ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА

Л. А. Хвощинская
Белорусский государственный аграрный технический университет,
Минск, Республика Беларусь
ludmila.ark@gmail.com

Проблема Римана теории аналитических функций почти 160 лет привлекает внимание математиков благодаря своим применениям в теории упругости, гидродинамики, электростатики и др. К решению этой проблемы применяются различные подходы (Еругин, 1982), но в общем случае есть немало вопросов, на которые еще нет однозначных ответов. В частности, вопрос построения дифференциального уравнения или системы уравнений по заданной группе монодромии. Укажем один из методов построения системы д.у. по заданной группе монодромии.

Пусть при обходе вокруг особых точек a_1, a_2, ∞ система функций

$$Y(z) = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}},$$

аналитическая в плоскости $\mathbb{C} \setminus \{a_1\} \cup \{a_2\}$ имеет следующую группу монодромии:

$$V_1, V_2, V_3 = (V_1 \cdot V_2)^{-1} (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 = E),$$

где $V_k\ (k = 1,2,3)$ — постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка. Обозначив α_k, β_k характеристические числа матриц $V_k\ (k = 1,2,3)$, найдем числа

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \alpha_k,\ \sigma_k = \frac{1}{2\pi i} \cdot \ln \beta_k.$$

Зафиксируем ветви логарифмов чисел $\rho_1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2$, например, выбирая их из условий $0 \le \operatorname{Re} \rho_k < 1$, $0 \le \operatorname{Re} \sigma_k \le 1$, $k = 1,2$. Тогда ветви ρ_3, σ_3 подбираются так, чтобы выполнялось соотношение Фукса

$$\sum_{k=1}^{3} (\rho_k + \sigma_k) = 1 \text{ или } \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = -\rho_3 + (1 - \sigma_3),$$

причем $0 \le \operatorname{Re}(\sigma_3 - \rho_3) < 1$.

В работе Хвощинская (1996) с помощью методов теории аналитических функций строилась регулярная система д.у. для двух пар функций, которая в случае трех особых точек a_1, a_2, ∞ имеет вид

$$\frac{dY}{dz} = Y\left(\frac{U_1}{z - a_1} + \frac{U_2}{z - a_2}\right), \tag{1}$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_3 a_1}{a_2 - a_1} & \dfrac{\left[\rho_1\left(a_1 - a_2\right) + \rho_3 a_1\right]\left[\sigma_1\left(a_1 - a_2\right) + \rho_3 a_1\right]}{a_2 - a_1} \\ \dfrac{1}{a_1 - a_2} & \rho_1 + \sigma_1 - \dfrac{\rho_3 a_1}{a_2 - a_1} \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_3 a_1}{a_1 - a_2} & \dfrac{\left[\rho_2\left(a_2 - a_1\right) + \rho_3 a_2\right]\left[\sigma_2\left(a_2 - a_1\right) + \rho_3 a_2\right]}{a_1 - a_2} \\ \dfrac{1}{a_2 - a_1} & \rho_2 + \sigma_2 - \dfrac{\rho_3 a_2}{a_1 - a_2} \end{pmatrix},$$

$$U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} -\rho_3 & \mu \\ 0 & 1 - \sigma_3 \end{pmatrix},$$

$$\mu = -a_1\left[\left(\rho_3 + \rho_1\right)\left(\rho_3 + \sigma_1\right) - \rho_2\sigma_2\right] - a_2\left[\left(\rho_3 + \rho_2\right)\left(\rho_3 + \sigma_2\right) - \rho_1\sigma_1\right].$$

Обозначим

$$W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln V_k,\ k = 1,2,3.$$

Если матрица D приводит матрицу V_3 к нормальной жордановой форме, то (Гантмахер, 1988)

$$W_3 = D\begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}D^{-1}, \text{ если } \alpha_3 \neq \beta_3$$

$$\text{и } W_3 = D\begin{pmatrix} \rho_3 & \left(2\pi i\alpha_3\right)^{-1} \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix}D^{-1}, \text{ если } \alpha_3 = \beta_3.$$

Так как характеристические числа матриц U_k для $k = 1,2$ равны ρ_k, σ_k, то $U_1 \sim W_1,\ U_2 \sim W_2$,
но

$$U_1 + U_2 \sim -W_3 + N,$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку даже в случае $\alpha_3 = \beta_3$ выполняется равенство $\rho_3 = \sigma_3$, но $\rho_3 \neq 1 - \sigma_3$, то матрица $U_1 + U_2$ всегда может быть приведена к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} -\rho_3 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma_3 \end{pmatrix}$$

с помощью матрицы

$$D = \begin{pmatrix} c & \mu / \left(\sigma_3 - \rho_3 - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c \neq 0$ — произвольная постоянная.

Умножая обе части системы (1) на матрицу D слева, приходим к системе ДУ

$$\frac{d}{dz}\left(YD\right) = \left(YD\right)\sum_{k=1}^{2}\frac{D^{-1}U_k D}{z - a_k}$$

или

$$\frac{d\tilde{Y}}{dz} = \tilde{Y}\sum_{k=1}^{2}\frac{\tilde{U}_k}{z - a_k}, \tag{2}$$

где $\tilde{Y} = YD$,

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{1 + \rho_3 - \sigma_3} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \rho_1\sigma_1 - \left(\rho_3 + \rho_2\right)\left(\rho_3 + \sigma_2\right) & \frac{1}{c}\left[\left(\rho_3 + \rho_1\right)\left(\sigma_3 + \sigma_1 - 1\right) - \rho_2\sigma_2\right] \\ c\left[\rho_2\sigma_2 - \left(\rho_3 + \sigma_1\right)\left(\sigma_3 + \rho_1 - 1\right)\right] & \left(\sigma_3 + \rho_2 - 1\right)\left(\sigma_3 + \sigma_2 - 1\right) - \rho_1\sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{1}{1 + \rho_3 - \sigma_3} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \rho_2\sigma_2 - \left(\rho_3 + \rho_1\right)\left(\rho_3 + \sigma_1\right) & \frac{1}{c}\left[\rho_2\sigma_2 - \left(\rho_3 + \rho_1\right)\left(\sigma_3 + \sigma_1 - 1\right)\right] \\ c\left[\left(\rho_3 + \sigma_1\right)\left(\sigma_3 + \rho_1 - 1\right) - \rho_2\sigma_2\right] & \left(\sigma_3 + \rho_1 - 1\right)\left(\sigma_3 + \sigma_1 - 1\right) - \rho_2\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Если от дифференциальных матриц $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ потребовать выполнение условий полной интегрируемости (Еругин, 1982)

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial a_1} = \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial a_2} = \frac{\tilde{U}_1 \cdot \tilde{U}_2 - \tilde{U}_2 \cdot \tilde{U}_1}{a_1 - a_2},$$

то $c = \left(a_1 - a_2\right)^{1+\rho_3-\sigma_3}$.

Исследования показали, что систему (2) можно получить непосредственно, воспользовавшись формулой разложения логарифма произведения двух матриц второго порядка, полученной в Хвощинская (2015). В указанной формуле достаточно заменить ρ_3 на $\left(-\rho_3\right)$, а σ_3 на $\left(1 - \sigma_3\right)$.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ V_3 = \left(V_1 V_2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}},\ \beta_1 = e^{\frac{-2\pi i}{3}},\ \alpha_1 = \alpha_3 = 1,\ \beta_1 = \beta_3 = -1,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{3},\ \sigma_1 = \frac{2}{3},\ \rho_2 = 0,\ \sigma_2 = \frac{1}{2},\ \rho_3 = -\frac{1}{2},$$

$$\sigma_3 = 0,\ \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = 1.$$

Система д.у. имеет вид

$$\frac{dY}{dz} =$$

$$= Y\left[\frac{\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\left(a_1 - a_2\right)^{-1\backslash 2} \\ \frac{2}{9}\left(a_1 - a_2\right)^{1/2} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}}{z - a_1} + \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{9}\left(a_1 - a_2\right)^{-1/2} \\ -\frac{2}{9}\left(a_1 - a_2\right)^{1/2} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}}{z - a_2}\right]$$

Аналогично, используя представления логарифма произведения трех и четырех матриц (Хвощинская, Жоровина, 2015), строится система д.у. проблемы Римана в случаях четырех и большего числа особых точек.

Список литературы

Гантмахер, Ф. Р. (1988). *Теория матриц*. Москва: Наука.

Еругин, Н. П. (1982). *Проблема Римана*. Минск: Наука и техника.

Хвощинская, Л. А. (1996). К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек. В кн. *Тр. междунар. конф. «Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление* (1996), (с. 377—382).

Хвощинская, Л. А. (2015). Представление логарифма произведения невырожденных матриц второго порядка. В кн. *Матер. междунар. шестнадцатой научн. конф. им. акад. М. Кравчука, 14-15 мая 2015 г.* (Т. 2.) (с. 192—195). Киев: НТУУ «КПИ».

Хвощинская, Л. А., Жоровина, Т. Н. (2015). Уравнение связи интегральных подстановок проблемы Римана. В кн. *Тез. докл. междунар. научн. семинара «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»* (с. 84). Минск: ИМ НАН Беларуси.