т.5. С. 136-141.
3. Хвощинская Л.А. решению одной задачи о штампе// Математические методы в технике и технологиях ММТТ-29: сб. трудов XXIX Междунар.науч. конф.: в 12 т. Т.5.- Санкт-Петербург. 2016.- С.3-5.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука. 1977. 448 с.
5. Хвощинская Л.А. Об одном методе построения дифференциальных матриц проблемы Римана // Матер. междунар. семнадцатой науч. конф. им. акад. М. Кравчука, 19–20 мая 2016. Т.1. Киев: НТУУ «КПИ». 2016. С. 263–266.