

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗМЫВА ОСАЖДЕННОЙ ФРАКЦИИ МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ СРЕДЫ

Д.Ф. Кольга, канд. техн. наук, доцент, И.Н. Шило, докт. техн. наук, профессор (УО БГАТУ);
О.Н. Вярвьильская, канд. физ.-мат. наук, доцент, П.Н. Конов, канд.
физ.-мат. наук, доцент, В.П. Савчук, канд. физ.-мат. наук, доцент (БГУ)

Одной из проблем больших животноводческих комплексов является проблема очистки накопителей, в которых слежавшиеся отходы покрыты слоем жидкости. Естественная и полная очистка через конструктивно предусмотренные сливы становится возможной только после превращения этой стратифицированной среды в однородную. С этой целью в некотором сечении накопителя создается направленное движение жидкости (при помощи, например, винтового насоса), в результате которого вся жидкость приводится в движение по замкнутому кругу. Движущаяся жидкость постепенно размывает донные отложения и через некоторый промежуток времени среда становится однородной. Такой процесс имеет место, например, при очистке навозохранилищ крупных животноводческих комплексов.

Целью настоящей работы является создание математической модели описанного процесса размыва осажденной фазы, которая позволила бы рассчитать время размыва, требуемую мощность насоса и другие параметры процесса в зависимости от размеров каналов и характеристик среды.

Точная постановка задачи с учетом многофазности среды и сложной геометрии каналов представляет серьезные математические трудности, поэтому предлагается решать ее поэтапно, используя на каждом этапе упрощающие предположения, учитывающие характерные особенности процесса.

Рассмотрим задачу об определении формы свободной поверхности вязкой жидкости в плоском горизонтальном кольцевом канале. Длина канала l предполагается настолько большой, что его можно считать прямолинейным (рис. 1).

Движение жидкости считается ламинарным и происходит за счет создания во входном сечении некоторой продольной скорости u_0 . Размыв дна канала происходит очень медленно, поэтому на начальном этапе решения задачи предполагается, что дно остается горизонтальным, а движение жидкости в канале установилось, т.е. не изменяется со временем. Другими словами, рассматривается такой временной интервал дви-

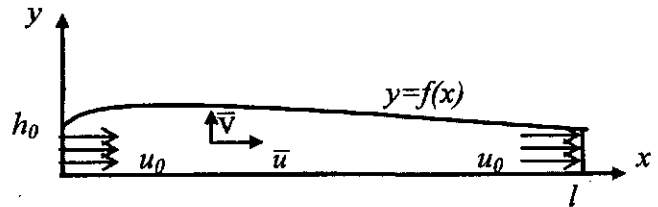


Рис. 1. Схема движения жидкости в канале

жения среды, на котором начальные условия движения уже не существенны, а отклонение дна канала от горизонтальной плоскости еще настолько мало, что не сказывается на движении среды.

Глубина канала в начальном сечении h_0 l .

С учетом того, что $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, уравнение движе-

ния вязкой жидкости в канале в приближении Озеена [1] можно записать в виде

$$u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

и граничные условия:

$$\text{при } x=0: u = u_0; \quad \text{при } x=l: u = u_0; \quad (4)$$

$$\text{при } y=0: u = k \frac{\partial u}{\partial y} - \text{условие скольжения}; \quad (5)$$

$$v = 0 - \text{условие непроницаемости}; \quad (6)$$

$$\text{при } y = f(x): \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (p_{nn} = 0), \quad (7)$$

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (p_{nn} = 0), \quad (8)$$

$$u \frac{df}{dx} - v = 0 \quad (v_n = 0), \quad (9)$$

приходим к системе для определения неизвестных компонент скорости u, v давления p и формы свободной поверхности $f(x)$. Здесь ρ плотность жидкости, ν, μ — кинематический и динамический коэффициенты вязкости, g — ускорение свободного падения, k — коэффициент скольжения. Приоритетной целью является определение из системы (1) — (9) формы свободной поверхности $y = f(x)$.

Интегрируя (2) по y и заменяя $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$ по

(3), получим

$$0 = -gy - \frac{p}{\rho} - v \frac{\partial u}{\partial x} + c(x), \quad (10)$$

где $c(x)$ — неизвестная функция.

Дифференцируя последнее соотношение по x , выражая из него $\frac{\partial p}{\partial x}$ и подставляя в (1), придем к уравнению

$$\frac{u_0}{2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{c'(x)}{2\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y^2}. \quad (11)$$

Будем искать продольную компоненту скорости в виде

$$u(x, y) = C_0(x) + C_1(x)y + C_2(x)y^2. \quad (12)$$

Из (7) получим

$$C_1 + 2C_2 f = 0, \quad (13)$$

$$\text{из (5): } C_0 = kC_1. \quad (14)$$

Из условия постоянства расхода $\int_0^{f(x)} u dy = u_0 h_0$ получим уравнение

$$C_0 f + \frac{1}{2} C_1 f^2 + \frac{1}{3} C_2 f^3 = u_0 h_0. \quad (15)$$

Разрешая систему (13) — (15), найдем

$$C_0 = \frac{ku_0 h_0}{\frac{1}{3} f^2 + kf}, \quad C_1 = \frac{u_0 h_0}{\frac{1}{3} f^2 + kf},$$

$$C_2 = \frac{-u_0 h_0}{\frac{2}{3} f^3 + 2kf^2}$$

и представим $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = \frac{u_0 h_0}{\frac{2}{3} f^3 + 2kf^2} (2f(y+k) - y^2) = A(x)(y+k) - B(x)y^2, \quad (16)$$

где

$$A(x) = \frac{u_0 h_0}{\frac{1}{3} f^2 + kf}, \quad B(x) = \frac{u_0 h_0}{\frac{2}{3} f^3 + 2kf^2}. \quad (17)$$

Записывая равенство (10) при $y = f(x)$ и присоединяя к нему условие (8), получим систему

$$0 = -gf - \frac{p}{\rho} - v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=f} + C(x),$$

$$0 = p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=f},$$

из которой выразим $C(x)$ в виде

$$C(x) = gf - v \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=f}$$

и с учетом (16) найдем

$$C'(x) = gf' - v \left(A''(f+k) - B''f^2 - A'f' + 2B'ff' \right). \quad (18)$$

Интегрируя обе части уравнения (11) по y в пределах от 0 до f и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A'(y+k) - B'y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A''(y+k) - B''y^2,$$

получим

$$\frac{u_0}{2\nu} \left[A' \left(\frac{f^2}{2} + kf \right) - B' \frac{f^3}{3} \right] - A'' \left(\frac{f^2}{2} + kf \right) + B'' \frac{f^3}{3} = -\frac{C'(x)}{2\nu} f - Bf,$$

или с учетом (18)

$$\left(\frac{f}{2} + k \right) \left(\frac{u_0}{2\nu} A' - A'' \right) + \frac{f^2}{3} \left(B'' - \frac{u_0}{2\nu} B' \right) = -\frac{gf'}{2\nu} +$$

$$+\frac{1}{2}A''(f+k)+\frac{1}{2}A'f'-B'ff'-\frac{1}{2}B''f^2-B. \quad (19)$$

Уравнение (19) является обыкновенным дифференциальным уравнением для искомой функции $y = f(x)$.

Представляя ее в виде

$$f(x) = h_0 + \varphi(x)$$

и учитывая, что $\varphi(x)$ и ее производные малы, линеаризуем уравнение (19).

Найдем производные функций A и B с учетом их выражений (17).

$$A' = -u_0 h_0 \frac{\left(\frac{2}{3}f+k\right)f'}{f^2\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2}, \quad B' = -u_0 h_0 \frac{(f+2k)f'}{2f^3\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2},$$

$$A'' = -u_0 h_0 \frac{\left(\frac{2}{3}f+k\right)}{f^2\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2} \cdot f'' - u_0 h_0 \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{\frac{2}{3}f+k}{f^2\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2} \right] f'^2,$$

$$B'' = -u_0 h_0 \frac{(f+2k)}{2f^3\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2} \cdot f'' - u_0 h_0 \frac{\partial}{\partial f} \left[\frac{f+2k}{2f^3\left(\frac{1}{3}f+k\right)^2} \right] \cdot f'^2.$$

Сохраняя в этих выражениях члены порядка малости не выше единицы, получим

$$A' = A_0 \varphi', \quad A'' = A_0 \varphi'', \\ B' = B_0 \varphi', \quad B'' = B_0 \varphi'',$$

где

$$A_0 = -u_0 \frac{\frac{2}{3}h_0+k}{h_0\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)^2},$$

$$B_0 = -u_0 \frac{h_0+2k}{2h_0^2\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)^2}.$$

Разлагая $B(x)$ в ряд по φ и ограничиваясь линейными членами, получим

$$B(x) = a - f_0 \varphi,$$

$$\text{где } a = \frac{u_0}{2h_0\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)},$$

$$a_0 = u_0 \frac{h_0+2k}{2h_0^2\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)^2}. \quad (20)$$

Теперь линеаризованное уравнение (19) будет иметь вид

$$\left(\frac{h_0}{2}+k\right)\left(\frac{u_0}{2\nu}\varphi' - \varphi''\right)A_0 + \frac{h_0^2}{3}\left(\varphi'' - \frac{u_0}{2\nu}\varphi'\right)B_0 - \\ - \frac{1}{2}\varphi''(h_0+k)A_0 + \frac{h_0^2}{2}\varphi''B_0 + \frac{g}{2\nu}\varphi' = -a + a_0\varphi,$$

или в стандартной форме

$$a_2\varphi'' - a_1\varphi' - a_0\varphi = -a, \quad (21)$$

где

$$a_2 = -A_0\left(\frac{h_0}{2}+k\right) + \frac{h_0^2}{3}B_0 - \frac{1}{2}A_0(h_0+k) + \\ + \frac{h_0^2}{2}B_0 = -A_0\left(h_0 + \frac{3k}{2}\right) + \frac{5}{6}h_0^2B_0 = \\ = \frac{u_0}{h_0\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)^2} \left(\frac{1}{4}h_0^2 + \frac{7}{6}h_0k + \frac{3}{2}k^2\right), \quad (22)$$

$$a_1 = -A_0 \frac{u_0}{2\nu} \left(\frac{h_0}{2}+k\right) + B_0 \frac{u_0}{2\nu} \cdot \frac{h_0^2}{3} - \frac{g}{2\nu} = \\ = \frac{u_0^2}{2\nu} \cdot \frac{\frac{1}{6}h_0^2 + \frac{5}{6}h_0k + k^2}{h_0\left(\frac{1}{3}h_0+k\right)^2} - \frac{g}{2\nu}. \quad (23)$$

Решение уравнения (21)

$$\varphi = \frac{a}{a_0} + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (24)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} + \frac{a_0}{a_2}}, \quad (25)$$

должно удовлетворять условиям:

$$\text{при } x=0: \varphi=0;$$

$$\text{при } x=l: \varphi=0.$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{a}{-a_0} \\ C_1 e^{2l} + C_2 e^{2l} = \frac{a}{-a_0} \end{cases} \quad (26)$$

Из (26) получаем систему для определения C_1, C_2 :
решение которой

$$C_1 = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{1 - e^{2l}}{e^{2l} - e^{4l}}, \quad C_2 = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{e^{4l} - 1}{e^{2l} - e^{4l}}.$$

Таким образом, получено явное выражение для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{a}{a_0} \left[1 + \frac{e^{2x}(1 - e^{2l}) + e^{2x}(e^{4l} - 1)}{e^{2l} - e^{4l}} \right]. \quad (27)$$

Формулой (27) задается форма свободной поверхности среды при заданных параметрах задачи l, h_0, u_0, ν, k . Численный анализ этой формулы позволяет заключить:

1) форма свободной поверхности имеет вид выпуклой кривой (рис. 2);

2) максимальное возвышение свободной поверхности φ_{\max} над уровнем h_0 перемещается в направлении от начала канала к его концу при увеличении скорости среды u_0 во входном сечении канала;

3) величина φ_{\max} не превышает 1,2 % от длины канала l при

$$10^{-4} l^2 / \nu \leq \nu \leq 10^{-2} l^2 / \nu, \quad 0 < u_0 \leq 1 l / \nu, \\ 0,5 l \leq h_0 \leq 1 l, \quad 0 < k \leq 1;$$

4) величина φ_{\max} растет при увеличении любого из параметров l, h_0, u_0, ν (рис. 3, 4);

5) величина φ_{\max} убывает при увеличении любого из параметров h_0, k (рис. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.А. Слезкин. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТЭЛ, -М., 1955.

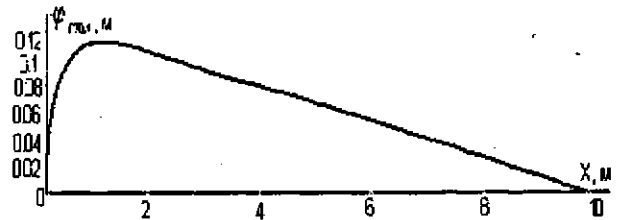


Рис. 2. График функции $\varphi(x)$ при $\nu = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $h_0 = 0,5 \text{ м}$; $l = 10 \text{ м}$; $u_0 = 1 \text{ м/с}$; $k = 0$

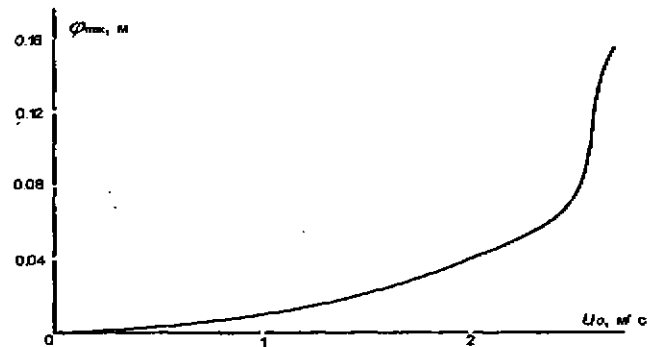


Рис. 3. Зависимость максимального значения возмущения свободной поверхности φ_{\max} от скорости на входе в канал u_0 при $\nu = 0,002 \text{ м}^2/\text{с}$, $h_0 = 0,5 \text{ м}$; $l = 5,0 \text{ м}$, $k = 0 \text{ м}$

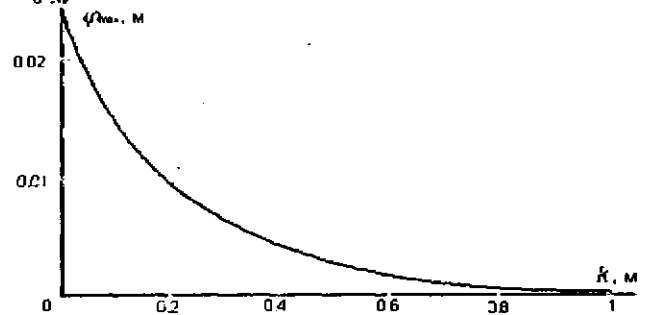


Рис. 4. Зависимость максимального значения возмущения свободной поверхности от скорости на входе в канал u_0 при $\nu = 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$, $h_0 = 0,5 \text{ м}$; $l = 10 \text{ м}$; $k = 0$

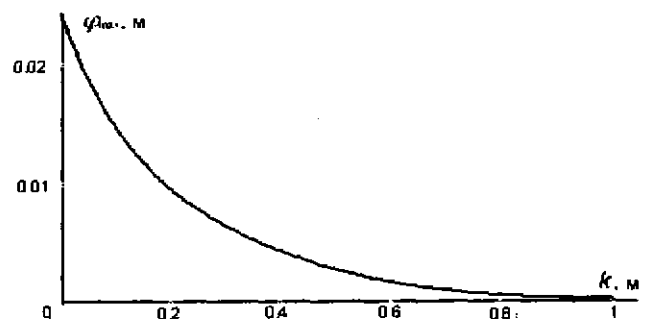


Рис. 5. Зависимость максимального значения возмущения свободной поверхности φ_{\max} от коэффициента проскальзывания k при $u_0 = 0,2 \text{ м/с}$, $\nu = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$