УДК 532.516 ПОСТУПИЛА В РЕДАКЦИЮ 18.05.2007

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РАЗМЫВА ДОННЫХ ОТЛОЖЕНИЙ В ЗАМКНУТОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Д.Ф. Кольга, канд. техн. наук, доцент, Н.В. Казаровец, докт. с/х. наук, профессор, член-кор. НАН Беларуси (УО БГАТУ); В.П. Савчук, канд. физ.-мат. наук, доцент, О.Н. Вярьвильская, канд. физ.-мат. наук, доцент, П.Н. Конон, канд. физ.-мат. наук, доцент (БГУ)

Аннотация

В данной статье изучается нестационарное течение вязкой среды в замкнутом открытом канале с учетом размыва его дна.

Введение

На большинстве животноводческих комплексов по откорму крупного рогатого скота используется гидравлическая система удаления навоза периодического действия. Навоз в этом случае подвергается расслоению на три слоя:

– плавающая корка вверху;
– жидкая часть в середине;
– твердая часть на дне.

Поскольку слои сильно отличаются по консистенции и при открытии шибера жидкая фракция сплавляется, а твердая остается, то для ее удаления приходится возить чистую воду машинами МЖТ или вымывать брандспойтом под большим давлением. Недостатком существующих технологий навозоудаления является многократное разбавление водой экскрементов при их удалении, а это ведет к ряду отрицательных последствий: к увеличению навозохранилищ, к нерациональным транспортным затратам по вывозке в составе стоков воды и к потере более половины полученных органических удобрений, а также к заиливанию почвы и загрязнению окружающей среды. Для удаления экскрементов из животноводческих помещений без добавления воды разработан гомогенизатор, который позволяет перед открытием шибера перемешать жижу, т.е. сделать однородную массу.

Основная часть

Для более эффективного удаления навоза предлагаем все каналы закольцевать в один длинный канал (рис. 1, 2). В зависимости от размера помещения длина каналов достигает от 100 до 500 м.

Преимущества такого способа удаления заключаются в том, что все содержимое в каналах можно перемешать с одного места, отпадает постоянное перемещение гомогенизатора (как при обычной канальной системе). Требуется также установка только одного шибера, а не на каждом канале, и герметизация только стенок каналов по периферии здания.

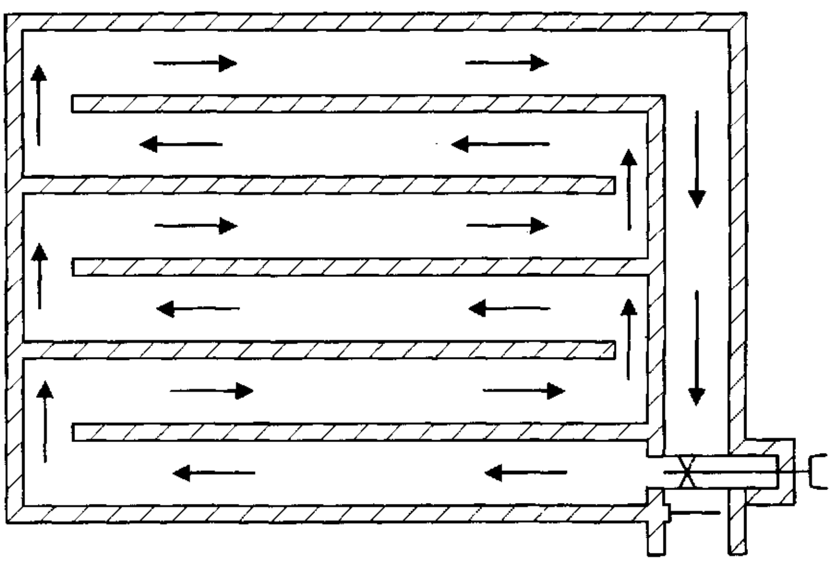

Рисунок 1. Схема движения навозной массы.

В работах [1, 2] исследовано стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском «распрямленном» канале, найдена форма свободной поверхности жидкости и проведен анализ влияния на нее параметров задачи и формы дна канала.

Рассмотрим плоский замкнутый канал длиной ℓ, заполненный покоящейся вязкой средой [1]. В системе координат xOy (ось Oy – вертикальна) дно канала задано равенством $y=\psi(x)$, а свободная поверхность $y = h$. Начало координат считаем выбранным так, что выполняется равенство

$$\int_0^{\ell} \psi(x)\,dx = 0. \qquad (1)$$

В некоторый момент времени в начальное сечение $x = 0$ канала вводится насос, создающий движение среды в направлении оси $0x$. Это приводит к повышению уровня среды перед насосом и понижению уровня за ним, что, в свою очередь, является причиной возникновения движения среды по всей длине замкнутого канала. Через небольшой промежуток времени после начала движения контур свободной поверхности перестает изменяться, т.е. движение среды устанавливается. Последнее обстоятельство свидетельствует об окончании первого временного этапа движения среды, в течение которого происходит интенсивный переход от состояния покоя к установившемуся движению. Этот этап является относительно коротким и не представляет практического интереса, поэтому мы ограничимся здесь лишь констатацией факта его существования.

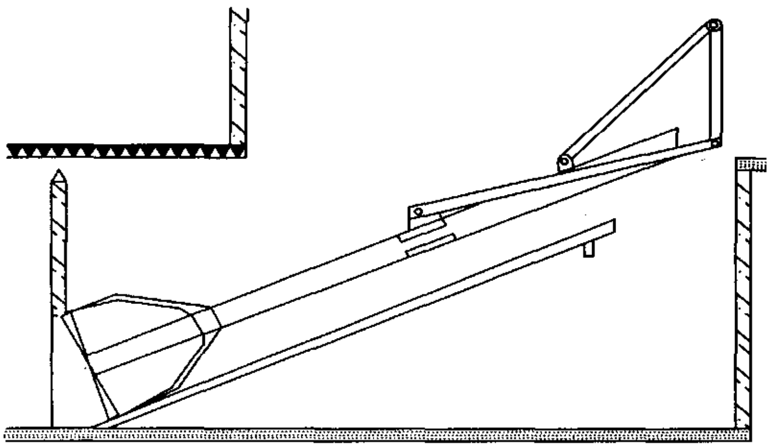

Рисунок 2. Гомогенизатор в навозном канале.

На втором этапе движение среды можно считать стационарным, что несколько упрощает задачу и позволяет приближенно найти поле скоростей и форму свободной поверхности при заданной форме дна канала [1, 2]. В [2], в частности, установлено, что если порядок $|\psi(x)|$ не превосходит порядок величины $\varepsilon = \frac{h}{\ell}$, то неровности дна канала не оказывают значительного влияния на профиль свободной поверхности.

Если геометрия канала остается неизменной, то рассматриваемый второй этап движения среды будет и последним. Если же дно размывается движущейся средой, то $\psi = \psi(x,t)$ и течение в канале после первого этапа, строго говоря, не будет стационарным. Однако в практически важных случаях процесс размыва донных отложений идет очень медленно, поэтому можно считать, что второй этап имеет место на любом относительно коротком временном интервале, на котором можно пренебречь влиянием изменения со временем функции $\psi(x,t)$.

Третий этап в исследовании движения относится к тому случаю, когда необходимо найти функцию $\psi(x,t)$, характеризующую процесс изменения дна канала. Для задач такого типа приходится постулировать некоторое граничное условие, смысл которого будет обсуждаться в дальнейшем.

Изменение функции $\psi(x,t)$ на большом временном интервале значительно и соизмеримо с h, несмотря на малую скорость этого изменения. Задача в этом случае становится квазистационарной, так как ее параметры зависят от времени не явным образом, а лишь посредством функции $\psi(x,t)$.

Остановимся более подробно на упомянутом условии, из которого должна быть найдена функция $\psi(x,t)$. Естественно предположить, что количество частиц осажденной фазы среды, срываемых в единицу времени со дна канала движущимся потоком, будет увеличиваться при увеличении силы, с которой движущаяся среда воздействует на дно в точке x. Если ограничиться простейшей формой зависимости – линейной, то это предположение запишется так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\chi P_{n\tau}\big|_{y=\psi(x,t)}. \qquad (2)$$

Здесь $P_{n\tau}\big|_{y=\psi(x,t)}$ — касательное напряжение на поверхности дна в точке x; χ — коэффициент, равный скорости перемещения границы раздела жидкости и осажденной фазы в направлении нормали к этой границе при равном единице напряжении $P_{n\tau}$; размерность $[\chi] = \frac{\text{м}^3}{\text{н}\cdot\text{с}}$. Коэффициент χ, очевидно, зависит от механических характеристик жидкости и осажденной фазы, а также от величины, характеризующей относительную толщину слоя фазы, размытого жидкостью к данному моменту времени. Зависимость χ от толщины осажденного слоя необходимо учитывать, если, например, этот слой стратифицирован по толщине и сопротивляемость размыву частиц фазы растет при увеличении времени, прошедшего с момента осаждения этих частиц в результате естественного уплотнения осажденной фазы со временем.

Анализ процесса размыва дна канала будем проводить, оставаясь в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости [3] после ее необходимого обобщения. Это обобщение сводится к следующим допущениям:

- в результате размыва дна частицы осажденной фазы переходят в жидкость, что приводит к изменению ее плотности ρ и вязкости μ;

- указанное изменение величин ρ и μ зависит от объема перешедших в жидкость частиц фазы и происходит одновременно во всех точках потока;

- общий объем жидкости и осажденной фазы в канале не изменяется в процессе размыва.

Уравнения и граничные условия квазистационарного движения среды в безразмерных величинах запишем в виде [2]

$$\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\varepsilon\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\varepsilon^2\left(u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)=-1-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\varepsilon}{R}\left(\varepsilon^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0; \tag{3}$$

при

$$y=f(x,t):\quad uf'-\vartheta=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{4}$$

$$p\left(1-(\varepsilon f')^2\right)+\frac{2\varepsilon}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(1+(\varepsilon f')^2\right)=0;$$

при

$$y=\psi(x,t):\quad u\psi'-\vartheta=0,\qquad u=\frac{k}{R}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Здесь u,ϑ – компоненты вектора скорости среды, p – давление, штрих означает производную по x, $\varepsilon=\frac{h}{\ell}$, $R=\frac{Ch\rho}{\mu}$, $C=\sqrt{gh}$.

Условие (2), из которого находится функция $\psi(x,t)$, записывается так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\chi\mu}{h}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\psi}. \tag{6}$$

Здесь t — безразмерное время, равное отношению реального времени к величине $\frac{h}{C}$.

В отличие от общей постановки нестационарной задачи в уравнениях (3) и первом условии (4) отсутствуют производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$, поскольку зависимость функций u, ϑ, f от времени обеспечивается, как уже указывалось, лишь функцией $\psi(x,t)$.

Задача (3) – (5) решена в [2], где для функций u, ϑ, f получены выражения:

$$u=C_0+C_1y+C_2y^2,$$

$$\vartheta=C_0'y+C_1'\frac{y^2}{2}+C_2'\frac{y^3}{3}+C_3,$$

$$p=-y+\varepsilon^2\int_0^y\left(\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}-u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy-\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+C(x)$$

$$\begin{aligned}C(x)&=f+\frac{\varepsilon}{R}\,\frac{1+3(\varepsilon f')^2}{(\varepsilon f')^2-1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=f}+\\&+\varepsilon^2\int_0^f\left(u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{R}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\right)dy,\end{aligned} \tag{7}$$

$$C_0=\frac{Q}{2\Delta}\left(\psi(\psi-2f)+2k(f-\psi)\right),$$

$$C_1=\frac{Q}{\Delta}f,\quad C_2=-\frac{Q}{2\Delta},$$

$$C_3=-\left(C_0\psi+\frac{C_1}{2}\psi^2+\frac{C_2}{3}\psi^3\right)',$$

$$\Delta=(f-\psi)^2\left(\frac{1}{3}(f-\psi)+k\right).$$

В [2] также получено уравнение, связывающее функции f и ψ:

$$\varepsilon\int_\psi^f\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dy=-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\psi}. \tag{8}$$

Подставив выражение для функции u из (7) в (6), получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\chi\mu}{h}\frac{Q}{(f-\psi)\left(\frac{1}{3}(f-\psi)+k\right)}. \tag{9}$$

Нелинейные уравнения в частных производных (8) и (9) представляют собой систему для нахождения функций $f(x,t)$ и $\psi(x,t)$ при заданных зависимостях $\rho(A)$, $\mu(A)$, $\chi(A)$, где

$$A(t)=-\int_0^1\psi(x,t)\,dx. \tag{10}$$

Величина $A(t)$ представляет собой объем осажденной фазы, размытой жидкостью к моменту времени t.

В результате решения системы (8), (9) найдется профиль $\psi(x,t)$ дна канала, развившийся из заданного начального профиля $\psi(x,0)$, и соответствующая ему свободная поверхность жидкости $f(x,t)$. Заметим в связи с этим, что:

1) получить решение системы (8), (9) трудно даже в численном виде;

2) нахождение функции $A(t)$, дающей закон изменения со временем объема размытой фазы, представляет больший практический интерес, чем детальное знание формы дна канала в любой момент времени. Получим поэтому уравнение для нахождения функции $A(t)$. С этой целью проинтегрируем по x обе части уравнения (9). Учитывая (10), получим

$$\frac{dA}{dt}=\frac{3\chi\mu Q}{h}\int_0^1\frac{dx}{(f-\psi)(f-\psi+3k)}. \tag{11}$$

Переменная x входит в подинтегральную функцию (11) и в правую часть уравнения (9) только через разность функций f и ψ, равную безразмерной толщине слоя жидкости H в точке x. Тогда из уравнения (9) следует, что в фиксированный момент времени t скорость размыва дна (скорость увеличения $|\psi(x,t)|$) больше в тех точках x, в которых толщина этого слоя меньше, что приводит к относительно быстрому выравниванию толщины слоя со временем. Таким образом, можно приближенно считать, что при квазистационарном течении толщина слоя среды H зависит только от времени и не зависит от продольной координаты x канала:

$$f(x,t)-\psi(x,t)=H(t). \tag{12}$$

Проинтегрировав это равенство почленно по x, получим

$$\int_0^1 f(x,t)\,dx-\int_0^1\psi(x,t)\,dx=1+A(t)=H(t). \tag{13}$$

С учетом равенств (12) и (13) уравнение (11) записывается в виде

$$\frac{dH}{dt}=\frac{3\chi\mu Q}{hH(H+3k)}. \tag{14}$$

Входящая в (14) величина Q, равная расходу жидкости через любое сечение канала, при постоянном расходе насоса q_x найдется по формуле [2]

$$Q(H)=\frac{6q_xH^2(H+3k)}{\left(H^2-1+2kH\right)(h_2-h_1)+h_2^2-h_1^2-\frac{1}{3}\left(h_2^3-h_1^3\right)}, \tag{15}$$

если насос введен под свободную поверхность жидкости и $0\le h_1<y<h_2\le 1$ – сечение его струи, либо $Q=q_x$, если насос вмонтирован в стенку, перегораживающую канал.

Таким образом, при заданных зависимостях $\mu(A)$, $\chi(A)$ уравнение (14) всегда может быть проинтегрировано в квадратурах и его решение записывается так:

$$t=F(H),\ F(H)=\frac{h}{3}\int_1^H\frac{H(H+3k)dH}{\mu(H-1)\cdot\chi(H-1)\cdot Q(H)}. \tag{16}$$

В частности, если A_1 – средняя толщина слоя осажденной в канале фазы, то время размыва t_1 этого слоя найдется по формуле

$$t_1=F(A_1+1).$$

Выводы

Анализ формулы (15) показывает, что расход $Q\ge q_x$ и растет с увеличением H. Это значит, что при прочих равных условиях, подинтегральное выражение в (16) при $Q=q_x$ больше, чем при расходе Q, определяемом формулой (15). Следовательно, время размыва t_1 при введении насоса под поверхность жидкости будет меньшим, чем в том случае, когда насос вмонтирован в поперечную перегородку канала.

Из формулы (16) следует, что наличие проскальзывания на границе раздела между жидкостью и осажденной фазой ($k>0$) приводит к увеличению времени размыва t_1.

Из физических соображений ясно, что коэффициент $\chi(A)$ является убывающей функцией своего аргумента, если плотность в слое осажденной фазы – возрастающая функция аргумента A. Вязкость же среды $\mu(A)$ всегда возрастает с увеличением A. Поэтому произведение $\mu(A)\chi(A)$ в большинстве случаев будет мало отличаться от постоянной, равной произведению значений этих функций для любого фиксированного A. Тогда функция F примет вид

$$F(H)=\frac{h}{3\mu\chi}\int_1^H\frac{H(H+3k)}{Q(H)}\,dH$$

и при $Q=q_x$ и $k=0$ получим

$$t=\frac{h}{9\mu\chi q_x}\left(H^3-1\right).$$

Отсюда имеем, $H=\sqrt[3]{\frac{9\mu\chi q_x}{h}\,t+1}$, то есть глубина жидкости в процессе размыва растет со временем пропорционально $\sqrt[3]{t+\frac{h}{9\mu\chi q_x}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кольга Д.Ф. Исследование процесса размыва осажденной фракции мелкодисперсной среды. /Д.Ф. Кольга [и др.]//Агропанорама, № 2, 2006.– С. 2-5.

2. Кольга Д.Ф. О движении вязкой среды в замкнутом канале с криволинейным дном. /Д.Ф. Кольга [и др.]// Агропанорама, № 2, 2007. – С. 6-9.

3. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. /Н.А. Слезкин – М.: ГИТТЛ, 1955. – С.131-216.