МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
для подготовки к вступительным испытаниям

Минск
БГАТУ
2020

УДК 51(075)
ББК 22.1я72
О75

Рекомендовано к изданию
кафедрой высшей математики БГАТУ
(протокол № 13 от 9 июня 2020 г.)

Составители:
кандидат физико-математических наук, доцент *И. М. Морозова*,
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Н. С. Нипарко*,
старший преподаватель *Л. В. Лобанок*,
старший преподаватель *О. Н. Кемеш*

О75 **Основные методы решения задач по математике :** пособие / сост.: И. М. Морозова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2020. – 220 с.
ISBN 978-985-25-0055-5.

Кратко изложены основные вопросы программы вступительного испытания по математике с методами и примерами решения конкретных задач. Пособие содержит задания для самостоятельного решения, образцы вариантов экзаменационных заданий по математике в БГАТУ прошлых лет.

Предназначено для абитуриентов Учреждения образования «Белорусский государственный аграрный технический университет».

УДК 51(075)
ББК 22.1я72

ISBN 978-985-25-0055-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вступительные испытания по математике в Белорусском государственном аграрном техническом университете проводятся на основании Программы вступительных испытаний по учебному предмету «Математика» для лиц, имеющих общее среднее образование, для получения высшего образования I ступени или среднего специального образования, утвержденной приказом Министра образования Республики Беларусь. Вступительные испытания призваны обеспечить отбор абитуриентов, имеющих достаточную математическую подготовку для дальнейшего обучения в вузе.

В данном пособии приводятся основные методы решения задач по математике, предлагаемых на вступительных испытаниях, что может помочь абитуриентам вспомнить и систематизировать полученные ранее знания по математике. Вступительные испытания по математике в Белорусском государственном аграрном техническом университете проводятся в письменной форме. Каждый вариант письменной контрольной работы состоит из заданий, которые охватывают основные разделы программы вступительных испытаний по математике за курс средней школы. Для успешной сдачи вступительных экзаменов по математике абитуриент должен обладать знаниями и умениями, определенными в вышеупомянутой Программе вступительных испытаний по учебному предмету «Математика».

В учебном издании рассматриваются основные методы выполнения действий над целыми и дробными числами, выполнения тождественных преобразований алгебраических выражений; решения уравнений, неравенств и их систем, решения текстовых задач, решения геометрических задач, а также методы алгебры и тригонометрии при решении геометрических задач.

Программа вступительных испытаний
по учебному предмету «Математика»
для лиц, имеющих общее среднее образование,
для получения высшего образования I ступени
или среднего специального образования

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа вступительных испытаний по учебному предмету «Математика» предназначена для лиц, поступающих в учреждения среднего специального и (или) высшего образования.

Программа структурирована в соответствии с основными содержательными линиями математического образования.

Вступительные испытания в учреждения высшего образования по учебному предмету «Математика» проводятся в форме централизованного тестирования. Содержание заданий определяется настоящей программой вступительных испытаний, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь.

ТРЕБОВАНИЯ К ПОДГОТОВКЕ АБИТУРИЕНТОВ

Абитуриент должен з н а т ь:

содержание учебного предмета «Математика», представленное в учебной программе по всем содержательным линиям.

Числа и вычисления

Абитуриент должен знать:

основные числовые множества и их обозначения; знать, как обозначаются числовые промежутки, и уметь пользоваться этими обозначениями при решении задач.

Абитуриент должен у м е т ь:

проводить вычисления, обеспечивающие практические потребности: складывать, вычитать, умножать, делить действительные числа; находить значения степени числа с натуральным и целым показателем; выполнять действия над числами, записанными в стандартном виде;

определять порядок выполнения действий в числовых выражениях и находить их значение; находить значение выражения с переменными при данных значениях переменных; сравнивать значения выражений;

округлять числа и результаты вычислений с заданной точностью;

находить модуль числа, знать геометрический смысл модуля числа;

контролировать вычисления оценкой результата на правдоподобие, прикидкой, повторным вычислением, решением одной из обратных задач;

переводить градусную меру углов в радианную и наоборот;

находить значения $\sin\alpha$ $\cos\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}\alpha$ при α, равном $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$, в случае существования этих значений;

находить значения $\arcsin a$ $\arccos a$ при a, равном $0; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1$, и $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$ при a, равном $0; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm\sqrt{3}; \pm 1$.

Выражения и их преобразования

Абитуриент должен у м е т ь:

находить область определения выражения с переменной;

выполнять тождественные преобразования рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических выражений.

Уравнения и неравенства

Абитуриент должен з н а т ь и правильно использовать термины:

уравнение; равносильные уравнения, равносильные неравенства; следствие уравнения; следствие неравенства.

Абитуриент должен у м е т ь:

решать линейные, квадратные уравнения и простейшие рациональные уравнения, сводящиеся к ним;

решать иррациональные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним;

решать системы уравнений с двумя переменными (системы линейных уравнений и системы, в которых одно уравнение линейное, а второе – квадратное);

решать неравенства, двойные неравенства, системы неравенств первой и второй степени с одной переменной, неравенства и системы, сводящиеся к ним;

решать простейшие тригонометрические уравнения $\sin x = a$ $\cos x = a$ $\operatorname{tg} x = a$ $\operatorname{ctg} x = a$ и уравнения, сводящиеся к ним (методами разложения на множители, заменой переменной), однородные тригонометрические уравнения;

решать показательные и логарифмические уравнения на основании свойств показательной и логарифмической функций, с помощью разложения на множители, заменой переменной, решать однородные показательные уравнения;

решать показательные и логарифмические неравенства на основании свойств показательной и логарифмической функций, с помощью разложения на множители, заменой переменной, решать однородные показательные неравенства;

решать простейшие уравнения и неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля;

применять графическую интерпретацию решения уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств;

решать текстовые задачи с помощью уравнений, неравенств и их систем.

Координаты и функции

Абитуриент должен у м е т ь:

строить графики элементарных функций;

использовать свойства функций для решения задач;

использовать особенности графиков четной, нечетной, периодической функций;

интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений. Использовать информацию, представленную в виде таблиц и диаграмм, для составления и решения задач;

записывать уравнение окружности с заданным центром и радиусом; находить длину отрезка, зная координаты его концов;

использовать геометрические представления для решения и исследования уравнений, неравенств, систем;

находить разность арифметической и знаменатель геометрической прогрессии, n-й член и сумму n первых членов арифметической и геометрической прогрессий;

решать задачи на формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

Геометрические фигуры и их свойства

Абитуриент должен у м е т ь:

применять свойства фигур на плоскости и основные отношения планиметрии;

применять свойства пространственных фигур и основные отношения стереометрии;

применять различные методы для решения геометрических задач;

решать задачи на доказательство и на вычисления.

Геометрические величины

Абитуриент должен у м е т ь:

вычислять значения геометрических величин;

находить расстояние от точки до плоскости, расстояние между параллельными прямыми, расстояние между параллельными прямой и плоскостью, расстояние между параллельными плоскостями;

находить угол между прямыми;

находить угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями.

Геометрические построения

Абитуриент должен у м е т ь:

интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную на круговых диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений, изображать на круговых диаграммах информацию, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;

решать основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки;

изображать геометрические фигуры;

строить сечения многогранников плоскостью на основании аксиом и следствий из них;

строить сечения многогранников плоскостью на основании теорем о параллельности прямой и плоскости;

строить сечения цилиндра плоскостями, параллельной и перпендикулярной оси цилиндра;

строить сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Числа и вычисления

Натуральные числа. Сложение, вычитание, умножение и деление натуральных чисел. Сравнение натуральных чисел. Квадрат и куб натурального числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Четные и нечетные числа. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Деление с остатком. Разложение натурального числа на простые множители. Общий делитель, наибольший общий делитель. Общее кратное, наименьшее общее кратное.

Целые числа. Действия над целыми числами.

Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Основное свойство дроби. Сокращение обыкновенных дробей. Сравнение обыкновенных дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей.

Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Приближенное значение числа. Округление чисел.

Рациональные числа. Действия над рациональными числами.

Иррациональные числа. Действительные числа. Координатная прямая. Изображение чисел на координатной прямой. Модуль действительного числа. Геометрический смысл модуля.

Проценты. Пропорция. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность.

Степень с натуральным и целым показателем.

Степень с рациональным показателем.

Степень с действительным показателем.

Логарифм числа. Десятичный логарифм.

Радиан. Число π.

Синус, косинус, тангенс, котангенс числа.

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.

Выражения и их преобразования

Числовые выражения. Алгебраические выражения. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$;

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

Одночлен и многочлен. Сложение, вычитание, умножение многочленов, деление многочлена на одночлен. Разложение многочлена на множители. Тождественные преобразования многочленов.

Рациональные дроби. Основное свойство дроби. Действия над алгебраическими дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений.

Квадратный трехчлен. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Корень n-й степени ($n \in N$, $n \neq 1$), его свойства для случаев четного и нечетного значений числа n. Арифметический корень. Свойства арифметических корней.

Свойства степеней с натуральным и целым показателями.

Свойства степеней с рациональными показателями.

Основное логарифмическое тождество.

Логарифм произведения, степени, частного. Переход к логарифму с другим основанием.

Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы.

Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одной переменной.

Формулы сложения.

Формулы приведения.

Формулы для $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Представление произведением выражений $\cos \alpha \pm \cos \beta$, $\sin \alpha \pm \sin \beta$.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Уравнения и неравенства

Уравнения. Корень уравнения. Равносильные уравнения.

Линейные уравнения.

Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения.

Теорема Виета.

Рациональные уравнения.

Иррациональные уравнения.

Тригонометрические уравнения.

Числовые неравенства, их геометрическая интерпретация. Свойства числовых неравенств.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств с одной переменной. Двойные неравенства. Равносильные неравенства.

Линейные неравенства.

Квадратные неравенства.

Рациональные неравенства.

Системы линейных, квадратных, рациональных уравнений с двумя переменными.

Системы линейных, квадратных, рациональных неравенств с одной переменной. Двойные неравенства. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Координаты и функции

Линейные и столбчатые диаграммы.

Координатный луч. Координата точки.

Координатная прямая и координатная плоскость. Определение координат точки на координатной прямой и на координатной плоскости. Построение точки по ее координатам.

Прямоугольная система координат. Расстояние между двумя точками на координатной плоскости.

Понятие функции. Область определения функции. Область (множество) значений функции. Способы задания функции. График функции. Нули функции. Промежутки, где функция сохраняет свой знак. Четность и нечетность функции. Периодичность функции. Возрастание и убывание функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

График уравнения с двумя переменными. Уравнения прямой и окружности. Геометрическая интерпретация решений системы двух уравнений с двумя переменными.

Функция $y=ax+b$, ее свойства и график.

Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, ее свойства и график.

Функция $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$, ее свойства и график.

Функция $y=x^3$, ее свойства и график.

Функция $y=\sqrt{x}$, ее свойства и график.

Функция $y=|x|$, ее свойства и график.

Функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, ее свойства и график.

Функция $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, ее свойства и график.

Функция $y=\sin x$, ее свойства и график.

Функция $y=\cos x$, ее свойства и график.

Функция $y=\mathrm{tg}\, x$, ее свойства и график.

Степенная функция с рациональным показателем.

Числовая последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессии.

Геометрические фигуры и их свойства

Точка, прямая, плоскость.

Луч, отрезок, угол.

Биссектриса угла.

Центрально-симметричные и осесимметричные фигуры.

Вертикальные углы, смежные углы.

Многоугольник. Стороны, углы, диагонали многоугольника.

Треугольник, его медиана, биссектриса, высота. Прямоугольный, остроугольный, тупоугольный треугольники. Свойство биссектрисы треугольника. Свойство медианы треугольника. Соотношения между сторонами и углами произвольного и прямоугольного треугольника.

Равенство треугольников. Признаки равенства треугольников.

Равнобедренный треугольник. Свойства и признаки равнобедренного треугольника.

Равносторонний треугольник.

Параллельные прямые. Признаки параллельности прямых. Свойства параллельных прямых.

Перпендикулярные прямые. Перпендикуляр и наклонная.

Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.

Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

Теорема Фалеса.

Подобие треугольников. Коэффициент подобия. Признаки подобия треугольников. Свойство площадей подобных треугольников.

Теорема Пифагора.

Средняя линия треугольника и ее свойства. Средняя линия трапеции и ее свойства.

Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника. Неравенство треугольника.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Дуга окружности.

Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности.

Центральные и вписанные углы.

Замечательные точки треугольника. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Вписанные и описанные четырехугольники.

Теорема синусов. Теорема косинусов. Решение треугольников.

Правильные многоугольники.

Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей.

Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых.

Прямая, параллельная плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости.

Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Угол между прямыми в пространстве.

Параллельные плоскости. Признак параллельности плоскостей.

Свойства параллельных прямых и плоскостей в пространстве.

Перпендикулярные прямые.

Прямая, перпендикулярная плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Теорема о трех перпендикулярах.

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла.

Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности плоскостей.

Свойства перпендикулярных прямых и плоскостей.

Многогранники и их изображения.

Призма, прямая и правильная призмы, параллелепипед. Пирамида, правильная пирамида. Усеченная пирамида.

Цилиндр. Осевое сечение цилиндра. Развертка боковой поверхности цилиндра.

Конус. Осевое сечение конуса. Развертка боковой поверхности конуса Усеченный конус.

Сфера. Шар. Сечения сферы и шара плоскостью. Касательная плоскость к сфере.

Геометрические величины

Длина отрезка. Расстояние между двумя точками. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми.

Длина ломаной. Периметр многоугольника.

Длина окружности и ее дуги.

Площадь круга и его сектора.

Измерения центральных и вписанных углов.

Площадь фигуры. Площадь треугольника, параллелограмма, прямоугольника, ромба, квадрата, трапеции.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными прямыми. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. Расстояние между параллельными плоскостями.

Угол между прямыми. Угол между прямыми в пространстве. Угол между прямой и плоскостью. Мера двугранного угла. Угол между плоскостями.

Площади боковой и полной поверхностей призмы. Площадь боковой и полной поверхности прямой призмы.

Площади боковой и полной поверхностей пирамиды.

Объем тела. Объем призмы. Объем пирамиды.

Площадь сферы.

Площади боковой и полной поверхностей цилиндра.

Площади боковой и полной поверхностей конуса.

Объем цилиндра. Объем конуса. Объем шара.

Геометрические построения

Построение прямого угла с помощью угольника.

Построение угла с данной градусной мерой с помощью транспортира.

Круговые диаграммы.

Построение с помощью циркуля и линейки серединного перпендикуляра к отрезку; угла, равного данному; биссектрисы угла.

Деление отрезка на пропорциональные части.

Построение правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника.

Сечения многогранников плоскостями.

Порядок выполнения арифметических действий

Если выражение не содержит скобок, то действия выполняются в следующем порядке:

1) возведение в степень и извлечение корня в порядке их следования слева направо;
2) умножение и деление в порядке их следования слева направо;
3) сложение и вычитание в порядке их следования слева направо.

Для изменения порядка выполнения действий применяются скобки. Если выражение содержит скобки, то действия в скобках выполняются в первую очередь (с соблюдением указанного выше порядка).

Пример. Вычислить $7 + (17 - 3 \cdot 4)^2 \cdot 2$.

Решение. В соответствии с указанными выше правилами последовательно вычисляем:

$$7 + (17 - 3 \cdot 4)^2 \cdot 2 = 7 + (17 - 12)^2 \cdot 2 = 7 + 5^2 \cdot 2 = 7 + 25 \cdot 2 = 7 + 50 = 57.$$

Ответ: 57.

Пример. Вычислить значение выражения $(a+b):(c+d) - \dfrac{a+c}{b+d}$, если $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 1$.

Решение. Подставляем заданные значения вместо переменных и вычисляем в соответствии с указанными выше правилами. Отметим, что знак дроби эквивалентен знаку деления, поэтому и числитель, и знаменатель дроби считаются заключенными в скобки, хотя эти скобки там явно и не указаны.

$$(a+b):(c+d) - \frac{a+c}{b+d} = (6+2):(3+1) - \frac{6+3}{2+1} = 8:4 - \frac{9}{3} = 2 - 3 = -1$$

Ответ: – 1.

Пример. Вычислить $(2,4+3,7-1,6)\cdot(3,7+0,3)-\dfrac{3,1+5,9}{0,4+2,6}$.

Решение. В первую очередь следует выполнить действия в скобках (знак дроби предполагает наличие скобок в числителе и знаменателе), затем следует выполнить все умножения и деления (слева направо), а затем все сложения и вычитания (тоже слева направо).

$$(2,4+3,7-1,6)\cdot(3,7+0,3)-\frac{3,1+5,9}{0,4+2,6}=4,5\cdot 4-\frac{9}{3}=18-3=15.$$

Ответ: 15.

Действия с целыми числами

Умножение

✓ При умножении (делении) положительных чисел получается положительное число.

✓ При умножении (делении) положительного (отрицательного) числа на отрицательное (положительное) число получается отрицательное число.

✓ При умножении (делении) двух отрицательных чисел получается положительное число.

Правило	Примеры
$+\cdot+=+$ $+:+=+$	$7\cdot 2=14$ $24:3=8$
$+\cdot-=+$ $+:-=-$	$7\cdot(-2)=-14$ $24:(-3)=-8$
$-\cdot+=+$ $-:+=-$	$-7\cdot 2=-14$ $-24:3=-8$
$-\cdot-=+$ $-:-=+$	$-7\cdot(-2)=14$ $-24:(-3)=8$

Вычитание положительных чисел

При вычитании одного положительного числа из другого нужно из большего числа вычесть меньшее и поставить знак большего.

Правило	Примеры		
«От большего меньшее и знак большего»	$7-2=5$ $2-7=-5$	$9-3=6$ $3-9=-6$	$17-14=3$ $14-17=-3$

Сложение

✓ При сложении двух чисел с одинаковым знаком складываются их абсолютные величины, а перед суммой ставится их общий знак.

✓ При сложении двух чисел с разными знаками нужно взять их абсолютные величины и из большей вычесть меньшую, а знак поставить того числа, у которого абсолютная величина больше (аналогично вычитанию положительных чисел).

Следует отметить, что перед выполнением непосредственно сложений или вычитаний рекомендуется упростить все слагаемые с учетом правил «умножения знаков». Так, например, $3+(-9)=3-9$, $3-(-9)=3+9$.

Правило	Когда применяется	Примеры
Сложение положительных	Числа одного знака	$7+2=9$ $-7+(-2)=-7-2=-(7+2)=-9$
Вычитание положительных	Числа разных знаков	$-7+2=2-7=-(7-2)=-5$ $7+(-2)=7-2=5$

Пример. Вычислить $2\cdot(-3)-\dfrac{-18}{2}$.

Решение. Последовательно выполняем действия и учитываем знаки на каждом шаге:

$$2\cdot(-3)-\frac{-18}{2}=-6-(-9)=-6+9=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Вычислить $-7+(4-8)\cdot(6-3)-\dfrac{12-21}{-3}\cdot(9-1)$.

Решение. Последовательно выполняем действия и учитываем знаки на каждом шаге:

$$-7+(4-8)\cdot(6-3)-\frac{12-21}{-3}\cdot(9-1)=-7+(-4)\cdot 3-\frac{-9}{-3}\cdot 8=$$
$$=-7+(-12)-3\cdot 8=-7-12-24=-43.$$

Ответ: – 43.

Методы нахождения НОД и НОК

Делителем натурального числа *a* называют натуральное число, на которое число *a* делится без остатка. Например, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 – делители числа 12.

Кратным натурального числа *b* называют натуральное число, которое делится без остатка на *b*. Например, числа 12, 24, 36, … кратны числу 12.

Простым называют число, которое делится только на единицу и себя. Составным называют число, которое имеет более двух делителей. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам. Запись составного числа в виде произведения только простых чисел называется разложением составного числа на простые множители. Любое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.

НОД (наибольший общий делитель) данных натуральных чисел – наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из этих чисел. Наибольший общий делитель данных чисел равен произведению общих простых множителей в разложениях этих чисел.

НОК (наименьшее общее кратное) данных натуральных чисел – наименьшее натуральное число, кратное каждому из данных чисел. Например, НОД(12, 42) = 2·3 = 6, т. к. 12 = 2·2·3, 42 = 2·3·7, их общие простые множители 2 и 3. НОК(12, 42) = 84, т.к. это самое маленькое число, которое делится и на 12 и на 42 без остатка.

Для нахождения НОК нескольких данных натуральных чисел надо разложить каждое из данных чисел на простые множители; а затем выписать разложение большего из чисел и умножить его на недостающие множители из разложений других чисел.

Первый метод. Чтобы найти НОД нескольких чисел, достаточно разложить их на простые множители, а затем перемножить между собой те из этих множителей, которые являлись общими для всех чисел.

Второй метод. Чтобы найти НОД нескольких чисел, разлагают эти числа на простые множители, а затем берут произведение степеней различных простых множителей, входящих в состав всех данных чисел, причем каждый множитель берется с наименьшим показателем, с каким он встречается в составе данных чисел.

Третий метод (алгоритм Евклида). Чтобы найти НОД двух чисел, делят большее из них на меньшее, потом меньшее на первый остаток, затем первый остаток на второй, второй на третий и т.д. до тех пор, пока не получится в остатке нуль; тогда последний делитель будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Чтобы найти третьим методом НОД трех и более чисел, находят сначала наибольший общий делитель каких-нибудь двух из них, затем – наибольший общий делитель найденного делителя и какого-нибудь третьего данного числа, далее – наибольший общий делитель последнего делителя и четвертого данного числа и т. д.

Первый метод. Чтобы найти НОК нескольких чисел, разлагают все эти числа на простые множители; а затем, взяв разложение одного из них, приписывают к нему недостающие простые множители из разложения другого числа; к этому произведению приписывают недостающие в нем простые множители из разложения третьего числа и т. д. до последнего. Полученное таким путем произведение и будет НОК данных чисел.

Второй метод. Чтобы найти НОК нескольких чисел, разлагают их на простые множители и составляют произведение степеней всех различных простых множителей, входящих в разложение данных чисел, причем каждый множитель берется с наибольшим показателем, с каким он встречается в этих разложениях.

Третий метод. Чтобы найти НОК двух чисел, произведению этих чисел делят на их НОД.

Чтобы найти НОК трех или более чисел, сначала находят НОК каких-нибудь двух из них, потом – НОК этого наименьшего кратного и какого-нибудь третьего данного числа, затем – НОК этого наименьшего общего кратного и четвертого данного числа и т. д.

Пример. Даны числа 360 и 2646. Найти их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Решение. Раскладываем данные числа на простые множители.

$$\begin{array}{r|l} 360 & \underline{\mathbf{2}} \\ 180 & \mathbf{2} \\ 90 & \mathbf{2} \\ 45 & \underline{\mathbf{3}} \\ 15 & \underline{\mathbf{3}} \\ 5 & \mathbf{5} \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2646 & \underline{\mathbf{2}} \\ 1323 & \underline{\mathbf{3}} \\ 441 & \underline{\mathbf{3}} \\ 147 & \mathbf{3} \\ 49 & \mathbf{7} \\ 7 & \mathbf{7} \\ 1 & \end{array}$$

Совпадающие сомножители для наглядности подчеркнуты. Таким образом, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, а $2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$.

Находим НОД.

По первому методу. Перемножаем подчеркнутые сомножители в одном из чисел. $НОД(360{,}2646) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

По второму методу. Так как $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, а $2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, то $НОД(360{,}2646) = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 18$.

По третьему методу. При делении 2646 на 360 в частном получаем 7 и в остатке 126. При делени меньшего числа 360 на остаток 126 в частном получаем 2 и в остатке 108. При делени большего остатка 126 на меньший 108 в частном получаем 1 и в остатке 18. Так как больший остаток 108 нацело делится на меньший остаток 18, то $НОД(360{,}2646) = 18$.

Находим НОК.

По первому методу. Перемножаем все сомножители одного числа (фактически, само это число) на неподчеркнутые сомножители другого числа.

$$НОК(360{,}2646) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}_{360} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 52920.$$

По второму методу. Так как $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, а $2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$, то $НОК(360{,}2646) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 52920$.

По третьему методу.

$$\text{НОК}(360{,}2646) = \frac{360 \cdot 2646}{\text{НОД}(360{,}2646)} = \frac{952560}{18} = 52920\,.$$

Ответ: $\text{НОД}(360{,}2646) = 18$, $\text{НОК}(360{,}2646) = 52920$.

Пример. Даны числа 1008 и 1350. Найти их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Решение. Так как $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, а $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, то $\text{НОД}(1008{,}1350) = 2 \cdot 3^2 = 18$,

$\text{НОК}(1008{,}1350) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 75600$.

Ответ: $\text{НОД}(1008{,}1350) = 18$, $\text{НОК}(1008{,}1350) = 75600$.

Пример. Найти наибольший общий делитель чисел 76, 171, 437.

Решение. Из разложения на множители $76 = 2^2 \cdot 19$, $171 = 3^2 \cdot 19$, $437 = 23 \cdot 19$ определяем, что $\text{НОД}(76{,}171{,}437) = 19$.

Ответ: 19.

Признаки делимости

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последней цифрой является 0, 2, 4, 6 или 8.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда его последние две цифры образуют число, делящееся на 4.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3;

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последней цифрой являются 5 или 0.

Число делится на 6 тогда и только тогда, если оно одновременно делится на 2 и на 3.

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три последние цифры его образуют число, делящееся на 8.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

> **Пример.** Найдите такое шестизначное число вида $\overline{y7x38y}$, чтобы оно делилось нацело на 45. .

Решение. Чтобы число делилось нацело на 45, оно должно делиться на 5 и на 9. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последней цифрой являются 5 или 0. Однако в данном числе последняя цифра нулем быть не может, так как она же является и первой цифрой, а в таком случае число было бы пятизначным. Следовательно, последняя цифра $x = 5$. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Сумма цифр числа $\overline{57x385}$ равна $28 + x$. Единственным подходящим вариантом является $x = 8$.

Ответ: 578385.

Действия с обыкновенными дробями

Правильная дробь – дробь, у которой числитель меньше знаменателя. У неправильной дроби числитель больше знаменателя или равен знаменателю.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь. Деление и числителя и знаменателя дроби на их общий делитель, отличный от единицы, называют сокращением дроби. Например: $\frac{18}{26} = \frac{\cancel{2} \cdot 9}{\cancel{2} \cdot 13} = \frac{9}{13}$.

Число, состоящее из целой части и дробной части, называется смешанным. Например: $2\frac{1}{6}$.

Чтобы неправильную дробь представить в виде смешанного числа, надо разделить числитель дроби на знаменатель.

Чтобы представить смешанное число в виде неправильной дроби, нужно умножить целую часть смешанного числа на знаменатель, к полученному результату прибавить числитель дробной части и записать в числителе неправильной дроби, а знаменатель оставить тот же. Например: $2\frac{1}{8}=\frac{2\cdot 8+1}{8}=\frac{17}{8}$.

Сравнение дробей. Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, знаменатель которой меньше, например, $\frac{7}{8}>\frac{7}{10}$. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та больше, числитель которой больше, например, $\frac{3}{15}<\frac{7}{15}$.

Для сравнения дробей, у которых числители и знаменатели различны, необходимо привести дроби к общему знаменателю. Например, чтобы сравнить две дроби $\frac{1}{6}$ и $\frac{3}{10}$, надо привести их к общему знаменателю. $\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{5}{30}$; $\frac{3}{10}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{9}{30}$. Значит $\frac{1}{6}<\frac{3}{10}$, т.к. $\frac{5}{30}<\frac{9}{30}$.

Сложение и вычитание дробей. Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а для того, чтобы вычесть дроби, надо вычесть их числители (в том же порядке), знаменатель при этом остается неизменным. Полученная сумма или разность будет числителем результата. Например, $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$.

Если знаменатели дробей различны, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю. А затем выполнить действия с числителями. Например, $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{1\cdot 4}{4\cdot 4}+\frac{3}{16}=\frac{4}{16}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$.

При сложении смешанных чисел их целые и дробные части складываются отдельно. При вычитании смешанных чисел мы рекомендуем сначала преобразовать их к виду неправильных дробей, затем выполнить вычитание дробей, а после этого вновь привести результата, если потребуется, к виду смешанного числа. Например,

$$1\frac{1}{4}-2\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 4+1}{4}-\frac{2\cdot 5+3}{5}=\frac{5}{4}+\frac{13}{5}=$$
$$\frac{5\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{13\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{25}{20}+\frac{52}{20}=\frac{77}{20}=3\frac{17}{20}.$$

Умножение дробей. Для перемножения дробей необходимо перемножить отдельно их числители и знаменатели. Например, $-\frac{3}{4}\cdot 2\frac{3}{7}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2\cdot 7+3}{7}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{17}{7}=-\frac{3\cdot 17}{4\cdot 7}=-\frac{51}{28}=-1\frac{23}{28}$.

Деление дробей. Для того, чтобы разделить две дроби необходимо первую дробь умножить на дробь обратную второй дроби. Например, $\frac{1}{4}:\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}=\frac{1\cdot 7}{4\cdot 2}=\frac{7}{8}$.

Пример. Вычислить $\left(-\frac{1}{3}+0{,}12-1\right)\cdot 1\frac{2}{91}+3{,}2:1\frac{3}{5}$.

Решение. В данном примере используются действия с обыкновенными дробями. Дроби $\frac{1}{3}$ и $1\frac{2}{91}$ нельзя преобразовать в конечную десятичную дробь, следовательно, вычисления необходимо выполнять, перейдя к обыкновенным дробям.

1) $-\frac{1}{3}+0{,}12-1=-\frac{1}{3}+\frac{12}{100}-1=-\frac{1}{3}+\frac{3}{25}-\frac{1}{1}=\frac{-25+9-75}{75}=-\frac{91}{75}$;

2) $-\frac{91}{75}\cdot 1\frac{2}{91}=-\frac{91}{75}\cdot\frac{1\cdot 91+2}{91}=-\frac{91}{75}\cdot\frac{93}{91}=-\frac{93}{75}=-\frac{31}{25}$;

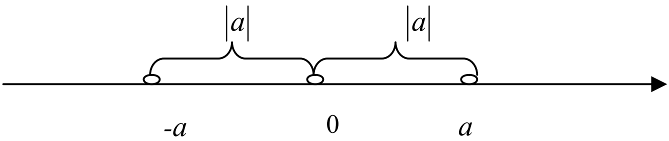
3) $3{,}2:1\frac{3}{5}=3\frac{2}{10}:1\frac{3}{5}=3\frac{1}{5}:1\frac{3}{5}=\frac{16}{5}:\frac{8}{5}=\frac{16}{5}\cdot\frac{5}{8}=2$;

4) $-\frac{31}{25}+\frac{2}{1}=\frac{-31+2\cdot 25}{25}=\frac{-31+50}{25}=\frac{19}{25}=0{,}76$. Иначе это действие можно выполнить так: $-\frac{31}{25}+2=-1{,}24+2=0{,}76$.

Ответ: 0,76.

Методы преобразования выражений, содержащих модули

Понятие модуля (абсолютной величины) имеет геометрическую и алгебраическую интерпретацию. Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от начала отсчета до точки, изображающей число **а**. Если $a \neq 0$, то на координатной прямой существуют две точки a и $-a$, равноудаленные от нуля, модули которых равны.



Алгебраическое определение модуля следующее:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Пример. Вычислить $|2-3{,}5| - |-2-4|$.

Решение. Применяем геометрическое определение модуля числа. $|2-3{,}5| - |-2-4| = |-1{,}5| - |-6| = 1{,}5 - 6 = -4{,}5.$

Ответ: – 4,5.

Пример. Упростить выражение $\frac{|x-2|}{|3-x|} - \frac{|2-x|}{|x-3|}$ при $x < 2$.

Решение. Так как $x-2<0, 2-x>0$, $x-3>0$, $3-x<0$ для всех $x<2$, то, используя алгебраическое определение модуля, получаем

$$\frac{|x-2|}{|3-x|} - \frac{|2-x|}{|x-3|} = \frac{2-x}{3-x} - \frac{2-x}{3-x} = 0.$$

Ответ: 0.

Пример. Упростить выражение $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}$ при $x\in(-\infty;-3)$.

Решение. Для подкоренных выражений применяем формулы сокращенного умножения.

$$\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=$$

$$=|x+3|+|x-2|=-x-3-x+2=-2x-1, \text{ т.к. } x+3<0, x-2<0$$

для $x\in(-\infty;-3)$

Ответ: $-2x-1$.

Методы преобразования выражений, содержащих степени и арифметические корни

Преобразования выражений могут быть основаны на свойствах степеней и арифметических корней. Если $n,\ k\in \boldsymbol{N};\ x,\ y\in \boldsymbol{R}$, $a,\ b>0$, то верны следующие равенства:

1. $a^0=1$. **2.** $a^1=a$. **3.** $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$.

4. $a^xa^y=a^{x+y}$. **5.** $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$. **6.** $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$.

7. $(ab)^x=a^xb^x$. **8.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

9. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$; $n\neq 1$. **10.** $a^{\frac{k}{n}}=\sqrt[n]{a^k}$; $n\neq 1$.

11. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; $n,\ k\neq 1$. **12.** $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$; $n\neq 1$.

13. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $n\neq 1,\ b\neq 0$. **14.** $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; $n\neq 1$

15. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$; $n\neq 1$. **16.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a; n\neq 1, a\geq 0.$

17. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$; $0 \le a < b$.

18. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \boldsymbol{R}$.

19. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $a \in \boldsymbol{R}$.

20. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $a \in \boldsymbol{R}$.

21. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Пример. Вычислить $1{,}2 \cdot \left(\dfrac{36}{25}\right)^{-1} \cdot \left(1\dfrac{11}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + (1{,}4)^0$.

Решение. В данном примере используются свойства степеней.

$$1{,}2 \cdot \left(\frac{36}{25}\right)^{-1} \cdot \left(1\frac{11}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + (1{,}4)^0 = 1\frac{2}{10} \cdot \left(\frac{6^2}{5^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1 \cdot 25 + 11}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 =$$

$$= 1\frac{1}{5} \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{36}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{6}{5} \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-1} \cdot \left(\frac{36}{25}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 =$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \cdot \sqrt{\frac{36}{25}} + 1 = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{6}{5} + 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^{1-2+1} + 1 = \left(\frac{6}{5}\right)^0 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример. Упростить до числа $(x+y)^{-1} : \dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} - \left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)^{-1}$.

Решение. Применяя свойства степеней, получаем:

1) $(x+y)^{-1} = \dfrac{1}{x+y}$;

2) $\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} = \dfrac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} = \dfrac{\dfrac{y^2 + x^2}{x^2 \cdot y^2}}{\dfrac{x+y}{x \cdot y}} = \dfrac{(y^2 + x^2)xy}{(x+y)x^2 \cdot y^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{xy(x+y)}$;

3) $\frac{1}{x+y}:\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}=\frac{1}{x+y}\cdot\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}=\frac{xy}{x^2+y^2}$;

4) $\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^{-1}=\frac{xy}{x^2+y^2}$;

5) $\frac{xy}{x^2+y^2}-\frac{xy}{x^2+y^2}=0$.

Ответ: 0.

Пример. Вычислить $\left(\sqrt{8}-\sqrt{32}\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)$.

Решение. Раскроем скобки и преобразуем каждое слагаемое, используя свойства арифметического корня:

$$\left(\sqrt{8}-\sqrt{32}\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{32}-\sqrt{2}+\sqrt{18}=$$
$$=\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{2\cdot 16}-\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 9}=\sqrt{2}\sqrt{4}-\sqrt{2}\sqrt{16}-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{9}=$$
$$=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}-\sqrt{2}+3\sqrt{2}=0$$

Ответ: 0.

Методы вычислений, основанные на применении формул сокращенного умножения

Для упрощения вычислений следует помнить, что для любых чисел *a, b,* и *c* верны следующие равенства:

1. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. **2.** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$.

4. $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$.

Пример. Упростить выражение $\left(\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}-\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}\right):(2b^2)$.

Решение. Продемонстрируем применение формул сокращенного умножения.

1) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2-b^2}-\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2}=\dfrac{\left(a^2\right)^2-\left(b^2\right)^2}{a^2-b^2}-\dfrac{\left(a^2\right)^2-\left(b^2\right)^2}{a^2+b^2}=$

$=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2}-\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}{a^2+b^2}=$

$=a^2+b^2-\left(a^2-b^2\right)=a^2+b^2-a^2+b^2=2b^2$;

2) $2b^2:(2b^2)=1$.

Ответ: 1.

Упражнения для самостоятельного решения

1.1. Из чисел 3, 2, 14, 9, 126 выберите, те которые делятся на 2 и найдите их сумму.

1.2. Какие из чисел 1, 5, 15, 62 кратны 5? Найдите их произведение.

1.3. Какие из чисел 56, 45, 89, 38, 96 делятся на 3? Найдите их сумму.

Вычислить:

1.4. а) $2:(7-9)-3$; **б)** $0,5+3\cdot(-5+2,5)$; **в)** $1,2-2\cdot(-3-1,5)$;

1.5. а) $\dfrac{1,2+\dfrac{1}{5}}{5-9}$; **б)** $\dfrac{0,3+\dfrac{1}{5}}{3^0-2}$; **в)** $\dfrac{1,3-1\dfrac{1}{5}}{11^0+2,5}$; **г)** $1+\dfrac{4^{-1}-0,25}{(-5)^0+4,5}$;

1.6. а) $\left(1\dfrac{1}{2}+0,5\right):2,3+1\dfrac{1}{4}-0,25$; **б)** $0,6:\left(\dfrac{1}{2}-1,5\right)\cdot 2,5+1\dfrac{1}{8}-4$;

1.7. а) $|-5|-|-6|+|2-8|$; **б)** $\left||2-3|-|7-2|\right|$; **в)** $\left||1,2-2|-|9-6|\right|$;

1.8. а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2}:6^2$; **б)** $1\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$; **в)** $\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{5}{16}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^{2}$;

1.9. а) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{75}\right)-\left(5\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$; **б)** $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{8}\right)+(6\sqrt{2}-\sqrt{12})$;

в) $20\sqrt{64^{-1}}-0,4\sqrt{0,8^{-2}}$; **г)** $\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

д) $\dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{7}+\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$; **е)** $\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$;

1.10. а) $\dfrac{3\cdot 3^{-5}\cdot 5^{5}}{3^{-4}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{6}}$; **б)** $\dfrac{1000\cdot 10^{-5}\cdot 100^{5}}{2^{5}\cdot 5^{10}}$.

1.11. Найти 20% числа A, если A = $\dfrac{3-2{,}5}{3-\dfrac{1}{2}}$.

1.12. Найти 25% числа B, если B = $\dfrac{3-5^{0}}{\left(5{,}6-\dfrac{3}{5}\right)}$.

1.13. Вычислить:

а) $\dfrac{6}{\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$; **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}-5}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+5}+\dfrac{\sqrt{3}}{11}$

г) $\dfrac{2^{2}-7^{2}}{4^{2}-5^{2}}$; **д)** $\dfrac{40{,}5^{2}-4{,}5^{2}}{8{,}5^{2}-3{,}5^{2}}$; **е)** $\dfrac{8{,}7^{2}-6{,}5^{2}+2{,}2\cdot 2{,}8}{4{,}1^{2}-1{,}9^{2}}$.

1.14. Найти значение выражения

а) $45b^{2}a+75a^{2}b+2a$, если $a=-\dfrac{1}{5}$, $b=\dfrac{2}{3}$.

б) $-4xy+4x^{2}+y^{2}$, если $x=3$, $y=9$.

Упростить:

1.15. а) $(x+2)^{2}-(x-3)^{2}-10x$; **б)** $2a(3x-2a)-3x(2a-1)-3x$;

в) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\cdot 2xy$; **г)** $\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{a}\right)\cdot\dfrac{ab}{2}$; **д)** $\dfrac{xy+y}{y}-x+5$;

1.16. $\left(\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{a-b}{a}\right):\dfrac{1}{ab}-2ab$; **1.17.** $\left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{1}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{2}-y^{2}}{2y}$;

1.18. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}\right)\sqrt{a^{2}-b^{2}}-\sqrt{a-b}$;

1.19. а) $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}:\dfrac{x^2-y^2}{x}-\dfrac{x}{(x-y)^2}$;

б) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)^{-1}(b+a)^2+\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)\left(b^2-a^2\right)^{-2}$;

1.20. а) $|x-5|-|x+9|$, если $x<-9$;

б) $|x+8|-|x-9|$**,** если $-8<x<9$;

в) $\sqrt{x^2+10x+25}-\sqrt{x^2-6x+9}$, если $x<-5$;

г) $\left|x^2+100\right|+\left|x^2-x+2\right|-\left|-2x^2\right|$;

д) $|x|-|5-x|$, если $x=-1234567890$.

1.21. Найти значение выражения:

а) $\sqrt[6]{441}\cdot\sqrt[3]{21}\cdot\sqrt[3]{6+\sqrt{15}}\sqrt[6]{51-12\sqrt{15}}$;

б) $\sqrt{a+32\sqrt{a-256}}-\sqrt{a-32\sqrt{a-256}}$, если $a=512{,}2$;

в) $100\left((a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}\right)$, если $a=\left(3+\sqrt{6}\right)^{-1}$ и $b=\left(3-\sqrt{6}\right)^{-1}$;

г) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$, если $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=2$;

д) $\dfrac{2a^2+ab+b^2}{b^2-2a^2}$, если $\dfrac{a+2b}{2a-b}=-7$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Уравнение вида $ax+b=0$, где a и b – некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Уравнение второй степени с одной переменной вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c – некоторые действительные числа ($a \neq 0$), называется квадратным уравнением.

Биквадратным уравнением называется уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a,b,c \in R$, $(a \neq 0)$.

Рациональным называется уравнение вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, где

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad (Q(x) \neq 0).$$

Иррациональными называются уравнения, содержащие выражения с неизвестными под знаком корня или в дробной степени.

Уравнение, содержащее выражение, стоящее под знаком модуля, называется уравнением с модулем.

Число x, которое при подстановке в уравнение обращает его в верное числовое равенство, называется решением или корнем уравнения.

Методы решения линейных уравнений

1) Если $a \neq 0$, то линейное уравнение $ax+b=0$ имеет единственный корень $x=-\dfrac{b}{a}$.

2) Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то линейное уравнение $ax+b=0$ не имеет корней.

3) Если $a = 0$ и $b = 0$, то линейное уравнение $ax+b=0$ имеет бесконечное множество корней.

Пример. Решить уравнения: 1) $\frac{4}{3}x=16$; 2) $\frac{11}{5}x=\frac{22}{15}$; 3) $\frac{1}{2}x=1$.

Решение.

1) $x=\dfrac{16}{\frac{4}{3}}=16\cdot\dfrac{3}{4}=12$; 2) $x=\dfrac{\frac{22}{15}}{\frac{11}{5}}=\dfrac{22}{15}\cdot\dfrac{5}{11}=\dfrac{2}{3}$; 3) $x=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=1\cdot\dfrac{2}{1}=2$.

Пример. Найти наибольший целый отрицательный корень уравнения $\frac{7}{9}(4-x)=\frac{28-7x}{9}$.

Решение. $\dfrac{7(4-x)}{9}=\dfrac{28-7x}{9}\Rightarrow\dfrac{28-7x}{9}=\dfrac{28-7x}{9}\Rightarrow 1\equiv 1\Rightarrow x\in R$.

Наибольший целый отрицательный $x = -1$.

Ответ: – 1.

Пример. Найти наименьшее целое положительное решение уравнения $6x + 30 - 2(x + 1) = 4(1 + x) + 24$.

Решение. $6x + 30 - 2x - 2 = 4 + 4x + 24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ 4x + 28 = 4x + 28; \Leftrightarrow 0\cdot x = 0,\quad x\in R.$$

Данное равенство выполняется при любых значениях x. Наименьшим целым положительным решением является $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример. Решить уравнение

$$4(x+2)-7+4x=8(x+5)-10.$$

Решение. Раскроем скобки в обеих частях равенства: $4x+8-7+4x=8x+40-10\Leftrightarrow 8x+1=8x+30$

$$8x-8x=30-1\ \Leftrightarrow\ 0\cdot x=29.$$

Данное равенство не выполняется ни при каких значениях x.

Ответ: Нет корней.

Пример. Решить уравнение

$$(0{,}4x-2)-(1{,}5x+1)-(-4x-0{,}8)=3{,}6\,.$$

Решение. Раскроем скобки в обеих частях равенства:

$$0{,}4x-2-1{,}5x-1+4x+0{,}8=3{,}6\,,$$

приведем подобные слагаемые: $2{,}9x=5{,}8\,,\quad x=2.$

*Ответ:*2.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{3x+1}{5}=\dfrac{x+1}{2}\,.$

Решение. Решим уравнение, используя свойство пропорций[1].

$$2\left(3x+1\right)=5\left(x+1\right),\ 6x+2=5x+5,\quad 6x-5x=5-2,\ \ x=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{x-4}{8}+2x=\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{4-x}{2}\,.$

Решение. Умножим обе части равенства на 8:

$$x-4+16x=2(2x-3)-4(4-x)\,,$$

раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$x-4+16x=4x-6-16+4x\,,$$

$$17x-4=8x-22\,,$$

$$9x=-18,\ \ x=-\frac{18}{9}=-2\,.$$

Ответ:-2.

Пример. Решить уравнение

$$(x-3)(x+1)(x+2)=x^3-10x+3\,.$$

---

[1] Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов.

Решение. Раскроем скобки в левой части уравнения:

$$x^3 + 3x^2 + 2x - 3x^2 - 9x - 6 = x^3 - 10x + 3$$

и приведем подобные:

$$x^3 - 7x - 6 = x^3 - 10x + 3\ .$$

Перенесем в левую часть уравнения неизвестные, а постоянные в правую:

$$x^3 - 7x - x^3 + 10x = 6 + 3\ ;$$

$$3x = 9\ ; \qquad x = 3\ .$$

Ответ: 3.

Пример. Решить уравнение

$$(x + 2)(x - 3) - 3(5x - 2) = (x - 4)^2.$$

Решение. Раскроем скобки, получим:

$$x^2 - 3x + 2x - 6 - 15x + 6 = x^2 - 8x + 16\ ,$$

приведем подобные слагаемые:

$$x^2 - 16x = x^2 - 8x + 16, \quad -8x = 16, \quad x = -2.$$

Ответ: –2.

Методы решения квадратных уравнений

Для решения квадратных уравнений применяют два основных метода: с помощью дискриминанта и с помощью теоремы Виета.

В первом случае для решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ надо вычислить дискриминант $D = b^2 - 4ac$. В зависимости от величины дискриминанта возможны три случая:

1) Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2) Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

3) Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

При решении ряда задач необходимо знать прямую и обратную теоремы Виета.

Теорема Виета (прямая). Если в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ *числа* x_1 *и* x_2 *являются его корнями, то выполняются соотношения* $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Теорема Виета (обратная). Если для некоторых постоянных a, b, c существуют числа x_1 *и* x_2*, удовлетворяющие соотношениям* $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$ *, то эти числа* x_1 *и* x_2 *являются корнями уравнения* $ax^2+bx+c=0$.

Методы решения неполных квадратных уравнений

Если коэффициенты $b=0$ или $c=0$, то квадратное уравнение можно решать, не вычисляя дискриминанта:

1) $b=0, c\neq 0, \dfrac{c}{a}>0 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$;

2) $b=0, c\neq 0, \dfrac{c}{a}<0 \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$;

3) $b\neq 0, c=0 \quad x_1=0,\ x_2=-\dfrac{b}{a}.$

Пример. Решить уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$ и записать в ответ наименьшее значение *x*.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения:

$$D = 9 – 4 \cdot 2 = 1 > 0;$$

следовательно, уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{4}; \; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{4};$$

$$x_1 = \frac{-3 - 1}{4} = -1; \;\; x_2 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Наименьшее значение $x_1 = -1$.

Ответ: –1.

Пример. Решить уравнение $(x + 15)(x + 5) = -9$ и записать в ответ наибольшее значение *x*.

Решение. Раскроем скобки и получим:

$$x^2 + 5x + 15x + 75 = x^2 + 20x + 75 = -9,$$

$$x^2 + 20x + 84 = 0.$$

Вычислим дискриминант уравнения:

$$D = 20^2 - 4 \cdot 84 = 400 - 336 = 64,$$

следовательно, уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-20 - \sqrt{64}}{2}; \quad x_2 = \frac{-20 + \sqrt{64}}{2};$$

$$x_1 = \frac{-20 - 8}{2} = -14; \; x_2 = \frac{-20 + 8}{2} = -6.$$

Наименьшее значение $x_1 = – 6$.

Ответ: – 6.

Пример. Найти наименьший корень уравнения

$$3x^2 + 9x = 0.$$

Решение. Данное уравнение является неполным квадратным уравнением.

$$3x^2 + 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x\left(x+3\right) = 0,$$

$$x = 0 \text{ или } x + 3 = 0.$$

Ответ: – 3.

Пример. Найти наибольший корень уравнения

$$5x^2 - 245 = 0.$$

Решение. Данное уравнение является неполным квадратным уравнением.

$$5x^2 - 245 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 = 245 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 49,$$

$$x = 7 \quad \text{или} \quad x = -7.$$

Ответ: 7.

Пример. Найти наименьший корень уравнения

$$27x^4 + x^3 + 729x + 27 = 0.$$

Решение. Вынесем общий множитель за скобку у первого и второго слагаемого, и у третьего и четвертого:

$$x^3(27x+1) + 27(27x+1) = 0,$$

$$(27x+1)(x^3+27) = 0.$$

Разложим вторую скобку в левой части как сумму кубов:

$$(27x+1)(x+3)(x^2-3x+9) = 0.$$

Находим корни: $x_1 = -\dfrac{1}{27}, x_2 = -3$.

Ответ: – 3.

Пример. Вычислить $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-10x+21=0$.

Решение. Преобразуем $x_1^2+x_2^2$, применив формулу квадрата суммы

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1+x_2=10$, а $x_1\cdot x_2=21$, следовательно

$$x_1^2+x_2^2=10^2-2\cdot(21)=100-42=58.$$

Ответ: 58.

Пример. При каком целом a уравнения $3x^2-4x+a-2=0$ и $x^2-2ax+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Решение. Для нахождения a, составим систему:

$$\begin{cases}3x^2-4x+a-2=0,\\ x^2-2ax+5=0.\end{cases}$$

Выразим a из первого уравнения системы $a=2+4x-3x^2$ и подставим во второе уравнение, и решим его:

$$x^2-2(2+4x-3x^2)+5=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x-8x^2+6x^3+5=0,$$

$$6x^3-7x^2-4x+5=0 \quad\Rightarrow\quad 6x^3-6x^2-x^2-4x+5=0,$$

$$6x^2(x-1)-(x^2+4x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad 6x^2(x-1)-(x-1)(x+5)=0,$$

$$(x-1)(6x^2-x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x-1)(6x+5)=0.$$

Следовательно, корни данного уравнения: $x_1=1,\quad x_2=-\dfrac{5}{6}$. Отсюда $a=2+4\cdot1-3\cdot1^2=3$, так как по условию задачи a, должно быть целым числом. При этом значении a получим:

$$3x^2-4x+1=0 \text{ и } x^2-6x+5=0.$$

Корни первого уравнения $x_1 = 1, \quad x_2 = \dfrac{1}{3}$, а второго $x_1 = 1, \quad x_2 = 5$, следовательно, общий корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Метод решения биквадратных уравнений

Биквадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0\text{, где } a, b, c \in R, \quad (a \neq 0).$$

Подстановкой $t = x^2$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению вида

$$at^2 + bt + c = 0,$$

которое решается с помощью дискриминанта или теоремы Виета.

Пример. Найти сумму корней биквадратного уравнения

$$x^4 – 5x^2 + 4 = 0.$$

Решение. Обозначим $t = x^2$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$t^2 – 5t + 4 = 0,$$

решив которое, получаем $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений: $x^2 = 1$ или $x^2 = 4$, которые имеют следующие корни

$$x_1 = 1,\ \ _2 = -1, x_3 = 2,\ x_4 = -2.$$

Отсюда, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Ответ: 0.

Пример. Решить уравнение $(x+1)^5 + (x-1)^5 = 32x$.

Решение. Используя свойства степеней и формулы сокращенного умножения, запишем:

$$(x+1)^5 = (x+1)^2(x+1)^3 = (x^2 + 2x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) =$$

$$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1;$$

$$(x-1)^5=(x-1)^2(x-1)^3=(x^2-2x+1)(x^3-3x^2+3x-1)=$$
$$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1.$$

Подставим данные разложения в левую часть равенства и приведем подобные:

$$2x^5+20x^3+10x=32x \quad \Rightarrow \quad x^5+10x^3-11x=0,$$

$$x(x^4+10x^2-11)=0.$$

Следовательно, первый корень уравнения $x_1=0$. Найдем остальные корни решив биквадратное уравнение, обозначим $t=x^2$, тогда

$$t^2+10t-11=0;$$

$$D=10^2-4\cdot1\cdot(-11)=100+44=144;$$

$$t_1=\frac{-10-12}{2}=-11; \qquad t_2=\frac{-10+12}{2}=1.$$

Таким образом $x_2=1$, $x_3=-1$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.

Методы решения рациональных уравнений

Решение рационального уравнения вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, где

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0, \quad (Q(x)\neq 0).$$

сводится к решению уравнения $P(x)=0$ и проверке того, что его корни удовлетворяют условию $Q(x)\neq 0$, то есть рациональное уравнение равносильно системе $\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x-1}{x-3}$.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-3)-(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2-3x+2x-6-x^2+2x+x-2}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \frac{2x-8}{(x-2)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-8=0; \\ (x-2)(x-3)\neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ x\neq 2, x\neq 3. \end{cases}$$

Ответ: 4.

Пример. Найти наибольший корень уравнения $\frac{x^2-7x-8}{x^2-4}=0$.

Решение. Данное рациональное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-7x-8=0; \\ \quad x^2-4\neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы, получим

$$D=7^2-4\cdot 1\cdot(-8)=49+32=81,$$

$$x_1=\frac{7-9}{2}=-1, \qquad x_2=\frac{7+9}{2}=8,$$

$$x_1=-1, \quad x_2=8.$$

Решим второе уравнение системы как неполное квадратное уравнение, получим $x_1\neq 2, x_2\neq -2$.

Таким образом, наибольший корень уравнения $x=8$.

Ответ: 8.

Пример. Решить уравнение $\frac{x^2+6x-7}{x^2+4x+3}=1$.

Решение. Так как дробь равна 1, то числитель дроби равен знаменателю. Тогда рациональное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+6x-7=x^2+4x+3, \\ x^2+4x+3\neq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы, получим

$$x^2+6x-7=x^2+4x+3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=10$$

$$x=5\,.$$

Решим второе уравнение системы, получим $x_1 \neq -1, x_2 \neq -3$

Ответ: 5.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-2x-3}$.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x^2-2x-3}=0 \Leftrightarrow \frac{x+1+4(x-3)-4}{(x+1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+1+4x-12-4}{(x+1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow \frac{5x-15}{(x+1)(x-3)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x-15=0; \\ (x+1)(x-3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3; \\ x\neq -1, x\neq 3. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$

Решение. Укажем область допустимых значений *x*.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0; \\ x^2+x-5\neq 0. \end{cases}$

Пусть $\dfrac{x^2+x-5}{x}=t$, тогда $t+\dfrac{3}{t}+4=0$.

$$\frac{t^2+4t+3}{t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2+4t+3=0; \\ t\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1=-3; \\ t_2=-1; \end{array}\right. \\ t\neq 0. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x-5}{x}=-3;\\[2mm] \dfrac{x^2+x-5}{x}=-1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x-5+3x}{x}=0;\\[2mm] \dfrac{x^2+x-5+x}{x}=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2+4x-5=0;\\ x^2+2x-5=0;\end{array}\right.\\ x\neq 0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

Решим отдельно каждое уравнение:

1) $x^2+4x-5=0,$ тогда $\left[\begin{array}{l}x_1=-5\in ОДЗ;\\ x_2=1\in ОДЗ.\end{array}\right.$

2) $x^2+2x-5=0$, тогда

$D=\ 4+4\cdot 5=24,\ \ x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=-1\pm\sqrt{6}\in ОДЗ$.

Ответ: $\{-5;1;-1\pm\sqrt{6}\}$.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$.
В ответ записать сумму его решений.

Решение. Поскольку число x = 0 не является корнем данного уравнения, то, разделив на x числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения, получим уравнение, равносильное данному: $\dfrac{4}{x+\frac{3}{x}+1}+\dfrac{5}{x+\frac{3}{x}-5}=-\dfrac{3}{2}$. Положив $y=x+\dfrac{3}{x}$, получим уравнение $\dfrac{4}{y+1}+\dfrac{5}{y-5}=-\dfrac{3}{2}$, которое равносильно уравнению $\dfrac{y^2+2y-15}{(y+1)(y-5)}=0$. Это уравнение имеет два корня: y_1 = –5 и y_2 = 3.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l}x+\dfrac{3}{x}=-5;\\[2mm] x+\dfrac{3}{x}=3.\end{array}\right.$

Второе уравнение этой системы корней не имеет, а первое уравнение имеет два корня: $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$, которые и являются решениями исходного уравнения. Сумма решений равна:

$$x_1 + x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} + \frac{-5-\sqrt{13}}{2} = \frac{-5+\sqrt{13}-5-\sqrt{13}}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Ответ: –5.

Методы решения иррациональных уравнений

Для решения иррациональных уравнений следует применять возведение в степень. При этом нужно принимать во внимание, что при возведении в четную степень возможно появление посторонних корней, поэтому необходима либо проверка полученных корней непосредственной подстановкой их в исходное уравнение, либо составление и решение системы, включающей множество всех ограничений.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[4]{x+1} = 2$.

Решение. Возведем обе части уравнения в степень 4:

$$\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^4 = 2^4 \Leftrightarrow x+1=16 \Leftrightarrow x=15 \in \text{ОДЗ},$$

т.к. *ОДЗ:* $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Ответ: 15.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+9}+3 = x$.

Решение. Перенесем число 3 в правую сторону равенства (уединим корень) и возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$\sqrt{x+9} = x-3, \quad (\sqrt{x+9})^2 = (x-3)^2, \quad x+9 = x^2-6x+9,$$

$$x^2-7x=0, \quad x(x-7)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=7.$$

Т.к. *ОДЗ:* $\begin{cases} x+9 \geq 0; \\ x-3 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow x \geq 3,$ то корень уравнения $x = 7$.

Ответ: 7.

Пример. Решить уравнение $x+5\sqrt{x}-6=0$.

Решение. Введем замену переменных: $\sqrt{x}=t\geq 0,$ получим уравнение $t^2+5t-6=0,$ решив его, получим $t_1=1, t_2=-6$. Учитывая ограничения $(t\geq 0)$ замены, оставим единственный корень $t=1$. Вернемся к исходной переменной, получим $\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1.$

Ответ: 1.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

Решение. *ОДЗ* $\begin{cases} x+2\geq 0; \\ x-6\geq 0; \end{cases} \Rightarrow \quad x\geq 6..$

Перенесем второй радикал в правую часть, возведем обе части равенства в квадрат, получим: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-6}\right)^2,$

$x+2=4+4\sqrt{x-6}+x-6,$ приведем подобные слагаемые.

$4=4\sqrt{x-6},$ разделим на 4,

$1=\sqrt{x-6},$ возведем в квадрат,

$1^2=\left(\sqrt{x-6}\right)^2 \Leftrightarrow 1=x-6, \quad x=7\in$ *ОДЗ.*

Проверка: $\sqrt{7+2}-\sqrt{7-6}=2\Rightarrow 2\equiv 2$.

Ответ: 7.

Пример. Решить уравнение $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

Решение. ОДЗ: $x\in R,$ обозначим $\sqrt{x^2+11}=t\geq 0$.

Тогда $t^2=x^2+11,$ прибавим 11 к обеим частям уравнения, получим

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42.$$

Введем новую переменную $t^2+t=42\Rightarrow t^2+t-42=0\Rightarrow$ получим: $t_1=6, \ t_2=-7$. Второй корень не подходит, т.к. $t\geq 0$. Вернемся к исходной переменной:

$$\sqrt{x^2+11}=6 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+11}\right)^2=6^2 \Leftrightarrow x^2+11=36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5; \\ x_2=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-5;\ \ 5\}$.

Методы решения уравнений с модулем

Наиболее универсальным методом решения уравнений с модулем является метод интервалов. Однако существуют отдельные классы уравнений, которые допускают более короткое решение.

1) Уравнение $|f(x)|=c$, где c – постоянная, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=c; \\ f(x)=-c. \end{array}\right.$$

2) Уравнение $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} g(x)\ge 0; \\ f(x)=g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x)\ge 0; \\ f(x)=-g(x). \end{cases}$$

3) Уравнение $|f(x)|=|g(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x); \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Пример. Решить уравнение и найти наименьший корень уравнения $|2x-6|=4$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2x-6=4; \\ 2x-6=-4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=10; \\ 2x=2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1.

Пример. Решить уравнение и найти наибольший корень уравнения $|x^2-6x+7|=7$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+7=7; \\ x^2-6x+7=-7; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x=0; \\ x^2-6x+14=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-6)=0; \\ x\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Решениями первого уравнения являются корни $x_1=0$ и $x_2=6$. Корень $x_2=6$ является наибольшим.

Ответ: 6.

Пример. Решить уравнение $|x-4|=2x$.

Решение. Составим совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x\ge 0; \\ x-4=2x; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x\ge 0; \\ x-4=-2x; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0; \\ x=-4; \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 0; \\ 3x=4; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing; \\ x=\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример. Решить уравнение $|x+6|=|x+18|$.

Решение. Решение уравнения сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x+6=x+18; \\ x+6=-(x+18); \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6\ne 18; \\ 2x=-24; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing; \\ x=-12. \end{array}\right.$$

Ответ: – 12.

Пример. Решить уравнение $|x-1|+|x-3|=4{,}4$.

Решение. На примере этого решения уравнения рассмотрим применение метода интервалов для модулей.

Найдем нули подмодульных выражений, т.е. приравняем к нулю выражения, стоящие под знаком модулей.

$$x-1=0, \quad \text{или} \quad x-3=0,$$
$$x=1, \qquad\qquad x=3.$$

Составим таблицу, которая поможет раскрыть данные модули.

	$(-\infty;1\,]$	$(1;3\,]$	$(3;+\infty)$
$\|x-1\|$	—	+	+
$\|x-3\|$	—	—	+

Пусть $x \in (-\infty;1\,]$, тогда уравнение примет вид:

$$-(x-1)-(x-3)=4{,}4,$$

решим его: $-2x+4=4{,}4$, $-2x=0{,}4$, $x=-0{,}2 \in (-\infty;+1\,]$.

Пусть $x \in (1;3\,]$, тогда уравнение примет вид:

$$x-1-(x-3)=4{,}4 \Rightarrow 2 \neq 4{,}4, \text{ нет корней.}$$

Пусть $x \in (3;+\infty)$, тогда уравнение примет вид:

$$x-1+x-3=4{,}4 \Rightarrow 2x-4=4{,}4 \Rightarrow 2x=8{,}4 \Rightarrow x=4{,}2 \in (3;+\infty).$$

Ответ: – 0,2 и 4,2.

Пример. Решить уравнение и найти наименьший корень

$$x^2-5|x|+4=0.$$

Решение. Требуется рассмотреть два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0; \\ x^2-5x+4=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0; \\ x^2+5x+4=0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0; \\ x_1=1, \quad x_2=4; \end{cases} \\ \begin{cases} x<0; \\ x_3=-4, x_4=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: − 4.

Методы решения систем уравнений

При решении систем уравнений обычно используют следующие методы?

- Метод подстановки или последовательного исключения переменных;

- Метод сложения (вычитания);
- Метод умножения (деления);
- Мнтлд введения новых переменных.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$. В ответ записать значение x.

Решение. Решить систему линейных уравнений можно **методом сложения**, *который состоит в том, чтобы сложить два данных уравнения и получить уравнение, зависящее от одной переменной.* В результате сложения данных двух уравнений получим $5x = 25, x = 5.$ Таким образом, получили сразу же ответ.

Ответ: 5.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$. В ответ записать значение x.

Решение. Решить систему линейных уравнений можно **методом подстановки**, *который состоит в том, чтобы из какого-либо уравнения системы выразить одно неизвестное через другое неизвестное, а затем подставить значение этого неизвестного в остаевшееся уравнение.*

Из первого уравнения выражаем $x = \dfrac{8 - 3y}{2}$. Подставляем это выражение во второе уравнение и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8 - 3y}{2}; \\ 3 \cdot \dfrac{8 - 3y}{2} + 2y = 7. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $y = 2$. С учетом этого из первого уравнения $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+2xy=7; \\ xy+2x+2y=8. \end{cases}$ В ответ записать наибольшее значение y.

Решение. Введя обозначения $a = x + y$, $b = xy$, получаем новую систему уравнений с переменными a и b: $\begin{cases} a+2b=7; \\ b+2a=8. \end{cases}$ Решив данную систему методом подстановки, имеем $a = 3$, $b = 2$. Возвращаясь к переменным x и y, получаем систему

$$\begin{cases} x+y=3; \\ xy=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x; \\ x(3-x)=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x; \\ -x^2+3x-2=0. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, тогда $y_1 = 2$ является наибольшим значением y.

Ответ: 2.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y=18; \\ xy^2=12. \end{cases}$ В ответ записать $x+y$.

Решение. Решить систему линейных уравнений можно **методом умножения (деления)**, *который состоит в том, чтобы умножить первое уравнение системы на второе и результат записать на первое место, затем разделить первое уравнение системы на второе и результат записать на второе место в системе.* Таким образом, получаем новую систему:

$$\begin{cases} x^3y^3=216; \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=6; \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}; \end{cases} \Rightarrow x=3, y=2.$$

Следовательно, $x+y=3+2=5$.

Ответ: 5.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9; \\ \dfrac{x(x+y)}{y}=20. \end{cases}$ В ответ записать целое значение $x \cdot y$.

Решение. Введем обозначения:

$$z = x + y, \quad w = \frac{x}{y}.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} z+w=9; \\ z\cdot w=20. \end{cases}$$

Решив систему методом подстановки, найдем:

$$z_1 = 4, \quad w_1 = 5, \quad z_2 = 5, \quad w_2 = 4.$$

Переходим к исходным переменным x и y. Необходимо решить две системы:

$$\begin{cases} x+y=4; \\ \dfrac{x}{y}=5; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=5; \\ \dfrac{x}{y}=4. \end{cases}$$

Решаем обе системы методом подстановки и получаем:

$$x_1 = \frac{10}{3}, \quad y_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 4, \quad y_2 = 1.$$

Следовательно, $x \cdot y = 4 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить уравнения:

2.1. $\frac{2}{7}x = \frac{2}{35}$; 2) $-\frac{1}{8}x = -\frac{3}{8}$; 3) $-\frac{11}{9}x = 0$;

2.2. $1000(x-1+3x-15) = 2000x$;

2.3. $\frac{2x-3}{12} - \frac{5x-11}{2} = \frac{x+3}{6} - \frac{x+2}{3}$;

2.4. $\dfrac{4+0{,}6}{x}=\dfrac{0{,}3-1\frac{1}{2}\cdot 2}{4{,}5}$;

2.5. $\dfrac{7+9x}{4}-\left(1-\dfrac{2-x}{9}\right)=7x$;

2.6. $0{,}2(x-2)-0{,}4(x+3)=0{,}4-0{,}6x$;

2.7. $5x(x+1)-2\cdot(2x+3)=0$, найти наибольший корень;

2.8. $x^4-3x^2-4=0$;

2.9. $2x^4=3-x^2$;

2.10. $8x^4+x^3+64x+8=0$, найти наименьший корень;

2.11. $x^6+7x^3-8=0$, найти наименьший корень;

2.12. $\dfrac{2x-1}{x+7}=\dfrac{3x+4}{x-1}$, найти сумму корней;

2.13. $\dfrac{10+3x^2+x}{x^2+2}=4$, найти наибольший корень;

2.14. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$;

2.15. $3x-\dfrac{3x^2+2}{x+5}=4$;

2.16. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+3x^2+2x}=0$;

2.17. $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2-2x}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=0$;

2.18. $\dfrac{x^2+2}{x^3+1}+\dfrac{2x}{x-x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}=0$;

2.19. $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{4x}{2x+1}=5$, найти наименьший корень;

2.20. $x-6-\sqrt{x}=0$; **2.21.** $\sqrt{5x-6}+x=4$;

2.22. $\sqrt{-x^2-2x+8}=-x-4$; **2.23.** $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$;

2.24. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$; **2.25.** $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$;

2.26. $x^2-3|x|+2=0$, найти наибольший корень;

2.27. $x^2-6|x|+8=0$, найти наибольший корень;

2.28. $|x+2|=5$, найти наименьший корень;

2.29. $\left|\dfrac{x-7}{x+3}\right|=5$, найти наименьший корень;

2.30. $|3x-5|=12+4x$,

2.31. $2|x+1|=2-x$, найти наименьший корень;

2.32. $|x-1|+|2x-3|=2$, найти наибольший корень;

2.33. $|2x-6|=|x+1|$, найти целый корень;

2.34. При каком значении a уравнения $x^2+ax+8=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

2.35. Вычислить $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-2x-9=0$.

Решить системы уравнений:

2.36. а) $\begin{cases} 2x-y=3; \\ x+5y=7; \end{cases}$, в ответ записать *xy*;

б) $\begin{cases} x+y=4; \\ x^3+y^3=28; \end{cases}$, в ответ записать *xy*;

2.37. $\begin{cases} 2x+7y=24; \\ 4x-5y=10; \end{cases}$, в ответ записать $x+y$,

2.38. $\begin{cases} x^2y^3=16; \\ x^3y^2=2; \end{cases}$ в ответ записать $x-y$, если $x\geq 0$,

2.39. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}=1\dfrac{1}{6}; \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=1\dfrac{1}{6}; \end{cases}$, в ответ записать $x+y$,

2.40. $\begin{cases} xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{15}{2}; \\ xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{20}{3}; \end{cases}$ в ответе указать целое положительное значение x и y,

2.41. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3; \\ \sqrt{(x-y)^2}=1; \end{cases}$ в ответе указать наибольшее значение $x+y$.

2.42. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1; \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4; \end{cases}$ в ответ записать $x-y$.

2.43. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4; \\ x+y=28; \end{cases}$ в ответ записать $x-y>0$.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Методы решения линейных неравенств

Линейным называется неравенство вида $ax<b$ (либо $ax>b$, $ax\le b$, $ax\ge b$), где a, b – числа.

При решении линейных неравенств следует учитывать, что при делении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется, а при делении на отрицательное число – меняется на противоположный. Все возможные случаи приведены в следующей таблице.

	$a<0$	$a>0$	$a=0$		
			$b<0$	$b=0$	$b>0$
$ax<b$	$x>\frac{b}{a}$ или $x\in\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$	$x<\frac{b}{a}$ или $x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$	не имеет решений	не имеет решений	верно при любых x
$ax>b$	$x<\frac{b}{a}$ или $x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$	$x>\frac{b}{a}$ или $x\in\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$	верно при любых x	не имеет решений	не имеет решений
$ax\le b$	$x\ge\frac{b}{a}$ или $x\in\left[\frac{b}{a};+\infty\right)$	$x\le\frac{b}{a}$ или $x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$	не имеет решений	верно при любых x	верно при любых x
$ax\ge b$	$x\le\frac{b}{a}$ или $x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right]$	$x\ge\frac{b}{a}$ или $x\in\left[\frac{b}{a};+\infty\right)$	верно при любых x	верно при любых x	не имеет решений

Пример. Решить неравенство $5x-4\le x+8$.

Решение. Перенесем слагаемые с неизвестной в левую часть неравенства, а свободные – в правую часть, получим:

$$5x-x\le 4+8,\ 4x\le 12,\ x\le 3.$$

Ответ: $(-\infty;3]$.

Пример. Решить неравенство $4-7x\ge 2x-5$.

Решение. Перенесем слагаемые с неизвестной в левую часть неравенства, а свободные в правую часть, получим:

$$-7x-2x\ge -5-4,\ -9x\ge -9,\ x\le 1,$$

(т.к. при делении неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется).

Ответ: $(-\infty;1]$.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}>\dfrac{x-3}{4}$.

Решение. Перенесем выражение $\dfrac{x-3}{4}$ в левую часть неравенства

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}>0.$$

Приведем к общему знаменателю левую часть неравенства

$$\frac{6(x-1)-4(x-2)-3(x-3)}{12}>0\Leftrightarrow\frac{6x-6-4x+8-3x+9}{12}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x+11}{12}>0\Rightarrow -x+11>0\Rightarrow -x>-11\Rightarrow x<11.$$

Ответ: $x\in(-\infty;11)$.

Пример. Решить неравенство $5(x-1)+7\le 1-3(x+2)$.

Решение. Раскроем скобки и перенесем слагаемые в левую часть

$$5x-5+7\le 1-3x-6\Leftrightarrow 5x+2+5+3x\le 0\Leftrightarrow 8x+7\le 0\Leftrightarrow x\le -\frac{7}{8}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$.

Пример. Решить неравенство $-2 \le -3x + 4 \le 13$.

Решение. При решении данного двойного неравенства перейдем к системе двух неравенств:

$$\begin{cases} -3x + 4 \ge -2; \\ -3x + 4 \le 13; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x \ge -6; \\ -3x \le 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 2; \\ x \ge -3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-3; 2]$.

Методы решения квадратичных неравенств

Неравенства вида

$$ax^2 + bx + c \le 0 \quad (ax^2 + bx + c \ge 0),$$

где $a \ne 0$, называются неравенствами второй степени или квадратичными неравенствами.

Квадратичные неравенства решают методом интервалов или графическим методом.

Метод интервалов решения квадратичных неравенств

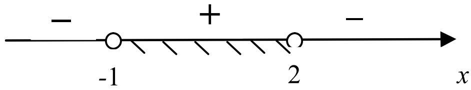
- Находим корни (нули) соответствующего уравнения;
- Наносим их на числовую прямую;
- Определяем вид точек согласно знаку неравенства: если знак нестрогий, т.е. $\ge$ или $\le$, то точки включенные (темные, закрашенные), если знак строгий, т.е. $>$ или $<$, то точки выколотые (белые);
- Определяем на полученных промежутках знаки выражения (учитываем чередование знака при кратных корнях).

Пример. Решить неравенство $(10 - 5x)(5x + 5) > 0$.

Решение. Решаем неравенство, используя метод интервалов. Заменяем решаемое неравенство на соответствующее ему уравнение $(10 - 5x)(5x + 5) = 0$ и находим его корни:

$$\begin{aligned} &10 - 5x = 0, & & & 5x + 5 = 0, \\ &x = 2, & &\text{или} & x = -1. \end{aligned}$$

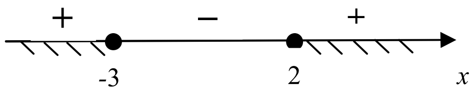
Наносим найденные корни уравнения на числовую прямую и определяем знаки выражения $(10-5x)(5x+5)$ на каждом полученном интервале. Штриховкой указываем множество решений неравенства:



Ответ: $x \in (-1;2)$.

Пример. Решить неравенство $x^2 + x - 6 \geq 0$.

Решение. Корнями уравнения $x^2 + x - 6 = 0$ являются числа $x_1 = -3; x_2 = 2$. Отмечаем их на числовой оси включенными (закрашенными) точками (так как знак неравенства нестрогий). Определяем знаки выражения $x^2 + x - 6$ на каждом полученном интервале. Подштриховываем отрезки со знаком «+» :

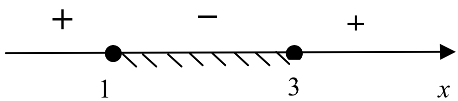


Ответ: $(-\infty;-3\,] \cup [2;+\infty\,)$.

Пример. Решить неравенство $x^2 - 4x \leq -3$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Находим корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$, получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Наносим эти числа на числовую ось. Точки включенные, так как знак неравенства нестрогий. Устанавливаем знаки на числовых промежутках. Заштриховываем отрезок со знаком “–”. Таким образом, ответом является $[1\,;\,3\,]$.



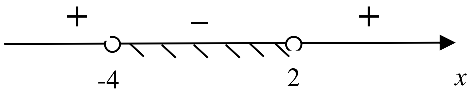
Ответ: $[1\,;3\,]$.

Пример. Решить неравенство $(x-1)(x+3) < 5$.

Решение. Раскрываем скобки, переносим число 5 в левую часть неравенства и приводим подобные слагаемые. Получаем:

$$x^2 + 2x - 3 < 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0.$$

Находим корни квадратного уравнения: $x = -4, x = 2$. На числовую ось наносим точки, соответствующие полученным корням. На каждом интервале определяем знак выражения $x^2 + 2x - 8 < 0$. штриховкой указываем множество решений неравенства:



Ответ: $(-4; 2)$.

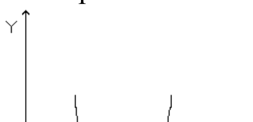
Графический метод решения квадратичных неравенств

Пример. Указать наименьшее целое положительное значение *x*, которое не является решением неравенства $6x^2 - 7x + 2 \le 0$.

Решение. Используем свойства графика функции $y = 6x^2 - 7x + 2$ и решим данное неравенство графически. Этот график представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, так как коэффициент при x^2 – число положительное. Найдем точки пересечения параболы с осью *OX*, предварительно вычислив дискриминант трехчлена $6x^2 - 7x + 2$ и найдя корни уравнения:

$$D = 49 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 1,\ x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Покажем расположение параболы на координатной плоскости.



Из рисунка видно, что трехчлен $6x^2 - 7x + 2$ принимает неположительные значения при $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Наименьшим целым положительным значением x, которое не принадлежит промежутку $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$, является $x = 1$.

Ответ: 1.

Метод интервалов для решения рациональных неравенств

Неравенства вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$ называются рациональными неравенствами.

При решении рациональных неравенств $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ $\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0\right)$ бывает удобно использовать тот факт, что знак частного двух выражений всегда совпадает со знаком их произведения. Это позволяет заменить неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ на $P_n(x)\cdot Q_m(x) > 0$ (и т.п.), однако при этом необходимо учесть тот факт, что знаменатель равняться нулю не может ($Q_m(x) \neq 0$), что особенно важно в нестрогих неравенствах.

Пример. Решить неравенство $\frac{2x-1}{3x-2} > x$.

Решение. Перенесем переменную x в левую часть неравенства, приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2x-1}{3x-2} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-x(3x-2)}{3x-2} > 0 \Leftrightarrow$$

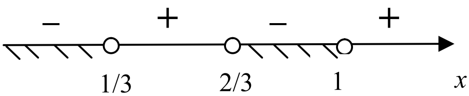
$$\frac{-3x^2+4x-1}{3x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-4x+1}{3x-2} < 0.$$

Применим метод интервалов. Находим нули знаменателя: $3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$. Так как знаменатель не должен обращаться в нуль, соответствующие точки отмечают на оси как выколотые (белые). Находим нули числителя:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{6}; \qquad \left[\begin{array}{l} x_1=1; \\ x_2=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Вид точек, соответствующих нулям числителя, определяется по знаку неравенства. В данном случае точки выколотые (белые), так как знак неравенства строгий. Наносим все найденные значения x на числовую ось, расставляем знаки в каждом интервале, выбираем интервалы, где знак “ - ”.

штриховкой указываем множество решений неравенства:



$$\textit{Ответ}: \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};1\right).$$

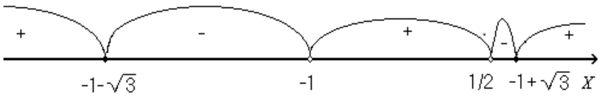
Пример. Найти целое решение неравенства $\dfrac{x-1}{x+1}\geq\dfrac{4x-3}{2x-1}$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{4x-3}{2x-1}\geq 0$ и преобразуем его левую часть:

$$\frac{(x-1)(2x-1)-(4x-3)(x+1)}{(x+1)(2x-1)}\geq 0,$$

$$\frac{-2x^2-4x+4}{(x+1)(2x-1)}\geq 0, \qquad \frac{x^2+2x-2}{(x+1)(2x-1)}\leq 0.$$

Отмечаем на числовой оси выколотыми (белыми) точками нули знаменателя $x=-1$ и $x=\dfrac{1}{2}$. Находим корни уравнения $x^2+2x-2=0$. Они равны $x_1=-1-\sqrt{3}$ и $x_2=-1+\sqrt{3}$. Соответствующие им точки являются включенными (черными), что следует из нестрого знака решаемого неравенства. Отложим все найденные значения x на числовой оси:



Находим знак функции $\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)(2x-1)}$ на каждом интервале. В качестве решения выбираем интервалы, в которых функция $\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)(2x-1)} \le 0$ имеет знак "–", то есть решением неравенства является множество $\left[-1-\sqrt{3};-1\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};-1+\sqrt{3}\right]$. Целым решением неравенства является число $x = -2$.

Ответ: –2.

Графический метод решения систем неравенств с одним неизвестным

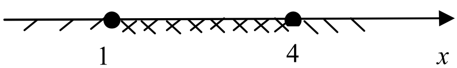
Решением системы неравенств с одним неизвестным называется такое значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Решить систему – это значит найти все множество его решений или показать, что решений нет.

Системы неравенств удобно решать графически. Для этого на числовую ось наносятся множества решений всех неравенств, входящих в систему. При этом множества решений разных неравенств заштриховываются по-разному (различные направления штриховки).

Во множество решений системы включаются только те интервалы, которые заштрихованы столько раз, сколько неравенств в системе. Крайние и отдельные точки включаются во множество решений системы, только если они принадлежат всем множествам решений неравенств, входящих в систему.

Например, для системы $\begin{cases} x \le 4; \\ x \ge 1; \end{cases}$ графическое решение имеет вид:



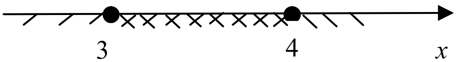
Отрезок $[1, 4]$ заштрихован дважды, поэтому он является множеством решений системы.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x-5 \geq 4; \\ 7x+4 \leq 32. \end{cases}$

Решение. Решая отдельные линейные неравенства, преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 3x \geq 9; \\ 7x \leq 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3; \\ x \leq 4. \end{cases}$$

Графическое решение системы имеет вид:



Ответ: $[3, 4]$.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} -7x-10 < -1+2x; \\ 3x+5 \geq 4-x. \end{cases}$

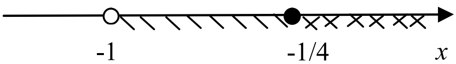
Решение. Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases} 1-10 < 7x+2x; \\ 3x+x \geq 4-5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < 9x; \\ 4x \geq -1; \end{cases}$$

окончательно получаем систему:

$$\begin{cases} x > -1; \\ x \geq -\dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

которую решаем графически:



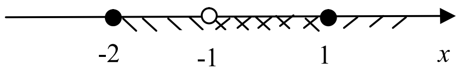
Ответ: $\left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right]$.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2+x-2 \leq 0; \\ 3x+5 > 2x+4. \end{cases}$

Решение. Первое неравенство системы – это квадратное неравенство, его корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, следовательно, множеством решений первого неравенства в системе является отрезок $[-2,1]$. Преобразуем систему к виду:

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)\le 0;\\ x>-1.\end{cases}$$

Наносим на числовую ось множество решений первой и второй системы:



Ответ: $(-1,1]$.

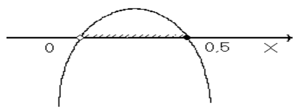
Пример. Найти наибольшее значение x из области определения функции $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}-2}+\lg\dfrac{x}{x+5}$.

Решение. Областью определения функции является множество значений x, удовлетворяющих системе неравенств:

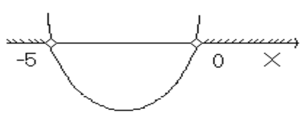
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-2\ge 0;\\ \dfrac{x}{x+5}>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1-2x}{x}\ge 0;\\ \dfrac{x}{x+5}>0.\end{cases}$$

Напомним, чтобы решить систему неравенств, необходимо решить каждое неравенство в отдельности, а затем выбрать те подмножества числовой оси, которые являются решениями обоих неравенств.

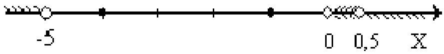
Неравенства в решаемой системе являются неравенствами второй степени, их можно решать либо графически, либо методом интервалов. Графическое решение первого неравенства:



Графическое решение второго неравенства:



Сопоставив полученные решения обоих неравенств, отметив их на одной оси, получим решение системы неравенств, указанное штриховкой над осью.



Этим решением является множество $x \in (0; 0{,}5]$.

Ответ:0,5.

Методы решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

Чтобы освободиться от знака модуля, используем его определение

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Чтобы решить неравенство с одним модулем, будем пользоваться свойствами:

1. $$|a| \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \text{b}; \\ a \geq -\text{b}. \end{cases}$$

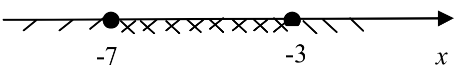
2. $$|a| \geq b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq \text{b}; \\ a \leq -\text{b}. \end{array}\right.$$

Пример. Решить неравенство $|x+5| - 2 \leq 0$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду $|x+5| \leq 2$. Неравенство содержит один модуль, будем пользоваться первым свойством. Получим

$$\begin{cases} x+5 \leq 2; \\ x+5 \geq -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2-5; \\ x \geq -2-5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3; \\ x \geq -7. \end{cases}$$

Решив по отдельности каждое неравенство системы, получим общее решение.



Решением является отрезок $x \in [-7; -3]$.

Ответ: $[-7; -3]$.

Пример. Решить неравенство $|x-2|-4+2x \ge 0$.

Решение. Перенесем слагаемые без модуля в правую сторону неравенства, получим: $|x-2| \ge 4-2x$. Неравенство содержит один модуль, будем пользоваться вторым свойством, получим

$$\left[\begin{array}{l} x-2 \ge 4-2x, \\ x-2 \le 2x-4, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+2x \ge 4+2; \\ x-2x \le -4+2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x \ge 6; \\ -x \le -2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2; \\ x \ge 2. \end{array}\right.$$

Получим общее решение $x \ge 2$.

Ответ: $[2,\infty)$.

Пример. Найти наименьшее целое положительное решение неравенства $|3x+1|-|x+2| \ge 5$.

Решение. Применим метод интервалов. Числовую ось разобьем точками $x = –2$ и $x = -\frac{1}{3}$ на три интервала.

1) Рассмотрим промежуток $x < -2$. На нем исходное неравенство имеет вид $–3x - 1 - (–x - 2) \ge 5$, откуда $x \le –2$. Следовательно, решением неравенства в данном случае является весь промежуток $(–\infty; –2)$.

2) Рассмотрим промежуток $-2 \le x \le -\frac{1}{3}$. На нем исходное неравенство имеет вид $–3x - 1 - (x + 2) \ge 5$, откуда $x \le –2$. В этом случае решением является $x = –2$.

3) Рассмотрим промежуток $x > -\frac{1}{3}$. На нем исходное неравенство имеет вид $3x + 1 - (x + 2) \ge 5$, откуда $x \ge 3$. В этом случае решением является промежуток $[3; +\infty)$.

Объединяя рассмотренные три случая, имеем $x \in (-\infty;-2] \cup [3;+\infty)$. Наименьшим целым положительным решением является $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример. Решить неравенство $\left|\frac{x+3}{x-1}\right| \geq x.$

Решение. По определению модуля имеем:

$$\left|\frac{x+3}{x-1}\right| = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1}, & x \in (-\infty, -3] \cup (1, +\infty); \\ -\frac{x+3}{x-1}, & x \in (-3, 1). \end{cases}$$

Следовательно, в предположении того, что $x \in (-\infty; -3] \cup (1, +\infty)$ необходимо решить неравенство:

$$\frac{x+3}{x-1} \geq x \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2x-3}{x-1} \leq 0,$$

а в предположении того, что $x \in (-3, 1)$, следует решать:

$$-\frac{x+3}{x-1} \geq x \quad \Rightarrow \quad \frac{3+x^2}{x-1} \leq 0.$$

Решим данные неравенства методом интервалов. Множеством решений первого неравенства в предположении, что $x \in (-\infty; -3] \cup (1, +\infty)$, будет множество $(-\infty; -3] \cup (1, 3]$. Множество решений второго неравенства в предположении, что $x \in (-3, 1)$, будет сам интервал $(-3, 1)$.

Беря объединение множеств решений первого и второго неравенств, в указанных предположениях, получаем множество решений исходного неравенства $(-\infty, 1) \cup (1, 3]$.

Ответ: $(-\infty, 1) \cup (1, 3]$.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить неравенства:

3.1. а) $4x - 3 \leq x - 7;$ **б)** $-2x + 1 > -3x + 4;$

3.2. $\frac{x-1}{3} < \frac{x+4}{2} - 1;$ **3.3.** $7(x+2) - 3(2-x) > 2 - (x+1);$

3.3. $\frac{x+4}{x-2} > 1;$ **3.4.** $\frac{x^2+5x+4}{x-5} < 0;$

3.5. $\frac{(x-1)^2(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0$, найти наименьшее целое x;

3.6. $\frac{2x^2-7x+41}{x^2+7x+12} \leq \frac{x+2}{x+4}$;

Решить систему неравенств:

3.7. а) $\begin{cases} 5x+4<3x+12; \\ -3x+7 \geq x-1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2(x-2)+5(3-x) \geq 0; \\ 4(x-1)-2x \leq 5. \end{cases}$

3.8. а) $\begin{cases} x^2-3x-4 \leq 0; \\ x^2-5x<0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0; \\ -x^2-16<0. \end{cases}$

Найти область определения функции:

3.9. а) $y=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$; **б)** $y=\frac{2}{x-9}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

3.10. а) $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$; **б)** $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

3.11. $y=\lg(|x+2|-|5+2x|)$.

Решить неравенства:

3.12. а) $|x-6| \leq 5$; **б)** $|x-2|-7<0$; **в)** $|3-2x|>5$;

3.13. $|x|+|x-5|-8 \leq 0$; **3.14.** $|x+4|(x-3)>12$;

3.15. а) $\left|\frac{2x+8}{x-5}\right| \leq 3$; **б)** $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3$;

3.16. а) $|x^2-5x| \leq 6$; **б)** $|2x^2-9x+15|>20$;

3.17. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.

4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Показательной функцией называется функция вида:

$$y = a^x, \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

Уравнение вида $a^x = b$, $a \neq 1, a > 0$ называется простейшим показательным уравнением.

Методы решения простейших показательных уравнений

Простейших показательные уравнения решают на основании свойств степеней. Если основания равны, то $a^x = a^y \Rightarrow x = y$; если при решении уравнения вида $a^x = b$ число b удается представить виде a^n, то есть $b = a^n$, то решением уравнения $a^x = a^n$ является $x = n$.

Уравнение вида $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow a^{f(x)} = a^0 \Leftrightarrow f(x) = 0; a > 0; a \neq 1.$

Пример. Решить уравнение $2^{x^2-5x+6} = 1$, в ответ записать сумму корней.

Решение. По определению степени с нулевым показателем, имеем:

$$2^{x^2-5x+6} = 2^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3.$$

Ответ: 5.

Пример. Решить уравнение $3^{2x-1} = 27$.

Решение. Используя свойства степеней, получим

$$3^{2x-1} = 3^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3^x} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 225$.

Решение. Используя свойства степеней, получим

$$3^{\frac{x}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Rightarrow (3 \cdot 5)^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Rightarrow 15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Решить уравнение $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$5^{|4x-6|} = 5^{2(3x-4)},$$

откуда $|4x-6| = 2(3x-4) \quad \Leftrightarrow \quad |2x-3| = 3x-4.$

Для решения исходного уравнения найдем нуль подмодульного выражения (т.е. $2x-3=0 \Leftrightarrow x=1,5$) и рассмотрим два случая:

1 случай: $x \geq 1,5$, тогда $|2x-3| = 2x-3$, т.к. $2x-3 \geq 0$.

Следовательно, $2x-3=3x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \notin [1,5;+\infty) \quad \Rightarrow \quad x=1$ не является корнем уравнения.

2 случай: $x < 1,5$, тогда $|2x-3| = 3-2x$, т.к. $2x-3<0$.

Следовательно, $3-2x=3x-4 \quad \Leftrightarrow \quad x=1,4 \in (-\infty;1,5) \quad \Rightarrow \quad x=1,4$ – корень данного уравнения.

Ответ: 1,4.

Метод вынесения общего множителя за скобки

Метод основан на следующем свойстве:

$$a^{x+n} + a^x = b \Rightarrow a^x \cdot a^n + a^x = b \Rightarrow a^x(a^n+1) = b \Rightarrow a^x = \frac{b}{a^n+1}.$$

После этого уравнение сводится к простейшему.

Пример. Решить уравнение $2^{x+3}+2^{x+1}=80$.

Решение. Используя свойства степеней, получим

$$2^x\cdot 2^3+2^x\cdot 2=80\Rightarrow 2^x\left(2^3+2\right)=80\Rightarrow 2^x\cdot 10=80\Rightarrow 2^x=8\Rightarrow$$

$$2^x=2^3\Rightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Решить уравнение $5^x-9\cdot 5^{x-3}=580$.

Решение. Вынесем за скобку в левой части общий множитель 5^x, получим:

$$5^x\left(1-\frac{9}{5^3}\right)=580\Leftrightarrow 5^x\left(1-\frac{9}{125}\right)=580\Leftrightarrow 5^x\cdot\frac{116}{125}=580\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x=\frac{580\cdot 125}{116}\Leftrightarrow 5^x=5^4\Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Метод перехода к новому основанию

В уравнении $a^x=b^x$ делим на b^x, получаем $\frac{a^x}{b^x}=1\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^x=1$, далее получаем простейшее уравнение. Часто этот метод применяется совместно с методом вынесения за скобки.

Пример. Решить уравнение $2^{x+3}-3^x=3^{x+1}-2^x$.

Решение. Перегруппируем слагаемые $2^{x+3}+2^x=3^{x+1}+3^x$, используя свойства показательной функции, вынесем общий множитель за скобки.

$$2^x\cdot 2^3+2^x=3^x\cdot 3+3^x\Leftrightarrow 2^x(8+1)=3^x(3+1)\Leftrightarrow 2^x\cdot 9=3^x\cdot 4.$$

Разделим на $3^x\cdot 9$ обе части уравнения:

$$\frac{2^x}{3^x}=\frac{4}{9}\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^2\Rightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Пример. Решить уравнение $2^{3x+10}-3^{3x+9}+3^{3x+7}+2^{3x+9}=0$.

Решение. $2^{3x}\cdot 2^9(2+1)=3^{3x}\cdot 3^7(3^2-1)\Leftrightarrow 2^{3x}\cdot 2^9\cdot 3=3^{3x}\cdot 3^7\cdot 8$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{3^7\cdot 2^3}{2^9\cdot 3}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^6\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-6},$$

откуда $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

Метод сведения к квадратному уравнению

Этот метод применяется, как правило, к решению уравнений двух типов.

1 тип: $a^{2x}+ba^x+c=0$.

Пусть $a^x=t>0$, тогда $t^2+bt+c=0$. Решаем квадратное уравнение, в конце возвращаемся к исходной переменной;

2 тип: $a^{-x}+ba^x+c=0$.

Пусть $a^x=t>0, a^{-x}=\frac{1}{t}$, тогда $\frac{1}{t}+bt+c=0\Rightarrow bt^2+ct+1=0$. Решаем квадратное уравнение, в конце возвращаемся к исходной переменной;

Пример. Решить уравнение $2\cdot 5^{2x}=5^x+1$.

Решение. Представим уравнение в виде $2\cdot 5^{2x}-5^x-1=0$, введем замену

$$5^x=t>0\Rightarrow 2t^2-t-1=0\Rightarrow D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)=1+8=9>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1+3}{4}=1, t_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}<0.$$

Отрицательное значение t_2, не удовлетворяет ограничению, наложенному на замену. Сделаем обратную подстановку для t_1: $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0.$

Ответ: 0.

Пример. Решить уравнение $2^{x+1} + 4^x = 80.$

Решение. Используя свойства показательной функции, получим $2^{x+1} + 4^x = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^x + (2^x)^2 - 80 = 0$.

Введем новую переменную, пусть $2^x = a > 0$, тогда и $(2^x)^2 = a^2$, откуда:

$$2a + a^2 - 80 = 0;$$

$$a^2 + 2a - 80 = 0;$$

$$a_1 = 8, \quad a_2 = -10 \text{ (не имеет смысла, т.к. } a > 0 \text{)}.$$

При $a_1 = 8$, получаем $2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$

Ответ: 3.

Пример. Решить уравнение $5^x - 5^3 \cdot 5^{-x} - 20 = 0$.

Решение. Используя свойства показательной функции, получим

$5^x - 5^3 \cdot 5^{-x} - 20 = 0 \Rightarrow 5^x - 5^3 \cdot \dfrac{1}{5^x} - 20 = 0$. Пусть $5^x = t > 0$, тогда $t - \dfrac{125}{t} - 20 = 0$, домножим обе части уравнения на *t:* $t^2 - 20t - 125 = 0.$ Корни уравнения $t_1 = -5 < 0,$ $t_2 = 25$, $t_1 -$ не подходит, так как замена ограничена, вернемся к исходной переменной при $t_2 = 25$, $5^x = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2^x - 7} = 9 - 2^x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 2^x - 7 \geq 0, \\ 9 - 2^x \geq 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2^x \in [7;\ 9].$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2^x - 7 = \left(9 - 2^x\right)^2.$$

Пусть $2^x = a > 0$, тогда имеем:

$$a - 7 = (9 - a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 19a + 88 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 8, \quad a_2 = 11.$$

Так как ОДЗ $2^x \in [7; 9]$, то $a_2 = 11 \notin$ ОДЗ. При $a_1 = 8$ имеем:

$$2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

Пример. Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Решение. Так как $2+\sqrt{3} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$, то

обозначив $t = \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}$, получим: $\quad t + \dfrac{1}{t} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Таким образом, при $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ имеем:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

При $t_2 = 2-\sqrt{3}$ имеем:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Ответ: ± 2.

Метод решения трехчленных уравнений

Трехчленными показательными уравнениями называют уравнения вида $A\cdot a^{2x} + B\cdot a^x \cdot b^x + C\cdot b^{2x} = 0$. Решают такие уравнения путем сведения их к квадратным в результате деления обеих частей на a^{2x} (либо b^{2x}).

Пример. Решить уравнение $2^{2x+1} - 5\cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.

Решение. Используя свойства показательной функции, получим

$$2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x \cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0.$$

Поделим последнее равенство на 3^{2x}:

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t > 0$, тогда

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 1; \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Возвращаемся к подстановке:

$$t_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0;$$

$$t_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1.$$

Ответ: $0; \quad -1$.

Методы решения показательных неравенств

Показательными неравенствами являются неравенства вида $a^x > b \quad \left(a^x \le b\right)$.

Решение неравенств осуществляется теми же способами, какими решались показательные уравнения. Отличие в решении состоит в реализации последнего этапа, где учитываются свойства показательной функции и решаются неравенства вида

$$a^x > a^y \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} x > y, \text{если} & a > 1; \\ x < y, \text{если} & 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

Пример. Найти наибольшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству $3^{2x} < \sqrt[3]{3}$.

Решение. Так как $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ и $3 > 1$, то

$$3^{2x} < 3^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 2x < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{6}.$$

Следовательно, наибольшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству, есть 0.

Ответ: 0.

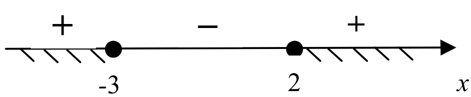
Пример. Решить неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x-3} \le \frac{8}{27}$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+x-3} \le \left(\frac{2}{3}\right)^3$,

так как $a = \frac{2}{3} < 1$, значит, при переходе к показателям степени знак неравенства меняем.

$$x^2 + x - 3 \ge 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 6 \ge 0; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 2.$$

Применяем метод интервалов, получим:



Ответ: $(-\infty; -3\,] \cup [\,2; +\infty\,)$.

Пример. Решить неравенство $8^x \ge 512$.

Решение. Преобразуем левую и правую части неравенства $\left(2^3\right)^x \ge 2^9 \Rightarrow 2^{3x} \ge 2^9$, так как основание $a = 2 > 1$, значит, при переходе к показателям степени знак неравенства не меняем. $3x \ge 9 \Rightarrow x \ge 3$.

Ответ: $x \in [3, +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $4 \cdot 4^x < 7 \cdot 2^x + 2$.

Решение. Преобразуем неравенство $4 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 2 < 0$.

Пусть $2^x = t > 0$, тогда

$$4t^2 - 7t - 2 < 0, \quad D = 49 + 32 = 81 > 0,$$

$$t_1 = \frac{7+9}{8} = 2, \quad t_2 = \frac{7-9}{8} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, имеем $t \in \left(-\frac{1}{4}; \;\; 2\right)$.

Следовательно, возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$-\frac{1}{4} < 2^x < 2 \;\Rightarrow 2^x < 2 \Rightarrow x < 1.$$

Ответ: $(-\infty; 1)$.

Пример. Найти наименьшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству $2^{2x} - 15 \cdot 11^x < 11^x - 15 \cdot 2^{2x+3}$.

Решение. Преобразуем неравенство следующим образом:

$$2^{2x} + 120 \cdot 2^{2x} < 11^x + 15 \cdot 11^x;$$

$$2^{2x} \cdot 121 < 11^x \cdot 16.$$

Разделив обе части неравенства на $121 \cdot 16$, получим:

$$2^{2x-4} < 11^{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad 4^{x-2} < 11^{x-2}.$$

Далее, разделив обе части неравенства на 4^{x-2}, получим:

$$\left(\frac{11}{4}\right)^{x-2} > 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{11}{4}\right)^{x-2} > \left(\frac{11}{4}\right)^0 \;\Rightarrow\; x > 2.$$

Наименьшим целым числом, удовлетворяющем неравенству, является 3.

Ответ: 3.

Пример. Найти наибольшее целое решение неравенства $2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x+2}<5^{x+1}+16\cdot 2^{x}$.

Решение. ОДЗ: $x\in R$. Сгруппируем выражения с разными основаниями в левой и правой частях:

$$2^x\cdot 2^x-2^x\cdot 2^3-16\cdot 2^x<5\cdot 5^x-5^2\cdot 5^x\text{, т.е.}$$

$$2^x(4-8-16)<5^x(5-25)\text{ или }2^x(-20)<5^x(-20).$$

Сократим неравенство на - 20 (т.к. – 20 < 0, меняем знак неравенства): $2^x>5^x$; $\left(\frac{2}{5}\right)^x>1$. Получим простейшее неравенство: $\left(\frac{2}{5}\right)^x>1$ или $\left(\frac{2}{5}\right)^x>\left(\frac{2}{5}\right)^0$, так как основание 2/5 < 1, следовательно, меняем знак неравенства, x < 0. Наибольшим целым решением будет $x=-1$.

Ответ: -1.

Пример. Решить неравенство $\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1}>6^{\sqrt{x}-1}$.

Решение. Преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{6^{\sqrt{x}}}{x+1}-\frac{6^{\sqrt{x}}}{6}<0\text{ или }6^{\sqrt{x}}\left(\frac{6-(x+1)}{6(x+1)}\right)>0.$$

Следовательно, $6^{\sqrt{x}}\frac{x-5}{x+1}<0$. Учитывая, что $6^{\sqrt{x}}>0$ при всех $x\geq 0$, имеем $\frac{x-5}{x+1}<0$, откуда $x\in(-1;5)$. Так как вместе с последним должно быть выполнено условие $x\geq 0$, то окончательно получим, что $x\in[0;5)$.

Ответ: $x\in[0;5)$.

Методы решение систем, содержащих показательные уравнения

При решении систем, содержащих показательные уравнения, наиболее часто используются метод подстановки («выразить и подставить»), метод деления одного уравнения на другое и метод замены переменной.

Пример. Решить систему $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6; \\ x + y = 3. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6; \\ x = 3 - y; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{3-y} + 2^y = 6; \\ x = 3 - y; \end{cases} \Rightarrow$ решим отдельно первое уравнение:

$$2^3 \cdot 2^{-y} + 2^y - 6 = 0, \ \frac{8}{2^y} + 2^y - 6 = 0.$$

Пусть $2^y = t > 0$, тогда $\dfrac{8}{t} + t - 6 = 0 \Rightarrow$ домножим на *t*,

$t^2 - 6t + 8 = 0$, по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2, \\ t_2 = 4, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^y = 2, \\ 2^y = 4, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1, \\ y_2 = 2. \end{array}\right.$$

Подставим в 1-ое уравнение системы, получим $\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 - 1 = 2, \\ x_2 = 3 - 2 = 1. \end{array}\right.$

Значит, решение (2;1), (1;2).

Ответ: (2;1) , (1;2).

Пример. Решить систему $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63; \\ 3^x + 7^y = 16, \end{cases}$ в ответ указать целое значение $x + y$.

Решение. При решении данной системы уравнений введем замену: $3^x = a, 7^y = b$, тогда получим новую систему $\begin{cases} ab = 63; \\ a + b = 16. \end{cases}$

Решим данную систему методом подстановки, получим:

$$\begin{cases} ab = 63; \\ a = 16 - b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (16 - b)b = 63; \\ a = 16 - b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16b - b^2 - 63 = 0; \\ a = 16 - b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 16b + 63 = 0; \\ a = 16 - b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 7, b_2 = 9; \\ a = 16 - b; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 7, b_2 = 9; \\ a_1 = 9, a_2 = 7. \end{cases}$$

Вернемся к старым переменным, получим две новых системы:

$$\begin{cases} 3^x = 7; \\ 7^y = 9; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3^x = 9; \\ 7^y = 7. \end{cases}$$

Так как первая система не имеет целых значений, то будем решать только вторую систему уравнений, получим: $x = 2, y = 1.$ Тогда $x + y = 2 + 1 = 3.$

Ответ: 3.

Упражнения для самостоятельного решения

Решить уравнения:

4.1. а) $3^{x^2 - x} = 9$; **б)** $2^{x^2 - 40x + 300} = 1$;

4.2. а) $2^{x-1} = 2\sqrt{2}$; **б)** $\left(\frac{16}{9}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^8$;

4.3. $15^{2x+6} = 3^x \cdot 5^x$;

4.4. $(0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2 - 12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$, в ответе указать целый корень;

4.5. а) $3^{x+3} + 8 \cdot 3^{x+2} = 33$; **б)** $5^{x+2} - 12 \cdot 5^{x-1} = 565$;

4.6. $9^{x^2-1} - 2 \cdot 3^{x^2-1} - 3 = 0$, записать в ответ произведение корней;

4.7. а) $4^x - 30 \cdot 2^{x-1} - 16 = 0$; **б)** $9^x - 75 \cdot 3^{x-1} - 54 = 0$;

в) $49^{x+1} + 55 \cdot 7^{x+1} - 56 = 0$;

4.8. $5^{x-1} + 5 \cdot 0{,}2^{x-2} = 26$, в ответ записать сумму его корней;

4.9. $2^{3x+10}-3^{3x+9}+3^{3x+7}+2^{3x+9}=0$;

4.10. $2^{2x+8}+5^{2x+7}+2^{2x+10}-5^{2x+8}=0$;

4.11. $4\cdot 6^{x-1}-5^{x}-5^{x-1}+6^{x-2}=0$;

4.12. $16^{x}=4^{|x+1|}$;

4.13. $9\cdot 5^{\frac{2}{\sqrt{x}}}+2\cdot 15^{\frac{1}{\sqrt{x}}}+75\cdot 3^{\frac{2}{\sqrt{x}}}=0$;

4.14. а) $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^{x}+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^{x}=14$;

б) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}=6$.

Решить неравенства:

4.15. а) $8\cdot 2^{x}\geq 4^{-3}$, указать наименьший корень;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x}>\sqrt{2}$, указать наименьший корень;

4.16. $3^{x^{2}-12x+25}\leq\frac{1}{3}$, указать больший корень;

4.17. $2^{2x+2}+2\leq 9\cdot 2^{x}$, указать наименьшее целое решение;

4.18. $36^{x}-7\cdot 6^{x}+6\leq 0$, записать сумму целых решений;

4.19. $7^{x}+5\cdot 7^{x-2}\geq 378$, указать наименьшее целое решение;

4.20. $4\cdot 3^{4x}-2^{4x-1}-3^{4x+1}-2^{4x}\geq 0$, указать наименьшее целое решение;

4.21. $9\cdot 16^{x}+2\cdot 12^{x}-32\cdot 9^{x}\leq 0$, записать наибольшее целое решение;

4.22. $3\cdot 5^{x+1}+6\cdot 5^{-(x+1)}<\frac{81}{5^{x+1}}$, записать наибольшее целое решение;

4.23. $2^{2x}-15\cdot 11^{x}<11^{x}-15\cdot 2^{2x+3}$, записать наименьшее целое решение.

Решить системы уравнений

4.24. $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972; \\ y - x = 3, \end{cases}$ в ответ указать $x + y$;

4.25. $\begin{cases} 3^{y+x} = 128; \\ 5^{3y-2x-3} = 1. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} 2^x + 3^y = \dfrac{73}{9}; \\ 2^x \cdot 3^y = \dfrac{8}{9}, \end{cases}$ в ответ указать $x - y$;

4.27. $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648; \\ 3^x \cdot 4^y = 432. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12; \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63; \\ 3^x + 7^y = 16. \end{cases}$

5. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Логарифмом числа x $(x>0)$ по основанию a $a>0, a\neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число x ($\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$). Логарифмической функцией называется функция вида $y=\log_a x$, где $a>0, a\neq 1$ – основание, $x>0$.

Методы преобразования логарифмических выражений

Для преобразования логарифмических выражений используют следующие формулы:

1. $x = a^{\log_a x}$ при $x > 0$ (основное логарифмическое тождество).
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
5. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$
6. Если $x > 0$, то $\log_a x^p = p\log_a x$, где p – любое действительное число.
7. Если $x > 0$, то $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, для любого действительного числа $b > 0$ и $b \neq 1$.

В частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

$\log_a b = \log_{a^q} b^p = \dfrac{p}{q}\log_a b, \quad p, q \in R.$

Пример. Вычислить $\log_2 0{,}25$.

Решение. $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2\log_2 2 = -2.$

Ответ: -2.

Пример. Вычислить $16^{\frac{1}{2}\log_4 10+1}$.

Решение.

$$16^{\frac{1}{2}\log_4 10+1} = 16^{\frac{1}{2}\log_4 10} \cdot 16 = 16 \cdot \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_4 10} = 16 \cdot 4^{\log_4 10} = 16 \cdot 10 = 160.$$

Ответ: 160.

Пример. Вычислить $\log_4{}^2 16 - 5^{2-\log_5 4}$.

Решение. $\log_4{}^2 16 = \left(\log_4 4^2\right)^2 = \left(2\log_4 4\right)^2 = 4$,

$$5^{2-\log_5 4} = 5^2 \cdot 5^{-\log_5 4} = 25 \cdot 5^{\log_5 (4)^{-1}} = 25 \cdot 4^{-1} = 6{,}25.$$

$$\log_4{}^2 16 - 5^{2-\log_5 4} = 4 + 6{,}25 = 10{,}25.$$

Ответ: 10,25.

Пример. Вычислить $\log_2 \log_3 81$.

Решение. $\log_2 \log_3 81 = \log_2(\log_3 3^4) = \log_2(4\log_3 3) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$.

Ответ: 2.

Пример. Вычислить $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

Решение.

$$\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 = \frac{\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8}{\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7} = \log_4 8 = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Методы решения логарифмических уравнений:

Для решения логарифмических уравнений необходимо уметь решать простейшие логарифмические уравнения и владеть методом замены переменной, сводящих уравнение к квадратному, методом перехода к новому основанию и дополнительного логарифмирования. При решении логарифмических уравнений обязательно проверять полученные значения либо по ОДЗ, либо простой подстановкой в условие.

Методы решения простейших логарифмических уравнений

Уравнение вида $\log_a x = b$, $a \neq 1, a > 0$ называется простейшим логарифмическим уравнением. Решение простейших уравнений основано на свойствах логарифмов и определении:

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

Пример. Решить уравнение $\log_5(30 - x) = 2$.

Решение. Согласно определению логарифма имеем $30 - x = 25$, откуда $x = 5$.

Ответ: 5.

Пример. Найти больший корень уравнения $\log_3 x(x + 2) = 1$.

Решение. По определению логарифма: $x(x + 2) = 3^1, x^2 + 2x - 3 = 0$.

Решая уравнение, получаем $x_1 = -3, \quad x_2 = 1$.

ОДЗ: $x(x+2) > 0$. Оба корня удовлетворяют *ОДЗ.* Больший корень равен 1.

Ответ: 1.

Пример. Решить уравнение $\log_2(x - 3) + \log_2 x = 2$.

Решение. Используем свойства логарифмов и преобразуем данное уравнение: $\log_2((x - 3) \cdot x) = 2$. Решаем уравнение по определению, получим: $(x - 3)x = 4$. Раскроем скобки и получим квадратное уравнение, которое решим по теореме Виета: $x^2 - 3x - 4 = 0, x_1 = 4, x_2 = -1$

Проверим найденные значения по области допустимых значений. *ОДЗ*: $\begin{cases} x - 3 > 0; \\ x > 0. \end{cases}$ Второй корень не удовлетворяет *ОДЗ.* Таким образом, корень уравнения равен 4.

Ответ: 4.

Пример. Решить уравнение

$$\lg(3-x)+\lg(2-x)=\lg(1-2x)+\lg(1-3x).$$

Решение. Преобразуем левую и правую части данного уравнения, заменив сумму логарифмов логарифмом произведения:

$$\lg((3-x)\cdot(2-x))=\lg((1-2x)\cdot(1-3x)).$$

Потенцируя последнее уравнение, получим уравнение:

$$(3-x)\cdot(2-x)=(1-2x)\cdot(1-3x) \text{ или } x^2=1.$$

Откуда $x=1,\quad x=-1$. Подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ – корень уравнения, а $x=1$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: -1.

Пример. Решить уравнение $\lg\left(3x^2+12x+19\right)-\lg\left(3x+4\right)=1$ и в ответе записать больший его корень.

Решение. Решение данного уравнения находится в той области, где $3x^2+12x+19>0$ и $3x+4>0$.

Найдем решение уравнения, используя свойства логарифмов, и решим свернутое уравнение по определению:

$$\lg\frac{3x^2+12x+19}{3x+4}=\lg 10 \Rightarrow \frac{3x^2+12x+19}{3x+4}=10 \Rightarrow$$

$$3x^2+12x+19=30x+40 \Rightarrow 3x^2-18x-21=0 \Rightarrow$$

$$x^2-6x-7=0 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm 4.$$

$$x_1=-1,\quad x_2=7.$$

Так как найденные значения x принадлежат области допустимых значений, т.е. $\begin{cases}3x^2+12x+19>0;\\ 3x+4>0;\end{cases}$, то найденные значения x удовлетворяют данному уравнению. В ответ записываем большее их них.

Ответ: 7.

Пример. Решить уравнение $\log_7 \log_2 \log_{x-1}(7-x)=0.$

Решение. Здесь проще перейти к уравнению, которое является следствием данного уравнения. Найти все корни полученного уравнения, сделать проверку и установить, какие из корней являются корнями исходного уравнения.

Совершая переход к уравнению-следствию, получим:

$$\log_7 \log_2 \log_{x-1}(7-x)=0 \quad \Rightarrow \quad \log_2 \log_{x-1}(7-x)=1 \quad \Rightarrow$$

$$\log_{x-1}(7-x)=2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2=7-x.$$

$$x=3, \quad x=-2.$$

Проверка.

1) Если $x=3$, то

$$\log_7 \log_2 \log_{x-1}(7-x)=\log_7 \log_2 \log_2 4=\log_7 \log_2 2=\log_7 1=0.$$

При $x=3$ уравнение обращается в верное числовое равенство, следовательно $x=3$ – корень уравнения.

1) Если $x=-2$, то $\log_{x-1}(7-x)$ не имеет смысла, т.к. в основании логарифма получается отрицательное число. Следовательно, $x=-2$ посторонний корень уравнения.

Ответ: 3.

Метод сведения к квадратному уравнению.

Этот метод применяется, как правило, к решению уравнений двух типов.

1 тип: $\log^2{}_a x+b\log_a x+c=0$.

Пусть $\log_a x=t$, тогда $t^2+bt+c=0$, решаем как квадратное уравнение, в конце возвращаемся к исходной переменной;

2 тип: $\dfrac{1}{\log_a x}+b\log_a x+c=0$.

Пусть $\log_a x = t$, тогда $\frac{1}{t} + bt + c = 0 \Rightarrow bt^2 + ct + 1 = 0$, решаем как квадратное уравнение, в конце возвращаемся к исходной переменной.

Пример. Найти меньший корень уравнения

$$\lg^2 x - 7\lg x + 6 = 0.$$

Решение. Введем замену переменной: $\lg x = t$, получим уравнение вида $t^2 - 7t + 6 = 0$. Решим его, используя теорему Виета, тогда $t_1 = 6, t_2 = 1$. Вернемся к старой переменной, получим следующие простые логарифмические уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 6; \\ \lg x = 1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^6; \\ x = 10. \end{array}\right.$$

ОДЗ: $x > 0$. Оба корня удовлетворяют *ОДЗ.* Меньший корень уравнения равен 10.

Ответ: 10.

Пример. Решить уравнение и в ответ записать сумму его корней $\log_3(\log_4^2 x - 3\log_4 x + 5) = 2$.

Решение. Решим данное уравнение по определению:

$$\log_3(\log_4^2 x - 3\log_4 x + 5) = \log_3 9 \Leftrightarrow \log_4^2 x - 3\log_4 x + 5 = 9; x > 0.$$

Положим $\log_4 x = y,$ тогда

$$y^2 - 3y - 4 = 0; \quad y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}, y_1 = 4, y_2 = -1.$$

Вернемся к старой переменной и решим простейшие логарифмические уравнения:

$$\log_4 x = 4; \quad \log_4 x = -1; \text{тогда } x_1 = 4^4; x_2 = \frac{1}{4}.$$

ОДЗ: $x > 0$. Оба корня удовлетворяют *ОДЗ.* Тогда сумма корней уравнения равна 256 + 0,25 = 256,25.

Ответ: 256,25.

Пример. Решить уравнение $2\lg\lg x = \lg(5-4\lg x)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\lg(\lg^2 x) = \lg(5-4\lg x).$$

Потенцируя, получим

$$\lg^2 x = 5-4\lg x \text{ или } \lg^2 x + 4\lg x - 5 = 0.$$

Обозначим $\lg x = y$, тогда будем иметь квадратное уравнение:

$$y^2 + 4y - 5 = 0,$$

корни которого $y_1 = -5$ и $y_2 = 1$. Отсюда $\lg x = -5$ и $\lg x = 1$. Заметим, что при $\lg x = -5$ левая часть данного уравнения теряет смысл. Решив уравнение $\lg x = 1$, найдем, что $x = 10$. Проверкой убедимся, что $x = 10$ является корнем данного уравнения.

Ответ: 10.

Метод перехода к новому основанию.

Метод основан на применении формулы перехода к новому основанию $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ или частного случая этой формулы в виде $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$. Необходимо отметить, что выбор нового основания может существенно повлиять на сам метод дальнейшего решения.

Пример. Решить уравнение $\log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1$.

Решение. ОДЗ: $x > 0,\quad 3x \neq 1$.

1 способ. Переходим к новому основанию 3. Получаем уравнение

$$\frac{\log_3(3/x)}{\log_3(3x)} + \log_3^2 x = 1.$$

Преобразуем логарифмы частного и произведения, уравнение примет вид

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1.$$

Сделаем замену переменной $\log_3 x = t$ и решим уравнение

$$\frac{1-t}{1+t}+t^2=1,$$

$$1-t+t^2(1+t)=1+t,$$

$$t^3+t^2-2t=0,$$

$t=0$	или	$t=-2$	или	$t=1$,
$\log_3 x=0$	или	$\log_3 x=-2$	или	$\log_3 x=1$,
$\log_3 x=\log_3 1$	или	$\log_3 x=\log_3 1/9$	или	$\log_3 x=\log_3 3$,
$x=1$	или	$x=1/9$	или	$x=3$.

2 способ. Переходим к новому основанию x. Получаем уравнение

$$\frac{\log_x(3/x)}{\log_x(3x)}+\frac{1}{\log_x^2 3}=1.$$

Преобразуем логарифмы частного и произведения, уравнение примет вид

$$\frac{\log_x 3-1}{\log_x 3+1}+\frac{1}{\log_x^2 3}=1.$$

Сделаем замену переменной $\log_x 3 = t$ и решим уравнение

$$\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{t^2}=1,$$

$$t^2(t-1)+t+1=t^2(t+1),$$

$$2t^2-t-1=0,$$

$t=1$	или	$t=-1/2$,
$\log_x 3=1$	или	$\log_x 3=-1/2$,
$\log_x 3=\log_x x$	или	$\log_x 3=\log_x x^{-1/2}$,
$x=3$	или	$3=x^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad x=1/9$.

Очевидно, произошла потеря корня $x=1$. Это случилось в силу того, что при неудачном выборе нового основания произошло сужение ОДЗ, получилось неявное предположение, что $x \neq 1$. В этом случае необходимо проверить, не является ли $x=1$ корнем. Простая подстановка показывает, что $x=1$ – корень.

Ответ: 1/9, 1, 3.

Метод дополнительного логарифмирования

Метод дополнительного логарифмирования применяется в тех случаях, когда логарифмическая функция встречается в показателе степени.

Пример. Решить уравнение $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$, в ответ записать наибольший корень.

Решение. ОДЗ: $x>0, \quad x \neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим

$$\lg x^{\lg^3 x - 5\lg x} = \lg 0{,}0001 \text{ или } (\lg^3 x - 5\lg x)\cdot \lg x = -4 \text{, или}$$

$$\lg^4 x - 5\lg^2 x + 4 = 0.$$

Решая это уравнение как биквадратное относительно $\lg x$, найдем:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -1; \\ \lg x = 1; \\ \lg x = -2; \\ \lg x = 2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{10}; \\ x = 10; \\ x = \dfrac{1}{100}; \\ x = 100. \end{array}\right.$$

Ответ: 100.

Методы решения логарифмических неравенств

Логарифмическими неравенствами называются неравенства вида $\log_a x > b \left(\log_a x \le b\right)$.

Решение неравенств осуществляется теми же методами, какими решались логарифмические уравнения. Отличие состоит в решении последнего этапа, где решаются неравенства вида

$$\log_a x > \log_a y \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x > y, \textit{если} & a > 1; \\ x < y, \textit{если} & 0 < a < 1. \end{array}\right.$$

Пример. Найти количество целых решений неравенства

$$\log_5(x+2) - 1 \le 0 .$$

Решение. Приведем неравенство к виду:

$$\log_5(x+2) - 1 \le 0 \Leftrightarrow \log_5(x+2) \le \log_5 5 .$$

Последнее неравенство, с учетом области определения логарифма и так как основание больше 1, равносильно системе $\begin{cases} x+2 \le 5, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 3]$.

Целыми решениями являются: – 1, 0, 1, 2, 3.

Ответ: 5.

Пример. Найти решение неравенства: $\log_{0,3}(2x-1) \le 2$.

Решение. Приведем неравенство к виду:

$$\log_{0,3}(2x-1) \le 2 \Rightarrow \log_{0,3}(2x-1) \le \log_{0,3} 0,3^2 \Rightarrow \log_{0,3}(2x-1) \le \log_{0,3} 0,09 .$$

Последнее неравенство, с учетом области определения логарифма и так как основание $a = 0,3 \prec 1$ (меняем знак неравенства), равносильно системе $\begin{cases} 2x-1 \ge 0,09; \\ 2x-1 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0,545; \\ x > 0,5; \end{cases} \Rightarrow x \in [0,545; +\infty)$.

Ответ: $[0,545; +\infty)$.

Пример. Найти наибольшее целое решение неравенства

$$\log^2{}_{0,3} x + \log_{0,3} x - 2 \le 0 .$$

Решение. Обозначим $\log_{0,3} x = t$.

Тогда имеем: $t^2 + t - 2 \le 0$; $(t + 2)(t - 1) \le 0$; решаем полученное неравенство методом интервалов, получим: $-2 \le t \le 1$.

Таким образом, $\begin{cases} \log_{0,3} x \ge -2; \\ \log_{0,3} x \le 1, \end{cases}$ прологарифмируем правые части неравенств, получим:

$$\begin{cases} \log_{0,3} x \ge \log_{0,3} (0,3)^{-2}; \\ \log_{0,3} x \le \log_{0,3} 0,3. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\begin{cases} x \le \dfrac{100}{9}; \\ x \ge \dfrac{3}{10}, \end{cases}$ так как основание логарифмической функции меньше 1, то поменялись знаки в неравенствах.

С учетом области определения логарифмической функции (ОДЗ $x > 0$) имеем, что $x \in [3/10;\ 100/9]$. Наибольшим целым решением неравенства является 11.

Ответ: 11.

Пример. Решить неравенство $\log_2 \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > 1$.

Решение. Это неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2-x} > 0; \\ \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > 0; \\ \log_2 \dfrac{x-1}{2-x} > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2-x} > 0; \\ \dfrac{x-1}{2-x} > 1; \\ \dfrac{x-1}{2-x} > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2-x} > 4 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2-x} - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{x-1-8+4x}{2-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-9}{2-x} > 0.$$

Решая последнее неравенство, получаем $x \in \left(1\frac{4}{5}; 2\right)$.

Ответ: $x \in \left(1\frac{4}{5}; 2\right)$.

Методы решения систем логарифмических уравнений

Пример. Найти решение системы $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4; \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 = 0. \end{cases}$

Решение. Упростим систему, используя свойства логарифмов, и решим ее:

$$\begin{cases} \log_2 xy = 4; \\ \lg \dfrac{x^2}{y} = -\lg 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 16; \\ \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^3 = 16; \\ y = 2x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = 8. \end{cases}$$

Так как ОДЗ: $x > 0, y > 0$, значит, найденные значения переменных являются решением данной системы.

Ответ: $(2;8)$.

Пример. Найти решение системы $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(xy) = 8; \\ \log_3\left(\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$

Решение. Отметим, что $x > 0, x \neq 1, y > 0, \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y} > 0$. По определению логарифма имеем:

$$\begin{cases} xy = \left(\sqrt{x}\right)^8; \\ \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y} = 3^0 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = x^4; \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3; \\ y = 9x. \end{cases}$$

В силу условий, приведенных в начале решения, подходит только один корень системы $x = 3$, тогда $y = 27$. Найденные значения являются решениями уравнения.

Ответ: $(3;27)$.

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислить:

5.1. $5^{\log_5 4-1}$;

5. 2. $(\lg 5+\lg 2)\cdot\lg 100+1$;

5.3. $\dfrac{\log_2 6}{\log_2 36}+5^{\log_{25} 5}$;

5.4. $\log_2 \log_{\sqrt{3}} 9$;

5.5. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$;

5.6. $\log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3\cdot\log_3 4)$;

5.7. $\log_3 64\cdot\log_2 \dfrac{1}{27}$;

5.8. $49^{1-\log_7 14}+5^{-\log_5 4}$;

5.9. $\log_2 39-\log_2 13-\log_2 24$;

5.10. $\log_3 4-4\log_3 2+\log_3 \dfrac{4}{9}$;

5.11. $\log_3 21+\log_3 2-\log_3 14$.

Решить уравнения:

5.12. $\log_3 (2x-1)=2$;

5.13. $\log_{0,2} (x+3)=-1$;

5.14. $\log_{\frac{12-x}{x}} 3-1=0$;

5.15. $\lg(3-x)-\lg(x+2)=2\lg 2$;

5.16. ${\log^2}_4 x-6\log_4 x+8=0$, в ответ записать меньший корень;

5.17. $\log_2^2 (x+1)-\log_{\sqrt{2}} (x+1)+\log_5 5=0$.

Решить неравенства:

5.18. $\lg(3x-2)-1\geq 0$; **5.19.** $\log_{0,6}(x-4)\leq 2$;

5.20. $5^{\log_5(x-7)}<4$; **5.21.** $\log_{\frac{1}{3}}\log_3(x-1)>0$;

5.22. $\log_{x-2}(x+2)<1$; **5.23.** $2^{\log_2 x}\leq(\sqrt{2})^{\log_2\sqrt{x}}$;

5.24. $\log_2(3-2x)-\log_2 13<0$; **5.25.** $\log_{0,5}(3-x)-\log_{0,5}13>0$;

5.26. $\log_2^2 x+\log_2 x-2>0$.

Решить системы уравнений:

5.27. $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=3;\\ x-y=-12,\end{cases}$ в ответ записать $x+y$;

5.28. $\begin{cases}\log_4(x-y)=1;\\ \log_4 x-\log_4 y=2,\end{cases}$ в ответ записать $15(x+y)$;

5.29. $\begin{cases}\log_2 x-\log_4 y=0;\\ \log_4 x+\log_2 y=1.\end{cases}$ **5.30.** $\begin{cases}\log_4 x=y-1;\\ x^{\frac{y}{6}}=4.\end{cases}$

6. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Основными тригонометрическими функциями являются: синус, косинус, тангенс и котангенс. При выполнении тригонометрических преобразований необходимо знать таблицу значений тригонометрических функций и формулы, связывающие тригонометрические функции. При решении тригонометрических задач почти всегда требуется знание не одной, а нескольких формул.

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором переменная является аргументом одной или нескольких тригонометрических функций. При решении тригонометрических уравнений в первую очередь необходимо уметь решать простейшие уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Решение других типов тригонометрических уравнений сводится в конечном итоге к решению простейших. При этом часто используется не один, а несколько различных методов.

Использование значений тригонометрических функций

Функция	Угол				
	0	$\frac{\pi}{6}=30^\circ$	$\frac{\pi}{4}=45^\circ$	$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	$\frac{\pi}{2}=90^\circ$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример. Вычислить $\sin 30^\circ - \cos 90^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$

Решение. Используем значения тригонометрических функций.

$$\sin 30^\circ - \cos 90^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{2} - 0 + 0 - 1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5 .$$

Ответ: – 0,5.

Применение формул приведения

К основным формулам приведения относят следующие:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \,; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x \,; \quad \sin(\pi \pm x) = \mp \sin x \,;$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x \,; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x \,; \quad \operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x \,.$$

Формулы приведения используются для упрощения выражений, а также для нахождения связи между различными функциями.

Пример. Упростить выражение $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2\cos(2\pi + \alpha)} - \sin(\pi - \alpha)$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2\cos(2\pi + \alpha)} - \sin(\pi - \alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} - \sin\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha} - \sin\alpha =$$

$$= \sin\alpha - \sin\alpha = 0 .$$

Ответ: 0.

Применение соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Тригонометрические функции одного и того же аргумента связаны посредством основных формул тригонометрии:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1;$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Упростить выражение $\dfrac{3-5\cos^2 x}{2-5\sin^2 x}$.

Решение. Используем основное тригонометрическое тождество, чтобы преобразовать числитель дроби.

$$\frac{3-5\cos^2 x}{2-5\sin^2 x} = \frac{3-5\left(1-\sin^2 x\right)}{2-5\sin^2 x} = \frac{3-5+5\sin^2 x}{2-5\sin^2 x} = \frac{-2+5\sin^2 x}{2-5\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{2-5\sin^2 x}{2-5\sin^2 x} = -1.$$

Ответ: -1.

Применение формул двойного аргумента

При использовании формул двойного аргумента необходимо не только знать их «слева направо», но и распознавать ситуации, когда эти формулы следует читать «справа налево».

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}.$$

Пример. Упростить выражение $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

Решение. $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=$

$$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}-1=\frac{1+\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}-1=1-1=0.$$

Ответ: 0.

Пример. Вычислить $6\left(\mathrm{tg}15^\circ-\mathrm{ctg}165^\circ\right)$.

Решение. $6\left(\mathrm{tg}15^\circ-\mathrm{ctg}165^\circ\right)=6\left(\mathrm{tg}15^\circ-\mathrm{ctg}\left(180^\circ-15^\circ\right)\right)=$

$$=6\left(\mathrm{tg}15^\circ+\mathrm{ctg}15^\circ\right)=6\left(\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}+\frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}\right)=$$

$$=6\left(\frac{\sin^2 15^\circ+\cos^2 15^\circ}{\cos 15^\circ\sin 15^\circ}\right)=6\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ}=6\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=24.$$

Ответ: 24.

Применение формул сложения

Формулами (теоремами) сложения называют следующие:

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y;$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y;$$
$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y};\qquad \mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}x\mathrm{tg}y}.$$

Пример. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Решение. Представим аргумент 15° в виде разности 45° и 30°, после чего применим формулу косинуса разности и подставим табличные значения тригонометрических функции:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Применение формул понижения степени и половинного аргумента

Формулами половинного аргумента называются формулы

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2};$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Аналогичные формулы для функций $\sin x$ и $\cos x$ известны как формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример. Вычислить $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = 0{,}8$.

Решение. Так как $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, то $\sin^2\alpha = \frac{1-0{,}8}{2} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

Применение формул преобразования суммы в произведение

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение являются довольно сложными для запоминания, но необходимыми для успешной сдачи экзамена. Имеют они следующий вид:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\mathrm{tg}x\pm\mathrm{tg}y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}.$$

Пример. Вычислить $\dfrac{\sin 27^\circ+\sin 33^\circ}{\cos 3^\circ}$.

Решение. Используем в числителе формулу суммы синусов.

$$\sin 27^\circ+\sin 33^\circ=2\sin\frac{27^\circ+33^\circ}{2}\cos\frac{27^\circ-33^\circ}{2}=2\sin 30^\circ\cos(-3^\circ)=$$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}\cos 3^\circ=\cos 3^\circ$. Тогда $\dfrac{\sin 27^\circ+\sin 33^\circ}{\cos 3^\circ}=\dfrac{\cos 3^\circ}{\cos 3^\circ}=1$.

Ответ: 1.

Применение формул универсальной подстановки

Знание формул универсальной подстановки не только важно для вступительных экзаменов, но и крайне полезно для дальнейшего обучения высшей математике.

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}; \qquad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}; \qquad \mathrm{tg}\,x=\frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}.$$

Пример. Найдите значение выражения $\dfrac{5-3\cos x}{3\sin x+4}$, если известно, что $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Используем формулы универсальной подстановки $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ и $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$:

$$\frac{5-3\cos x}{3\sin x+4} = \frac{5-3\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}}{3\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}+4} = \frac{5+5\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-3+3\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{6\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4+4\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2+8\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{6\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+4+4\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2+8\cdot\dfrac{1}{4}}{6\cdot\dfrac{1}{2}+4+4\cdot\dfrac{1}{4}} = \frac{2+2}{3+4+1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Методы решения простейших тригонометрических уравнений

Для решения тригонометрических уравнений необходимо знать соответствующие формулы, приведенные в таблице.

Уравнение	Решение
$\sin x = a$, где $\lvert a\rvert < 1$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$, где $\lvert a\rvert < 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$

Необходимо также знать формулы для решения частных случаев тригонометрических уравнений.

Уравнение	Решение
$\sin x = 0$	$x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$

Пример. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ в градусах на отрезке $\left[90^\circ; 180^\circ\right]$.

Решение. Решения данного уравнения имеют вид:

$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Используя значение $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, имеем $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Замечаем, что при $n = 0$ $x = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \in \left[90^\circ; 180^\circ\right]$.

Ответ: 120.

Пример. Решить уравнение $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ в радианах на отрезке [0; π].

Решение. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$,

$2x + \frac{\pi}{4} = 2\pi m,\ n \in \mathbf{Z}$, $\quad 2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ n \in \mathbf{Z}$, $\quad x = -\frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

При $n = 1$ $x = -\dfrac{\pi}{8} + \pi = \dfrac{7\pi}{8}$,

Ответ: $\dfrac{7\pi}{8}$.

Решение тригонометрических уравнений в случае равенства одноименных тригонометрических функций

Для решения уравнений вида $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ применяются формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};\quad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2};$$

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y};\quad \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}.$$

Необходимо отметить, что с помощью формул приведения к уравнения такого вида сводятся также уравнения вида $\sin\alpha = \cos\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$

Пример. Решить уравнение $\sin x = \sin 7x$.

Решение. Переносим все слагаемые влево, получаем уравнение $\sin x - \sin 7x = 0$. Применяя формулу $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$, получаем $2\sin\dfrac{x-7x}{2}\cos\dfrac{x+7x}{2} = 0$, откуда $2\sin(-3x)\cos 4x = 0$. Воспользовавшись нечетностью функции синуса $\sin(-3x) = \sin 3x$, переходим к решению совокупности двух уравнений:

$\sin 3x = 0$ или $\cos 4x = 0$,

$3x_1 = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ или $4x_2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$,

$$x_1=\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z} \qquad \text{или} \qquad x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi n}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример. Решить уравнение $\sin x=\cos 7x$.

Решение. С помощью формул приведения преобразуем данное уравнение к виду $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)$. Переносим все слагаемые влево, получаем уравнение $\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)=0$. Применяя формулу $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$, получаем уравнение

$$2\sin\frac{x-\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)}{2}\cos\frac{x+\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)}{2}=0,$$

откуда $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=0$. Воспользовавшись четностью функции косинуса $\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$, переходим к решению совокупности двух уравнений:

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \qquad \text{или} \qquad \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$4x_1-\frac{\pi}{4}=\pi n,\ n\in\mathbf{Z} \qquad \text{или} \qquad 3x_2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},$$

$$x_1=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbf{Z} \qquad \text{или} \qquad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Метод решения однородных тригонометрических уравнений

Однородными тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x +$$
$$+ \ldots + a_{n-1} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0.$$

На встпительных экзаменах обычно требуется решить либо однородное уравнение первого порядка вида

$$A \sin x + B \cos x = 0,$$

либо однородное уравнение второго порядка вида

$$A \sin^2 x + B \sin x \cdot \cos x + C \cos^2 x = 0 .$$

При этом необходимо иметь в виду, что уравнения вида

$$A \sin^2 x + B \sin x \cdot \cos x + C \cos^2 x +$$
$$+ E \sin 2x + F \cos 2x + D = 0$$

преобразуются к однородным уравнениям второго порядка по формулам $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $D = D(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Решение однородных уравнений осуществляется в два этапа.

1. Проверяем подстановкой, является ли решение уравнения $\cos x = 0$ решением данного уравнения.

2. Делим на обе части данного уравнения на $\cos^n x$ и вводим подстановку $y = \operatorname{tg} x$.

Пример. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 3x = 0$.

Решение. 1) Проверяем, является ли $\cos 3x = 0$ корнем уравнения. Нет (так как если $\cos 3x = 0$, то, подставляя это равенство в уравнение, получаем $0 + \sin 3x = 0$, откуда $\sin 3x = 0$, однако $\sin 3x$ и $\cos 3x$ не могут равняться нулю одновременно в силу основного тригонометрического тождества $\cos^2 3x + \cos^2 3x = 1$).

2) Делим обе части данного уравнения на $\cos^2 3x$. Получаем уравнение $1+\operatorname{tg} 3x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 3x = -1$, откуда $3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Окончательно находим $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} n;\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример. Решить уравнение $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества преобразуем данное уравнение к виду

$$6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0.$$

Полученное уравнение приводится к однородному уравнению второго порядка вида $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$

1) Проверкой убеждаемся, что $\cos x = 0$ решением не является.

2) Делим на $\cos x (\neq 0)$. Получаем $3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 4 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = 4/3$. Решаем каждое из этих простейших уравнений и находим, что $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \operatorname{arctg}(4/3) + \pi k;\ n, k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \operatorname{arctg}(4/3) + \pi k;\ n, k \in \mathbf{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

При разложении на множители необходимо помнить о недопустимости сокращения обеих частей уравнения на неизвестную величину, которая может содержать корни этого уравнения.

Пример. Решить уравнение $\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 0$.

Решение. Вынесем $\cos x$ за скобки:

$$\cos x(\sin x - 5\cos x) = 0..$$

Решение уравнения сселось к решению совокупности:

$$\cos x = 0, \text{ или } \sin x - 5\cos x = 0..$$

Решением уравнения $\cos x = 0$ является $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Уравнение $\sin x - 5\cos x = 0$ является однородным первой степени. Разделим обе его части на $\cos x$ и получим уравнение

$$\operatorname{tg} x = 5,$$

откуда $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$.

Решение тригонометрических уравнений методом применения формул тригонометрических преобразований

Пример. Решить уравнение $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ и найти сумму корней в градусах на отрезке $[0; \pi]$.

Решение. Применяя формулу $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, получаем $\dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2}$, откуда $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

При $n = 0, x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, при $n = 1, x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}$. Тогда сумма $x_1 + x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \pi = 180^\circ$.

Ответ: 180.

Пример. Решить уравнение $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$.

Решение. Применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение

$$2\sin x\cos x-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)=0\,,$$

откуда $2\sin x\cos x-\cos x=0$. Раскладываем левую часть на множители и решаем простейшие уравнения:

$$\cos x(2\sin x-1)=0,$$

$$\cos x=0 \text{ или } 2\sin x-1=0,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n,\ \ n\in Z \text{ или } x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi\cdot k,\ \ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n,\quad x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi\cdot k,\ \ n,k\in Z.$

Пример. Решить уравнение $\sin 7x-\sin x+2\cos^2 2x=1.$

Решение. В соответствии с формулой преобразования разности синусов в произведение можно выполнить преобразование $\sin 7x-\sin x=2\sin 3x\cos 4x.$ Уравнение примет вид

$$2\sin 3x\cos 4x+2\cos^2 2x=1.$$

Переносим единицу в левую часть и применяем формулу двойного аргумента:

$$2\sin 3x\cos 4x+(2\cos^2 2x-1)=0;$$

$$2\sin 3x\cos 4x+\cos 4x=0;$$

Раскладывая левую часть на множители, получаем

$$\cos 4x(2\sin 3x+1)=0;$$

$$\cos 4x=0 \qquad \text{или} \qquad 2\sin 3x+1=0;$$

$$4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \qquad \text{или} \qquad \sin 3x=-\frac{1}{2};$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\cdot n, n\in Z \qquad \text{или} \qquad 3x=(1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi k, k\in Z.$$

$$x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\cdot k, k\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\cdot n,\ \ (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\cdot k, n,k\in Z.$

Пример. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-6x\right).$$

Решение. В результате преобразования произведения тригонометрических функций в сумму получим

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}+x+\frac{\pi}{3}-4x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+x-\frac{\pi}{3}+4x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x+\frac{\pi}{4}-6x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x-\frac{\pi}{4}+6x\right)\right).$$

В результате умножения обеих частей уравнения на два, приведения подобных в аргументах функций и использования нечетности функции синус получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}+5x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\sin(9x);$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{6}-5x\right)=\sin 9x.$$

Переносим все слагаемые в одну сторону уравнения и преобразуем сумму функций в произведение:

$$\sin 9x+\sin\left(\frac{\pi}{6}-5x\right)=0;$$

$$\sin\frac{9x+\frac{\pi}{6}-5x}{2}\cos\frac{9x-\frac{\pi}{6}+5x}{2}=0;$$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(7x-\frac{\pi}{12}\right)=0.$$

Решаем два простейших уравнения и находим окончательный ответ.

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=0 \quad \text{или} \quad \cos\left(7x-\frac{\pi}{12}\right)=0;$$

$$2x+\frac{\pi}{12}=\pi\cdot n,\ n\in\mathbf{Z} \quad \text{или} \quad 7x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k,\ k\in\mathbf{Z};$$

$$x=-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z} \quad \text{или} \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{7}k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}n, \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{7}k,\ n, k \in \mathbf{Z}.$

Пример. Решить уравнение

$$4\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1$$

Решение. Преобразуем уравнение, применяя формулы приведения:

$$4\sin x\sin x - 4\cos x\cos x + 2\cos x\cos x = 1,$$

$$4\sin^2 x - 2\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

$$3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$

Применим формулу косинуса двойного угла и решим простейшее уравнение:

$$\cos 2x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Решение тригонометрических уравнений методом введения вспомогательного аргумента.

Введение вспомогательного аргумента (или вспомогательного угла) производится в отношении выражений вида

$$a\sin x + b\cos x.$$

Для этого формируется число $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, после чего число A выносят за скобки, что приводит к получению выражения

$$A\left(\frac{a}{A}\sin x + \frac{b}{A}\cos x\right).$$

Коэффициенты перед тригонометрическими функциями рассматриваются далее как синусы и косинусы некоторых углов, что дает возможность свернуть выражение по теоремам сложения.

Пример. Решить уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$

Решение. Сформируем число $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$. Вынесение единицы за скобки носит формальный характер. Заменяем коэффициенты при тригонометрических функциях, например, так: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. В результате получаем уравнение вида $\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1$. Применяем к левой части уравнения формулу сложения $\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ и получаем простейшее уравнение $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. Решая его, находим $x - \frac{\pi}{6} = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}.$

Решение. Сформируем число $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ и вынесем его за скобки. Получаем уравнение $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = \sqrt{3}$. Заменяем коэффициенты при тригонометрических функциях, например, так: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. В результате получаем уравнение вида $2\left(\sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x\right) = \sqrt{3}$. Применяем к левой части уравнения формулу сложения $\cos(x - y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ и получаем простейшее уравнение $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Решая его, находим $x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Необходимо отметить, что замена коэффициентов уравнения на значения тригонометрических функций носит достаточно произвольный характер. В предыдущей задаче она могла быть произведена и в другом виде, что привело бы к следующему завершению решения: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$, $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, уравнение приобретает вид $2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)=\sqrt{3}$, а затем преобразуется к виду $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x+\frac{\pi}{6}=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$ и $x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$. Особо отметим, что что это тот же ответ, что и полученный ранее, но записанный в другой форме.

Решение тригонометрических уравнений методом замены переменной

Замена переменной обычно позволяет существенно упростить решение. Однако само нахождение выражения, которое следует заменить, может быть непростым делом.

Пример. Решить уравнение $\sin x-\sin 2x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

Решение. Применяя формулу понижения степени для $\sin^2\frac{x}{2}$, получаем уравнение $\sin x-2\sin x\cos x=1-\cos x$. Сделаем замену

$$\sin x+\cos x=t,$$

тогда $(\sin x+\cos x)^2=t^2$, $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$, $\Rightarrow$ $\sin 2x=t^2-1$.

Таким образом, исходное уравнение приводится к квадратному уравнению вида: $t^2-t=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=1$.

Возвращаемся к исходной переменной.

1) $\sin x+\cos x=0$. Если $\cos x\neq 0$, то, разделив на $\cos x$, получаем уравнение вида $\operatorname{tg} x=-1$, откуда $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

2) $\sin x+\cos x=1$. Преобразуем это уравнение по методу введения вспомогательного аргумента: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{4}\sin x+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Находим $x_2=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ x_2=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислить.

6.1. а) $\sin 60^\circ-\cos 30^\circ+\operatorname{tg} 45^\circ-\operatorname{ctg} 45^\circ$;

б) $\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ+2\operatorname{tg} 45^\circ$;

в) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}$; **г)** $2+4\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos^2\dfrac{\pi}{10}+\sin^2\dfrac{\pi}{10}$;

д) $\sin 50^\circ\sin 20^\circ+\sin 40^\circ\sin 430^\circ$; **е)** $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$.

6.2. а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

б) $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{24}{25}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и α – угол 3 четверти.

Упростить:

6.3. $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$; **6.4.** $\dfrac{4\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$;

6.5. а) $\cos 2\gamma + 2\sin(\gamma + 30^\circ)\sin(\gamma - 30^\circ)$; **б)** $\dfrac{2+\cos 2\alpha}{6-4\sin^2\alpha}$;

в) $\dfrac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 15^\circ}$; **г)** $\dfrac{(\sin 75^\circ + \cos(-75^\circ))(\sin 75^\circ - \sin 15^\circ)}{\sin 75^\circ \sin 165^\circ}$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right)}{\cos(\pi + \beta)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$;

е) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

ж) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \dfrac{\sin^2 2\alpha}{2}$ при $\alpha = 2011^\circ$.

Решить уравнения:

6.6 а) $\cos(x+2) = 0$; **б)** $\sin 2x = 1$; **в)** $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} - 9x\right) = 1$;

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = -\dfrac{1}{2}$; **д)** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{4\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$.

6.7. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$,

6.8. $\sin x = \sin 3x$ на отрезке (0; π/2].

6.9. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$ на отрезке [0; π/4].

Указать количество различных корней, принадлежащих промежутку (0; π)

6.10. а) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$; **б)** $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Решите уравнение на отрезке $[0; 4\pi]$**:**

6.11. а) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{3} \cdot \sin 2x + \cos 2x = 2$.

Решить уравнение при условии $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ **.**

6.12. $\sqrt{2} \cos 3x + \sqrt{2} \sin 3x = -1$ **.**

7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Последовательность $\{a_n\}$ называется арифметической прогрессией, если существует такое число d, называемое *разностью* арифметической прогрессии, что для любого номера n: $a_{n+1} = a_n + d$.

Последовательность $\{b_n\}$ называется геометрической прогрессией, если существует такое число q, называемое *знаменателем* геометрической прогрессии, что для любого номера n: $b_{n+1} = b_n\, q$.

Методы решения задач на арифметическую прогрессию

В большинстве задач на арифметическую прогрессию требуется уметь выразить все данные через первый член a_1 этой прогрессии и ее разность d. Для этого обычно используют формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, где n − число членов, a_n− n-й член прогрессии. Необходимо также знать формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

В ряде задач может понадобиться знание характеристического свойства арифметической прогрессии:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

Пример. Найти двенадцатый член прогрессии: − 5, 6, 17,….

Решение. Данная последовательность является арифметической прогрессией. $a_1 = -5,\ d = 6 - (-5) = 11$. Применяя формулу общего члена $a_n = a_1 + d(n-1)$, получаем

$$a_{12} = -5 + 11(12-1) = -5 + 11 \cdot 11 = -5 + 121 = 116 .$$

*Ответ:*116.

Пример. Найти номер члена арифметической прогрессии 11,8; 12,4; 13;…, равного 20,8.

Решение. В данной прогрессии $a_1 = 11{,}8$, $d = 12{,}4 - 11{,}8 = 0{,}6$.

Используем формулу общего члена прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$; $20{,}8 = 11{,}8 + 0{,}6(n-1)$.

Решая последнее уравнение относительно неизвестной *n,* получаем

$$20{,}8 = 11{,}8 + 0{,}6n - 0{,}6\,;$$

$$20{,}8 - 11{,}8 + 0{,}6 = 0{,}6n\,;$$

$$9{,}6 = 0{,}6n\,; \qquad n = \frac{9{,}6}{0{,}6} = 16\,.$$

*Ответ:*16.

Пример. За сколько часов велосипедист проедет 54 км, если в первый час он проезжает 15 км, а в каждый последующий час на 1 км меньше, чем в предыдущий?

Решение. Так как скорость движения велосипедиста в каждый час на 1 км меньше, чем в предыдущий, то эти скорости составляют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 12 и разностью $d = -1$. Дана сумма членов прогрессии, равная 54 м. Найти число членов, т.е. время движения велосипедиста.

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} n\,, \quad a_n = a_1 + (n-1)d = 15 - (n-1)\,.$$

$$54 = \frac{(15 - (n-1))}{2} n\,; \quad 108 = 30n - n^2 + n\,.$$

Решим следующее квадратное уравнение:

$$n^2 - 31n + 108 = 0\,; \quad n = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 432}}{2} = \frac{31 \pm 23}{2}\,.$$

$$n_1 = 27\,, \quad n_2 = 4\,.$$

Число n_1 не может быть равно времени движения, так как через 15 часов скорость будет направлена в обратную сторону, а через 27 часов велосипедист будет находиться на расстоянии 54 км в обратном направлении.

Ответ: 4 часа.

Пример. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Вычислить сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

Решение. Так как $a_3 + a_9 = 8$, а сумма членов одинаково отстоящих от концов арифметической прогрессии постоянна, то $a_1 + a_{11} = 8$. Это значит, что $S = \dfrac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot n = \dfrac{8}{2} \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44.

Методы решения задач на геометрическую прогрессию

Методы решения задач на геометрическую прогрессию в целом аналогичны методам решения задач на прогрессию арифметическую. В данном случае тоже требуется уметь выразить все данные через первый член a_1 этой прогрессии и ее знаменатель разность q. Для этого используют формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 q^{n-1}$, где n – число членов, b_n – n-й член прогрессии. Необходимо также знать формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}, q \neq 1.$$

Характеристическое свойство арифметической прогрессии выглядит следующим образом:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \qquad b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}.$$

Если $0<|q|<1$, то при неограниченном увеличении *n*, сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$, которое называют суммой бесконечной геометрической прогрессии и обозначают

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Пример. Вычислить $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...$

Решение. Данная сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{1}{9}:\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ и $b_1=\frac{1}{3}$.

Применяем формулу $S=\frac{b_1}{1-q}$, получаем: $S=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}=0{,}5.$

*Ответ:*0,5.

Пример. Найти шестой член прогрессии 2, 6, 18,…

Решение. Данная последовательность является геометрической прогрессией. $b_1=2, q=6:2=3$.Применяя формулу общего члена $b_n=b_1q^{n-1}$, получаем $b_6=2\cdot 3^{6-1}=2\cdot 3^5=2\cdot 243=486.$

*Ответ:*486.

Пример. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, если третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

Решение. Так как искомые числа образуют геометрическую прогрессию, то $a_1=a_1$, $a_2=a_1q$, $a_3=a_1q^2$, $a_4=a_1q^3$,где a_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

Из условия следует, что

$$\begin{cases} a_3 - a_1 = 9; \\ a_2 - a_4 = 18; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^2 - a_1 = 9; \\ a_1 q - a_1 q^3 = 18; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1\left(q^2 - 1\right) = 9; \\ a_1 q\left(1 - q^2\right) = 18. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим $-q = 2$, $q = -2$. Тогда из первого уравнения последней системы получим:

$$a_1(4-1) = 9, \quad a_1 = 3.$$

В результате получим прогрессию $3,\ -6,\ 12,\ -24$.

Ответ: $3, -6, 12, -24$.

Упражнения для самостоятельного решения

7.1. В арифметической прогрессии первый член равен 8, разность 4. Найти сумму первых шестнадцати членов прогрессии.

7.2. Четвертый член арифметической прогрессии равен $\frac{5}{14}$. Найти сумму первых семи членов прогрессии.

7.3. Третий и седьмой члены арифметической прогрессии равны 1,1 и 2,3. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

7.4. Найти сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 1.

7.5. Определить, при каких x три числа $a_1 = \lg 2;\ a_2 = \lg\left(2^x - 6\right);\ a_3 = \lg\left(2^x + 34\right)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

7.6. Вычислить $432 + 72 + 12 + 2 + \ldots$

7.7. Первый член геометрической прогрессии равен 150, четвертый 1,2. Найти пятый член прогрессии.

7.8. Сумма второго и восьмого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{325}{128}$, а сумма второго и шестого членов, уменьшенная на $\frac{65}{132}$, равна четвертому члену этой же прогрессии. Найти сумму квадратов этой прогрессии.

8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Методы решения текстовых задач на проценты

Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком %.

- Чтобы найти x% от некоторого числа y, надо y разделить на 100 и умножить на x. Например, 70% от числа 90 составляют $\frac{90 \cdot 70}{100} = 63$.
- Если известно, что x% числа a равно y, то число a можно найти по формуле $a = \frac{y}{x} \cdot 100$. Например, если 5% некоторого числа составляют 450, то само число равно $\frac{450}{5} \cdot 100 = 900$.
- Чтобы найти процентное отношение двух чисел x и y надо отношение этих чисел умножить на 100%. Например, если плановое задание составляло 30 деталей, а рабочий сделал 45 деталей, то он выполнил план на $\frac{45}{30} \cdot 100\%$, т.е. на 150%.

Полезно знать формулу сложных процентов:

$$N = a(1 + 0{,}01p)^n,$$

где a – первоначальная величина вклада, n – срок вклада, N – величина вклада через n лет, p – число процентов.

При решении задач, в которых используются процентные соотношения, важно правильно определить количество, принимаемое за 100%.

> **Пример.** За день было вспахано 24 га земли, что составило 15% площади всего поля. Какова площадь поля?

Решение. Если площадь всего поля обозначить через x, то 24 га соответствуют 15% площади, а x га соответствуют 100%:

$$x \quad - \quad 100\%$$

$$24 \quad - \quad 15\%$$

Составляем пропорцию:

$\frac{x}{24} = \frac{100}{15}$ и находим $x = \frac{24 \cdot 100}{15} = 160$ га.

Ответ: 160 га.

Пример. Цена товара была повышена на 25%. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

Решение. Пусть цена товара была a и ее необходимо уменьшить на x%, тогда

$$a(1 + \frac{25}{100})(1 - \frac{x}{100}) = a$$

Решив данное уравнение, получаем, что $x = 20\%$.

Ответ: 20%.

Пример. Банк начисляет 12% годовых на валютный вклад по окончанию каждого года, прибавляя начисленную сумму к вкладу. Какую сумму получит вкладчик, вложивший 5000$, через три года?

Решение. Чтобы получить ответ на этот вопрос, сделаем следующие вычисления:

$$5000 \cdot (1 + \frac{12}{100})^3 .$$

Ответ: 7024,64$.

Пример. За смену двое рабочих изготовили вместе 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15 %, а второй – на 25%, они вдвоем изготовили 86 деталей. Сколько деталей за смену стал изготавливать каждый рабочий после повышения производительности труда?

Решение. Введем обозначения: x – число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим до повышения производительности труда; y – число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим до повышения производительности труда.

Тогда: $x + 0{,}15x$ – число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим после повышения производительности труда;

$y + 0{,}25y$ – число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим после повышения производительности труда.

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 72, \\ 1{,}15x + 1{,}25y = 86 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40, \\ y = 32 \end{cases}.$

Следовательно, $\begin{cases} 1{,}15x = 46, \\ 1{,}25y = 40. \end{cases}$

Ответ: 46 и 40.

Пример. Морская вода содержит 5% (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской, чтобы содержание соли в ней стало 1,5%?

Решение. Пусть нужно добавить x кг пресной воды, тогда получаем уравнение:

$$30 \cdot \frac{5}{100} + x \cdot \frac{0}{100} = (30 + x) \cdot \frac{1{,}5}{100}$$

$$(30 + x) \cdot 0{,}015 = 1{,}5$$

$$30 + x = 100$$

$$x = 70$$

Ответ: 70 кг.

Методы решения текстовых задач на движение

Основными составляющими в задачах на движение являются пройденный путь s, скорость v, время t. Надо помнить формулы, связывающие их:

$$s = v \cdot t; \quad v = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{v}.$$

При решении задач эти величины должны быть в одной системе единиц.

При решении задач на относительное движение (задач "на движение по реке") необходимо помнить следующие формулы:

$$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}};$$
$$v_{\text{против теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}};$$
$$v_{\text{соб.}} = (v_{\text{по теч.}} + v_{\text{против теч.}})/2.$$

Пример. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти увеличенную скорость поезда.

Решение. Из условия задачи следует, что если бы поезд после остановки продолжал двигаться с первоначальной скоростью, то затратил бы на 12 мин (12 мин $=\frac{1}{5}$ ч) больше, чем предполагалось по расписанию.

Пусть x – скорость поезда после остановки (в км/ч). Тогда $\frac{60}{x}$ – время, пройденное с увеличенной скоростью (в ч), $\frac{60}{x-15}$ – время по расписанию. Так как разность этих времен по условию составляет $\frac{1}{5}$ ч, то составим и решим уравнение $\frac{60}{x-15}-\frac{60}{x}=\frac{1}{5}$, $x_1 = 75$, $x_2 = -60$. Корень $x_2 = -60$ не удовлетворяет условию задачи, так как скорость − величина неотрицательная.

Ответ: 75.

Методы решения текстовых задач на совместную работу

При решении задач на совместную работу следует придерживаться слелующего плана:

- всю работу, которую надо выполнить, принять за единицу;
- найти производительность труда каждого работающего в отдельности;
- найти ту часть всей работы, которую выполняет каждый работающий отдельно, за то время, которое он работал;

- составить уравнение, приравнивая объем всей работы (то есть 1) к сумме слагаемых, каждое из которых есть часть всей работы, выполненной отдельно каждым из работающих.

> **Пример.** Одна труба наполняет бассейн на 2 часа дольше, а другая на 4,5 часа дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

Решение. Пусть обе трубы наполняют бассейн за x часов

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4,5}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4,5}$$ (так x сократятся)

$$\frac{1}{x+2}=\frac{(x+4,5)-x}{x(x+4,5)}$$

$$4,5(x+2)=x(x+4,5)$$

$$4,5x+9=x^2+4,5x$$

$$x^2=9, \qquad x=\pm 3.$$

Ответ: Первая труба – за 5 ч, вторая – за 7,5 ч.

> **Пример.** Два насоса, работают одновременно, могут выкачать воду из котлована за 2 ч. Первый из них, работая один, затратил на это на 3 часа больше, чем второй. За какое наименьшее время второй насос, работая отдельно, может выкачать воду из котлована?

Решение. Пусть первый насос может выкачать всю воду за x ч, тогда второму насосу на такое же действие понадобится x-3 ч. Получаем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2}.$$

Решаем его. Для этого приводим левую часть к общему знаменателю, применяем свойство пропорций, раскрываем скобки и решаем квадратное уравнение:

$$\frac{x-3+x}{x(x-3)}=\frac{1}{2}$$

$$2(2x-3)=x(x-3)$$

$$4x-6=x^2-3x$$

$$x^2-7x+6=0$$

$x=1$ или $x=6$.

Ответ: 3ч.

Пример. Трое рабочих выполнили работу за 10 дней, причем третий из них работал лишь первые три дня. За сколько дней выполнил бы работу каждый рабочий, если известно, что за первые три дня они вместе выполнили 37% всей работы, а за 5 дней первый рабочий сделал столько же, сколько второй за 4 дня?

Решение. Пусть первый рабочий выполняет всю работу за x дней, второй – за y дней, третий – за z дней. Тогда

$$\begin{cases} 10\cdot\frac{1}{x}+10\cdot\frac{1}{y}+3\cdot\frac{1}{z}=1, \\ 3\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{1}{y}+3\cdot\frac{1}{z}=\frac{37}{100}, \\ 5\cdot\frac{1}{x}=4\cdot\frac{1}{y}, \end{cases}$$

сделаем замену переменных: $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b, \frac{1}{z}=c$:

$$\begin{cases} 10\cdot a+10\cdot b+3\cdot c=1, \\ 3\cdot a+3\cdot b+3\cdot c=\frac{37}{100}, \\ 5\cdot a=4\cdot b, \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнение второе:

$$7a+7b=\frac{63}{100},\ \text{откуда получаем}\ a+b=\frac{9}{100}.$$

Из третьего уравнения в системе $a=\frac{4b}{5}$, следовательно,

$$\frac{4b}{5}+b=\frac{9}{100},\quad \frac{9b}{5}=\frac{9}{100},\quad b=\frac{1}{20},\quad \text{тогда}\ a=\frac{4b}{5}=\frac{1}{25}.$$

Из первого уравнения в системе выразим c:

$$3c=1-10a-10b,\quad 3c=1-\frac{10}{25}-\frac{10}{20}=\frac{1}{10},\quad c=\frac{1}{30}.$$

Ответ: за 25, 20 и 30 дней.

Пример. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполниться за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба в течение одной четверти времени, которое необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн, действуя отдельно. Затем действовала вторая труба также в течение одной четверти времени, которое необходимо первой, чтобы одной наполнить бассейн, после чего оказалось, что остается наполнить $\frac{11}{24}$ полной вместимости бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение. Примем объем воды в бассейне за 1. Пусть первая труба наполняет бассейн за x часов, а вторая – за y часов. Тогда производительность каждой трубы будет соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ в час.

Из условия следует, что первая труба наполнила $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y$ часть бассейна, вторая труба $\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{4}x$ часть бассейна, а вместе они наполнили $1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$ части бассейна. Отсюда $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24}$.

Так как обе трубы при одновременной работе наполняют весь бассейн за 2 ч 24 мин, то $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1$. Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{4}y+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{y}=\frac{13}{24},\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 2\frac{2}{5}=1;\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{y}{x}\cdot 6+\frac{x}{y}\cdot 6=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}.\end{cases}.$$

Полагая $\frac{x}{y}=a$, имеем

$$\begin{cases}6a+\frac{6}{a}=13,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12};\end{cases} \qquad \begin{cases}6a^2-13a+6=0,\\ 12y+12x=5xy.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a_1=\frac{3}{2},\\ a_2=\frac{2}{3},\end{array}\right.\\ 12y+12x=5xy;\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{y}{x}=\frac{3}{2},\\ \frac{y}{x}=\frac{2}{3},\end{array}\right.\\ 12y+12x=5xy;\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=6.\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right..$$

Ответ: 4; 6.

Методы решения текстовых задач на десятичную систему счисления

Пример. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

Решение. Пусть x – цифра десятков данного числа, y – цифра единиц того же числа, $10x + y$ – искомое двузначное число. Тогда по условию задачи получаем систему уравнений:

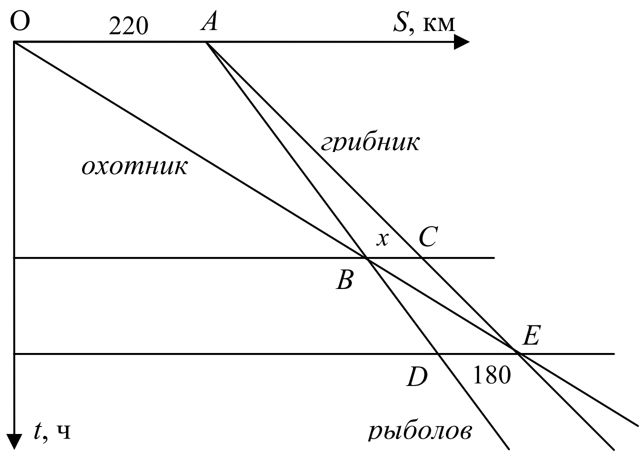
$$\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ 10x+y-9=10y+x;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=3,\\ y=2\end{cases}$$ (отрицательные значения переменных не подходят по смыслу задачи, так как x, y – цифры числа.

Ответ: 32.

Графический метод решения текстовых задач

> **Пример.** Грибник и рыболов находятся на расстоянии 220 м от охотника. Когда охотник догнал грибника, рыболов отставал от них на 180 м. На каком расстоянии от рыболова был грибник, когда охотник догнал рыболова?

Решение. В прямоугольной системе координат схематично построим графики движений грибника, рыболова и охотника (считаем, что они идут с постоянными скоростями). На чертеже точки пересечений графиков соответствуют встрече объектов в какой-то момент времени. Для любой точки графика с координатами (S; t), t – это момент времени, в который объект находится на расстоянии S от начальной точки. За начальную возьмем точку, в которой находился охотник, когда был на расстоянии 220 м от рыболова и грибника.



Здесь OA = 220 м, DE =180 м, BC – искомый отрезок, длину которого обозначим через x. Рассмотрим пары подобных треугольников. Очевидно, треугольники OAB и BDE подобны. Следовательно, $\frac{BE}{OB}=\frac{BD}{AB}=\frac{DE}{OA}=\frac{180}{220}$. Треугольники ADE и ABC тоже подобны. Следовательно, $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{180}{x}$. Отрезок AD может быть представлен как сумма двух отрезков: $AD = AB + BD$. Тогда во втором соотношении можно взять пропорцию $\frac{AD}{AB} = \frac{180}{x}$ и переписать ее в виде $\frac{AB + BD}{AB} = \frac{180}{x}$. Из первого соотношения возьмем пропорцию $\frac{BD}{AB} = \frac{180}{220}$ и подставим во вторую. Получаем:

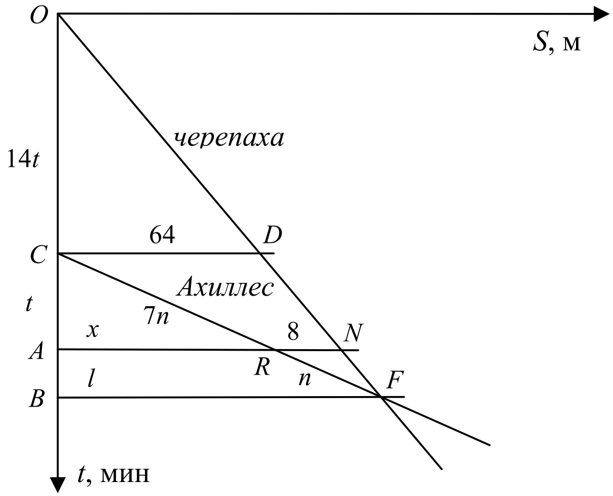
$$\frac{180}{x} = \frac{AB + BD}{AB} = 1 + \frac{BD}{AB} = 1 + \frac{180}{220}.$$

Решаем уравнение $\frac{180}{x} = 1 + \frac{180}{220}$: $\frac{180}{x} = \frac{400}{220}$; $22 \cdot 180 = 40x$; $x = 99$.

Ответ: 99.

> **Пример.** Обнаружив в 64 метрах от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал ее преследовать. Сократив расстояние до черепахи в 8 раз и осознав свое превосходство, он прекратил погоню. Какой путь проделал Ахиллес с начала погони, если его скорость в 15 раз больше скорости черепахи, причем движение Ахиллеса и черепахи происходило по одной прямой?

Решение. В прямоугольной системе координат схематично построим графики движений Ахиллеса и черепахи (считаем, что они движутся с постоянными скоростями). На чертеже точки пересечений графиков соответствуют встрече объектов в какой-то момент времени. Для любой точки графика с координатами (S; t), t – это момент времени, в который объект находится на расстоянии S от начальной точки. За начальную возьмем точку, в которой находилась черепаха в момент начала своего движения.



Длина отрезка OC равна интервалу времени между началом движения черепахи и Ахиллеса, длина отрезка CA равна времени погони, точка B показывает момент, когда Ахиллес догнал бы черепаху (время является второй координатой точки F).

Условие «скорость в 15 раз больше» означает, что одно и то же расстояние Ахиллес преодолеет за время, в 15 раз меньшее, чем черепаха. Время OB в 15 раз больше, чем время CB. Тогда если $CB = t$, то $OB = 15t$, а $OC = 14t$. Координаты точки F соответствуют моменту и месту их встречи.

В момент начала погони расстояние составляет 64 м, на чертеже это означает, что $CD = 64$. Так как Ахиллес прекратил бег, когда расстояние сократилось в 8 раз, то $RN = 8$.

Треугольники CDF и RNF подобны с коэффициентом подобия $k = 8$. Следовательно, если $RF = n$, то $CF = 8n$, а $CR = 7n$. Треугольники CDO и BFO тоже подобны. Следовательно, $\frac{64}{l} = \frac{14}{15}$, откуда $l = \frac{64 \cdot 15}{14}$. Треугольники BFC и ARC тоже подобны. Следовательно, $\frac{x}{l} = \frac{7}{8}$, откуда $x = \frac{7}{8} l = \frac{7}{8} \cdot \frac{64 \cdot 15}{14} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60$.

Ответ: 60.

Упражнения для самостоятельного решения

8.1. У дроби $\frac{\sqrt{x}}{y}$ число x увеличили на 44%, а число y уменьшили на 70%. На сколько процентов увеличилось значение дроби?

8.2. Сумма двух чисел равна 24. Найти меньшее из них, если 35% одного из них равны 85% другого.

8.3. Яблоки при сушке теряют 84% своего веса. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?

8.4. Для вспашки поля за 24 дня требуется 16 тракторов. Сколько потребуется тракторов такой же мощности, чтобы вспахать это поле за 8 дней?

8.5. Расстояние между пристанями 20 км. Этот путь туда и обратно катер проходит за 4 ч 10 мин. Найти скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

8.6. На перегоне в 240 км поезд шел со скоростью на 10 км/ч меньшей, чем предполагал, и поэтому прибыл на место с опозданием на 20 мин. С какой скоростью должен был двигаться поезд на этом перегоне (в км/ч)?

8.7. Из двух городов, расстояние между которыми 448 км, выезжают одновременно навстречу друг другу два автомобиля – один со скоростью 60 км/ч, другой – со скоростью 80 км/ч. Через, сколько часов они встретятся?

8.8. Из двух положительных чисел одно больше другого в 5 раз. Найти большее из этих чисел, если их разность равна 52.

8.9. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если к исходному числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

8.10. Две бригады вместе обработали участок за 12 часов. За какое время могла бы обработать этот участок в отдельности бригада с большей производительностью, если производительности труда бригад относятся как 3:2?

8.11. До приближающегося Ахиллеса оставалось еще 6 м, когда черпаха поняла, что ей не уйти от погони, и обреченно остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если ее скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время погони сократилось в 9 раз, и их движение происходило по одной прямой?

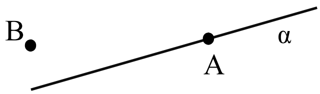
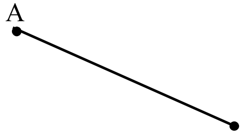
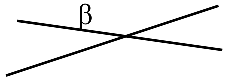
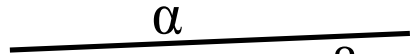
9. ПЛАНИМЕТРИЯ

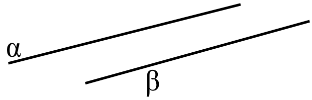
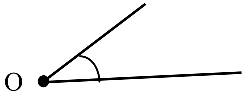
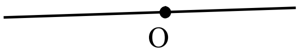
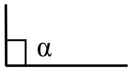
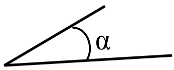
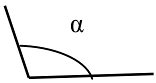
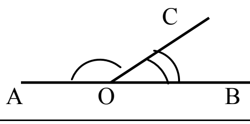
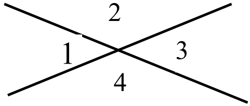
Краткие теоретические сведения

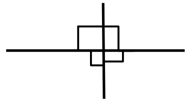
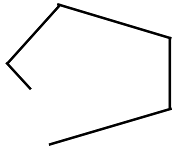
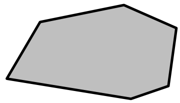
Геометрическая фигура – любое множество точек.

Неопределяемые понятия геометрии:	
Точка	
Прямая	
Плоскость	

2. Начальные сведения

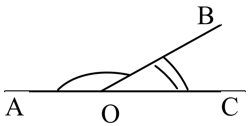
Точка A принадлежит (лежит) на прямой α (A $\in$ α) или прямая α проходит через точку A. Точка B не принадлежит (не лежит) на прямой α (B $\notin$ α).	
Пусть *A, B* – различные точки. Отрезком [*AB*] называется часть прямой между ее точками *A* и *B*. Точки A и B называются концами отрезка. Длина отрезка $\left\|AB\right\|$ – расстояние между его концами. *Аксиома:* Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.	
Прямые α и β – пересекающиеся, если они имеют только одну общую точку.	
Прямые α и β – совпадающие, если у них все точки общие.	

Прямые α и β – параллельные, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (не имеют общих точек).	
Луч – часть прямой, расположенная по одну сторону от точки *O* – начала луча.	
Угол – фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), исходящими из одной точки (вершины угла). Обозначается: $\angle O$. Углы измеряются в градусах $(1^0 = \frac{1}{180^0})$ или в радианах $(1 рад \approx 57^0)$.	
Развернутый угол равен 180^0.	
Прямой угол равен 90^0.	
Острый угол – угол, меньше чем прямой (меньше, чем 90^0).	
Тупой угол – угол, больше чем прямой (больше, чем 90^0).	
Смежные углы ($\angle AOB$ *и* $\angle BOC$) – одна сторона общая (*OB*), а две другие являются дополнительными лучами (*OA* и *OC*).	
Вертикальные углы ($\angle 1$ и $\angle 3$, $\angle 2$ и $\angle 4$) – стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла.	

Пересекающиеся прямые перпендикулярны, если они образуют четыре прямых угла.	
Ломаная – это фигура, которая состоит из отрезков, таких, что начало каждого следующего совпадает с концом предыдущего, при этом соседние отрезки не лежат на одной прямой.	
Многоугольник – фигура, состоящая из замкнутой ломаной без самопересечений и внутренней части плоскости, ограниченной этой ломаной.	

Пример. Углы AOB и BOC – смежные. Найти величину угла BOC, если известно, что величина угла AOB в 8 раз больше чем величина угла BOC.

Решение.



Пусть $\angle AOB = \alpha, \angle BOC = \beta$.

Тогда по условию имеем

$\alpha + \beta = 180$ (так как углы смежные) и

$\alpha = 8\beta$.

Подставляя в первое уравнение второе, получаем:

$$8\beta + \beta = 180,$$

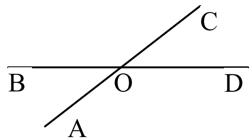
$$9\beta = 180,$$

$$\beta = \frac{180}{9} = 20.$$

Ответ: 20^0.

Пример. На рисунке изображены углы. Найти величины углов AOB, BOC, COD если известно, что величина угла DOA равна 172^0.

Решение.



Так как угол DOA является вертикальным углу BOC, то величина угла BOC равна 172^0. Углы DOA и AOB являются смежными, и значит, сумма их улов равна 180^0. Отсюда следует, что величина угла AOB равна $180^0 - 172^0 = 8^0$. Так как угол AOB является вертикальным углу COD, то величина угла BOC равна 8^0.

Ответ: 8^0.

Упражнения для самостоятельного решения

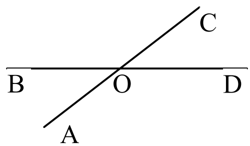
9.1. Углы *AOB* и *BOC* – смежные. Известно, что величина угла *AOB* равна 63^0. Найти величину угла *BOC*.

9.2. Углы *AOB* и *BOC* – смежные. Найти, чему равен угол *AOB*, если известно, что разность между величинами углов *AOB* и *BOC* составляет 50^0.

9.3. Углы *AOB* и *BOC* – смежные, причем первый из них в 4 раза больше второго. Найти величину угла *AOB*.

9.4. Углы *AOB* и *BOC* – смежные. Найти величину наименьшего из углов, если известно, что их величины соотносятся как 3:2.

9.5. На рисунке изображены углы.



Найти величины углов *AOB, BOC*, *COD, DOA*, если известно, что разность между *BOC* и *COD* составляет 38^0.

9.6. На рисунке изображены углы. Найти величины углов *AOB*, *BOC, COD, DOA*, если известно, что сумма углов *AOB, BOC* и *COD* составляет 260^0.

Окружность

Краткие теоретические сведения

Окружность – фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки О плоскости. Эта точка называется центром окружности.

Радиус окружности –

1. расстояние (R) от точек окружности до ее центра;

2. любой отрезок (OA), соединяющий точку окружности с ее центром.

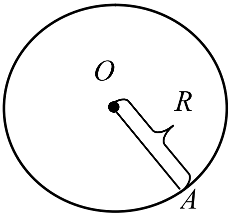


Рис. 9.1.

Многоугольник называется *вписанным в окружность*, если все его вершины лежат на этой окружности. Окружность в этом случае называется *описанной около многоугольника*. рис. 9.2. (а)

Многоугольник называется *описанным около окружности*, если все его стороны касаются этой окружности. Окружность в этом случае называется *вписанной в многоугольник*. рис. 9.2. (б)

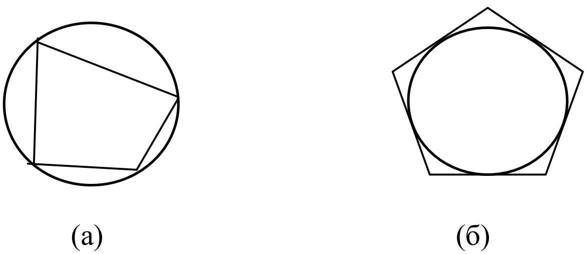


Рис. 9.2.

Треугольники
Краткие теоретические сведения

Треугольник – фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Обозначается: *ΔABC*.

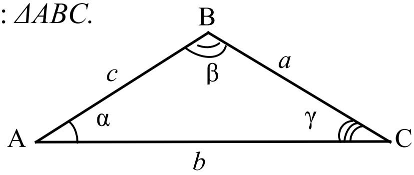


Рис. 9.3.

Метрические соотношения для треугольников

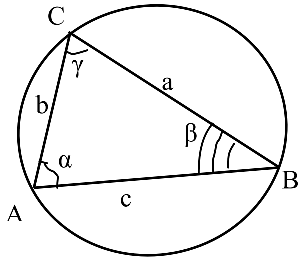


Рис. 9.4.

Периметр (*P*) – сумма длин всех сторон треугольника:
P = *AB* + *BC* + *CA*.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0

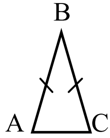
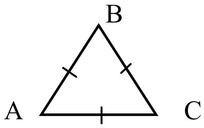
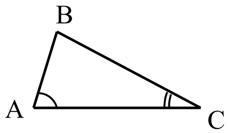
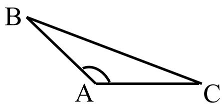
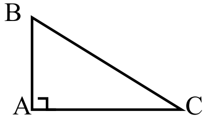
(α + β + γ = 180^0 или π).

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R,$

где *R* – радиус описанной окружности.

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$

Выделяют разные виды треугольников:

в зависимости от длин сторон треугольника		
равнобедренный, если у него две стороны равны		$AB = BC$ AC – основание, AB, BC – боковые стороны
равносторонний (правильный) – все стороны равны		$AB = BC = CA$
по виду углов треугольника		
остроугольный (все углы меньше 90^0)		$\angle A$, $\angle B$, $\angle C < 90^0$
тупоугольный (один угол тупой (больше 90^0))		$\angle A > 90^0$
прямоугольный (один угол = 90^0)		$\angle A = 90^0$

Признаки подобия треугольников

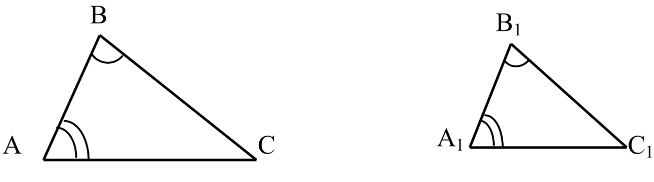


Рис. 9.5.

Три признака подобия:

1. *По двум углам.*
Если $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1,\quad \text{то}\quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. *По двум сторонам и углу между ними.*
Если $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}, \angle C = \angle C_1,\quad \text{то}\quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

3. *По трем сторонам.*
Если $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1},\quad \text{то}\quad \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Равенство треугольников

Треугольники равны, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

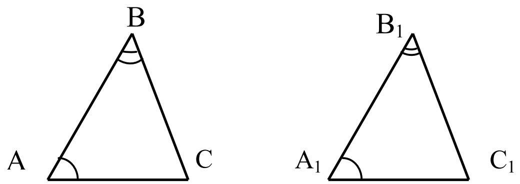


Рис. 9.6.

Три признака равенства:

1. *По двум сторонам и углу между ними.*
Если $AB = A_1B_1;\ AC = A_1C_1;\ \angle A = \angle A_1, \text{то}\ \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

2. *По стороне и прилежащим к ней углам.*
Если $AB = A_1B_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle A = \angle A_1, \text{то}\ \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

3. *По трем сторонам.*
Если $AB = A_1B_1;\ AC = A_1C_1;\ BC = B_1C_1, \text{то}\ \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

Основные линии треугольника

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (например: *MN*, рис. 9.7.).

Свойства средней линии треугольника

1. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны (например: $AC \| MN$ *и* $MN = \frac{1}{2} AC$).

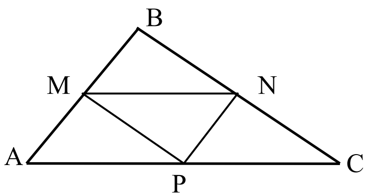


Рис. 9.7.

2. Средняя линия отсекает от треугольника треугольник подобный исходному, коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$ ((например: $\frac{\Delta MBN}{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$) см. рис. 9.7.)

Медиана

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника ((например: $|AM| = |MC|$) см. рис. 9.8.)

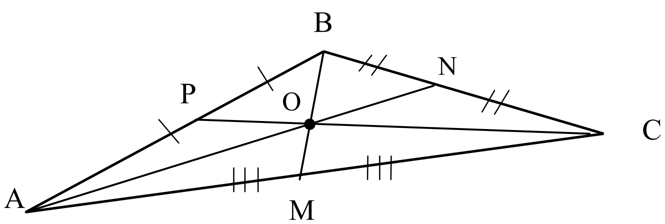


Рис. 9.8.

Свойства медиан треугольника

1. *Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади ($S_{\Delta ABM} = S_{\Delta MBC}$).*

2.*Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины* $\left(\frac{|BO|}{|OM|}=2\right)$. *Эта точка называется центром тяжести треугольника.*

3.*Формула длины медианы:*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

где $m_a = |AN|$, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам. *Биссектрисой треугольника* называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника (например: BM).

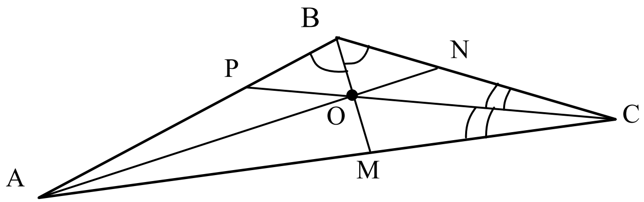


Рис. 9.9.

Свойства биссектрис треугольника

1. *Биссектриса угла – это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.*

2. *Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:* $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AM|}{|MC|}$.

3. *Формула длины биссектрисы:* $l_C = |CP| = \dfrac{2|CB|}{|CB| + |CA|} \cos\dfrac{\angle BCA}{2}$.

4. *Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.* (рис. 9.10)

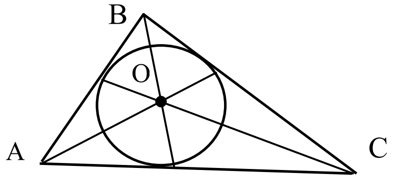


Рис. 9.10.

Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника (например: *AN*, рис. 9.11.).

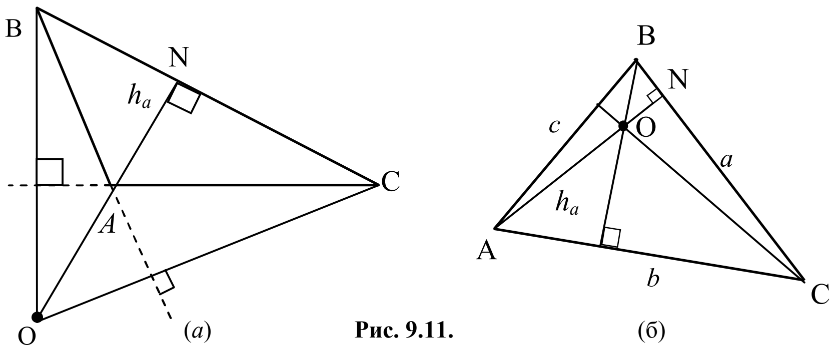


Рис. 9.11.

Свойства высот треугольника

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

2. *В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.*

3. *Три высоты треугольника пересекаются в одной точке (см* рис. 9.11. а, б) *точка О).*

4. Формула длины высоты: $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где a, b, c – стороны треугольника (*см.* рис.9.11. (б)), *p – полупериметр треугольника, вычисляемый по формуле* $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Серединный перпендикуляр

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.

Свойства серединных перпендикуляров треугольника

1. *Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.*

2. *Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.*

Эта точка лежит:

– *внутри треугольника, если треугольник остроугольный* (*см.* Рис.9.12.(а))*;*

– *на гипотенузе (в ее середине), если треугольник прямоугольный* (*см.* рис. 9.12.(б))*;*

– *вне треугольника, если треугольник тупоугольный* (*см.* рис. 9.12.(в)).

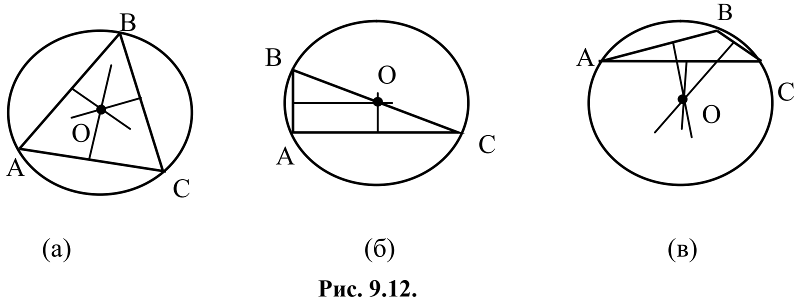


Рис. 9.12.

Формулы вычисления площади треугольника

a, b, c – стороны, *r* – радиус вписанной окружности, *R* – радиус описанной окружности, *p* – полупериметр треугольника.

1. $S=\frac{1}{2}ah_a$, *где* h_a, *– высота, опущенная на сторону a;*

2. $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, *где α, (β, γ) – угол между сторонами b и c (a и c, a и b);*

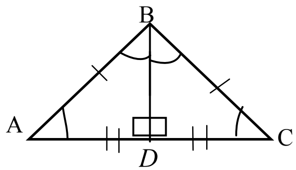
3. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона;

4. $S = r\cdot p$;

5. $S=\frac{abc}{4R}$.

Свойства равнобедренного треугольника

1. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*



$\angle A=\angle C$,

BD – биссектриса, медиана, высота.

Рис. 9.13.

2. *В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.*

3. *В равнобедренном треугольнике медианы (соответственно высоты и биссектрисы), проведенные из вершины при основании равны.*

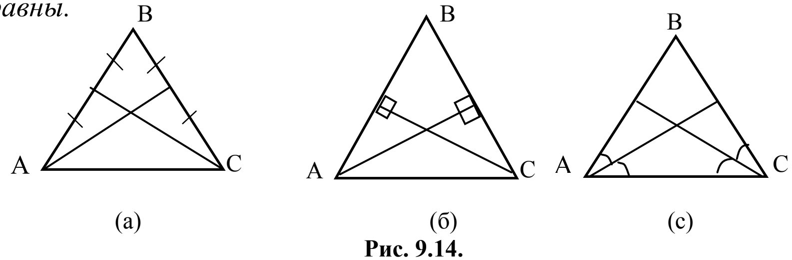


Рис. 9.14.

Свойства равностороннего треугольника

1. В равностороннем треугольнике медиана является также высотой и биссектрисой.

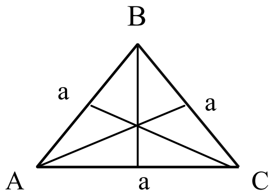


Рис. 9.16.

2. Центр равностороннего треугольника – точка пересечения его медиан (высот, биссектрис), является центром вписанной и описанной окружности.

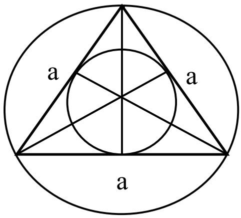


Рис. 9.17.

Формулы и соотношения

a – сторона, R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь.

1. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
2. $S=3r^2\sqrt{3}$;
3. $S=\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$;
4. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;
5. $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Свойства прямоугольного треугольника

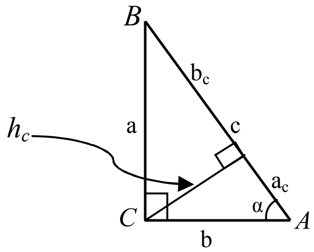


Рис. 9.18.

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формулы и соотношения

a, b – катеты, *c* – гипотенуза, a_c, b_c – проекции катетов на гипотенузу, h_c – высота, проведенная к гипотенузе, *R* – радиус описанной окружности; *r* – радиус вписанной окружности; *S* – площадь (Рис.9.18.)

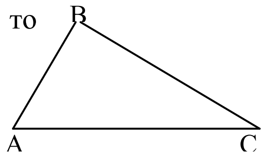
1. $R - r = \dfrac{a+b}{2}$;
2. $R = \dfrac{c}{2}$;
3. $r = \dfrac{a+b-c}{2}$;
4. $S = \dfrac{1}{2}ab$;
5. $S = \dfrac{1}{2}ch_c$;
6. $\dfrac{a_c}{h_c} = \dfrac{h_c}{b_c}$;
7. $\dfrac{b_c}{b} = \dfrac{b}{c}$;
8. $\dfrac{a_c}{a} = \dfrac{a}{c}$.

1. Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

2. Катет, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы. Верно и обратное.

Пример. Найти сторону треугольника *ABC*, если известно, что его периметр равен 42, а сумма двух сторон равна 28.

Решение. Так как периметр треугольника – сумма длин всех сторон треугольника, то $AB + BC + CA = 42$.



По условию дано: сумма двух сторон равна 28, предположим, что $AB + BC = 28$.

В первое уравнение вместо $AB + BC$ подставляем 28, получаем $28 + CA = 42 \Rightarrow CA = 42 - 28 \Rightarrow CA = 14$.

Ответ: 14.

Пример. В треугольнике один из внутренних углов равен 60^0, а два других относятся как 2:3. Найти больший угол.

Решение. Известно, что сумма всех углов в треугольнике равна 180^0, т.е. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Пусть $\alpha = 60^0$, тогда

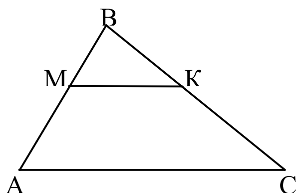
$$\beta + \gamma = 180^0 - 60^0 = 120^0 . \qquad (*)$$

По условию известно, что $\dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{2}{3}$, отсюда получаем, что $\beta = \dfrac{2}{3}\gamma$.

Подставляем значение β в (*) и получаем $\dfrac{2}{3}\gamma + \gamma = 120^0$. Приводим к общему знаменателю и получаем, что $\dfrac{5}{3}\gamma = 120^0 \Rightarrow \gamma = 72^0$.

Ответ: 72^0.

Пример. Треугольники *ABC* и *MBK* подобны. Известно, что *MK* = 3, *AC* = 15 и *KC* = 8. Найти *BC*.



Решение. Так как треугольники подобны, то $\dfrac{AC}{MK} = \dfrac{BC}{BK}$, тогда подставляя данные из условия, получаем

$$\Rightarrow \frac{15}{3} = \frac{BC}{BK} \Rightarrow \frac{BC}{BK} = 5 \Rightarrow BC = 5 \cdot BK .$$

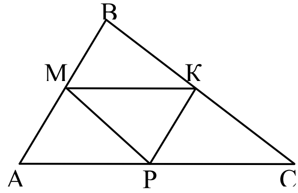
Из треугольника *ABC* имеем $BK = BC - KC = BC - 8$. Подставим найденное *BK* в ранее найденное значение *BC* и получаем

$BC = 5 \cdot (BC - 8)$. Раскрываем скобки и выражаем *BC:* $BC = 5 \cdot BC - 40 \Rightarrow BC = 10$.

Ответ: 10.

Пример. Середины сторон треугольника ABC соединены отрезками. Найти периметр получившегося треугольника *MKP*, если известно, что периметр исходного треугольника равен 68.

Решение. $P_{ABC} = AB + BC + CA = 68$,



$P_{MKP} = MK + KP + PM$.

По теореме о средней линии треугольника имеем,

что $MK = \dfrac{1}{2} AC,\ MP = \dfrac{1}{2} BC,\ PK = \dfrac{1}{2} AB$.

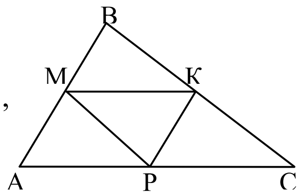
Таким образом получаем, что $P_{MKP} = \dfrac{1}{2} AC + \dfrac{1}{2} BC + \dfrac{1}{2} CA =$

$= \dfrac{1}{2}(AC + BC + CA) = \dfrac{1}{2} \cdot 68 = 34$.

Ответ: 34.

Пример. Середины сторон треугольника ABC соединены отрезками. Площадь получившегося треугольника равна 1,75. Найти площадь исходного треугольника.

Решение. По теореме о средней линии треугольника имеем,



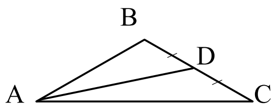
что $MK = \dfrac{1}{2} AC,\ MP = \dfrac{1}{2} BC,\ PK = \dfrac{1}{2} AB$,

тогда $\Delta ABC \sim \Delta MKP$, причем коэффициент подобия $\kappa = \dfrac{AC}{MK} = 2$. Значит

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MKP}} = \kappa^2$, $S_{ABC} = 4 \cdot 1{,}75 = 7$.

Ответ: 7.

Пример. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, и основанием равным 6, проведена медиана к боковой стороне. Найти ее длину.



Решение. По условию задачи:
AB = a = 4; BC = b = 4; *AC = c = 6;*
AD – медиана $\Rightarrow CD = DB$ по формуле:

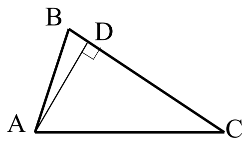
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$ имеем

$$m_{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 4^2 + 2\cdot 6^2 - 4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{32+72-16} = \frac{1}{2}\sqrt{88} = \sqrt{22}$$

Ответ: $\sqrt{22}$.

Пример. В треугольнике *ABC: AB* = 26*, BC* = 40*, AC* = 42. Найти длину высоты, проведенной к средней стороне треугольника.

Решение.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S_{ABC}}{a}$$

S найдем по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где *p* – полупериметр.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+40+42}{2} = 54.$$

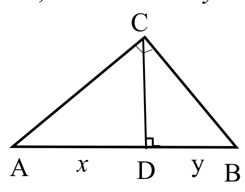
$$S = \sqrt{54(54-26)(54-40)(54-42)} = \sqrt{54\cdot 28\cdot 14\cdot 12} = 504 \Rightarrow$$

$$h_a = \frac{2\cdot 504}{40} = 25{,}2$$

Ответ: 25,2.

Пример. В прямоугольном треугольнике высота, длиной 2, делит гипотенузу на отрезки, разность длин которых равна 3. Найти длины этих отрезков.

Решение. Обозначим длину большего отрезка *x*, меньшего – *y.*
Согласно условию задачи и свойству перпендикуляра, проведенного из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем систему уравнений $\begin{cases} x - y = 3, \\ x\cdot y = 4. \end{cases}$



Из первого уравнения выражаем *x*: $x = 3 + y$.

Подставляем полученное выражение во второе уравнение:

$$(3+y)\cdot y = 4 \Rightarrow 3y + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0.$$

Получили квадратное уравнение. Находим корни через дискриминант

$$D = b^2 - 4ac\ .\ D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9 + 16 = 25.$$

$$y_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ и } y_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\ .$$

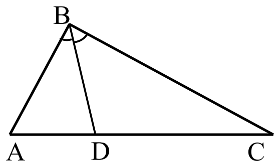
$y_1 = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3-5}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$. Этот корень не может быть длинной отрезка.

$y_2 = \dfrac{-3+\sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Так как этот корень нам подходит, ищем x. Подставляем во второе уравнение $y = 1$. Получаем $x = 4$.

Ответ: $x = 4$, $y = 1$.

Пример. Биссектриса угла B в треугольнике ABC делит сторону AC на отрезки, длины которых равны 14 и 6. Найти периметр $\Delta\ ABC$, если $AB - BC = 12$.

Решение. D – точка пересечения биссектрисы угла B со стороной AC. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$;



$$\frac{AB}{BC} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \Rightarrow AB = \frac{7}{3}BC.$$

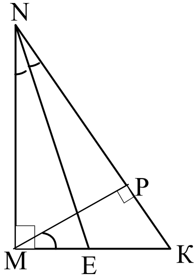
Получаем $\begin{cases} AB = \dfrac{7}{3}BC, \\ AB - BC = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \dfrac{7}{3}BC, \\ \dfrac{7}{3}BC - BC = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = \dfrac{7}{3}BC, \\ \dfrac{4}{3}BC = 12. \end{cases}$

Отсюда следует, что $BC = 9$; $AB = 21$. По условию $AD = 14$; $DC = 6$, значит, $AC = 14 + 6 = 20$. Тогда $p = a + b + c = 21 + 9 + 20 =$ $=50$.

*Ответ:*50.

Пример. Расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы равно a, а до точки пересечения биссектрисы меньшего угла с меньшим катетом равно b. Найти длину меньшего катета.

Решение. Пусть $\angle MNK = \alpha$, тогда $\angle PMK = \alpha$ (признак подобия по двум сторонам и углу между ними). *ME=b; MP=a.*



Имеем: $\dfrac{ME}{EK} = \dfrac{MN}{NK} = \cos\alpha$.

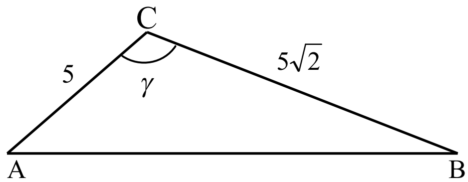
С другой стороны, $\cos\alpha = \dfrac{MP}{MK}$.

Отсюда $\dfrac{b}{MK-b} = \dfrac{a}{MK}$; $MK = \dfrac{ab}{a-b}$.

Ответ: $MK = \dfrac{ab}{a-b}$.

Пример. Две стороны треугольника, прилежащие к тупому углу, равны 5 и $5\sqrt{2}$, а его площадь равна 12,5. Найти квадрат третьей стороны треугольника.

Решение. По формуле нахождения площади треугольника имеем $S = \dfrac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin\gamma$.



Подставляя данные из условия, получаем, что $12{,}5 = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sin\gamma$.

Выражаем отсюда угол γ и получаем $\sin\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45^0$ или $\gamma = 135^0$. Так как треугольник тупоугольный, то $\gamma = 135^0$.

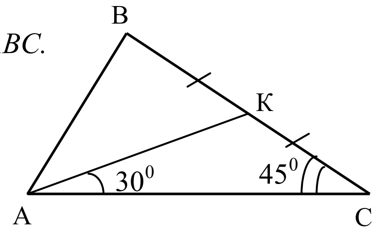
По теореме косинусов $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\gamma$.

Находим $\cos\gamma$: $\cos 135^0 = \cos(180^0 - 45^0) = -\cos 45^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

И получаем $AB^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 125$.

Ответ: 125.

Пример. В треугольнике *ABC* проведена медиана *AK*, равная $\frac{13}{4}\sqrt{2}$ и составляющая со стороной *AC* угол 30^0. Найти длину *BC*, если угол *BCA* равен 45^0.



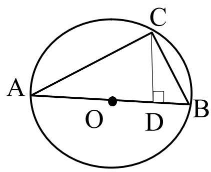
Решение. Рассмотрим треугольник *ABC*. Согласно теореме синусов,

$$\frac{AK}{\sin 45^0} = \frac{KC}{\sin 30^0}.$$ Отсюда $KC = \frac{13}{4}$.

Следовательно, $BC = 2KC = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

Пример. Найти площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанного круга равен 5, а высота, опущенная на гипотенузу, имеет длину 3.

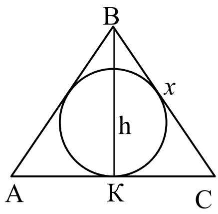


Решение. Так как центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит в середине гипотенузы, то гипотенуза равна 10.

Площадь треугольника равна $S = \frac{c \cdot h_c}{2} = 15$.

Ответ: 15.

Пример. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24, а радиуса вписанной окружности – 4. Найти длину боковой стороны.



Решение. Пусть x – длина боковой стороны, h – длина высоты, проведенной к основанию. Тогда $h=\sqrt{x^2-12^2}$. Вычислим площадь треугольника ABC двумя способами:

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot\sqrt{x^2-12^2};$$

$$S=p\cdot r=\frac{2x+24}{2}\cdot 4=(12+x)\cdot 4.$$

Поэтому $12\sqrt{x^2-12^2}=(12+x)\cdot 4$, откуда $x=15$.

Ответ: 15.

Упражнения для самостоятельного решения

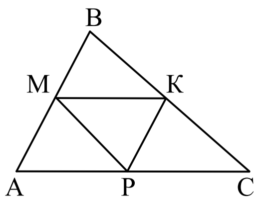
9.8. Найти периметр треугольника, если известно, что сумма его боковых сторон в 2,5 раза больше основания равного 6.

9.9. Периметр треугольника равен 156. Найти наименьшую сторону треугольника, если известно, что одна из сторон в три раза меньше периметра, а разность между двумя другими равна 34.

9.10. В треугольнике один из внутренних углов равен 30^0, а второй угол больше третьего в 2 раза. Найти меньший из неизвестных углов.

9.11. В треугольнике сумма двух равных внутренних углов больше третьего на 10^0. Найти больший угол.

9.12. Треугольники ABC и MBK подобны. Известно, что MK=4, AC=15 и KC=8. Найти BC.



9.13. Треугольники ABC и MBK подобны. Известно, что BK=10, периметр треугольника MBK равен 20, а периметр треугольника ABC равен 120. Найти BC.

9.14. Найти $BC-AB$, если известно, что BK=AM+6. MK – средняя линия треугольника ABC, параллельная AC.

9.15. Середины сторон треугольника ABC соединены отрезками. Найти периметр получившегося треугольника AMP, если известно, что периметр исходного треугольника равен 46.

9.16. Середины сторон треугольника ABC соединены отрезками. Найти площадь получившегося треугольника, если площадь исходного треугольника равна 36.

9.17. Стороны треугольника равны 5; 7 и 11. Найти увеличенный в четыре раза квадрат медианы, проведенной к большей стороне.

9.18. Периметр прямоугольного треугольника равен 17,5. Найти медиану, проведенную к гипотенузе, если один из катетов равен 5.

9.19. В треугольнике ABC сторона $BC = 2\sqrt{6}$, прилежащие к ней углы $\beta = 30^0$, $\gamma = 45^0$. Найти биссектрису угла β.

9.20. В равнобедренном треугольнике две стороны равны 5 и 20. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

9.21. Биссектриса одного из углов треугольника разделила противолежащую сторону на отрезки длинной 24 и 27. Найти две другие стороны треугольника. Если его периметр равен 153.

9.22. Найти высоту равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 5, а косинус угла при вершине равен $(-\frac{7}{25})$.

9.23. Площадь прямоугольного треугольника равна 150, а один из катетов равен 15. Найти длину высоты, опущенной из вершины прямого угла.

9.24. В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна 17, а длина гипотенузы 13. Найти площадь треугольника.

9.25. Периметр равнобедренного треугольника равен 64, а боковая сторона 20. Найти площадь треугольника.

9.26. Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 12 и 14, а угол между ними равен 30^0.

9.27. В треугольнике ABC угол A=30^0, а угол B=45^0. Найти длину BC, если $AC=10\sqrt{2}$.

9.28. В треугольнике разность углов α и β равна 90^0. Противолежащие им стороны равны 10 и 5. Найти тангенс угла β.

Четырехугольники

Краткие теоретические сведения

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а соединяющие их отрезки не пересекаются.

Две несмежные стороны четырехугольника называются *противоположными.* Две вершины, не являющиеся соседними, называются также *противоположными.*

Сумма углов четырехугольника равна 360^0.

Диагонали – это отрезки, соединяющие две противоположные вершины четырехугольника (AC и BD).

Если d_1 и d_2 – длины диагоналей четырехугольника, а φ – угол между прямыми, проходящими через эти диагонали, то площадь четырехугольника равна $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$.

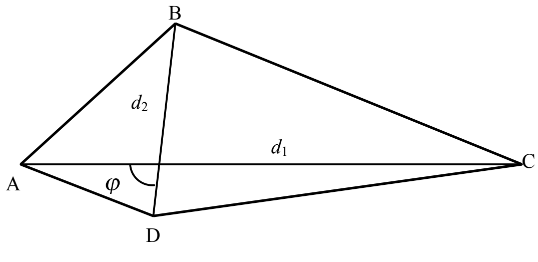


Рис. 9.19.

Периметр (P) – сумма длин всех сторон четырехугольника:

$$P = AB + BC + CD + AD.$$

Выделяют разные виды четырехугольников:

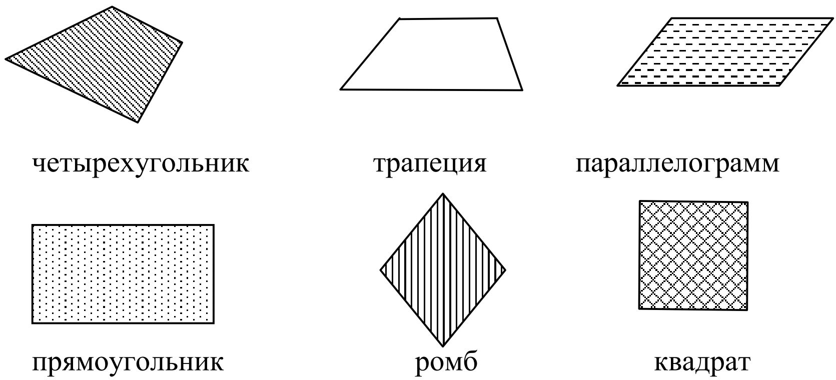


Рис. 9.20.

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие непараллельны.

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями* (*BC* и *AD*), а непараллельные стороны – *боковыми сторонами* (*AB* и *CD*).

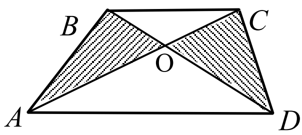


Рис. 9.21.

Основные линии и свойства трапеции:

1. *Диагонали* трапеции (*AC* и *BD*) разбивают ее на четыре треугольника, причем

– треугольники, прилежащие к основаниям, подобны друг другу ($\Delta BOC \sim \Delta AOD$).

– треугольники, прилежащие к боковым сторонам, имеют равные площади ($S_{\Delta ABO} = \mathrm{S}_{\Delta DOC}$). (см. рис. 9.21.)

2. *Высота* трапеции – отрезок перпендикуляра от любой точки одного основания трапеции до ее другого основания (или его продолжения). (*HA, BE, CF;* рис. 9.22)

3. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией.*(*MN*)

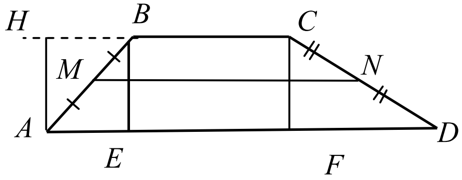


Рис. 9.22.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме: $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

4. Если сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность.

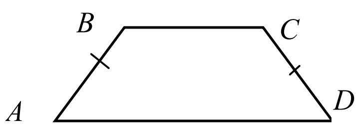
Формулы вычисления площади трапеции

a, b – основания*; h* – высота, *c* – средняя линия, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями

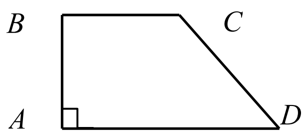
1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$; **2.** $S = \frac{1}{2}(a+b)h$; **3.** $S = ch$.

Виды трапеции:

Трапеция называется *равнобедренной* (или *равнобокой*), если ее боковые стороны равны (*AB*=*CD*, см. рис. 9.23(а)).



(а)



(б)

Рис. 9.23.

– если трапеция равнобокая, то ее диагонали равны и углы при основании равны;

– если трапеция равнобокая, то около нее можно описать окружность.

Трапеция, один из углов которой прямой, называется *прямоугольной.* (рис. 9.23. (б)).

Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

1. *Противолежащие стороны равны (AB=CD; BC=AD);*
2. *Противоположные углы равны ($\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$);*
3. *Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;*
4. *Диагонали точкой пересечения делятся пополам (точка O);*
5. *Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.*

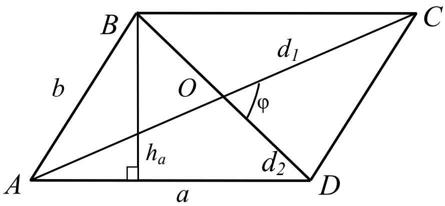


Рис. 9.24.

Формулы и соотношения

a, b – стороны; h_a, h_b – высоты, проведенные к сторонам *a* и *b* соответственно; α – угол между сторонами; d_1, d_2 – диагонали; φ – угол между диагоналями.

1. $S = ab\sin\alpha$; **2.** $S = ah_a$; **3.** $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\phi$.

Для прямоугольника, ромба и квадрата справедливы все свойства параллелограмма

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

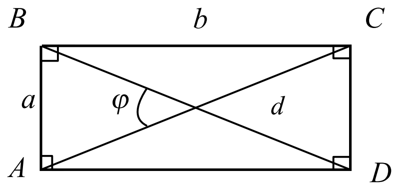


Рис. 9.25.

Свойства прямоугольника

1. *Диагонали равны (d = AC = BD);*

2. *Серединные перпендикуляры к сторонам прямоугольника являются его осями симметрии (две оси симметрии);*

3. *Точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром окружности, описанной около этого прямоугольника.*

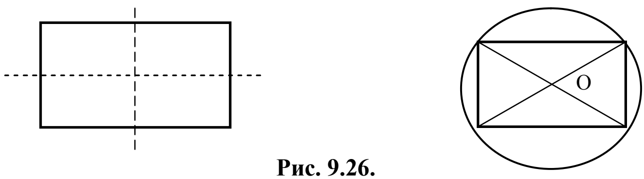


Рис. 9.26.

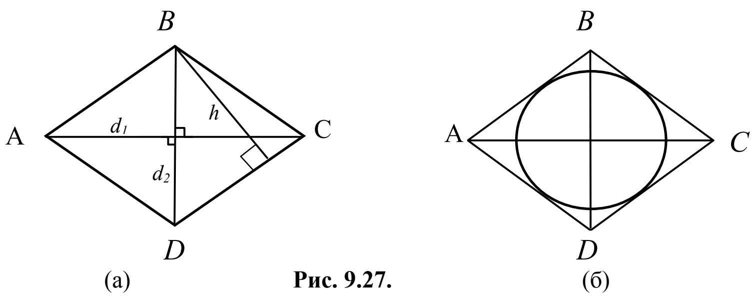
Формулы и соотношения

a, b – стороны; *d* – диагональ; φ – угол между диагоналями

1. $S = ab$; **2.** $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\phi$.

Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.



(а) **Рис. 9.27.** (б)

Свойства ромба

1. *Диагонали перпендикулярны;*
2. *Диагонали являются биссектрисами его углов;*
3. *Диагонали ромба являются его осями симметрии;*
4. *В ромб можно вписать окружность* (рис.9.27(б)).

Формулы и соотношения

a – сторона; h – высота; α – угол между сторонами; d_1, d_2 – диагонали.

1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$; **2.** $S = ah$; **3.** $S = a^2 \sin\alpha$.

Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

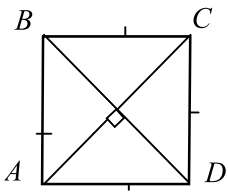


Рис. 9.28.

Свойства квадрата

1. *Все углы квадрата прямые.*

2. *Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам* (рис.9.28).

Формулы и соотношения

a – сторона; d – диагональ; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; S – площадь (рис. 9.29)

1. $S = \frac{1}{2}d^{\,2}$; **2.** $R = r\sqrt{2}$; **3.** $S = a^2$; **4.** $r = \frac{a}{2}$.

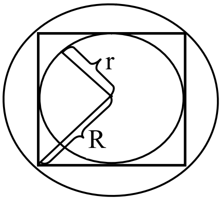
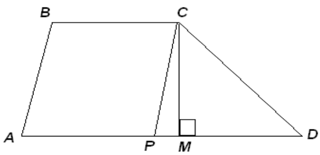


Рис. 9.29.

Пример. Основания трапеции имеют длины 10 и 24, а боковые стороны – 13 и 15. Найти S трапеции.

Решение. По формуле $S_{трапеции} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$.



CM – высота h.

Проведем через C прямую параллельную AB.

Рассмотрим Δ PCD;

$CP = AB = 13$; $CD = 15$; $PD = AD - BC = 24 - 10 = 14$.

По формуле Герона найдем $S_{\Delta\ PCM}$,

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+15+14}{2} = 21$.

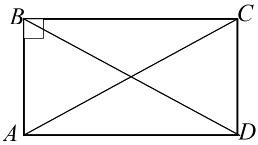
$S_\Delta = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$.

Но так как $S_{\Delta PCD} = \frac{1}{2}CM \cdot PD \Rightarrow 84 = \frac{1}{2}CM \cdot 14 \Rightarrow CM = 12$.

Тогда $S_{ABCD} = \frac{10+24}{2} \cdot 12 = 204$.

Ответ: 204.

Пример. Найти площадь прямоугольника, одна сторона которого равна 5, а диагональ 13.



Решение.

Рассмотрим прямоугольный ΔABC.

Пусть катет *AB=5,* гипотенуза *AC=13.*

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

Т.е. $AC^2 = AB^2 + BC^2$, Пусть *BC*=*b*, тогда

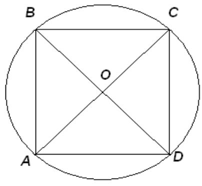
$13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 169 = 25 + b^2 \Rightarrow b^2 = 169 - 25 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = \sqrt{144} \Rightarrow b = \pm 12$.

Так как сторона не может быть отрицательной, то *b*=12. $S_{ABCD} = a \cdot b$. $S_{ABCD} = 5 \cdot 12 = 60$.

Ответ: 60.

Пример. Квадрат вписан в окружность, радиус которой равен 3. Найти площадь квадрата.



Решение. Радиус окружности равен половине диагонали данного квадрата, т.е. диагональ равна 2*R*=6.

Следовательно, площадь квадрата равна $\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R = 2R^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

*Ответ:*18.

Пример. Высота ромба делит его сторону на отрезки, равные 3 и 5. Найти диагонали ромба.

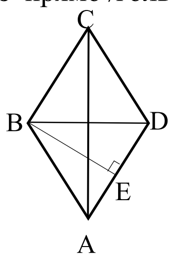
Решение. Пусть *BE* – высота ромба *ABCD* , *AE = 3, ED = 5, O* – точка пересечения диагоналей ромба. Тогда из прямоугольного треугольника *DEB* находим, что

$BE^2 = BD^2 - ED^2 = BD^2 - 5^2 = BD^2 - 25$.

Из прямоугольного треугольника *BEA* находим

$BE^2 = AB^2 - AE^2 = (3+5)^2 - 3^2 =$

$= 8^2 - 9 = 64 - 9 = 55$.

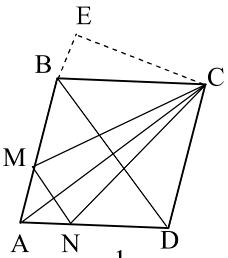


Таким образом, $BD^2 - 25 = 55$, откуда
$BD^2 = 25 \Rightarrow BD = \sqrt{25} = 5$.
Если рассмотреть прямоугольный треугольник *BOA,*

То $OA = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(3+5)^2 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (3+5)} = \sqrt{64 - \frac{1}{2} \cdot 40} =$
$= \sqrt{64-20} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$.

Ответ: $BD = 5$, $AC = 2\sqrt{11}$.

Пример. На сторонах *AB* и *AD* ромба *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно таким образом, что отрезки *MC* и *NC* делят ромб на три равновеликие фигуры. Найти *M N,* если *BD* = 6.



Решение.

Пусть *E* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *C* на продолжение стороны *AB* параллелограмма *ABCD.* По условию $S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} MB \cdot EC = \frac{1}{3} S_{ABCD}$,

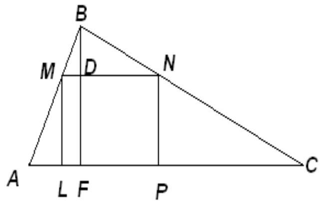
$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot EC = \frac{1}{6} S_{ABCD}$. Поэтому $AM : MB = 1:2$.

Аналогично доказывается, что $AN : ND = 1:2$. И так как $MN \| BD$, значит треугольники *AM N* и *ABD* подобны. Но в таком случае $\frac{BD}{MN} = \frac{AD}{AN}$ или $\frac{6}{MN} = \frac{3}{1} \Rightarrow MN = \frac{6}{3} = 2$.

Ответ: $MN = 2$.

Пример. Основание треугольника равно 12, высота 6. В этот треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найти сторону квадрата.

Решение.



Так как сторона квадрата $MN \| AC$, *то* ΔMBN подобен ΔABC.

Обозначим длину стороны квадрата *LMNP* через *x* (*LM*=*MN*=*NP*=*PL*=*x*), тогда длина отрезка *BD* высоты *BF* будет равна 6-*x*.

В подобных треугольниках соответственные высоты пропорциональны соответственным сторонам, следовательно, в треугольниках *ABC* и *MBN* имеем $\frac{AC}{MN} = \frac{BF}{BD}$ или $\frac{12}{x} = \frac{6}{6-x}$

Следовательно,
$12 \cdot (6-x) = 6x \Rightarrow 72 - 12x = 6x \Rightarrow 72 = 6x + 12x \Rightarrow 18x = 72 \Rightarrow x = 4$.

*Ответ:*4.

Упражнения для самостоятельного решения

9.29. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 41, высота 40, средняя линия 45. Найти длину меньшего основания.

9.30. В равнобочной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найти, чему равна боковая сторона трапеции.

9.31. Диагональ прямоугольной трапеции, равная $\frac{2\sqrt{2}-1}{8}$, делит трапецию на два равнобедренных треугольника. Найти периметр трапеции.

9.32. Длины оснований трапеции равны 4 и 10. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из диагоналей.

9.33. Стороны параллелограмма равны 5 и 6, а угол между ними 30^0. Найти длину высоты параллелограмма, опущенную на сторону, длиной 5.

9.34. Одна из диагоналей параллелограмма, равная $\frac{9}{2}\sqrt{6}$, составляет с основанием угол 60^0. Найти длину второй диагонали, если она составляет с тем же основанием угол 45^0.

9.35. Найти площадь параллелограмма, сторона которого равна 12, а высота, проведенная к ней – 8.

9.36. Большая сторона прямоугольника имеет длину $\sqrt{10}$, а косинус угла между диагоналями равен – 0,25. Найти длину диагонали прямоугольника.

9.37. Периметр ромба 52, а сумма его диагоналей 34. Найти большую диагональ.

9.38. Диагональ ромба, лежащая против угла 60^0, равна 11,2. Найти периметр ромба.

9.39. Чему равна площадь ромба, диагонали которого равны 10 и 7?

9.40. Сторона ромба равна $3\sqrt{5}$. Найти косинус острого угла ромба, если его меньшая диагональ равна 3.

9.41. Периметр квадрата равен $24\sqrt{2}$. Найти его площадь.

9.42. Найти площадь квадрата, диагональ которого равна $2\sqrt{17}$.

9.43. Найти диагональ квадрата, если его площадь равна 420,5.

9.44. Найти площадь круга, если площадь квадрата вписанного в окружность равна 16.

9.45. Найти площадь круга описанного около квадрата со стороной 4.

9.46. В равнобокую трапецию вписана окружность, основания трапеции 4 и 12. Найти радиус вписанной окружности.

Окружность

Краткие теоретические сведения

Определение окружности смотреть пункт 3.

Хорда окружности – отрезок (BC), соединяющий две точки окружности (рис.9.30.)

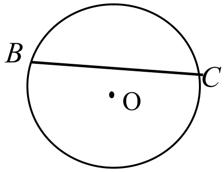
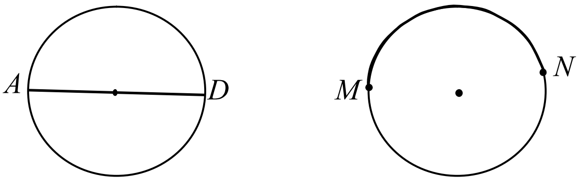


Рис. 9.30.

Диаметр окружности – хорда (AD), проходящая через центр окружности (см. рис. 9.31. (а)).



(а) (б)

Рис. 9.31.

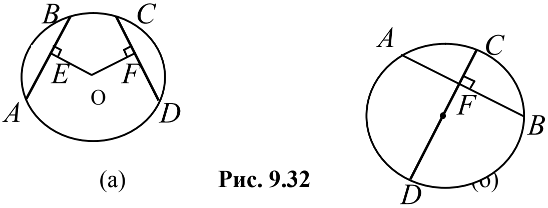
Дуга окружности – любая из двух частей окружности ($\smile MN$ – дуга MN), на которые ее делят две лежащие на ней точки (M и N) – концы дуг. (рис. 9.31. (б)).

Дуга называется *полуокружностью,* если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром (см. рис. 9.31. (а)).

Свойства хорд:

1. *Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от центра окружности:* $AB=CD \Rightarrow EO=OF$. рис. 9.32.(а)

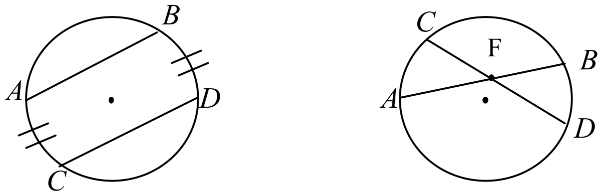
2. *Диаметр окружности CD, перпендикулярный хорде AB, делит хорду пополам; и наоборот:* $CD \perp AB \Leftrightarrow AF \perp FB$. рис. 9.32. (б)



(а) **Рис. 9.32** (б)

3. *Дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны между собой* рис. 9.33.(а).

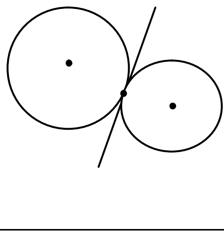
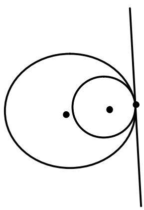
4. *Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке F, то* $AF \cdot FB = DF \cdot FC$ рис.9.33.(б).



(а) **Рис. 9.33** (б)

Касательная к окружности – прямая, имеющая с окружностью единственную точку – точку касания (рис. 9.34).

Две окружности касаются в общей точке, если они имеют в этой точке общую касательную.

Окружности касаются внешним образом (внешнее касание)	Окружности касаются внутренним образом (внутреннее касание)
	

Свойства касательных:

1. *Касательная a к окружности перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания A:* $a \perp OA$.

2. *Если из некоторой точки S проведены две касательные a и b к окружности, то:*

1) Отрезки касательных от точки S до точек касания A и B равны: SA=SB;

2) Прямая, проходящая через центр окружности O и точку S, делит угол между касательными пополам: $\angle ASO = \angle BSO$.

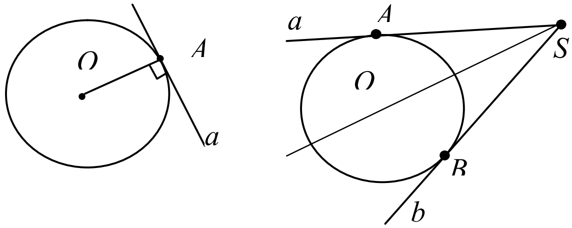


Рис. 9.34.

Секущая окружности – прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности (рис.9.35.)

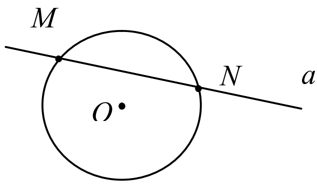


Рис. 9.35.

Если из некоторой точки B к окружности провести две секущие, пересекающие окружность в точках A, B, C, D соответственно, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP .$$

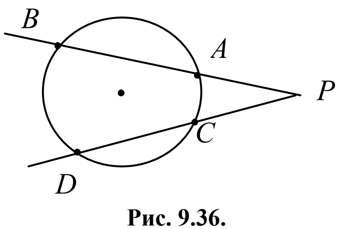


Рис. 9.36.

Теорема о касательной и секущей. Если из точки M, лежащей вне окружности (рис. 9.37.), проведены касательная MC и секущая MAB, то

$$MC^2 = MA \cdot MB .$$

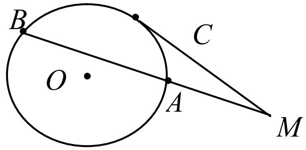


Рис. 9.37.

Свойства окружности

1. *Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (касательная); иметь с ней две общие точки (секущая);*

2. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну;*

3. *Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.*

Формулы и соотношения

Отношение длины окружности (C) к ее диаметру ($D = 2R$) является числом постоянным для всех окружностей; обозначается

$$\pi \quad (\pi \approx 3{,}141592653\ldots),\ \pi = \frac{C}{2R}.$$

1. Длина окружности: $C = 2\pi R;\ C = \pi D.$

2. Длина дуги окружности: $\ell = \dfrac{\pi R \alpha^0}{180^0}.$

Углы в окружности

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре (рис. 9.38. угол AOB). Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным углом* (рис.9.38. угол *ACB*). Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

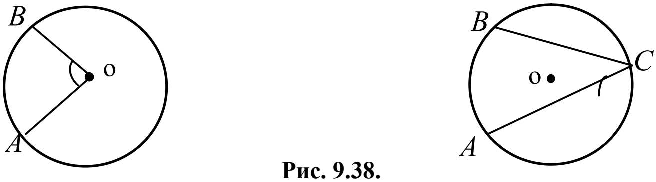


Рис. 9.38.

Свойства углов, связанных с окружностью

1. *Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180°.*

2. *Углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

3. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.*

4. *Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.*

Круг

Часть плоскости, ограниченная окружностью называется *кругом.*

Круговым сектором или просто *сектором* (*AOB*) называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга (рис. 9.39 (а)).

(а) **Рис. 9.39.** (б)

Сегментом (*ABD*) называется часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой (рис. 9.39. (б)).

Формулы: π – постоянная, R – радиус, α – центральный угол.

$S = \pi R^2$ – площадь круга, $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ – площадь сектора,

$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha)$ – площадь сегмента (Рис. 9.40.)

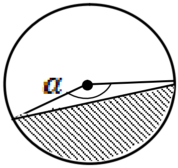
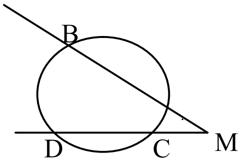


Рис. 9.40.

Пример. *MBA* и *MCD* – две секущие к одной окружности. Найти *MD*, если $MA = 18$, $AB = 12$, $MC : DC = 5 : 7$.



Решение. Так как $MC : DC = 5 : 7$, то $MC = 5x$; $DC = 7x$.

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (*свойство секущих*),

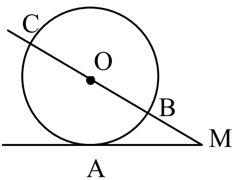
$MB = 18 + 12 = 30$, $MD = 5x + 7x = 12x$, тогда

$18 \cdot 30 = 5x \cdot 12x$; $x^2 = \frac{18 \cdot 30}{5 \cdot 12} = 9$; $x = 3$.

$MD = 12x = 12 \cdot 3 = 36$.

Ответ: 36.

Пример. Касательная равна 20, а наибольшая секущая, проведенная из той же точки, равна 50. Найти радиус окружности.



Решение. Так как наибольшая секущая содержит диаметр, то $MC = 50$, $MA = 20$.

$MA^2 = MB \cdot MC$ (*свойчство секущих*), тогда

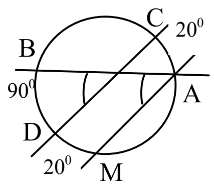
$20^2 = MB \cdot 50$; $MB = 8$,

$CB = MC - MB$; $CB = 50 - 8 = 42$.

$r = \frac{CB}{2} = \frac{42}{2} = 21$.

Ответ: 21.

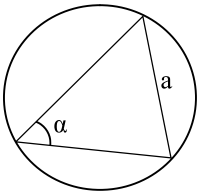
Пример. Две прямые пересекаются в точке, лежащие внутри окружности (см. рис.). Величины отсекаемых дуг указаны на рисунке. Вычислите градусную меру угла между прямыми.



Решение. Через точку A проведем прямую, параллельную CD , M – точка ее пересечения с окружностью. Искомый угол равен углу BAM. Параллельные прямые отсекают на окружности равные дуги, то есть дуга DM равна 20^0. Угол BAM. – вписанный и опирается на дугу, равную 110^0, значит, его величина равна 55^0, То есть угол между заданными прямыми равен 55^0.

Ответ: 55^0.

Пример. Найти радиус окружности, если хорда длиной 20 видна из точки, взятой на этой окружности, под углом, синус которого равен $\frac{1}{8}$.

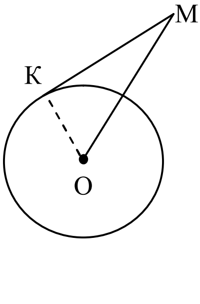


Решение. Рассмотрим треугольник, вершиной которого является точка на окружности, а сторона – данная хорда. Тогда указанная окружность является описанной около этого треугольника и ее радиус R можно вычислить по теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R;\ 20\cdot\frac{1}{8} = 2R \Rightarrow R = 80.$$

Ответ: 80.

Пример. Точка M отстоит от центра окружности на расстоянии 45. Касательная, проведенная из точки M к окружности, на 9 больше радиуса. Найти длину окружности.



Решение. Пусть радиус окружности равен x. По условию $KM = x+9$; $OM = 45$.

Соединим точки K и O. Получим прямоугольный треугольник OKM ($OK \perp KM$ по свойству радиуса, проведенного в точку касания).

Из треугольника $OKM : OM^2 = OK^2 + KM^2$, т.е. $45^2 = x^2 + (x+9)^2 \Rightarrow$

$$x^2 + x^2 + 18x + 81 - 45^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 18x - 1944 = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 972 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \dfrac{-9-63}{2} < 0$, что не удовлетворяет условию задачи,

тогда длина окружности $x = \dfrac{-9+63}{2} = 27$, следовательно $l = 2\pi \cdot 27 = 54\pi$.

Ответ: $l = 54\pi$.

Пример. В сектор с радиусом R и углом 90^0 вписана окружность, касающаяся отрезков OA и OB и дуги AB. Найти радиус окружности.

Решение. Обозначим центр вписанной окружности O_1, а точку касания окружности M. Центру касающихся окружностей и их точка касания лежат на одной прямой. Значит,

$$R = OM = OO_1 + O_1M = r\sqrt{2} + r = r(\sqrt{2}+1)\text{, откуда}$$
$$r = R(\sqrt{2}+1).$$

Ответ: $R(\sqrt{2}+1)$.

Пример. Найти радиус двух окружностей, имеющих общий центр, если диаметр большей окружности делится меньшей окружностью на 3 части, равные 9, 12 и 9. В ответе указать сумму длин найденных радиусов.

Решение. Радиус меньшей окружности равен $\dfrac{12}{2} = 6$. Радиус большей окружности равен $6 + 9 = 15$. Сумма радиусов равна $6 + 15 = 21$.

Ответ: 21.

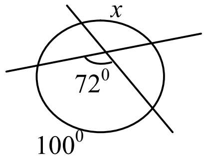
Упражнения для самостоятельного решения

9.46. Вычислить углы, составленные касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части, относящиеся как 3:7.

9.47. Вписанный в окружность угол опирается на дугу, длина которой равна 10. Чему равен этот угол, если радиус круга равен 5?

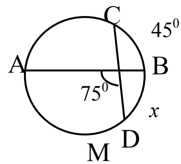
9.48. Вписанный угол на 20^0 меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу. Найти эти углы.

9.49. Две прямые, угол между которыми равен 72^0, пересекаются в точке, лежащей внутри окружности (см. рис.). Величина одной из отсекаемых дуг равна 100^0. Найти величину дуги x



.

9.50. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются под углом 75^0 (см. рис.). Величина дуги BC равна 45^0. Найти величину дуги x.



9.51. Вершина угла лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, отсекая дуги величиной 32^0 и 98^0. Вычислить градусную меру угла.

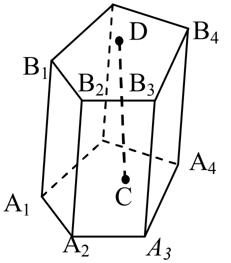
9.52. Вершина угла величиной 38^0 лежит вне окружности, а стороны пересекают окружность, высекая дуги, большая из которых имеет величину 126^0. Найти величину меньшей из высекаемых дуг.

9.53. К окружности проведены две касательные. Угол между радиусами, проведенными в точки касания, равен 140^0. Найти градусную меру угла между касательными.

9.54. Из точки, расположенной вне окружности, проведены касательная и секущая. Длина отрезка касательной равна 6. Секущая высекает на окружности хорду длиной 5. Найти длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.

9.55. В сектор круга, дуга которого содержит 60^0, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

9.56. Две окружности радиусами $R = 3$ см и $r = 1$ см касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до их общей внешней касательной.



ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРИЗМА

Основания призмы – равные многоугольники

(например, $A_1A_2A_3A_{4\ldots}$ и $B_1B_2B_3B_{4\ldots}$).

Боковые грани – параллелограммы (например, $A_2A_3B_3B_2$).

Боковые ребра – например, A_1B_1; A_2B_2;…

Высота призмы h (например, CD)ю

Основные понятия

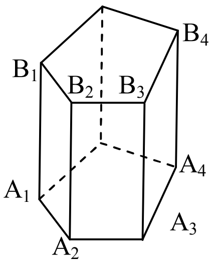
$S_{полн}$ – площадь полной поверхности призмы; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, являющейся объединением всех боковых граней призмы; $S_{осн}$ – площадь одного из оснований призмы; $P_{\perp сеч}$ и $S_{\perp сеч}$ – соответственно периметр и площадь перпендикулярного сечения призмы; l – длина бокового ребра; V – объем призмы; h – высота призмы.

Основные формулы:

1. $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$,

2. $S_{бок} = P_{\perp сеч} \cdot l$,

3. $V = S_{осн}\, h$, **4.** $V = S_{\perp сеч}\, l$.



ПРЯМАЯ ПРИЗМА

Основания призмы – равные многоугольники ($A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$).

Боковые грани – прямоугольники (например, $A_2A_3B_3B_2$).

Боковые ребра – (например, A_1B_1) являются *высотой призмы* h.

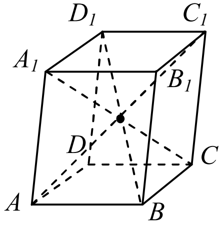
Основные формулы:

1. $l = h$,

2. $S_{бок} = P_{осн}\, l$,

3. $V = S_{осн}\, l$, где $P_{осн}$ – периметр одного из оснований этой прямой призмы.

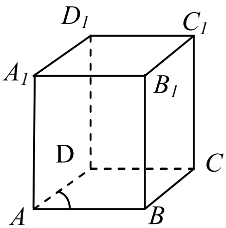
4. $S_{полн.} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

<table>
<tr><td>
</td><td>

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД – призма, основания которой параллелограммы.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

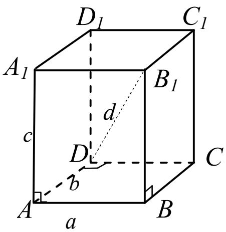
Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД – прямая призма, основания которой – параллелограммы.

Боковые ребра прямого параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания (*ABCD* – параллелограмм).

Боковые грани прямого параллелепипеда – прямоугольники.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД – прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники.

Все грани – прямоугольники.

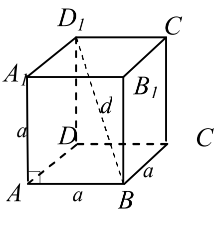
Все диагонали равны и $d^2=a^2+b^2+c^2$.

Основные понятия и формулы.

a,b,c – его измерения, d – диагональ.

1. $V = abc$;

2. $S = 2(ab + ac + bc)$.

</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

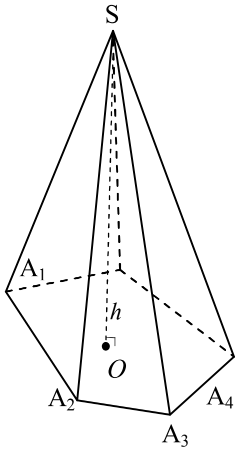
КУБ – прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны между собой.

Все грани куба – равные квадраты.

Основные формулы:

1. $V = a^3$, **2.** $S_{полн.} = 6a^2$, **3.** $d^2 = 3a^2$

</td></tr>
</table>



ПИРАМИДА

Основание пирамиды – многоугольник.

Боковые грани пирамиды – треугольники.

Точка S – вершина пирамиды.

Высота пирамиды h – отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость основания.

Основные понятия и формулы

$S_{полн}$ – площадь полной поверхности;

$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности (сумма площадей боковых граней);

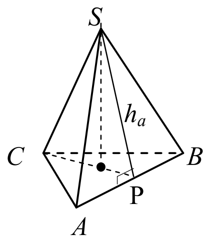
$S_{осн}$ – площадь основания пирамиды;

V – объем пирамиды; h – высота пирамиды.

$P_{осн}$ – периметр основания пирамиды; l – длина апофемы (высоты боковой грани, опущенной из вершины пирамиды).

1. $V = \frac{1}{3} S_{осн}\, h;$ **2.** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн},$

3. $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн}\; l.$



ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Основание – правильный многоугольник.

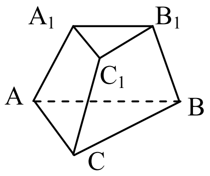
Высота – отрезок, соединяющий центр основания с вершиной пирамиды.

Все боковые ребра равны.

Все боковые грани – равные равнобедренные треугольники.

Апофема h_a – высота боковой грани, проведенная к основанию (например SP); все апофемы равны.

$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} h_a$ – площадь боковой грани.

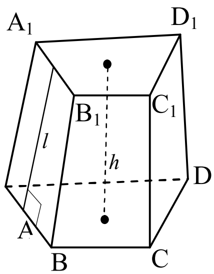
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

ПРАВИЛЬНАЯ УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Основания – правильные подобные многоугольники.

Все боковые ребра равны.

Все боковые грани – равнобедренные трапеции.

</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

Основные понятия и формулы

$S_{полн}$ – площадь полной поверхности;

$S_{бок}$ – площадь боковой поверхности (сумма площадей боковых граней); S_1, S_2 – площади оснований; V – объем усеченной пирамиды; h – высота усеченной пирамиды.

P_1; P_2 – периметры оснований; l – апофема (высота боковой грани – трапеции).

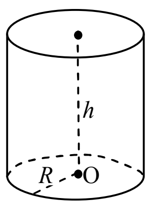
1. $S_{полн} = S_{бок} + S_1 + S_2$,

2. $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right) \cdot h$.

3. $S_{бок} = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_2\right) l$.

</td>
</tr>
</table>

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

ЦИЛИНДР

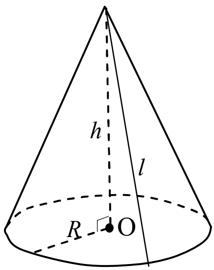
Основные понятия

R – радиус основания, h – высота, S_0 – площадь основания , S_c – площадь осевого сечения, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, S_n – площадь полной поверхности, V – объем цилиндра.

Основные формулы

1. $S_{бок}=2\pi Rh$; **3.** $S_0=\pi R^2$; **5.** $S_n=2\pi R(h+R)$;
2. $V=\pi R^2 h$; **4.** $S_c=2Rh$.

</td>
</tr>
</table>



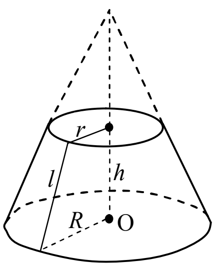
КОНУС

Основные понятия

R – радиус основания, h – высота, l – образующая, S_0 – площадь основания, $S_с$ – площадь осевого сечения, $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности, $S_п$ – площадь полной поверхности , V – объем конуса.

Основные формулы

1. $S_{бок}=\pi R\ l$;
2. $S_п=\pi R(l+R)$;
3. $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$;
4. $S_с=hR$.

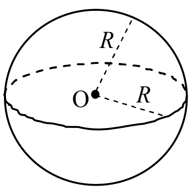


УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Основные формулы

r и R – радиусы оснований конуса,
l – образующая, h – высота.

1. $S_{\ бок}=\pi(R+r)\ l$;
2. $S_{\ полн}=\pi(R^2+r^2+Rl+rl)$;
3. $V=\dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2+r^2+Rr\right)$;
4. $S_{\ с}=(R+r)h$.

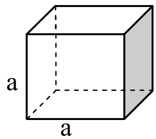


ШАР И СФЕРА

R – радиус, $S_{\ с}$ – площадь большого круга ,
$S_{\ ш}$ – площадь поверхности шара, V – объем.

1. $S_{\ ш}=4\pi R^2$;
2. $S_{\ с}=\pi R^2$;
3. $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

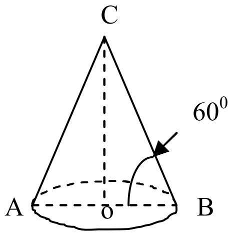
Пример. Площадь поверхности куба равна 24. Найти его объем.



Решение. Так как поверхность куба $S=6a^2 \Rightarrow 6a^2=24 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$; $a=2$, так как a =-2 не подходит по смыслу. Тогда $V=a^3=2^3=8$.

Ответ: 8.

Пример. Образующая конуса, равная 8, наклонена к плоскости основания под углом 60^0. Найти площадь основания конуса.



Решение. Из прямоугольного треугольника BOC можно найти $OC=R$.

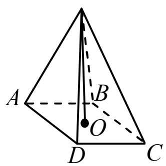
$$OC = BC \cdot \cos 60^0$$

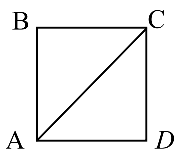
$$OC = 8 \cdot \cos 60^0 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4, \text{ т.е. } R = 4.$$

Тогда $S_{осн} = \pi R^2$; $S_{осн} = \pi \cdot 16 = 16\pi$

Ответ: 16π.

Пример. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а диагональ основания равна $2\sqrt{2}$. Найти объем пирамиды.

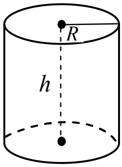




Решение. Так как пирамида правильная четырехугольная, значит основание – квадрат. Воспользуемся формулой: $S=\frac{d^2}{2}$. Тогда $S=\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}=\frac{4\cdot 2}{2}=4$. Значит $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 6=8$.

Ответ: 8.

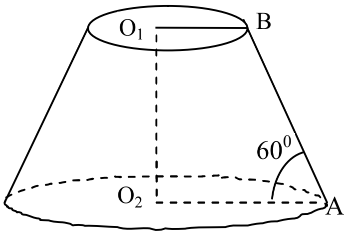
Пример. Боковая поверхность и объем цилиндра выражаются одним числом. Определить диаметр цилиндра.

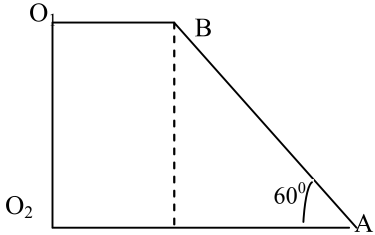


Решение. По условию $S=V$, $2\pi Rh = \pi R^2 h$, откуда $R = 2$. Тогда $2R = 4$.

Ответ: 4 лин. ед

Пример. Диаметры оснований усеченного конуса равны 4 и 6, а образующая наклонена к большему основанию под углом 60^0. Найти площадь его полной поверхности.





Решение. $S_{полн} = S_1 + S_2 + S_{бок}$, так как

$$d_1 = 4, d_2 = 6 \Rightarrow R_1 = 2, R_2 = 3$$

Значит: $S_1 = \pi R_1^2 \Rightarrow S_1 = 2^2 \cdot \pi = 4\pi$ и

$$S_2 = \pi R^2 \Rightarrow S_2 = 3^2 \cdot \pi = 9\pi$$

Чтобы найти $S_{бок}$ найдем *AB:* $AB = \dfrac{(AO_2 - BO_1)}{\cos 60^0} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

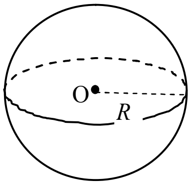
Тогда $S_{бок} = \pi \cdot AB(BO_1 + AO_2) \Rightarrow S_{бок} = \pi \cdot 2 \cdot 5 = 10\pi$.

Значит $S_{полн} = 9\pi + 4\pi + 10\pi = 23\pi$

Ответ: 23π .

Пример. Найти диаметр шара, если его объем равен 36π .

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, значит



$$36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3$$

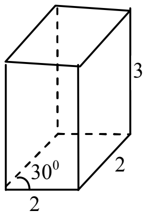
Таким образом $d = 2R; d = 2 \cdot 3 = 6$

Ответ: 6.

Пример. Основанием прямой призмы служит ромб со стороной 2 и острым углом 30^0. Найти полную поверхность призмы, если ее высота равна 3.

Решение. Из формулы $S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок}$ имеем

$$S_{осн} = a^2 \cdot \sin\alpha = 2^2 \cdot \sin 30^0 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$



$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h = 4ah = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Значит: $S_{полн} = 2 \cdot 2 + 24 = 28$.

Ответ: 28.

Упражнения для самостоятельного решения

10.1. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30^0, а длина стороны основания равна $\sqrt{2}$.

10.2. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом 30^0, боковое ребро равно 3. Найти объем параллелепипеда.

10.3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Боковые грани, опирающиеся на катеты основания перпендикулярны основанию, их общий катет равен 5. Найти объем пирамиды.

10.4. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами длиной 6 и 8. Каждое боковое ребро пирамиды длиной 13. Найти длину высоты пирамиды.

10.5. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 171. Найти объем другой правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания в 3 раза меньше, а высота равна высоте данной пирамиды.

10.6. Площадь основания конуса 9π . Площадь боковой поверхности конуса 15π . Найти высоту конуса.

10.7. Радиусы усеченного конуса 3 и 4, образующая 5. Найти площадь осевого сечения конуса.

10.8. Высота цилиндра равна 18, а диагональ осевого сечения 30. Найти объем цилиндра.

10.9. Объем шара равен 12. Найти объем другого шара, у которого площадь поверхности в 9 раз больше, чем у данного шара.

10.10. Найти объем шара, вписанного в цилиндр, если объем цилиндра 54π .

10.11. Определить площадь поверхности шара, описанного около конуса, у которого длина радиуса основания равна $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, а высота – $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

10.12. Три латунных куба с ребрами 3, 4 и 5 переплавлены в один. Какую длину имеет ребро этого куба.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Формулы сокращенного умножения

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. **2.** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$.

4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Свойства степеней *(x, y ∈ **R**, a, b > 0)*

1. $a^0 = 1$. **2.** $a^1 = a$. **3.** $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

4. $a^x a^y = a^{x+y}$. **5.** $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ **6.** $(a^x)^y = a^{xy}$.

7. $(ab)^x = a^x b^x$. **8.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Свойства арифметических корней *(n, k ∈ **N**; a, b > 0)*

1. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $n \neq 1$. **2.** $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$; $n \neq 1$.

3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$; $n, k \neq 1$. **4.** $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$; $n \neq 1$.

5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $n \neq 1$, $b \neq 0$. **6.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$; $n \neq 1$

7. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $n \neq 1$. **8.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; n \neq 1, a \geq 0$.

9. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$; $0 \leq a < b$. **10.** $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \boldsymbol{R}$.

11. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$, $a \in \boldsymbol{R}$. **12.** $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $a \in \boldsymbol{R}$.

13. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Квадратные уравнения

Определение. *Алгебраическое уравнение второй степени с одной переменной вида* $ax^2 + bx + c = 0$*, где a, b, c – некоторые действительные числа* ($a \neq 0$)*, называется квадратным уравнением.*

Для решения квадратного уравнения надо вычислить

$D = b^2 - 4ac$ (дискриминант).

Частные случаи:

1) *Если D = 0, то квадратное уравнение имеет единственный корень* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2) *Если D > 0, то уравнение имеет два корня:*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

3) *Если D < 0, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.*

Основные свойства логарифмов

1. Если $x > 0$*, то* $x = a^{\log_a x}$ *(основное логарифмическое тождество).*

2. $\log_a a = 1.$

3. $\log_a 1 = 0.$

4. Если $x_1 > 0$ *и* $x_2 > 0$*, то* $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

5. Если $x_1 > 0$ *и* $x_2 > 0$*, то* $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

6. Если $x > 0$*, то* $\log_a x^p = p \log_a x$*, где p – любое действительное число.*

7*. Если* $x > 0$*, то* $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$*, для любого действительного числа* $b > 0$ *и* $b \neq 1$.

Значения тригонометрических функций

Функция	Угол				
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы сложения

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \ \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}.$$

Формулы половинного аргумента

(для функций $\sin x$ и $\cos x$ – формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\mathrm{tg}x \pm \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x\cos y}.$$

Соотношения между sin *x*, cos *x* и tg(*x*/2)

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Некоторые формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x \qquad \sin(\pi \pm x) = \mp\sin x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x \qquad tg\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp ctgx \qquad tg(\pi \pm x) = \pm tgx$$

Формула общего члена арифметической прогрессии

Последовательность $\{a_n\}$ называется *арифметической прогрессией*, если существует такое число d, называемое *разностью* арифметической прогрессии, что для любого номера n: $a_{n+1} = a_n + d$.

Формула общего члена: $a_n = a_1 + d\left(n-1\right)$.

Формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ − сумма n первых членов арифметической прогрессии. Формула для S_n:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d\left(n-1\right)}{2} \cdot n.$$

Формула общего члена геометрической прогрессии

Последовательность $\{b_n\}$ называется *геометрической прогрессией*, если существует такое число q, называемое *знаменателем* геометрической прогрессии, что для любого номера n: $b_{n+1} = b_n\, q$.

Формула общего члена:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ − сумма n первых членов геометрической прогрессии. Формула для S_n:

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}, q \neq 1.$$

Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n, сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$, которое называют суммой бесконечной геометрической прогрессии и обозначают $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Площадь прямоугольника

$$S = a \cdot b,$$

где a и b – измерения прямоугольника.

$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha, .$$

где α – угол между диагоналями, d – диагональ.

Площадь параллелограмма

$$S = a \cdot h,$$

где a – основание параллелограмм, на которое падает высота h.

$$S = ab\sin\alpha,$$

где a и b – смежные стороны параллелограмма, α – угол между ними.

Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

где h_a – высота треугольника, проведенная к стороне a.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

где a и b – стороны треугольника, γ – угол между ними.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c – стороны треугольника, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

Площадь ромба

$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$

где d_1, d_2 – диагонали ромба.

Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

где a и b – основания трапеции, h – высота трапеции.

Формулы и соотношения

a – сторона, R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности; S – площадь.

$$1.\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \qquad 2.\ S = 3r^2\sqrt{3};$$

$$3.\ S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}; \quad 4.\ R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$5.\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Боковая поверхность цилиндра

$$S = 2\pi RH.$$

Объём цилиндра

$$V = \pi R^2 H.$$

Боковая поверхность конуса

$$S = \pi RI.$$

Объём конуса

$$V = \pi R^2 H / 3.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Вариант № 1

1. Вычислите $A = \dfrac{(0{,}34 + 0{,}5)\cdot 40}{18\frac{1}{6} - 1\frac{11}{14} - \frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}\cdot 100$.

2. Найдите сумму всех целых положительных чисел, меньших 100, которые не кратны 5.

3. Мотоциклист проехал 92 км за 2 ч 24 мин. В течение первых двух часов он ехал со скоростью, меньшей скорости в оставшееся время на 2 км/ч. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста (в км/ч).

4. Вычислить $5^{2-\log_5 4}\cdot 100$.

5. Решите уравнение $\sqrt{4x-7} + \sqrt{2x+1} = 6$.

6. Вычислите $96\sin\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{32}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}$.

7. Найдите в градусах решение уравнения $\cos x + \cos(3x) = \cos(2x) + \cos(4x)$, удовлетворяющее условию $-60° < x < 60°$.

8. Определите наименьший целый корень неравенства $7^{x-3} + 7^{x-1} > 350$.

9. В круг радиусом 10 вписан квадрат. Найдите площадь части круга, лежащей вне квадрата, принять $\pi \approx 3{,}14$.

10. За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности вспахано 2/3 поля. За сколько дней может вспахать это поле только первый трактор, если на это ему требуется на 5 дней меньше, чем только второму трактору?

Вариант № 2

1. Найдите число, если 25% его составляют 40% от 160.

2. Найдите первый член убывающей четырехчленной геометрической прогрессии, зная, что сумма крайних членов этой прогрессии 27, а сумма средних 18.

3. Через один кран резервуар заполняется за 180 минут, а через другой – за 270 минут. На сколько минут надо открыть оба крана, чтобы наполнить ½ резервуара?

4. Найдите наибольший корень уравнения $x^4 - 10x^3 + 90x - 81 = 0$.

5. Найдите наибольший корень уравнения $\left|x^2 - 3x + 2\right| = x + 2$.

6. Вычислите $5\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 2$, $0° < \alpha < 90°$.

7. Найдите $10 \cdot \log_2 \sqrt[5]{a}$, если $\log_a 32 = 5$.

8. Решите уравнение $\lg(\lg x) = \lg(\lg 4) - \lg(\lg 2)$.

9. Определите объем правильной треугольной призмы, если длина стороны ее основания 2, а боковая поверхность призмы равновелика сумме ее оснований.

10. Средняя линия m трапеции, описанной около окружности, равна 20. Найти периметр трапеции.

Вариант № 3

1. Вычислите $A = \dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1 + 3\frac{1}{3}}{2{,}5 - 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3}} : \dfrac{5}{12}$.

2. За 2 кг одного продукта и 3 кг другого заплатили 12 руб. После того, как первый продукт подорожал на 20%, а второй подешевел на 40%, за то же количество заплатили 9 руб. Сколько стоил первоначально 1 кг второго продукта?

3. Произведение 1-го и 15-го членов геометрической прогрессии равно 289. Найдите 8-ой член прогрессии, если все члены прогрессии положительны.

4. Найдите меньший корень уравнения $|4x - 15| = 3$.

5. Две трубы наполняют бассейн за 12 часов. Одна первая наполняет его на 10 часов быстрее одной второй. За сколько часов наполнит бассейн одна первая труба?

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства $(0{,}7)^{x/\sqrt{2}} < 0{,}2401$.

7. Решите уравнение $\lg\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = \lg 0{,}5 - \dfrac{1}{3}\lg x^3$. В ответ укажите $10x$, где x – корень уравнения.

8. Вычислите $10 \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1}$, если $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9. Найдите $2x + y$, если x и y удовлетворяют системе уравнений
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ |y| - x = 1. \end{cases}$$

10. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB* = *BC*) проведена высота *BD*. Периметр треугольника *ABC* равен 70 см, а треугольника *ABD* – 50 см. Найдите *BD*.

Вариант № 4

1. Найдите сумму целых чисел, являющихся решением неравенства $\frac{2}{2x+1} > \frac{1}{x-4}$.

2. Какова масса стального куба со стороной 5 см, если масса стального куба со стороной 10 см составляет 240 г.

3. Упростите $4\left((x-y)^2-(x+y)^2+(2x^{1/2}\sqrt{y})^2-1\right)$.

4. Решите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=6$.

5. Решите уравнение $7^{x+2}-7^{x+1}=6\cdot 2^{x+1}$.

6. Вычислите $15^0+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot 8^{1-\log_{16}81}$.

7. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\log_{0,5}(5x)>\log_{0,5}(x^2)$.

8. Найдите (в градусах) решение уравнения $4\cos^2(2x)-1=0$, удовлетворяющее условию $135°<x<180°$.

9. Определить сумму длин диагоналей параллелограмма со сторонами $2\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$, если больший угол между диагоналями равен большему углу параллелограмма.

10. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, ребро которой составляет с плоскостью основания угол в $30°$ и имеет длину 4 см.

Вариант № 5

1. Упростить и вычислить при $x = 13$ выражение $\left(\dfrac{x-3}{x^2 - 3x + 9} - \dfrac{6x-18}{x^3 + 27} \right) : \dfrac{5x-15}{4x^3 + 108}$.

2. Найти наименьшее из двух чисел, одно из которых в 5,5 раза меньше другого, а их среднее арифметическое равно 1001.

3. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии равна 144. Если от этих чисел отнять 25, 27 и 1 соответственно, то получим три числа, образующие геометрическую прогрессию. Найти седьмой член арифметической прогрессии. В ответе записать большее число.

4. Найти наименьший корень уравнения $3 - x^2 = |x+1| + x$.

5. Решить уравнение $\sqrt{8+2x} + \sqrt{8-2x} = x$.

6. Найти наибольшее целое решение неравенства $27^{2(x-1)/x} > \sqrt{9^{x-1}}$.

7. Найти $252\cos 3\alpha$, если $\cos 6\alpha = 7/18$ и $0° < 6\alpha < 90°$.

8. Турист шел из пункта *A* в пункт *B* со скоростью 6 км/ч, а из *B* в *C* – со скоростью 4 км/ч. Сколько километров прошел турист, если расстояние от *A* до *B* на 24 км больше, чем от *B* до *C*, и средняя скорость движения туриста 5,25 км/ч.

9. В двух сплавах содержится разное количество меди: в первом сплаве на 40% меньше меди, чем во втором. После того, как их сплавили вместе, получили сплав, содержащий 36% меди. Найти процентное содержание меди в первом сплаве, если в нем меди было 6 кг, а во втором 12 кг.

10. Найти в градусах наибольший отрицательный корень уравнения $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$.

Ответы вариантов заданий для самопроверки

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вариант №1	**448**	**4000**	**38**	**625**	**4**	**6**	**0**	**5**	**114**	**10**
Вариант №2	**256**	**24**	**54**	**9**	**4**	**4**	**2**	**100**	**1**	**80**
Вариант №3	**12**	**3**	**17**	**3**	**20**	**6**	**3**	**–175**	**1**	**15**
Вариант №4	**6**	**30**	**–4**	**4**	**–1**	**2**	**6**	**150**	**10**	**16**
Вариант №5	**8**	**308**	**128**	**–2**	**4**	**5**	**210**	**56**	**20**	**–60**

ВАРИАНТ ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО ЗАДАНИЯ

---

1. Найти значение выражения $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$, если $a=7{,}25$, $b=6{,}75$.

2. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{65}$, а один из катетов равен $2\sqrt{5}$.

3. За 9 метров ткани было уплачено 228 рублей. Сколько было бы уплачено за 15 метров этой же ткани?

4. Решить уравнение $2x+5+4(2x-3)=6(x+2)+1$.

5. Число 177 является членом арифметической прогрессии 1, 5, 9, 13, 17, … . Укажите его номер.

6. Решить уравнение $\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x+1=0$.

7. Решить неравенство $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\dfrac{147}{20}\right)^{x}<\left(\dfrac{81}{625}\right)^{x}$. В ответ укажите его наименьшее целое решение.

8. Решить уравнение $\cos 4x+2\cos^2 x=1$. В ответ напишите сумму его корней (в градусах), удовлетворяющих условию $0°\le x\le 360°$.

9. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{x+7}+\dfrac{4x}{x^2-7}-5=0$. В ответ запишите произведение его корней.

10. В основание треугольника пирамиды лежит равнобедренный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Длины боковых ребер пирамиды равны $b=3$, длина гипотенузы основания равна $c=2\sqrt{6}$. Найти градусную меру двугранного угла при ребре *CE*.

Решение экзаменационного задания

1. Найти значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$, если $a=7{,}25$, $b=6{,}75$.

Решение. Вначале упростим выражение, воспользовавшись формулами сокращенного умножения:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Затем подставим заданные числовые данные:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{7{,}25+6{,}75}{7{,}25-6{,}75}=\frac{14}{0{,}5}=\frac{140}{5}=28.$$

Ответ: 28.

2. Найти площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна $\sqrt{65}$, а один из катетов равен $2\sqrt{5}$.

Решение. Найдем второй катет треугольника. Для этого воспользуемся теоремой Пифагора: $a^2+b^2=c^2$, где a и b – катеты, c – гипотенуза. Получаем: $(2\sqrt{5})^2+b^2=(\sqrt{65})^2$, откуда $b^2=65-20=45$, $b=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин катетов: $S=\frac{1}{2}ab$. В данном случае $S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}=3\cdot 5=15$.

Ответ: 15.

3. За 9 метров ткани было уплачено 228 рублей. Сколько было бы уплачено за 15 метров этой же ткани?

Решение. Составим пропорцию:

9 (м) – 228 (руб.)

15 (м) – x (руб.),

откуда $\frac{9}{15}=\frac{228}{x}$, $9\cdot x=228\cdot 15$,

$$x=\frac{228\cdot 15}{9}=\frac{228\cdot 3\cdot 5}{9}=\frac{228\cdot 5}{3}=\frac{76\cdot 3\cdot 5}{3}=76\cdot 5=380$$

Ответ: 380.

4. Решить уравнение $2x+5+4(2x-3)=6(x+2)+1$.

Решение. Вначале раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x+5+8x-12=6x+12+1,$$

$$10x-7=6x+13.$$

Перенесем слагаемые с неизвестной в одну сторону уравнения, без неизвестной – в другую, приведем подобные и сократим:

$$10x-6x=13+7,$$

$$4x=20,$$

$$x=5.$$

Ответ: 5.

5. Число 177 является членом арифметической прогрессии 1, 5, 9, 13, 17, … . Укажите его номер.

Решение. Первым членом прогрессии является число 1, $a_1=1$. Разность прогрессии найдем как разность между любыми двумя последовательными ее членами, например, $d=9-5=4$. Число 177 по условию является n-м членом этой прогрессии, $a_n=177$. Подставляем все данные в формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$ и находим, что $177=1+4(n-1)$, откуда $4(n-1)=176$, $n-1=44$, $n=45$.

Ответ: 45.

6. Решить уравнение $\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x+1=0$.

Решение. Вначале установим область допустимых значений для этого уравнения:

$$\begin{cases}2-x>0,\\ 2+x>0,\\ x>0.\end{cases}.$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} -x > -2, \\ x > -2, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x > -2, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$0 < x < 2\ .$$

Преобразуем исходное уравнение путем перегруппировки:

$$\log_3 (2 - x) + 1 = \log_3 (2 + x) + \log_3 x\ .$$

Представим константу 1 в виде логарифма:

$$\log_3 (2 - x) + \log_3 3 = \log_3 (2 + x) + \log_3 x\ .$$

Преобразуем сумму логарифмов в логарифм произведения:

$$\log_3 (6 - 3x) = \log_3 \left(2x + x^2\right).$$

Пропотенцируем полученное равенство:

$$6 - 3x = 2x + x^2\ .$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$x^2 + 5x - 6 = 0\ ,$$

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 1\ .$$

Корень $x_1 = -6$ не входит в область допустимых значений $0 < x < 2$, а потому является посторонним корнем.

Ответ: 1.

7. Решить неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} < \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$. В ответ укажите его наименьшее целое решение.

Решение. Преобразуем неравенство таким образом, чтобы сначала все показатели степеней стали равными, а затем обеспечим равенство оснований в левой и правой частях:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^{x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} < \left(\frac{81}{625}\right)^{x},$$

$$\left(\frac{4}{49}\cdot\frac{147}{20}\right)^{x} < \left(\frac{81}{625}\right)^{x},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} < \left(\frac{3^4}{5^4}\right)^{x},$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} < \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Так как основанием показательной функции является число $\frac{3}{5} < 1$, то эта функция является убывающей, при логарифмировании знак неравенства меняется на противоположный, то есть $x > 4x$, $4x - x < 0$, $3x < 0$, $x < 0$. Наименьшим целым решением является 1.

Ответ: 1.

8. Решить уравнение $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$. В ответ напишите сумму его корней (в градусах), удовлетворяющих условию $0° \le x \le 360°$.

Решение. В данном уравнении функции имеют разные аргументы. Преобразуем это уравнение таким образом, чтобы аргументы стали одинаковыми, например, 2*x*. Для этого применим формулу косинуса двойного угла $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, которая в данном случае будет иметь вид $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, а также формулу понижения степени $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Исходное уравнение приобретает вид

$$2\cos^2 2x - 1 + 2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} = 1,$$

откуда

$$2\cos^2 2x - 1 + 1 + \cos 2x = 1$$

или

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

В результате замены переменной $\cos 2x = t, |t| \le 1$ получаем квадратное уравнение $2t^2 + t - 1 = 0$, корнями которого являются

$t_1 = -1, t_2 = \frac{1}{2}$. В результате обратной подстановки получаем два уравнения и решаем их:

$\cos 2x = -1$ или $\cos 2x = \frac{1}{2}$,

$2x = \pi + 2\pi \cdot n,\ \ n \in Z$ или $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k,\ \ k \in Z$.

$x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n,\ \ n \in Z$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi \cdot k,\ \ k \in Z$.

Перейдем от радианов к градусам:
$x = 90° + 180° \cdot n,\ \ n \in Z$ или $x = \pm 30° + 180° \cdot k,\ \ k \in Z$.
Придавая параметрам n и k различные целые числовые значения, определяем, что условию $0° \le x \le 360°$ в серии $x = 90° + 180° \cdot n,\ \ n \in Z$ удовлетворяют корни $x = 90°$ и $x = 270°$, а в серии $x = \pm 30° + 180° \cdot k,\ \ k \in Z$ – корни $x = 30°$, $x = 150°$, $x = 210°$, $x = 330°$. Сумма всех таких корней равна $90° + 270° + 30° + 150° + 210° + 330° = 1080°$.

Ответ: 1080.

9. Решите уравнение $\frac{x^2}{x+7} + \frac{4x}{x^2-7} - 5 = 0$. В ответ запишите произведение его корней.
Решение. Разложим число 5 в сумму двух слагаемых: $5 = 4 + 1$.

Перегруппируем исходное уравнение: $\frac{x^2}{x+7} - 1 + \frac{4x}{x^2-7} - 4 = 0$.

Приведем выражения попарно к общему знаменателю:
$\frac{x^2 - x - 7}{x+7} + \frac{4x - 4x^2 + 4 \cdot 7}{x^2-7} = 0$. В результате вынесения множителя 4 получаем уравнение $\frac{x^2 - x - 7}{x+7} - 4\frac{x^2 - x - 7}{x^2-7} = 0$, которое распадается на два уравнения:

$x^2 - x - 7 = 0$ или $\frac{1}{x+7} - 4\frac{1}{x^2-7} = 0$.

Решаем каждое из полученных уравнений и находим, что

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$ или $x^2 - 7 - 4(x+7) = 0$,

$$x^2 - 4x - 35 = 0,$$

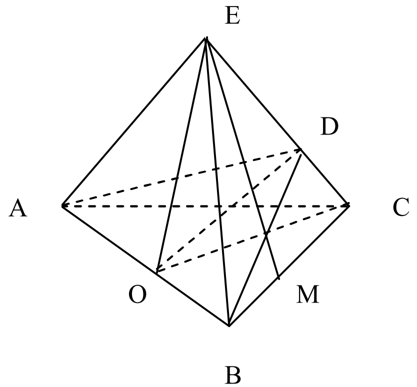
$$x = 2 \pm \sqrt{39}.$$

В результате перемножения корней находим

$$\frac{1+\sqrt{29}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{29}}{2} \cdot (2+\sqrt{39}) \cdot (2-\sqrt{39}) = \frac{1-29}{4} \cdot (4-39) = 7 \cdot 35 = 245.$$

Ответ: 245.

10. В основание треугольника пирамиды лежит равнобедренный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Длины боковых ребер пирамиды равны $b = 3$, длина гипотенузы основания равна $c = 2\sqrt{6}$. Найдите двугранный угол при ребре *CE*.



Решение.

Чтобы построить линейный угол при ребре *CE*, проведем $AD \perp CE$, а точку *D* соединим с точкой *B*. Так как треугольники *AEC* и *BEC* равны, то $BD \perp CE$, и, следовательно, $\angle ABD = \alpha$ является искомым линейным углом. Треугольник *ABD* – равнобедренный, его медиана *DO* является также высотой и биссектрисой. Поэтому $\angle\, ODB = \dfrac{\alpha}{2}$. В треугольнике *ODB* имеем $OB = \dfrac{c}{2} = \sqrt{6}$, а сторону *BD* найдем из треугольника *BEC*, площадь которого можно найти и как $\dfrac{EC \cdot BD}{2}$, и как

$\dfrac{BC\cdot EM}{2}$. Таким образом, $\dfrac{EC\cdot BD}{2}=\dfrac{BC\cdot EM}{2}$, откуда $EC\cdot BD=BC\cdot EM$. Из этого равенства находим

$$BD=\frac{BC\cdot EM}{EC}=\frac{BC\cdot EM}{3}.$$

BC найдем из прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC* с гипотенузой, равной $2\sqrt{6}$: $BC=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$. *EM* найдём из прямоугольного треугольника *EMC*, где $BM=MC=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{3}$. Таким образом, $EM=\sqrt{EC^2-CM^2}=\sqrt{9-3=}\sqrt{6}$. Подставим в равенство $BD=\dfrac{BC\cdot EM}{3}$ значения *BC* и *EM,* получим: $BD=\dfrac{BC\cdot EM}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{3}=\dfrac{6\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника *DOB* находим: $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{OB}{BD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\dfrac{\alpha}{2}=\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$, что соответствует $\alpha=120°$.

Ответ: 120.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯИМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ДЕЙСТВИЯ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

1.1. 142; **1.2.** 75; **1.3.** 141; **1.4. а)** –4; **б)** –7; **в)** 10,2; **1.5. а)** –0,35; **б)** –0,5; **в)** 0,05; **г)** 1; **1.6. а)** $\frac{43}{23}$; **б)** $-\frac{35}{8}$; **1.7. а)** 5; **б)** 4; **в)** 2,2; **1.8. а)** 3; **б)** 12; **в)** –1,25; **1.9. а)** $-10\sqrt{3}$; **б)** $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$; **в)** 2; **г)** $-\sqrt{2}$; **д)** 5; **е)** 1; **1.10. а)** 1,8; **б)** 0,32; **1.11.** 0,04; **1.12.** 0,1; **1.13. а)** $\sqrt{7}$; **б)** −2; **в)** 0; **г)** 5; **д)** 27; **е)** 3; **1.14. а)** – 2,4; б) 9; **1.15. а)** –5; **б)** $-4a^2$; **в)** $2\left(x^2+y^2\right)$; **г)** $\left(a+b\right)$; **д)** 6; **1.16.** a^2-b^2; **1.17.** −3; **1.18.** $-\sqrt{a+b}$; **1.19. а)** 0; **б)** ab+1; **1.20. а)** 14; **б)**$2x$ –1; **в)** –8;
г) 102 – x; **д)** –5; **1.21 а)** 21; **б)**32; **в)** 120; **г)** 0,5; **д)** 2.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. 1) $\frac{1}{5}$; **2)** 3; **3)** 0; **2.2.** 8; **2.3.** $\frac{65}{26}$; **2.4.** $-\frac{23}{3}$; **2.5.** $\frac{1}{5}$; **2.6.** 5; **2.7.** 1; **2.8.** 2; –2; **2.9.** 1; –1; **2.10.** –2; **2.11.** –2; **2.12.** –28; **2.13.** 2; **2.14.** –9; **2.15.** 2; **2.16.** -3; **2.17.** 3; **2.18.** $\frac{1}{2}$; **2.19.** -1; **2.20.** 9; **2.21.** 2; **2.22.** -4; **2.23.** 3; **2.24.** –1; **2.25.** 4; **2.26.** 2; **2.27.** 4; **2.28.** -7; **2.29.** –5,5; **2.30.** –1; **2.31.** -4; **2.32.** 2; **2.33.** 7; **2.34.** 2. **2.35.** 22; **2.36.** $a)2; b)3$; **2.37.** 7; **2.38.** $-3{,}5$; **2.39.** 5; **2.40.** 3;2; **2.41.** 3; **2.42.** –3; **2.43.** 26.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. а) $\left(+\infty,-\frac{7}{3}\right]$; **б)** $\left(3,+\infty\right)$;**3.2.** $\left(-8,+\infty\right)$; **3.3.** $\left(-\frac{7}{11},+\infty\right)$; **3.4.** $\left(2,+\infty\right)$;

3.4. $\left(-\infty,-4\right)\cup\left(-1,5\right)$; **3.5.** –2; **3.6.** $\left(-4,3\right)\cup\left[5,7\right]$;

3.7. а) $\left(-\infty,2\right]$; **б)**$\varnothing$, **3.8. а)**$\left(0,4\right]$; **б)** $\left(-\infty,2\right]\cup\left[3,+\infty\right)$;

3.9. а) $\left(-\infty,0\right]\cup\left(1,+\infty\right)$, **б)** $\left(-\infty,-2\right)\cup\left[1,9\right)\cup\left(9,+\infty\right)$;

3.10. а) $\left(-\infty,-1\right)\cup\left[4,\infty\right)$; **б)** $\left(-\infty,0\right)\cup\left[2,3\right]$

3.11. $\left[-\frac{5}{2},-\frac{7}{3}\right)$; **3.12. а)** $[1,11]$; **б)** $(-5,9)$; **в)** $(-\infty,-1)\cup[4,+\infty)$;

3.13. $\left[-\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right]$; **3.14.** $(7,+\infty)$; **3.15. а)** $\left(-\infty,\frac{7}{5}\right)\cup[23,+\infty)$; **б)** $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$;

3.16. а) $[-1,2]\cup[3,6]$; **б)** $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(5,+\infty)$ **3.17.** $(1,3)$.

4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

4.1. а) 2 и –1; **б)** 10 и 30; **4.2. а)** 2,5; **б)** 3; **4.3.** –6; **4.4.** 3; **4.5. а)** –1; **б)** 2; **4.6.** – 2; **4.7. а)** 4; **б)** 3; **в)** –1; **4.7.** 4; **4.8**. 4; **4.9.** 4; **4.10.** –3; **4.11.** 3; **4.12**. 1; **4.13.** 0,25; **4.14. а)** ± 2; **б)** ± 2; **4.15. а)** –9; **б)** 1;
4.16. 9; **4.17.** –2; **4.18.** 1; **4.19**. 3; **4.20.** 1; **4.21**. 2; **4.22.** –1; **4.23.** 3; **4.24.** 7; **4.25**. $(1,5;2)$; **4.26**. 5; **4.27**. $(3;2)$; **4.28**. (1/4; 1/6); **4.29.** $(2;1)$

5. ЛОГАРИФМЫ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

5.1. 0,8; **5.2.** 3; **5.3.** $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$; **5.4.** 2; **5.5.** – 1; **5.6.** – 0,5; **5.7.** –18; **5.8.** 0,5; **5.9.** –3; **5.10.** –2; **5.11.** 1. **5.12.** 5; **5.13.** 2; **5.14.** 3; **5.15.** –1; **5.16.** 16; **5.17.** 2. **5.18.** $[4;+\infty)$; **5.19** $[4,36;+\infty)$; **5.20.** $(7;11)$; **5.21.** $(2;4)$; **5.22.** $(2;3)$; **5.23.** $(0;100)$; **5.24.** $(-5;1,5)$; **5.25.** $(-10;3)$;

5.26. $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(2;+\infty)$; **5.27.** 20; **5.28.** 68; **5.29.** $\left(\sqrt[5]{4};\sqrt[5]{16}\right)$;

5.30. $(16;3)$, $\left(\frac{1}{64},-2\right)$.

6. ТРИГОНОМЕТРИЯ

6.1. а) 0; **б)**2,25; **в) –** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **г)** 4; **д)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **е)** $\frac{1}{8}$; **6.2. а)** 0,75; **б)** $\frac{336}{625}$;

в) $\frac{-3\sqrt{10}}{10}$; **6.3.** 1; **6.4.** 2; **6.5. а)** 0,5; **б)** 0,5; **в)** $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$; **г)** $2\sqrt{3}$;

д) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$; **е)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **ж)** 1; **6.6. а)** $x=\frac{\pi}{2}-2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

б) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; **в)** $x=\frac{5\pi}{36}-\frac{2\pi n}{9}$, $n\in\mathbf{Z}$;

г) $x==\left(-1\right)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; **д)** $x=-4\pi+6\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

6.7. $x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; **6.8.** 45°; **6.9.** 15°; **6.10. а)**5; **б)**6;

6.11. а) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; **б)** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$; **6.12.** $\frac{19}{36}\pi$, $\frac{35}{36}\pi$.

7. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

7.1. 608; **7.2.** 5,2; **7.3** 18,5; **7.4.** 98730; **7.5.** 4; **7.6.** 518,4; **7.7.** 0,24; **7.8.** 100/3.

8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

8.1. 300; **8.2.** 7; **8.3.** 100; **8.4.** 48; **8.5.** 10; **8.6.** 90; **8.7.** 3,2; **8.8.** 65; **8.9.** 26; **8.10.** 20; **8.11.** 3.

9.ПЛАНИМЕТРИЯ

9.1. 117^0; **9.2.** 65^0; **9.3.** 144^0; **9.4.** 72^0; **9.5.** 71^0 и 109^0; **9.6.** 100^0 и 80^0; **9.7.** 160^0**;** **9.8.** 21; **9.9.** 35; **9.10.** 50^0; **9.11.** 85^0; **9.12.** 12; **9.13.** 60; **9.14.** 12; **9.15.** 23; **9.16.** 9^0; **9.17.** 27; **9.18.** 3,625; **9.19.** 4; **9.20.** 6; **9.21.** 153; **9.22.** 3; **9.23.** 12; **9.24.** 30; **9.25.** 192; **9.26.** 42; **9.27.** 10; **9.28.** 0,5. **9.29.** 36; **9.30.** 12; **9.31.** 0,875; **9.32.** 2 и 5; **9.33.** 3; **9.34** 13,5; **9.35.** 96; **9.36.** 4; **9.37.** 24; **9.38.** 44,8; **9.39.** 35; **9.40.** 0,9; **9.41.** 71; **9.42.** 32π; **9.43.** 29; **9.44.** 54^0; **9.45.** $1^{\mathbf{0}}$; **9.46.** 20^0; **9.47.** 44^0; **9.48.** 75^0; **9.49** 33^0; **9.50.** 50^0; **9.51.** 40^0; **9.52.** 4; **9.53.** 2:3; **9.54.** 1,5 см.

10. СТЕРЕОМЕТРИЯ

10.1 4; **10.2.** 6; **10.3.** 10; **10.4.** 12; **10.5.** 19; **10.6** 4; **10.7.** 30; **10.8.** 2592π; **10.9.** 324; **10.10.** 36π; **10.11.** 25; **10.12** 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математика : учебное пособие для 5 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения : в 2 ч. / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч 1.
2. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 5 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання : у 2 ч. / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч. 1.
3. Математика : учебное пособие для 5 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения : в 2 ч. / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч 2.
4. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 5 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання : у 2 ч. / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2013. – Ч. 2.
5. Сборник задач по математике для 5 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
6. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 5 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
7. Математика : учебное пособие для 5 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения : в 2 ч. / Е.П. Кузнецова [и др.]; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Национальный институт образования, 2013. – Ч. 1.
8. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 5 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання : у 2 ч. / А.П. Кузняцова [і інш.] ; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Нацыянальны інстытут адукацыі, 2013. – Ч. 1.
9. Математика : учебное пособие для 5 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения: в 2 ч. / Е.П. Кузнецова [и др.]; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Национальный институт образования, 2013. – Ч. 2.

10. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 5 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання : у 2 ч. /А.П. Кузняцова [і інш.] ; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Нацыянальны інстытут адукацыі, 2013. – Ч. 2.
11. Сборник задач по математике для 5 класса: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: Национальный институт образования, 2011, Аверсэв, 2016.
12. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 5 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2011.
13. Математика : учебное пособие для 6 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Народная асвета, 2014.
14. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 6 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Народная асвета, 2014.
15. Сборник задач по математике для 6 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
16. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 6 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А.Латоцін, Б.Д.Чабатарэўскі. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
17. Математика : учебное пособие для 6 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Национальный институт образования, 2014.
18. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 6 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання /А.П. Кузняцова [і інш.]; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Нацыянальны інстытут адукацыі, 2014.
19. Сборник задач по математике для 6 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: Национальный институт образования, 2010, Аверсэв, 2016.
20. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 6 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2011.

21. Математика : учебное пособие для 7 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А.Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Народная асвета, 2014.
22. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 7 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Народная асвета, 2014.
23. Сборник задач по математике для 7 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
24. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 7 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
25. Алгебра : учебное пособие для 7 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения /Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Народная асвета, 2014.
26. Алгебра : вучэбны дапаможнік для 7 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова [і інш.]; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Народная асвета, 2014.
27. Сборник задач по алгебре для 7 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: НИО, 2012.
28. Зборнік задач па алгебры: вучэбны дапаможнік для 7 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П.Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2012.
29. Геометрия : учебное пособие для 7 класса общеобразовательных учреюждений с русским языком обучения / В.В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2011.
30. Геаметрыя: вучэбны дапаможнік для 7 класа агульнаадукацыйных установ з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў. – Мінск : Народная асвета, 2011.
31. Сборник задач по геометрии для 7 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Шлыков, Т.В. Валаханович – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
32. Зборнік задач па геаметрыі: вучэбны дапаможнік для 7 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / У.У.Шлыкаў, Т.У.Валахановіч. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2012.

33. Математика : учебное пособие для 8 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А.Латотин, Б.Д.Чеботаревский. – Минск : Народная асвета, 2015.
34. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 8 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання /Л.А.Латоцін, Б.Д.Чабатарэўскі. – Мінск : Народная асвета, 2015.
35. Сборник задач по математике для 8 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
36. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 8 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2012.
37. Алгебра : учебное пособие для 8 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Народная асвета, 2015.
38. Алгебра : вучэбны дапаможнік для 8 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова [і інш.]; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Народная асвета, 2015.
39. Сборник задач по алгебре для 8 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: НИО, 2012.
40. Зборнік задач па алгебры: вучэбны дапаможнік для 8 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2012.
41. Геометрия : учебное пособие для 8 класса общеобразовательных учреюждений с русским языком обучения / В.В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2011.
42. Геаметрыя: вучэбны дапаможнік для 8 класа агульнаадукацыйных устаноў з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў. – Мінск : Народная асвета, 2011.
43. Математика : учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Народная асвета, 2014.
44. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 9 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Народная асвета, 2014.

45. Алгебра : учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Народная асвета, 2014.
46. Алгебра: вучэбны дапаможнік для 9 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова [і інш.] ; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Народная асвета, 2014.
47. Сборник задач по алгебре для 9 класса: пособие для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: НИО, 2011.
48. Зборнік задач па алгебры: вучэбны дапаможнік для 9 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2011.
49. Геометрия : учебное пособие для 9 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2012.
50. Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 9 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў. – Мінск : Народная асвета, 2012.
51. Математика : учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д.Чеботаревский. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013.
52. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Адукацыя і выхаванне, 2013.
53. Алгебра : учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Народная асвета, 2013.
54. Алгебра : вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова [і інш.]; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Народная асвета, 2013.
55. Сборник задач по алгебре для 10 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: НИО, 2012.
56. Зборнік задач па алгебры: вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2012.

57. Геометрия : учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2013.

58. Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў. – Мінск : Народная асвета, 2013.

59. Сборник задач по геометрии для 10 класса: пособие для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / В.В. Шлыков, Т.В. Валаханович – Минск: Народная асвета, 2010.

60. Зборнік задач па геаметрыі: вучэбны дапаможнік для 10 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў, Т.У. Валахановіч. – Мінск: Народная асвета, 2010.

61. Математика : учебное пособие для 11 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский. – Минск : Народная асвета, 2013.

62. Матэматыка : вучэбны дапаможнік для 11 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск : Народная асвета, 2013.

63. Сборник задач по математике для 11 класса: пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Л.А. Латотин, Б.Д. Чеботаревский – Минск: Адукацыя і выхаванне, 2014.

64. Зборнік задач па матэматыцы: вучэбны дапаможнік для 11 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / Л.А. Латоцін, Б.Д. Чабатарэўскі. – Мінск: Адукацыя і выхаванне, 2014.

65. Алгебра : учебное пособие для 11 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / Е.П. Кузнецова [и др.] ; под редакцией профессора Л.Б. Шнепермана. – Минск : Народная асвета, 2013.

66. Алгебра : вучэбны дапаможнік для 11 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова [і інш.] ; пад рэдакцыяй прафесара Л.Б. Шнэпермана. – Мінск : Народная асвета, 2013.

67. Сборник задач по алгебре для 11 класса: пособие для общеобразовательных учреждений с русским (белорусским) языком обучения / Е.П. Кузнецова и др. – Минск: НИО, 2011.

68. Зборнік задач па алгебры: вучэбны дапаможнік для 11 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / А.П. Кузняцова і інш. – Мінск: Нацыянальны інстытут адукацыі, 2011.

69. Геометрия : учебное пособие для 11 класса учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / В.В. Шлыков. – Минск : Народная асвета, 2013.

70. Геаметрыя: вучэбны дапаможнік для 11 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў. – Мінск : Народная асвета, 2013.

71. Сборник задач по геометрии для 11 класса: пособие для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения / В.В. Шлыков, Т.В. Валаханович. – Минск: Народная асвета, 2010.

72. Зборнік задач па геаметрыі: вучэбны дапаможнік для 11 класа агульнаадукацыйных ўстаноў з беларускай мовай навучання / У.У. Шлыкаў, Т.У. Валахановіч. – Мінск: Народная асвета, 2010.

73. Морозова, И.М. Математика: курс самостоятельной подготовки к экзамену и тестированию / И.М. Морозова, Н.Г. Серебрякова. – Минск: ТетраСистемс, 2010. – 224с.

74. Морозова, И.М. Экспресс-курс по математике для подготовки к вступительным испытаниям / И.М. Морозова, Т.Б. Воронкова – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 96с.

75. Морозова, И.М. Математика: учеб. – тренировоч. тесты для подготовки к централизованному тестированию и экзамену / И.М. Морозова. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 96с.

76. Веременюк, В.В. Математика. Пособие для подготовки к централизованному тестированию и вступительному экзамену / Авт. – сост. В.В. Веременюк, В.В. Кожушко – ТетраСистемс, 2007.

77. .Булдык, Г.М. . Математика: полный курс подготовки к тестированию и экзамену / Г.М. Булдык. – Мн.: ТетраСистемс, 2007.

78. Балаян, Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности / Э.Н. Балаян. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2004.

79. Балаян, Э.Н. Математика. Серия «Единый госэкзамен» / Э.Н. Балаян. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2004.

80. Тиунчик, А.А. Математика: просто о сложном: задачи на проценты и смеси / А.А. Тиунчик. – Минск: Аверсэв, 2007. – 140с.

81. Ларченко, А.Н. Математика. Тестовый тренажер для подготовки к централизованному тестированию. / А.Н. Ларченко. – Минск: Аверсэв, 2007.

82. Азаров, А.И. Математика. Текстовые задачи. Школьный курс / А.И. Азаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко. – Минск: Аверсэв, 2007.

83. Пирютко О.Н. Графический метод решения текстовых задач: пособие для подготовки к централизованному тестированию / О.Н. Пирютко. – Минск: Новое знание, 2010. – 128с.

Учебное издание

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
для подготовки к вступительным испытаниям

Составители:
Морозова Инна Михайловна,
Тиунчик Александр Александрович,
Нипарко Надежда Сергеевна и др.

Ответственный за выпуск *А. А. Тиунчик*

Подписано в печать 27.07.2020. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 12,78. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 200 экз. Заказ 477.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99-2, 220023, Минск.