

О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ДЕФОРМАТОРА

И.Н.Шило, докт. техн. наук, профессор, А.В. Кузьмицкий, докт. техн. наук, доцент,
Г.Ф. Бетенья, канд.техн. наук, доцент (УО БГАТУ); Д.А.Кузьмицкий, аспирант (БГУ)

Аннотация

На основе анализа напряжений, возникающих в почвенном массиве под действием деформатора, определены условия и механизм образования почвенного ядра. Определен вид функции напряжений, получены уравнения производной по направлению и градиента, сделан вывод о потенциальности векторного поля точечного деформатора.

Введение

Снижение затрат, вызванных затуплением изношенных лемешных лезвий и плужных долот, – одна из главных проблем отечественного сельскохозяйственного машиностроения. Результаты исследований рабочего процесса плуга показывают, что на долю лемеха приходится примерно 40 % общих затрат энергии на вспашку и 50...60% сопротивлений рабочей поверхности корпуса плуга. Установлено также, что если на лемехе появилась фаска шириной 3...4 мм, то тяговое сопротивление увеличивается на 25 %, а расход топлива – на 6...8 %.

Одним из путей решения данной проблемы является дальнейшее совершенствование технологических приёмов, обеспечивающих высокую работоспособность изделий, работающих в абразивной среде. Так, например, в Белорусском государственном аграрном техническом университете (БГАТУ) разработана технология диффузионного намораживания почворезущих профилей, повышающая коэффициент относительной абразивной износостойкости с 1,8 до 4,25 по сравнению с базовыми изделиями. Данная технология позволяет достичь твердости закаленного слоя до 60...65 HRC и уже сегодня обеспечить сельскохозяйственные предприятия Республики Беларусь вполне конкурентоспособными почвообрабатывающими рабочими органами.

Однако, говоря о достигнутых практических результатах, надо понимать и принимать во внимание то, что поиск новых перспективных направлений по решению обозначенной проблемы возможен только на основе глубоких теоретических исследований механики взаимодействия долота (лемеха) с почвой, выявления и моделирования скрытых физических процессов передачи механической энергии от деформатора почвенной среде.

Основная часть

Задача статики о количественной оценке напряжений в случае приложения к почвенному массиву сосредоточенной нагрузки была впервые поставлена и решена Ж. Буссинеском [1].

В частности, им получено уравнение, устанавливающее зависимость радиальных напряжений σ_R от величины приложенной силы F , расстояния R до точки приложения нагрузки и угла β отклонения от направления действия силы:

$$\sigma_R = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{\pi \cdot R^2} \cos \beta. \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует, что радиальные напряжения обратно пропорциональны квадрату расстояния до точки приложения нагружающей силы F и прямо пропорциональны косинусу угла отклонения от линии её действия. Эпюра радиальных напряжений в соответствии с уравнением (1) изображена на рисунке 1. Как видно из рисунка, она имеет серповидную форму, изменяясь от нуля на оси Y до максимального (амплитудного) значения на оси X .

Богатый научно-теоретический и практический материал по данному направлению содержится в трудах В.П. Горячкина [2], В.А. Желиговского [3], М.Е. Мацепуро, А.Т. Вагина, Ю.В. Чигарева [4] и ряда других учёных.

Впишем в полуокружность R (рис. 1) окружность радиуса $R/2$ и выберем два произвольных направле-

ния l_1 и l_2 под углом к оси X , β_1 и β_2 соответственно [5]. Лучи l_1 и l_2 пересекут полуокружность R в точках M и N , а вписанную окружность в точках M_1 и N_1 . Через полученные точки M_1 и N_1 проведем полуокружности из центра O радиусами R_1 и R_2 .

Определим радиальные напряжения на полученной схеме в направлении l_1 . Согласно формуле Буссинеска радиальное напряжение σ_{RM} в точке M будет равно: $\sigma_{RM} = 3F \cos \beta_1 / (2\pi R^2)$, а в точке M_1 – $\sigma_{RM_1} = 3F \cos \beta_1 / (2\pi R_1^2)$.

Радиусы R_1 и R связаны простым соотношением из $\triangle OM_1A$: $R_1 / R = \cos \beta_1$, или $R_1 = R \cos \beta_1$, тогда

$$\sigma_{RM_1} = 3F / (2\pi R^2 \cos \beta_1), \quad (2)$$

а проекция σ_{M1} этого напряжения на нормаль к вписанной окружности вследствие равенства соответствующих углов (рис. 1)

$$\sigma_{M1} = 3F / (2\pi R^2) = \sigma_{RA}, \quad (3)$$

где σ_{RA} – радиальное напряжение в точке A (при $\cos\beta=1$).

В направлении l_2 аналогично рассмотренному выше: $\sigma_{RN1} = 3F \cos\beta_2 / (2\pi R_2^2)$, а так как $R_2 = R \cos\beta_2$, то

$$\sigma_{RN1} = 3F / (2\pi R^2 \cos\beta_2), \quad (4)$$

а интересующая нас проекция этого напряжения на нормаль к вписанной окружности:

$$\sigma_{N1} = 3F / (2\pi R^2) = \sigma_{RA}. \quad (5)$$

Как видим, по любому направлению l нормальные составляющие радиального напряжения к вписанной окружности равны между собой и равны радиальному напряжению на оси X в точке A , т.е. эпюра нормальных напряжений σ для вписанной окружности принимает форму кольца (рис. 1).

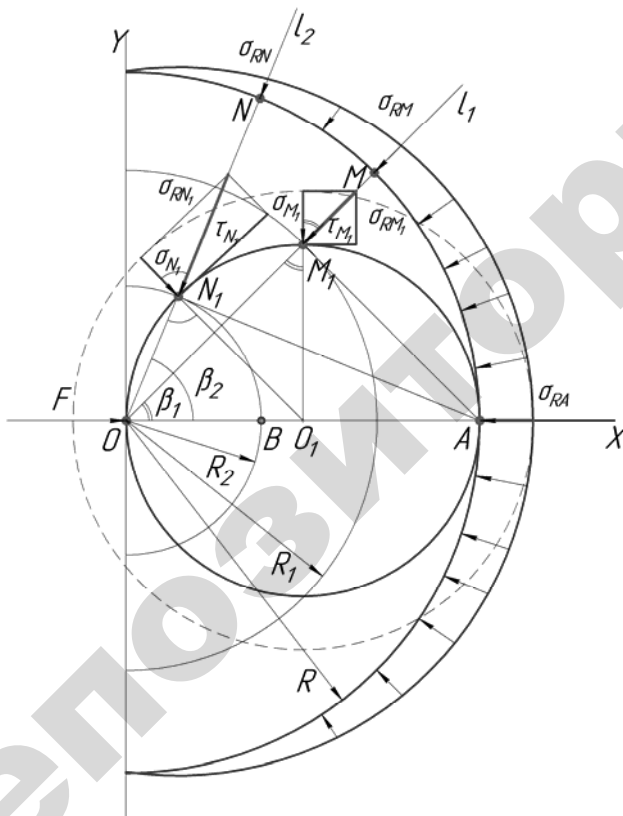


Рисунок 1. Схема к анализу поля напряжений точечного деформатора.

Таким образом, в почвенном массиве перед точкой приложения силы F образуется окружность (в пространстве – сферическая область диаметром

$D=R$), сжимаемая равными нормальными напряжениями, величина которых прямо пропорциональна силе F и обратно пропорциональна квадрату диаметра или площади поверхности сферы D :

$$\sigma = 3F / (2\pi D^2). \quad (6)$$

С увеличением силы F и возрастанием напряжения в точке O диаметр окружности уменьшается. С позиций статики указанная область – самоуравновешенная система, разрушить которую теоретически невозможно: при любом значении силы F сфера будет сжиматься, оставаясь в равновесии.

Определим значения касательных напряжений на окружности D в точке M_1 . Учитывая равенство соответствующих углов $\tau_{M1} = \sigma_{RM1} \cdot \sin\beta_1$ или, подставляя значение σ_{RM1} по выражению (2), получим:

$$\tau_{M1} = 3F \operatorname{tg}\beta_1 / (2\pi R^2). \quad (7)$$

В точке N_1 касательные напряжения будут:

$$\tau_{N1} = 3F \operatorname{tg}\beta_2 / (2\pi R^2), \quad (8)$$

а в общем виде, с учетом формулы (6), изменение касательных напряжений на окружности D определится выражением:

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg}\beta. \quad (9)$$

Следовательно, касательные напряжения вдоль окружности изменяются от нуля на направлении действия силы (ось X) до бесконечности на направлении, перпендикулярном силе F (ось Y). Отсюда следует, что вблизи точки O , вследствие значительных касательных напряжений, создаются условия для разрушения деформатора любой прочности. Практически, острозаточенный лемех или долото активно затупляются именно в начальный период работы, пока лезвие не затупится настолько, что действие указанных выше касательных напряжений сместится в зону налипающей перед ним почвы, т.е. в саму область D . При этом скорость затупления снижается, и некоторое время параметры рабочего органа сохраняют относительно стабильное значение (период нормальной эксплуатации).

Анализируя напряженную область, отметим ещё одно свойство радиальных по отношению к точке O напряжений: их проекция на ось X есть величина постоянная, равная нормальным напряжениям $\sigma = \sigma_{RA}$. Действительно, с учетом выражений (2), (4),

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{RM1} \cdot \cos\beta_1 = \sigma_{RM1} \cdot \cos\beta_2 = \\ &= \sigma = 3F / (2\pi D^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Окружность D смещена относительно начала координат на величину $2a = D$. Уравнение данной окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 2ax. \quad (11)$$

Данное выражение можно рассматривать как функцию двух переменных:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax. \quad (12)$$

Для функции двух переменных формула производной по направлению имеет вид:

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha, \quad (13)$$

где α – угол между осью OX и направлением l .

С учетом выражения (11) производная функции по направлению в любой точке с координатой x_0 определится как:

$$\frac{df}{dl} = (2x_0 - 2a) \cos \alpha + 2\sqrt{2ax_0 - x_0^2} \cdot \sin \alpha. \quad (14)$$

Физический смысл производной по направлению заключён в том, что она показывает скорость изменения значений функции напряжений в направлении l , а градиент функции $f(x, y)$ есть вектор, указывающий направление, в котором эта скорость изменения наибольшая.

По определению градиентом функции f называ-

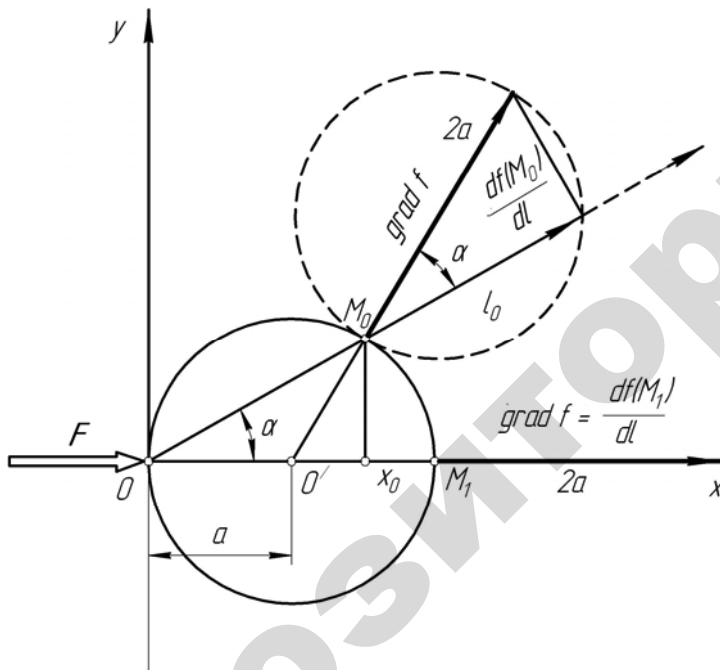


Рисунок 2. Производная по направлению и градиент функции напряжений.

ется вектор, проекции которого на координатные оси равны соответствующим производным функции $f(x, y)$ в рассматриваемой точке:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}, \quad (15)$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} – единичные векторы.

Тогда в точке M_0 проекции градиента на координатные оси будут равны:

$$\text{grad} f(M_0) = \left\{ (2x_0 - 2a); 2\sqrt{2ax_0 - x_0^2} \right\}. \quad (16)$$

Также известно, что производная по направлению $\frac{df}{dl}$ есть скалярное произведение градиента на единичный вектор направления l_0 :

$$\frac{df}{dl} = \text{grad} f \cdot l = |\text{grad} f| \cdot \cos \alpha. \quad (17)$$

Наибольшее значение производная будет иметь в том случае, когда направление l совпадает с направлением градиента, и оно будет равно:

$$|\text{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{4(x_0 - a)^2 + 4(2ax_0 - x_0^2)^2} = 2a. \quad (18)$$

Из курса математики известно [6], что векторное поле \mathbf{A} называется потенциальным, если оно является градиентом некоторого скалярного поля, т.е., если:

$$\mathbf{A} = \text{grad} f, \quad (19)$$

при этом поле f называется потенциальной функцией или скалярным потенциалом поля \mathbf{A} .

С учетом (18) можно говорить, что при взаимодействии точечного деформатора с полупространством образуется векторное поле градиента потенциальной функции f .

С векторным полем \mathbf{A} связываются скалярное поле его дивергенции:

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (20)$$

и векторное поле его ротора:

$$\text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (21)$$

Операции (20), (21) более просто записать с помощью оператора Гамильтона ∇ :

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (22)$$

называемого *набла* и представляющего собой знак действия над полем. С учетом оператора Гамильтона формулы (20) и (21) запишутся как:

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (23)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (24)$$

Комбинацию $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$ можно записать в виде: $\nabla \times (\nabla f)$. Но для «обычного» вектора \mathbf{a} и «обычного» скаляра f всегда:

$$\mathbf{a} \times (\operatorname{grad} f) = 0. \quad (25)$$

Значит, если вместо \mathbf{a} в левую часть подставить его разложение по декартовым осям и произвести вычисления по формальным правилам векторной алгебры, то мы получим нуль. Но вычисление комбинации $\nabla \times (\nabla f)$ производится по тем же формальным правилам, что и (25), только вместо a_x, a_y, a_z надо

взять $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Значит и здесь получится нуль,

т.е. всегда

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0. \quad (26)$$

Известно, что далеко не всякое поле является потенциальным. Именно из (19) и (26) сразу следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad (27)$$

т.е. всякое потенциальное поле является безвихревым. С другой стороны, в курсе математики доказано [7], что если поле \mathbf{A} задано в односвязной области (G), то условие (27) равносильно независимости интеграла $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ от контура интегрирования, или,

что то же, условию

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (28)$$

для любого замкнутого контура (L), расположенного в (G). Таким образом, безвихревое поле, заданное в односвязной области является бесциркуляционным. Там же показано, что из (28) следует, что выражение $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ является полным дифференциалом. Но равенство $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = df$ равносильно (19), т.е. всякое бесциркуляционное поле является потенциальным; обратное тоже верно.

Условия (19), (27), (28) равносильны, т.е. условия потенциальности, отсутствие вихря и отсутствия циркуляции векторного поля эквивалентны.

С учетом вышеизложенного можно утверждать, что поле точечного деформатора потенциально.

Выводы

Полученный результат означает, что на каждую материальную частицу деформируемой среды действует потенциальная сила и, таким образом, вся область деформации способна накапливать (аккумулировать) определенное количество потенциальной

энергии. Достигая предельного значения, эта энергия преобразуется в кинетическую, совершая механическую работу (например, кроша и разрушая пласт почвы на отвале плуга и т.п.).

Важным с точки зрения основных принципов механики является то, что в потенциальном поле действует закон сохранения энергии и деформируемая среда может рассматриваться как консервативная система, в которой сумма потенциальной и кинетической энергии остается величиной постоянной [8]. При этом роль деформатора заключается в возбуждении колебательного процесса превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно и постоянном пополнении потерянной части энергии «колебательного контура» вследствие диссипации, трения и пр.

Исследование этого процесса, описание механизма циркуляции механической энергии в подобных системах представляет, по мнению авторов, важнейшую задачу фундаментальной механики на современном этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагин, А.Т. К вопросу взаимодействия клина с почвой. Обоснование основных параметров агрегатов для послыйного внесения удобрений в почву: в кн. Вопросы земледельческой механики/ А.Т. Вагин. – Мн.: Госиздат БССР, 1965. – Т. 15. – С.4–142.
2. Горячкин, В.П. Собрание сочинений: в 3 т./ В.П. Горячкин. – 2-е изд. – М.: Колос, 1968. – Т. 2. – 455 с.
3. Желиговский, В. А. Элементы теории почвообрабатывающих машин и механической технологии сельскохозяйственных материалов/ В.А. Желиговский// Труды Грузинского сельскохозяйственного института.– Тбилиси, 1960. – 145 с.
4. Чигарев, Ю.В. Математические основы механики почв: учеб. пособие / Ю.В. Чигарев, П.Н. Синкевич. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 164 с.
5. Кузьмицкий, А.В., Бегеня, Г.Ф. Моделирование процесса взаимодействия деформатора с почвой // Сельскохозяйственные машины для уборки зерновых культур, кормов и корнеплодов. Состояние, тенденции и направления развития: сб. докладов Международной научно-практической конференции. Гомель, 22-23 марта 2007 г. / РКУП «ГСКБ по зерноуборочной и кормоуборочной технике», 2007. – С. 163-167.
6. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике/ А.Д. Мышкис.– М: Наука, 1969.– 640 с.
7. Мышкис, А.Д. Математика для вузов: спец. курсы/ А.Д. Мышкис. – М: Наука, 1971.– 632 с.
8. Зоммерфельд, А. Механика/ А. Зоммерфельд, Т.Е.Тамм: пер. с нем. –М.: Гос. издат. иностранной лит., 1947.– С.139.