

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЕМКОСТНОГО ЭЛЕКТРОДНОГО НАГРЕВАТЕЛЯ-ДАТЧИКА ДЛЯ НАГРЕВА ТЕРМОЛАБИЛЬНЫХ СРЕД

М.А. ПРИЩЕПОВ, д.т.н., доцент; И.Г. РУТКОВСКИЙ, ассистент (УО БГАТУ)

Несмотря на высокую эффективность прямого электронагрева сопротивлением, его применение для нагрева термоллабильных сред (молока, обрат, маласса, соков и т.п.) требует строгого соблюдения допустимых значений плотности тока в межэлектродном пространстве, вследствие значительных отложений на электродах при невыполнении указанного ограничения [1]. Следовательно, задача моделирования электро-тепловых характеристик многофункциональных электродных электронагревателей-датчиков (ЭЭН-Д) при разработке электронагревательных установок (ЭНУ) на их базе является весьма актуальной.

ЭЭН-Д для нагрева токопроводящих термоллабильных сред в емкости изображен на рис. 1. Он содержит два основных токоподводящих электрода и шесть дополнительных электродов. Между токоподводящими и дополнительными электродами образуются шесть зон нагрева и пять дополнительных зон. Зоны нагрева и дополнительные зоны нагревателя чередуются, при этом зоны нагрева имеют номера 1,3,5,... 11, а дополнительные зоны нагревателя имеют номера 2, 4, 6,... 10. Поскольку ввод энергии в обрабатываемую среду проводится объемно, т.е. практически равномерно, то в основных зонах нагревателя температуру по секциям зон нагрева можно принять одинаковой (рис. 2). Некоторая неравномерность нагрева обрабатываемой среды имеет место в шестой зоне нагрева ввиду относительной близости основных

токоподводящих электродов при значительной разности потенциалов на них. Следовательно, для учета указанной неравномерности необходимо описывать двумерное распределение электрического поля на этой зоне.

Тогда нагрев обрабатываемой среды в межэлектродном пространстве ЭЭН-Д описывается следующим уравнением:

$$C_p \rho_c \cdot \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} + v_{sk} \cdot \frac{\partial \theta_c}{\partial x} \right) = q_k, \quad (1)$$

где

$C_p$  – удельная теплоемкость обрабатываемой среды, Дж/(кг · °С);

$\rho_c$  – плотность обрабатываемой среды, кг/м<sup>3</sup>;

$v_{sk}$  – среднеинтегральная скорость обрабатываемой среды на k-ой зоне нагрева, м/с;

$\theta_c$  – температура секции обрабатываемой среды, °С;

$\tau$  – время нагрева, с;

$x$  – текущая координата длины нагревателя, м;

$q_k$  – плотность тепловыделения в межэлектродном пространстве, k-й зоны, Вт/м<sup>3</sup>.

При этом плотность тепловыделения в зонах нагрева 1,3,5,...11 описывается уравнением:

$$q_k = \frac{U_k^2 \cdot \eta}{\rho_t(\theta_c) \cdot H_k^2}, \quad (2)$$

где

$U_k$  – напряжение на k-й зоне нагрева, В;

$h$  – КПД, о.е.;

$\rho_t(\theta_c)$  – удельное сопротивление секции обрабатываемой среды, Ом · м;

$H_k$  – межэлектродное расстояние k-й зоны нагрева, м.

Так как разность потенциалов между электродами 1,3,5 и 7,9,11 нагревателя незначительна, то нагревом в зонах 2, 4 и 8, 10 можно пренебречь, т.е.:

$$q_k = 0. \quad (3)$$

В шестой зоне нагревателя имеется значительная разность потенциалов между основными токоподводящими электродами, следовательно, плотность выделенного теплового потока:

$$q_6 = \frac{\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \cdot \eta}{\rho t(\theta)} = \frac{(\nabla \phi)^2 \cdot \eta}{\rho t(\theta)}, \quad (4)$$

где

$\phi$  – потенциал электрического поля обрабатываемой среды, В;

$\nabla$  – оператор Гамильтона;

$\rho_t(\theta)$  – удельное сопротивление обрабатываемой среды, Ом · м;

$\theta$  – температура обрабатываемой среды, °С;

$y$  – текущая координата ширины нагревателя, м.

Распределение потенциалов на шестой зоне нагрева опишется сле-

дующим уравнением:

$$\nabla \{ (\rho t(\theta))^{-1} \cdot \nabla \varphi \} = 0, \quad (5)$$

либо обозначив  $(\rho t(\theta))^{-1} = \gamma$  :

$$\nabla \{ \gamma \cdot \nabla \varphi \} = 0. \quad (6)$$

Тогда это же уравнение (6) для двухмерного пространства в координатах  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

Общее напряжение питания ЭЭН-Д равно сумме напряжений на зонах:

$$U = U_1 + U_{11} = U_3 + U_9 = U_5 + U_7, \quad (8)$$

где

$U_1, U_3, \dots, U_{11}$  – напряжение на 1, 3, ..., 11 зонах нагрева.

Мощность нагревателя является суммой мощности, выделяемой в зонах нагрева 1, 3, 5, 7, 9, 11, и мощности, выделяемой на 6-й зоне нагрева:

$$P = P_0 + P_6, \quad (9)$$

где

$P_0$  – мощность нагревателя, выделяемая в зонах нагрева 1, 3, 5, 7, 9, 11, Вт;

$P_6$  – мощность нагревателя, выделяемая в 6-й зоне нагрева, Вт.

Мощность на 6-й зоне нагревателя рассчитывается по формуле:

$$P_6 = h \cdot H_6 \cdot \Pi_6 \cdot \int_0^{L_6} \int_0^{H_6} \frac{(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 \cdot \eta}{\rho t(\theta)} dx dy, \quad (10)$$

где

$H_6$  – межэлектродное расстояние 6-й зоны нагрева, м;

$\Pi_6$  – ширина электродов на 6-й зоне нагрева, м;

$L_6$  – длина электродов на 6-й зоне нагрева, м;

$h$  – длина секции, м.

Мощность в зонах нагрева 1, 3 .. 11:

$$P_0 = U^2 / R, \quad (11)$$

где

$R$  – общее сопротивление ЭЭН-Д, Ом.

Общее сопротивление ЭЭН-Д, определяется соответственно по формуле:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_{11}} + \frac{1}{R_3 + R_9} + \frac{1}{R_5 + R_7}} \quad (12)$$

где

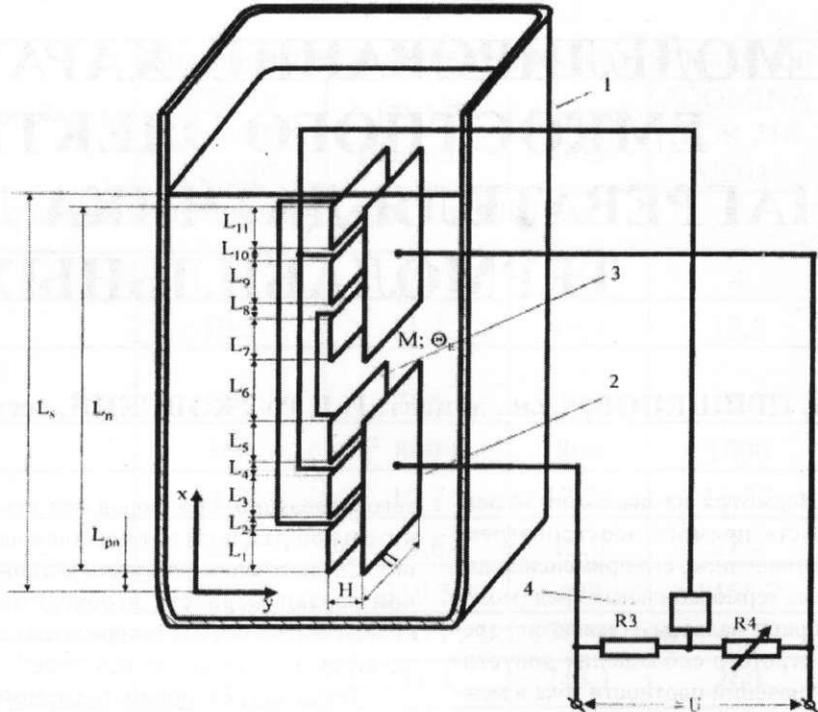


Рис.1. Электротепловая схема ЭЭН-Д с зонированной плоскопараллельной электродной системой: 1-емкость; 2- основные токоподводящие электроды; 3-дополнительные электроды; 4-управляющий орган САР; R3, R4 -термнезависимые сопротивления измерительного моста

$R_1, R_3, \dots, R_{11}$  – сопротивление зон нагревателя, Ом.

Для зон 1, 3, 5, 7, 9, 11 сопротивление зоны нагревателя  $R_k$  рассчитывается по формуле:

$$R_k = \frac{1}{\int_0^{L_k} \frac{\Pi_k \cdot h}{H_k \cdot \rho t(\theta_c)} dx}, \quad (13)$$

где

$\Pi_k$  – ширина электродов на к-й зоне нагрева, м;

$L_k$  – длина электродов на к-й зоне нагрева, м.

Скорость теплового движения обрабатываемой среды в межэлектродном пространстве зависит от ее вязкости, влияние которой учитывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial v_k}{\partial \tau} - \frac{\mu}{\rho_c} \cdot \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} = \beta \cdot g \cdot (\theta_{mn} - \theta_{si}), \quad (14)$$

где

$v_k$  – скорость слоя обрабатываемой среды на к-й зоне нагрева, м/с;

$\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Па · с ;

$\beta$  – коэффициент теплового расширения обрабатываемой среды, 1/°C;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$\theta_{mn}$  – температура среды над нагревателем, °C;

$\theta_{si}$  – среднеинтегральная температура среды в межэлектродном пространстве, °C.

Среднеинтегральная скорость обрабатываемой среды в межэлектродном пространстве на к-й зоне нагрева:

$$v_{Sk} = \frac{1}{J_s} \int_1^{J_s} v_k dy, \quad (15)$$

где

$J_s$  – количество слоев в секции.

Температура среды в емкости над нагревателем определяется по формуле:

$$\theta_{nn} = \theta_{cn} + \int_0^{\tau_p} \frac{\Phi \Delta \theta_v \cdot v_{SKz} \cdot \tau \cdot \Pi_{Kz} \cdot H_{Kz} \cdot \rho_c}{M_{nn}} dt, \quad (16)$$

где

$\tau_p$  – время нагрева, с;

$\Delta \theta_v$  – превышение температуры на выходе из ЭЭН-Д над температурой обрабатываемой среды в емкости над нагревателем, °С;

$\theta_{cn}$  – начальная температура обрабатываемой среды, °С;

$v_{SKz}$  – среднеинтегральная скорость обрабатываемой среды на выходе из ЭЭН-Д, м/с;

$\Pi_{Kz}$  – ширина электродов на выходе из ЭЭН-Д, м;

$H_{Kz}$  – межэлектродное расстояние на выходе из ЭЭН-Д, м;

$M_{nn}$  – масса обрабатываемой среды над нагревателем, кг.

Масса обрабатываемой среды над нагревателем для емкости с постоянным поперечным сечением:

$$M_{nn} = M \cdot \frac{L_s - L_n - L_{pn}}{L_s}, \quad (17)$$

где

$M$  – масса обрабатываемой среды, кг;

$L_n$  – длина нагревателя, м;

$L_{pn}$  – расстояние от ЭЭН-Д до дна емкости, м;

$L_s$  – высота уровня обрабатываемой среды в емкости, м.

Высота уровня обрабатываемой среды в емкости:

$$L_s = \frac{M}{\rho_c \cdot S_{emk}}, \quad (18)$$

где

$S_{emk}$  – площадь поперечного сечения емкости с обрабатываемой средой, м<sup>2</sup>.

$$L_n = \sum_{k=1}^{Kz} L_k, \quad (19)$$

где

$Kz$  – количество зон нагрева.

Среднеинтегральная температура в межэлектродном пространстве:

$$\theta_{si} = \frac{1}{L_n} \int_0^{L_n} \theta_w dx, \quad (20)$$

где

$\theta_w$  – температура секций ЭЭН-Д, превышающая  $\theta_{nn}$ .

Распределение температуры в емкости с обрабатываемой средой описывается уравнением:

$$\frac{\partial \theta_E}{\partial \tau} + v_E \cdot \frac{\partial \theta_E}{\partial x_E} + \alpha \frac{\partial^2 \theta_E}{\partial x_E^2} = 0, \quad (21)$$

где

$\theta_E$  – температура в емкости с обрабатываемой средой, °С;

$v_E$  – скорость обрабатываемой среды в емкости, м/с;

$x_E$  – текущая координата длины в емкости, м;

$\alpha$  – коэффициент диффузии, м<sup>2</sup>/с.

Соответственно, скорость обрабатываемой среды в емкости:

$$v_E = v_{S1} \cdot \frac{H_1 \cdot \Pi_1}{S_{emk}}, \quad (22)$$

где

$H_1$  – межэлектродное расстояние на 1-й зоне нагрева, м;

$\Pi_1$  – ширина электродов на 1-й зоне нагрева, м;

$v_{S1}$  – среднеинтегральная скорость обрабатываемой среды на первой зоне нагрева, м/с.

Температура среды в любой те-

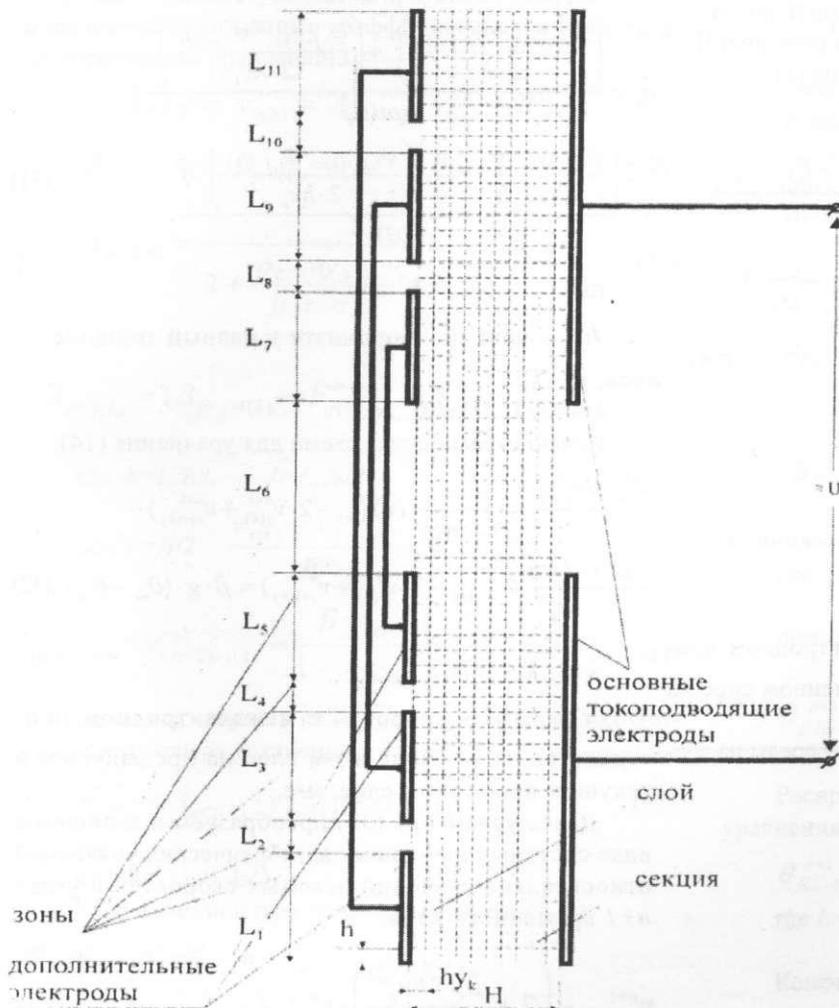


Рис.2. Расчетная электрическая схема ЭЭН-Д

кущий момент времени нагрева  $\tau_p$ :

$$\theta_S = \theta_{cn} + \int_0^{\tau_p} \frac{P \cdot \tau \cdot \eta}{C_p \cdot M} d\tau. \quad (23)$$

Напряжение разбаланса мостовой измерительной схемы определяется по формуле:

$$\Delta U = U \cdot R_{pr} \cdot \frac{R_3 \cdot Rm_2 - R_3 \cdot Rm_1}{(R_3 + R_3) \cdot (Rm_1 + Rm_2) \cdot R_{pr} + R_3 \cdot R_3 \cdot (Rm_1 + Rm_2) + Rm_1 \cdot Rm_2 \cdot (R_3 + R_3)} \quad (24)$$

где

$\Delta U$  – напряжение разбаланса моста, В;

$R_{pr}$  – сопротивление измерительного прибора, Ом;

$R_p, R_g$  – термозависимые сопротивления мостовой измерительной схемы, Ом;

$Rm_1, Rm_2$  – термнезависимые сопротивления мостовой измерительной схемы, Ом.

Для теоретического исследования приведенной математической модели, содержащей дифференциальные уравнения в частных производных, целесообразно использовать численные конечно-разностные методы решения [2]. Тогда конечно-разностная схема для уравнения (1):

$$\frac{\theta_{c_{i-1(k)}^{n+1}} - \theta_{c_{i-1(k)}^n} + \theta_{c_{i(k)}^{n+1}} - \theta_{c_{i(k)}^n} + v_{sk} \cdot \frac{\theta_{c_{i(k)}^n} - \theta_{c_{i-1(k)}^n}}{2 \cdot h}}{2 \cdot \tau} + v_{sk} \cdot \frac{\theta_{c_{i(k)}^{n+1}} - \theta_{c_{i-1(k)}^{n+1}}}{2 \cdot h} = \frac{U_k^2 \cdot \eta}{2 \cdot \rho \cdot t(\theta_{c_{i(k)}^n}) \cdot H_k^2 \cdot C_p \cdot \rho_c} + \frac{U_k^2 \cdot \eta}{2 \cdot \rho \cdot t(\theta_{c_{i-1(k)}^{n+1}}) \cdot H_k^2 \cdot C_p \cdot \rho_c}, \quad (25)$$

где

$k=1..Kz$ ;  $i=1..Is_k$ ;

$h$  – шаг по координате  $x$ , равный длине секции, м;

$\tau$  – шаг по времени нагрева, с;

$Is_k$  – число секций в зоне  $k$ ;

$\theta_{c_{i(k)}^n}, \theta_{c_{i(k)}^{n+1}}$  – температура в межэлектродном пространстве на предыдущем и текущем временном слое на  $k$ -й зоне,  $i$ -й секции, °С.

Из уравнения (25) выражаем температуру среды на временном слое  $n+1$ :

$$\theta_{c_{i(k)}^{n+1}} = \frac{2 \cdot \tau \cdot F_{i(k)}^n + \left(1 + \frac{v_{sk} \cdot \tau}{h}\right) \cdot \theta_{c_{i-1(k)}^n}}{1 + \frac{v_{sk} \cdot \tau}{h}} + \frac{\left(1 - \frac{v_{sk} \cdot \tau}{h}\right) \cdot (\theta_{c_{i(k)}^n} - \theta_{c_{i-1(k)}^{n+1}})}{1 + \frac{v_{sk} \cdot \tau}{h}}, \quad (26)$$

где

$$F_{i(k)}^n = \frac{U_k^2 \cdot \eta}{2 \cdot \rho \cdot t(\theta_{c_{i(k)}^n}) \cdot H_k^2 \cdot C_p \cdot \rho_c} + \frac{U_k^2 \cdot \eta}{2 \cdot \rho \cdot t(\theta_{c_{i-1(k)}^{n+1}}) \cdot H_k^2 \cdot C_p \cdot \rho_c}, \quad (27)$$

где  $k=1, \dots, Kz$ ;  $i=1, \dots, Is_k$ .

При этом начальные условия:

$$\text{при } \tau=0 \quad \theta_{c_{i(k)}^n} = \theta_{cn}, \quad (28)$$

где  $k=1, \dots, Kz$ ;  $i=1, \dots, Is_k$ .

$$\text{при } x=0 \quad \theta_c = \theta_{pn}; \quad (29)$$

$$\theta_{c_{0(1)}^{n+1}} = \theta_{EJL-1}^{n+1}, \quad (30)$$

где

$\theta_{pn}$  – температура обрабатываемой среды у дна емкости на входе в ЭЭН-Д, °С.

$$q_6 = \frac{\left(\frac{\varphi_{i+1,j(k)} - \varphi_{i-1,j(k)}}{2 \cdot h}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_{i,j+1(k)} - \varphi_{i,j-1(k)}}{2 \cdot hy_k}\right)^2}{\rho t(\theta)} + \frac{2 \left(\frac{\varphi_{i+1,j(k)} - \varphi_{i-1,j(k)}}{2 \cdot h}\right) \left(\frac{\varphi_{i,j+1(k)} - \varphi_{i,j-1(k)}}{2 \cdot hy_k}\right) \cdot \eta}{\rho t(\theta)}, \quad (31)$$

где

$hy_k$  – шаг по координате  $y$  равный толщине

слоя, м;

$k=6$ ;  $j=1..Js$ ;  $i=1..Is_g$ .

Конечно-разностная схема для уравнения (14):

$$\frac{v_{j(k)}^{n+1} - v_{j(k)}^n}{\tau} - \frac{\mu \cdot \sigma}{\rho_c \cdot hy_k^2} \cdot (v_{j-1(k)}^{n+1} - 2 \cdot v_{j(k)}^{n+1} + v_{j+1(k)}^{n+1}) - \frac{\mu \cdot (1 - \sigma)}{\rho_c \cdot hy_k^2} \cdot (v_{j-1(k)}^n - 2 \cdot v_{j(k)}^n + v_{j+1(k)}^n) = \beta \cdot g \cdot (\theta_{nn} - \theta_{si}), \quad (32)$$

где

$k=1..Kz$ ;  $j=1..Js/2$ ;

$v_{j(k)}^n, v_{j(k)}^{n+1}$  – скорость в межэлектродном пространстве на  $k$ -й зоне и  $j$ -м слое на предыдущем и текущем временном слое, м/с.

Далее уравнение (32) преобразуем и запишем в виде системы нелинейных алгебраических уравнений относительно значений искомых скоростей в узлах  $n+1$  временного слоя:

$$v_{j-1(k)}^{n+1} - \left(2 + \frac{\rho_c \cdot hy_k^2}{\mu \cdot \tau \cdot \sigma}\right) \cdot v_{j(k)}^{n+1} + v_{j+1(k)}^{n+1} = F_{j(k)}^n; \quad (33)$$

$$F_{j(k)}^n = \left( \frac{2 \cdot (1 - \sigma)}{\sigma} - \frac{\rho_c \cdot h y_k^2}{\mu \cdot \tau \cdot \sigma} \right) \cdot v_{j(k)}^n - \frac{1 - \sigma}{\sigma} \cdot (v_{j-1(k)}^n + v_{j+1(k)}^n) - \frac{\rho_c \cdot h y_k^2 \cdot \beta \cdot g}{\mu \cdot \sigma} (\theta_{nn} - \theta_{si}), \quad (34)$$

где  $\sigma$  – произвольный вещественный параметр.

При этом начальные условия при  $\tau=0$   $v_{j(k)}^n = 0$ ,  
где  $k=1..Kz$ ,  $j=0..(Js/2)+1$ . (35)

Граничные условия при  $y=0$   $v_{y=0} = 0$  (36)

при  $y=H/2$   $\left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=H/2} = 0$ . (37)

Так как полученные аппроксимирующие системы нелинейных уравнений являются трехдиагональными, то для их решения используем метод прогонки. Следовательно, определяем прогоночные коэффициенты для каждого из алгебраических уравнений[3]:

при  $y=0$   $v_{0(k)} = A_{pr0(k)} \cdot v_{1(k)} + B_{pr0(k)}$ ;

$A_{pr0(k)} = 0; B_{pr0(k)} = 0;$  (38)

$A_{prj(k)} = \frac{1}{2 + \frac{\rho_c \cdot h y_k^2}{\mu \cdot \tau \cdot \sigma} - A_{prj-1(k)}};$  (39)

$B_{prj(k)} = (B_{prj-1(k)} - F_{j(k)}^n) \cdot A_{prj(k)}$ , (40)

где  $k=1..Kz$ ;  $J=1..Js/2$ .

при  $y=H/2$   $\frac{v_{j(k)}^{n+1} - v_{j-1(k)}^{n+1}}{h} = 0;$

находим  $v_{(Js/2)+1(k)}^{n+1} = \frac{B_{prJs/2(k)}}{1 - A_{prJs/2(k)}}$ . (41)

Величина скорости на каждом слое  $j$ -й зоны находится из следующего уравнения:

$v_{j(k)}^{n+1} = A_{prj(k)} \cdot v_{j+1(k)}^{n+1} + B_{prj(k)}$ , (42)

где  $k=1..Kz$ ;  $j=0..Js/2$ .

Конечно-разностная схема для уравнения (21):

$$\frac{\theta_{EL}^{n+1} - \theta_{EL}^n}{\tau} + v_E \frac{\theta_{EL}^n - \theta_{EL-1}^n}{h_E} + \frac{\alpha \cdot \sigma}{h_E^2} \cdot (\theta_{EL-1}^{n+1} - 2 \cdot \theta_{EL}^{n+1} + \theta_{EL+1}^{n+1}) + \frac{\alpha(1-\sigma)}{h_E^2} \cdot (\theta_{EL-1}^n - 2 \cdot \theta_{EL}^n + \theta_{EL+1}^n) = 0, \quad (43)$$

где  $h_E$  – шаг по координате  $X$  в емкости, м.

Для определения  $\theta_{EL}^{n+1}$  требуется решение системы алгебраических уравнений:

$\theta_{EL-1}^{n+1} + \left( \frac{h_E^2}{\alpha \cdot \sigma \cdot \tau} - 2 \right) \cdot \theta_{EL}^{n+1} + \theta_{EL+1}^{n+1} = F_L^n;$  (44)

$F_L^n = \frac{h_E^2 \cdot \theta_{EL}^n}{\alpha \cdot \sigma \cdot \tau} - \frac{h_E \cdot v_E}{\alpha \cdot \sigma} \cdot (\theta_{EL}^n - \theta_{EL-1}^n) - \frac{1-\sigma}{\sigma} (\theta_{EL-1}^n - 2 \cdot \theta_{EL}^n + \theta_{EL+1}^n),$  (45)

где  $L=1..JL-1$ .

При этом, начальные условия при  $\tau=0$

$\theta_{EL}^n = \theta_{cn}$ , (46)

где  $L=0..JL$ .

Граничные условия при  $x_L=0$

$\theta_{EL=0} = \theta_{nn}$ ; (47)

при  $x_L=L_n$

$\theta_{EJL} = \theta_{1,1}$ . (48)

Тогда аналогично для решения системы алгебраических уравнений находим прогоночные коэффициенты:

при  $x_L=0$

$\theta_{E0} = A_{PE0} \cdot \theta_{E1} + B_{PE0}$ ;

$A_{PE0} = 0; B_{PE0} = \theta_{nn}$ ; (49)

$A_{PEL} = \frac{1}{2 - \frac{h_E^2}{\alpha \cdot \sigma \cdot \tau} - A_{PEL-1}}$ ; (50)

$B_{PEL} = (B_{PEL-1} - F_L^n) \cdot A_{PEL}$ ; (51)

где  $L=1..JL-1$ .

при  $x_L=L_n$  находим

$\theta_{EJL}^{n+1} = \theta_{1,1}^{n+1}$ . (52)

Распределение температуры в емкости находим из уравнения:

$\theta_{EL-1}^{n+1} = A_{PEL-1} \cdot \theta_{EL}^{n+1} + B_{PEL-1}$ , (53)

где  $L=1..JL-1$ .

Конечно-разностная схема для уравнения (7):

$$\left( \frac{\gamma_{i+1,j(k)} - \gamma_{i-1,j(k)}}{2 \cdot h} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j(k)} - \varphi_{i-1,j(k)}}{2 \cdot h} \right) + \gamma_{i,j(k)} \cdot \frac{\varphi_{i+1,j(k)} - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)} + \varphi_{i-1,j(k)}}{h^2} \quad (54)$$

$$\left( \frac{\gamma_{i,j+1(k)} - \gamma_{i,j-1(k)}}{2 \cdot h y_k} \cdot \frac{\varphi_{i,j+1(k)} - \varphi_{i,j-1(k)}}{2 \cdot h y_k} \right) + \gamma_{i,j(k)} \cdot \frac{\varphi_{i,j+1(k)} - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)} + \varphi_{i,j-1(k)}}{h y_k^2} = 0,$$

где  $k=5..7; i=1..I_s; j=1..J_s$ .

Для вычисления потенциалов применяем итерационный процесс, использующий дробный шаг. Тогда алгоритм численного решения разбивается на два этапа:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{i,j(k)} = & \varphi_{i,j(k)}^S + \frac{\tau'}{2} \cdot \left( \sigma \cdot \left( \begin{aligned} & Fal1_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) + \\ & Fal2_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - 2 \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) \end{aligned} \right) + \right. \\ & \left. + (1-\sigma) \cdot \left( \begin{aligned} & Fal1_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i+1,j(k)}^S - \varphi_{i-1,j(k)}^S) + \\ & Fal2_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i+1,j(k)}^S - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)}^S + \varphi_{i-1,j(k)}^S) \end{aligned} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \begin{aligned} & Fal3_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^S - \varphi_{i,j-1(k)}^S) + \\ & Fal4_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^S - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)}^S + \varphi_{i,j-1(k)}^S) \end{aligned} \right) \right); \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j(k)}^{S+1} = & \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \frac{\tau'}{2} \cdot \left( \begin{aligned} & Fal1_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) + \\ & + Fal2_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - 2 \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) \end{aligned} \right) + \\ & + \sigma \cdot \left( \begin{aligned} & Fal3_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^{S+1} - \varphi_{i,j-1(k)}^{S+1}) + \\ & + Fal4_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^{S+1} - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)}^{S+1} + \varphi_{i,j-1(k)}^{S+1}) \end{aligned} \right) + \\ & + (1-\sigma) \cdot \left( \begin{aligned} & Fal3_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i,j+1(k)} - \bar{\varphi}_{i,j-1(k)}) + \\ & + Fal4_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i,j+1(k)} - 2 \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{\varphi}_{i,j-1(k)}) \end{aligned} \right); \quad (56) \end{aligned}$$

где

$$Fal1_{i,j(k)} = \frac{\gamma_{i+1,j(k)} - \gamma_{i-1,j(k)}}{4 \cdot h^2};$$

$$Fal2_{i,j(k)} = \frac{\gamma}{h^2};$$

$$Fal3_{i,j(k)} = \frac{\gamma_{i,j+1(k)} - \gamma_{i,j-1(k)}}{4 \cdot h y_k^2};$$

$$Fal4_{i,j(k)} = \frac{\gamma}{h y_k^2};$$

$\varphi_{i,j(k)}^S$  – потенциал на предыдущем расчетном слое;

$\bar{\varphi}_{i,j(k)}$  – потенциал на промежуточном расчетном

слое;

$\varphi_{i,j(k)}^{S+1}$  – потенциал на текущем расчетном слое;

$\tau'$  – итерационный параметр;

$k=5..7; i=1..I_s; j=1..J_s$ .

Начальные условия по  $\gamma$  при  $\tau=0$ :

$$\gamma_{i,j(k)} = \frac{1}{\rho t(\theta_{cn})}, \quad (57)$$

где  $k=5..7; i=1..I_s; j=1..J_s$ .

При  $k=5; i=1$ :

$$\gamma_{1,j(5)} = \frac{1}{\rho t(\theta_{1,j(5)})}, \quad (58)$$

где  $\theta_{1,j(5)} = \theta_{c_{1,(5)}}$ ;

$j=1..J_s$ ;

Начальные условия по  $\varphi$  при  $\tau=0$ :

при  $k=5$

$$\varphi_{i,j(5)} = \frac{U - \left( U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{i,j(5)}^n) dy \right)}{\int_0^{J_s} \rho t(\theta_{i,j(5)}^n) dy}, \quad (59)$$

где  $i=1..I_s; j=1..J_s$ .

при  $k=6$

$$\varphi_{i,j(6)} = \frac{(\varphi_{0,j(6)} - \varphi_{I_s6,j(6)}) \cdot \int_0^x \rho t(\theta_{i,j(6)}^n) dx}{\int_0^{I_s6} \rho t(\theta_{i,j(6)}^n) dx}, \quad (60)$$

где  $\varphi_{0,j(6)}$  – потенциал на границе 5-й и 6-й зоны нагрева на  $j$ -слое;

$\varphi_{I_s6,j(6)}$  – потенциал на границе 6-й и 7-й зоны нагрева на  $j$ -слое.

$i=1..I_s; j=1..J_s$ .

при  $k=7$

$$\varphi_{i,j(7)} = \frac{U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{i,j(7)}^n) dy}{\int_0^{J_s} \rho t(\theta_{i,j(7)}^n) dy}, \quad (61)$$

где  $i=1..I_s; j=1..J_s$ .

Граничные условия:

при  $x=0$

$$\varphi_{0,j(5)} = \frac{U - \left( U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{1,j(5)}^n) dy \right)}{\int_0^{J_s} \rho t(\theta_{1,j(5)}^n) dy}; \quad (62)$$

при  $x=I_s; j=1$

$$\varphi_{Is7+1,j(7)} = \frac{U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{Is7,j(7)}^n) dy}{\int_0^{Js} \rho t(\theta_{Is7,j(7)}^n) dy}; \quad (63)$$

при  $k=5, y=0$   $\varphi_{i,0(5)} = 0$ ; (64)  
при  $k=6, y=0$

$$\varphi_{i,0(k)} = \frac{(\varphi_{0,0(6)} - \varphi_{Is6,0(6)}) \cdot \int_0^x \rho t(\theta_{i,1(6)}^n) dx}{\int_0^{Is6} \rho t(\theta_{i,1(6)}^n) dx}; \quad (65)$$

при  $k=7, y=0$   $\varphi_{i,0(7)} = U$ ; (66)  
при  $k=5,6,7, y=Js+1$

$$\varphi_{i,Js+1(k)} = U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \quad (67)$$

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений (55) и (56) методом прогонки преобразуем их к виду:

$$\bar{a} \cdot \bar{\varphi}_{i-1,j(k)} + \bar{b} \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{c} \cdot \bar{\varphi}_{i+1,j(k)} = \bar{d}; \quad (68)$$

$$a^{S+1} \cdot \varphi_{i,j-1(k)}^{S+1} + b^{S+1} \cdot \varphi_{i,j(k)}^{S+1} + c^{S+1} \cdot \varphi_{i,j+1(k)}^{S+1} = d^{S+1}. \quad (69)$$

Тогда рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов системы уравнений (68) имеют вид:

$$A(\varphi^S)_{0,j(k)} = 0; \quad (70)$$

$$B(\varphi^S)_{0,j(s)} = \frac{U - \left( U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{1,j(s)}^n) dy \right)}{\int_0^{Js} \rho t(\theta_{1,j(s)}^n) dy}; \quad (71)$$

$$A(\varphi^S)_{i,j(k)} = -\frac{\bar{c}}{\bar{a} \cdot A(\varphi^S)_{i-1,j(k)} + \bar{b}}; \quad (72)$$

$$B(\varphi^S)_{i,j(k)} = \frac{\bar{d} - \bar{a} \cdot B(\varphi^S)_{i-1,j(k)}}{\bar{a} \cdot A(\varphi^S)_{i-1,j(k)} + \bar{b}}, \quad (73)$$

где

$$\bar{a} = \frac{\tau'}{2} \cdot \sigma \cdot (Fal1_{i,j(k)} - Fal2_{i,j(k)}); \quad (74)$$

$$\bar{b} = 1 + \tau' \cdot \sigma \cdot Fal2_{i,j(k)}; \quad (75)$$

$$\bar{c} = \frac{\tau'}{2} \cdot \sigma \cdot (-Fal1_{i,j(k)} - Fal2_{i,j(k)}); \quad (76)$$

$$\bar{d} = \varphi_{i,j(k)}^S + \frac{\tau'}{2}.$$

$$\left( (1-\sigma) \cdot \left( Fal1_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i+1,j(k)}^S - \varphi_{i-1,j(k)}^S) + Fal2_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i+1,j(k)}^S - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)}^S + \varphi_{i-1,j(k)}^S) \right) + Fal3_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^S - \varphi_{i,j-1(k)}^S) + Fal4_{i,j(k)} \cdot (\varphi_{i,j+1(k)}^S - 2 \cdot \varphi_{i,j(k)}^S + \varphi_{i,j-1(k)}^S) \right); \quad (77)$$

Решение  $\bar{\varphi}_{i,j(k)}$  определяется по формуле:

$$\bar{\varphi}_{Is7+1,j(7)} = \frac{U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} \cdot \int_0^y \rho t(\theta_{Is7,j(7)}^n) dy}{\int_0^{Js} \rho t(\theta_{Is7,j(7)}^n) dy}; \quad (78)$$

Рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов системы уравнений (69) имеют вид:

$$\bar{\varphi}_{i,j(k)} = A(\varphi^S)_{i,j(k)} \cdot \bar{\varphi}_{i+1,j(k)} + B(\varphi^S)_{i,j(k)}. \quad (79)$$

При  $k=5$   $A(\bar{\varphi})_{i,0(5)} = 0$ ; (80)

$$B(\bar{\varphi})_{i,0(5)} = 0; \quad (81)$$

При  $k=6$   $A(\bar{\varphi})_{i,0(6)} = 0$ ; (82)

$$B(\bar{\varphi})_{i,0(6)} = \frac{(\varphi_{0,0j(6)} - \varphi_{Is6,0(6)}) \cdot \int_0^x \rho t(\theta_{i,1(6)}^n) dx}{\int_0^{Is6} \rho t(\theta_{i,1(6)}^n) dx}; \quad (83)$$

При  $k=7$   $A(\bar{\varphi})_{i,0(7)} = 0$ ; (84)

$$B(\bar{\varphi})_{i,0(7)} = U; \quad (85)$$

$$A(\bar{\varphi})_{i,j(k)} = -\frac{c^{S+1}}{a^{S+1} \cdot A(\bar{\varphi})_{i,j-1(k)} + b^{S+1}}; \quad (86)$$

$$B(\bar{\varphi})_{i,j(k)} = \frac{\bar{d}^{S+1} - a^{S+1} \cdot B(\bar{\varphi})_{i,j-1(k)}}{a^{S+1} \cdot A(\bar{\varphi})_{i,j-1(k)} + b^{S+1}}, \quad (87)$$

где:

$$a^{S+1} = \frac{\tau'}{2} \cdot \sigma \cdot (Fal3_{i,j(k)} - Fal4_{i,j(k)}); \quad (88)$$

$$b^{S+1} = 1 + \tau' \cdot \sigma \cdot Fal4_{i,j(k)}; \quad (89)$$

$$c^{S+1} = \frac{\tau'}{2} \cdot \sigma \cdot (-Fal3_{i,j(k)} - Fal4_{i,j(k)}); \quad (90)$$

где  $k=5..7; i=1..Is_k; j=1..Js$ .

$$d^{S+1} = \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \frac{\tau'}{2} \cdot \left( Fal1_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) + \right. \\ \left. + Fal2_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i+1,j(k)} - 2 \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{\varphi}_{i-1,j(k)}) + \right. \\ \left. + (1-\sigma) \cdot \left( Fal3_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i,j+1(k)} - \bar{\varphi}_{i,j-1(k)}) + \right. \right. \\ \left. \left. + Fal4_{i,j(k)} \cdot (\bar{\varphi}_{i,j+1(k)} - 2 \cdot \bar{\varphi}_{i,j(k)} + \bar{\varphi}_{i,j-1(k)}) \right) \right), \quad (91)$$

Решение  $\varphi_{i,j(k)}^{S+1}$  определяется по формуле:

$$\varphi_{i,j(k)}^{S+1} = U \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7}; \quad (92)$$

$$\varphi_{i,j(k)}^{S+1} = A(\bar{\varphi})_{i,j(k)} \cdot \varphi_{i,j+1(k)}^{S+1} + B(\bar{\varphi})_{i,j(k)}. \quad (93)$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении условия:

$$\frac{\max_{i,j(k)} |\varphi_{i,j(k)}^{S+1} - \varphi_{i,j(k)}^S|}{\max_{i,j(k)} |\varphi_{i,j(k)}^{S+1}|} \leq \varepsilon, \quad (94)$$

где  $\varepsilon$  – погрешность вычислений.

Рассчитанные значения потенциалов используются для определения плотности тепловыделений и мощности 6-й зоны нагрева на  $n+1$  временном слое.

Экспериментальная проверка разработанной математической модели показала, что отклонение результатов расчета от экспериментальных данных по напряжению разбаланса мостовой измерительной схемы  $\Delta U$  не превышает 10..12%.

Приведенная математическая модель позволяет проводить моделирование характеристик электродных электронагревателей для нагрева различных термолabileльных сред при разработке конструкции ЭНУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прищепов М.А., Рутковский И.Г. Математическое моделирование электротепловых характеристик емкостных электродных электронагревателей-датчиков: /Моделирование и прогнозирование аграрных энергосберегающих процессов и технологий//Материалы международной научно-технической конференции (Минск, 22-24 апр. 1998).— Мн.:БАТУ,1998.— С.116-117.
2. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. —Минск: Наука і тэхніка, 1976.—144 с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов.— М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1987.—320 с.

УДК 631.363.7

## МОБИЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ РАЗДАЧИ КОРМОВ КРУПНОМУ РОГАТОМУ СКОТУ

**А.В. КИТУН, к.т.н. (УО БГАТУ), В.И. ПЕРЕДНЯ, д.т.н., профессор (РУНИП «ИМСХ НАН Беларуси»)**

Организация процесса раздачи кормов является одним из источников снижения себестоимости животноводческой продукции [1]. По данным исследования [2] на эту операцию расходуется горюче – смазочных материалов 2,5...2,8 ГДж на голову в год. Поиск путей снижения энергоемкости данного процесса неразрывно связан с технологией подготовки кормов к скармливанию, размером животноводческой фермы, выбором технологических средств для раздачи.

Возможны три варианта раздачи кормов: стационарный, мобильный и комбинированный (мобильный + стационарный). Для реализации этих вариантов используются стационарные и мобильные кормораздатчики.

Раздачу кормов с использованием стационарных кормораздатчиков можно организовать, заблокировав их с выгрузными транспортерами измельчителя – смесителя и питателя силоса (сенажа). Преимуществом данного варианта приготовления и раздачи кормов является сокращение

числа и номенклатуры транспортных средств.

Однако заблокировав кормоприготовительное оборудование со стационарным кормораздатчиком, до минимума уменьшается коэффициент использования машин. Данная схема, ввиду низкой эффективности, практического применения не нашла.

Транспортирование и раздача кормосмесей могут выполняться мобильными кормораздатчиками. Преимуществом данной схемы является более низкая удельная стоимость этих машин по сравнению со стационарными [3]. В течение рабочего времени мобильные кормораздатчики, как правило, работают более продолжительное время и могут раздавать корма в нескольких помещениях.

К недостаткам организации процесса раздачи кормов данными машинами относят необходимость наличия кормовых проездов внутри зданий. Ширина их должна быть от 1,4 до 2,2 м. Кроме того, мобильные кормораздатчики создают шум и загрязняют воздух выхлопными газами.