МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методический комплекс
для студентов заочной формы обучения
экономических специальностей БГАТУ

Минск 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие является учебно-методическим комплексом (УМК) дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов экономических специальностей БГАТУ (объем учебных часов: 51 час). Данный УМК составлен на основе блочно-модульной технологии обучения. Его составными частями являются: рабочая программа дисциплины с указанием литературы, в которой студент может найти ответы на теоретические вопросы программы; список основной и дополнительной литературы; конспект лекций по вопросам рабочей программы. В конце каждого модуля сформулированы понятия, которые студент должен знать после его изучения, предложены задачи как для самостоятельного изучения, так и для решения во время аудиторных занятий.

Для студентов-заочников БГАТУ в конце УМК предлагается контрольная работа с решенным типовым вариантом, который поможет при выполнении заданий. Завершает УМК краткий справочник по основным вопросам дисциплины.

Целью созданного УМК является оказание студентам всех форм обучения, а особенно заочной, помощи в изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» и подготовке к зачетам и экзаменам. Большое количество решенных примеров как в конспекте лекции, так и в типовом варианте контрольной работы будут способствовать самостоятельной работе и изучению предмета.

Символом «*» в рабочей программе отмечены вопросы, которые не будут рассматриваться на лекционных и практических занятиях, но должны быть самостоятельно изучены студентами.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

МОДУЛЬ 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

1. Некоторые задачи комбинаторики: размещения, перестановки, сочетания, их свойства и вычисление. [7], §1.4.
2. Основные понятия теории вероятностей: события, классификация событий. [1], §1.1, 1.2.
3.* Частота событий, ее основные свойства. [1], §1.3.
4. Вероятность события: статистическое, классическое и геометрическое определения вероятностей событий. [1], §1.4, 1.5.
5. Основные аксиомы теории вероятностей. Непосредственное вычисление вероятностей событий. [1], §1.6.

МОДУЛЬ 2
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Операции сложения и умножения событий. [1], §1.1, 1.2.
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. [1], §1.7, 1.8, 1.9.
3. Формула полной вероятности. [1], §1.10.
4. Формула гипотез (Байеса). [1], §1.11.

МОДУЛЬ 3
СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

1. Повторение испытания. Формула Бернулли. [7], §1.10.
2. Формула Пуассона. [7], §1.12.
3. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. [1], §1.12, 1.13.
4. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний. [7], §1.11.

МОДУЛЬ 4
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Случайная величина. Виды случайных величин. Закон распределения дискретной случайной величины. [1], §2.1, 2.2.
2. Интегральный закон (функция распределения) распределения случайной величины, его свойства. [1], §2.1, 2.2.
3. Дифференциальная функция (плотность) распределения и ее свойства. [7], §2.6.
4. Числовые характеристики распределения случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, их свойства. Среднее квадратическое отклонение. [1], §2.5, 2.6.

МОДУЛЬ 5
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Законы распределения случайных величин: биномиальный, Пуассона, равномерный и показательный. Их числовые характеристики. [1], §2.7, 2.8, 2.9, 2.10.
2. Нормальный закон распределения и его приложения. Правило трех сигм. [1], §2.11, 2.12.

МОДУЛЬ 6
МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Системы случайных величин. Законы распределения систем. Понятие условного закона распределения. [1], §3.1, 3.2, 3.3.
2.Числовые характеристики распределения двумерной случайной величины, корреляционные момент, его свойства. [1], §3.7, [2] гл.4, §17, 18.

МОДУЛЬ 7
ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

1.* Закон больших чисел: неравенство Чебышева, теорема Чебышева. Теорема Бернулли. [2], гл. 9, §1–6.
2.* Центральная предельная теорема. [7], §2.15.

МОДУЛЬ 8
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Математическая статистика, ее основные понятия и задачи. [2], гл. 15, §1–3.
2. Выборка и генеральная совокупность. Эмпирические законы распределения. Полигон, гистограмма. [2], гл. 15, §4-8.
3. Числовые характеристики статистического распределения: среднее, дисперсия, корреляционный момент. [2], гл. 16, §1–4, 9, 10, гл. 17.

МОДУЛЬ 9
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик: математического ожидания и дисперсии. [2], гл. 16, §14-19.
2.* Построение нормальной кривой по опытным данным. Асимметрия и эксцесс. [2], гл. 17, §7, 8.
3.* Метод наименьших квадратов. [1], §7.14.
4. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой регрессии. Свойства выборочного коэффициента корреляции. [2], гл. 18, §4–7, 9.

5.* Статистическая проверка гипотез: нулевая и конкурирующая гипотезы. Ошибки первого и второго рода. [2], гл. 19, §1,2.
6.* Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия. Критические точки. [2], гл. 19, §3–5.
7.* Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. [2], гл. 19, §21.
8.* Проверка гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона. [2], гл. 19, §22.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Гурский, Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е.И. Гурский. – Мн.: Высш. шк., 1971.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – Мн.: Высш. шк., 1977.
3. Белько, И.В.Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И.В.Белько, Г.П. Свирид. — Мн.: ООО «Новое знание», 2004.
4. Калинина, В.М. Математическая статистика / В.М. Калинина, В.Ф. Панкин. – Мн.: Высш. шк., 2001.
5. Рябушко, А.П. Индивидуальные домашние задания по высшей математике / А.П. Рябушко. – Мн.: Высш. шк., 2006. — Ч. 4.
6. Фигурин, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А. Фигурин, В.В. Оболонкин. — М.: ООО «Новое знание», 2000.

Дополнительная литература

7. Горелова, Г.В. Теория вероятностей и математическая статистика / Г.В. Горелова, И.А. Кацко. — Феникс, Ростов-на-Дону, 2002.
8. Унсович, А.Н. Краткий курс высшей математики для экономистов / А.Н. Унсович. — Барановичская укрупненная типография, 2000.
9. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов, III семестр / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. - М.: ООО «Новое знание», 2002.

МОДУЛЬ 0
ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития общества резко повысилась роль руководителя. Одним из важных моментов в деятельности руководителя, менеджера, экономиста является принятие решений в условиях неопределенности. При этом наиболее разработанным инструментом является теория вероятностей и математическая статистика.

Теория вероятностей изучает вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий.

Математическая статистика — раздел математики, где изучаются математические методы планирования экспериментов, систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. Математическая статистика использует математический аппарат и теорию вероятностей.

МОДУЛЬ 1
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

§ 1 Случайные события

Событием в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате какого-то опыта (испытания). Например, трактор проработал без капитального ремонта 7000 часов — это событие.

В теории вероятностей события обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д. или одной буквой, снабженной индексами: A_1, A_2, A_3 и т.д.

По возможности появления события делятся на достоверные, невозможные, случайные.

Достоверное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания обязательно наступит. Примером достоверного события может быть удлинение железного стержня при нагревании.

Невозможное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания не может произойти. Извлечение из массы непротравленного зерна протравленного зерна — событие невозможное.

Случайное событие — это такое событие, которое в результате данного испытания может произойти, но может и не произойти. Например, на колхозном поле работают 3 комбайна. Событие состоящее в том, что в данный момент неисправными окажутся все комбайны — случайное.

§ 2 Виды случайных событий

а) *Несовместные события.*

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Например, Механизатор может работать на тракторе и на комбайне. Пусть событие A — механизатор в данный момент работает на тракторе, событие B — на комбайне. События A и B — несовместные.

б) *Равновозможные события.*

События A_1, A_2, … A_n называются равновозможными, если условия их появления одинаковы.

в) *Полная группа событий.*

Несколько событий образуют полную группу, если в результате испытания обязательно наступит хотя бы одно из них. На практике широкое применение находит полная группа несовместных событий. Например, по цели производится три выстрела. Исходом испытания может быть одно из событий: A — промах, B — одно попадание, C — два попадания, D — три попадания. События A, B, C, D образуют полную группу несовместных событий.

г) *Противоположные события.*

Два несовместных события, образующих полную группу, называются противоположными. Событие, противоположное событию A, принято обозначать $\overline{A}$.

Например, событие A — деталь годная, событие $\overline{A}$ — деталь бракованная.

§ 3 Вероятность события

а) *Классическая вероятность*

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

б) *Геометрическая вероятность*

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры (длина, площадь, объем) области, благоприятствующей появлению события A, к мере всей области.

в) *Свойства вероятности*

1. Если A — достоверное событие, то $P(A)=1$.

2. Если A — невозможное событие, то $P(A)=0$.

3. Если A — случайное событие, то $0<P(A)<1$.

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0\le P(A)\le 1$.

§ 4 Элементы комбинаторики

При решении вероятностных задач используется раздел элементарной математики — комбинаторика. Приведем краткие сведения этой теории.

Соединениями называют различные группы, составленные из каких-либо объектов.

Элементами называются объекты, из которых составлены соединения.

Различают следующие три вида соединений: *перестановки, размещения и сочетания.*

Перестановками из n элементов называют соединения, содержащие все n элементов и отличающиеся между собой лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов находится по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n!$ (читается "эн-факториал") — произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е.

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Пример 1.1.

Сколькими способами можно разложить на 6 полок 6 различных деталей, так чтобы на каждой полке их было по одной.

Решение.

Количество таких способов вычисляется по формуле:

$P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

При этом полагают, $0!=1$.

Размещениями из n элементов по k в каждом $(n\ge k)$ называют такие соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по k находят по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

или, пользуясь факториалами,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot$$

Пример 1.2.

На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда ?

Решение.

Число способов вычисляется по формуле:

$$A_6^4 = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360 \text{ или } A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2} = 360\cdot$$

Сочетаниями из n элементов по k $(n \geq k)$ называют соединения, в каждое из которых входит k элементов, взятых из данных n элементов и, которые отличаются друг от друга, по крайней мере, одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по k находят по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

или, пользуясь факториалами,

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot$$

Для упрощения вычислений при $k > \frac{n}{2}$ полезно использовать следующее свойство сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Пример 1.3.

Бригадир должен отправить на работу звено из 18 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 20 человек бригады ?

Решение.

Число звеньев определяется по формуле:

$$C_{20}^{18} = C_{20}^{2} = \frac{A_{20}^2}{P_2} = \frac{20\cdot19}{1\cdot2} = 190\cdot$$

Пример 1.4.

В ящике находится 10 шестерен, из них 3 нестандартных. Определить вероятность того, что среди взятых наугад 4 шестерен 2 окажутся нестандартными.

Решение.

Основное событие A — из 4 взятых шестерен две оказались нестандартными. По классическому определению вероятности события $P(A)=\frac{m}{n}$. Число возможных способов взять 4 шестерни из десяти равно C_{10}^4. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа 3 нестандартных шестерен взято 2 (это можно сделать C_3^2 способами), а остальные 2 шестерни стандартные будут взяты из 7 стандартных шестерен (количество способов C_7^2).

Поэтому $n=C_{10}^4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=210$, $m=C_3^2\cdot C_7^2=63$,

$$P(A)=\frac{63}{210}\approx 0{,}3.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие события. Пространство элементарных событий.
2. Достоверное и невозможное событие.
3. Совместные и несовместные события.
4. Классическое определение вероятности события.
5. Геометрическое определение вероятности события.
6. Сочетания.
7. Размещения.
8. Перестановки.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В магазине имеется 10 видов тортов. Очередной покупатель выбил чек на три торта. Считая, что любой набор товаров равновозможен, определить число возможных заказов.

2. Девять человек размещается в четырехместный, трехместный и двухместный номера. Сколько существует способов их размещения?

3. Набирая номер телефона, абонент забыл две цифры и, помня лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на обеих костях появится одинаковое число очков;

б) хотя бы на одной кости появится два очка;

в) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение шести;

г) сумма очков не превосходит 6;

д) произведение числа очков не превосходит 6;

е) произведение очков делится на 6.

5. В коробке 5 красных, 3 зеленых, 2 синих карандаша. Наугад без возвращения извлекают 3 карандаша. Найти вероятность следующих событий:

A — все извлеченные карандаши разного цвета,

B — все извлеченные карандаши одного цвета,

C — среди извлеченных карандашей 1 зеленый,

D — среди извлеченных карандашей в точности 2 одного цвета.

6. Лифт начинает движение с четырьмя пассажирами и останавливается на 10 этажах. Какова вероятность, что никакие два пассажира не выйдут на одном этаже?

7. В круг радиуса 5 вписан равносторонний треугольник. Определить вероятность попадания в треугольник точки, случайно брошенной в круг.

8. На станцию прибыли 10 вагонов разной продукции. Вагоны помечены номерами от одного до десяти. Найти вероятность того, что среди пяти выбранных для контрольного вскрытия вагонов окажутся вагоны с номерами 2 и 5?

9. В партии из 15 однотипных стиральных машин пять машин изготовлены на заводе *A*, а 10 — на заводе *B*. Случайным образом отобрано 5 машин. Найти вероятность того, что две из них изготовлены на заводе *A*.

МОДУЛЬ 2
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1 Действия над событиями

а) *Сумма и произведение событий*

Суммой двух событий *A* и *B* называется событие *C*, состоящее в наступлении события *A* или события *B*, или обоих событий вместе. Обозначается $A + B = C$.

Например, если событие *A* — попадание в цель при первом выстреле, событие *B* — попадание в цель при втором выстреле, то событие $C = A + B$ есть попадание в цель либо при первом выстреле, либо при втором, либо при обоих выстрелах.

Если события A_1 и A_2 — несовместные, то событие $A_1 + A_2$ означает наступление одного из событий A_1 или A_2.

б) *Суммой нескольких событий* A_1, A_2, $\ldots A_n$ называется событие *C*, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

в) *Произведением двух событий A* и *B* называется событие *C*, состоящее в совместном наступлении события *A* и события *B*. Обозначается $C = A \cdot B$.

Например, в саду высадили два дерева. Событие A — первое дерево в этом году даст плоды, событие B — второе дерево в этом году даст плоды. Событие $C = A \cdot B$ означает, что оба дерева в этом году дадут плоды.

г) *Произведением нескольких событий* называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

§ 2 Теоремы сложения вероятностей

а) *Теорема сложения вероятностей несовместных событий*

Вероятность суммы n несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 1. Если события A_1, A_2, $\dots A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

б) **Теорема сложения вероятностей совместных событий**

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

§ 3 Теоремы умножения вероятностей

а) *Независимые и зависимые событий*

Два события называются *независимыми*, если вероятность наступления одного из них (причем любого) не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. В противном случае события называются зависимыми.

Например, фары трактора или автомобиля подсоединены параллельно. Отказ в работе левой фары событие *A,* отказ в работе правой фары событие *B*. События *A* и *B* независимые.

б) ***События, независимые в совокупности.*** Несколько событий называются *независимыми* в совокупности, если каждое из них и любая комбинация из остальных событий (содержащая либо все события, либо часть из них) есть события независимые.

Например, на каждом из трех стеллажей склада находится по 25 поршней первого и второго допуска. Из каждого стеллажа берут по одному поршню. Обозначим событие A — взятый с первого стеллажа поршень имеет первый допуск, B — взятый со второго стеллажа поршень имеет второй допуск, C — взятый с третьего стеллажа поршень имеет первый допуск. События A, B, C — независимые в совокупности.

в) *Условная вероятность.* Условной вероятностью $P_B(A)$ или $P(A/B)$ называется вероятность события A, вычисленную в предположении, что событие В уже наступило.

Теорема. *Вероятность произведения (совместного наступления) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие. Вероятность произведения (совместного наступления) нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема. *Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ... A_n независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, ... $\overline{A_n}$, т.е.* $P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n})$.

Теорема. *Вероятность произведения (совместного наступления) двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$\underline{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)} \text{ или } \underline{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)}.$$

Пример 2.1.

Для проверки на морозоустойчивость различных сортов яблони высажено 3 саженца. Вероятность выдержать испытание для первого саженца равна 0,9, для второго — 0,95. для третьего — 0,85. Какова вероятность того, что

а) все 3 саженца выдержат испытание,

б) хотя бы один из саженцев выдержит испытание,

в) не менее двух саженцев выдержат испытание?

Решение.

а) Основное событие A — все 3 саженца выдержат испытание, $P(A) = ?$ Введем вспомогательные события: A_1 — первый саженец выдержит испытание, A_2 — второй саженец выдержит испытание, A_3 — третий саженец выдержит испытание, тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

События A_1, A_2, A_3 независимые в совокупности, поэтому

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85 \approx 0{,}7267.$$

б) Основное событие B — хотя бы один из саженцев выдержит испытание, $P(B)=?$ Введем вспомогательные события: $\overline{A_1}$ — первый саженец не выдержит испытание (противоположное A_1), $P(\overline{A_1})=0{,}1$; $\overline{A_2}$ — второй саженец не выдержит испытание (противоположное A_2), $P(\overline{A_2})=0{,}05$; $\overline{A_3}$ — третий саженец не выдержит испытание (противоположное A_3), $P(\overline{A_3})=0{,}15$.

Событие $\overline{B}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ означает, что ни один саженец не выдержит испытание.

$$P(\overline{A})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}15\approx 0{,}0008.$$

По теореме о вероятности противоположных событий

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \quad \text{имеем} \quad P(B)\approx 1-0{,}0008\approx 0{,}9992.$$

в) Основное событие D — не менее двух саженцев выдержат испытание или 3 саженца выдержат испытание, $P(D)=?$

Введем вспомогательные события: E — два саженца выдержат испытание, C — три саженца выдержат испытание. Тогда $D = E + C$.

E и C — несовместные события, следовательно $P(D)=P(E)+P(C)$.

Событие $E=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$, события $A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$; $A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$; $\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$ - несовместные, следовательно,

$$P(E)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3})+P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)+P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}15+0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}85+0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}85\approx 0{,}2472.$$

Событие $C=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, $P(C)=0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}85\approx 0{,}7267$, $P(D)\approx 0{,}9739$.

Пример 2.2.

Некоторая система состоит из трех узлов *B*, *C*, *D*, работающих независимо друг от друга. Дублируется только узел *C* (наименее надежный узел). Определить надежность работы системы, если надежность работы каждого элемента P_i указана на рисунке 2.1:

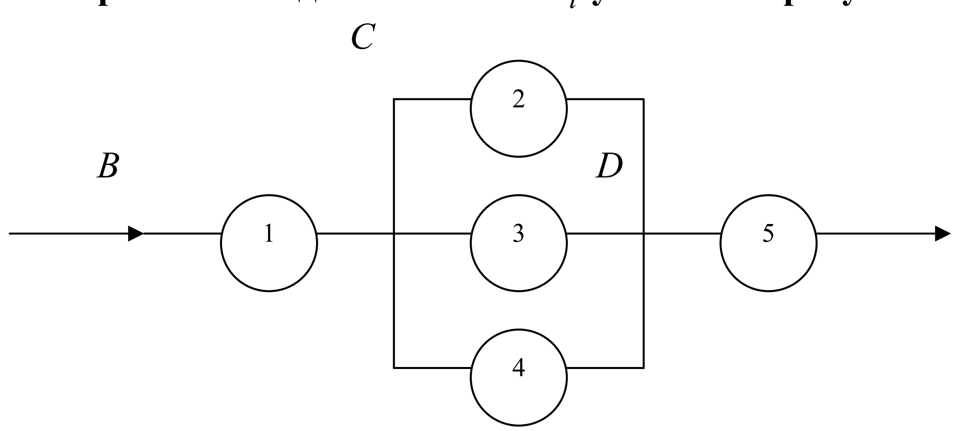


Рис. 2.1

$P_1 = 0{,}9;\ P_2 = 0{,}81;\ P_3 = 0{,}82;\ P_4 = 0{,}85;\ P_5 = 0{,}94.$

Решение.

Основное событие A — цепь работает, $P(A) = ?$

$A = B \cdot C \cdot D$, $\qquad P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

A_1 — работает 1-й элемент, $P(A_1) = 0{,}9;$ $\qquad P(\overline{A_1}) = 0{,}1.$

A_2 — работает 2-й элемент, $P(A_2) = 0{,}81;$ $\qquad P(\overline{A_2}) = 0{,}19.$

A_3 — работает 3-й элемент, $P(A_3) = 0{,}82;$ $\qquad P(\overline{A_3}) = 0{,}18.$

A_4 — работает 4-й элемент, $P(A_4) = 0{,}85;$ $\qquad P(\overline{A_4}) = 0{,}15.$

A_5 — работает 5-й элемент, $P(A_5) = 0{,}94;$ $\qquad P(\overline{A_5}) = 0{,}06.$

$P(B) = P(A_1) = 0{,}9;$

$P(C) = 1 - P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 1 - 0{,}19 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}9949;$

$P(D) = P(A_5) = 0{,}94;$

$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}9949 \cdot 0{,}94 = 0{,}8417.$

§ 4 Формула полной вероятности. Формула Байеса

а) *Формула полной вероятности*

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1,\ H_2,\ \ldots H_n$, образующих полную группу. Будем эти события называть гипотезами. Вероятность события A в этом случае вычисляется по формуле:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A),$$

которая носит название формулы полной вероятности.

б) *Формула Байеса (вероятность гипотез)*

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$, образующих полную группу. Вероятности этих гипотез до опыта известны и соответственно равны $P(H_1)$, $P(H_2),\ \ldots P(H_n)$. Произведен опыт, в результате которого появилось событие А. Вероятность $P_A(H_i)$ гипотезы H_i, после того, как событие A наступило, определяется по формуле Байеса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}, \qquad i \in \overline{1,n}.$$

Пример 2.3.

На сборку поступают шестерни с 3-х автоматов. Первый дает 25%; второй — 30% и третий — 45% шестерен, поступающих на сборку. Первый автомат допускает 0,1% брака шестерен, второй 0,2%, третий — 0,3%. Найти вероятность поступления на сборку бракованной шестеренки.

Решение.

Введем следующие обозначения событий:

Основное событие A — поступление на сборку бракованной шестерни.

H_1 — шестерня изготовлена первым автоматом,

H_2 — шестерня изготовлена вторым автоматом,

H_3 — шестерня изготовлена третьим автоматом.

Из условия задачи следует, что вероятность поступления на сборку бракованной шестерни, изготовленной первым, вторым или третьим автоматом соответственно равны:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}001,\ P_{H_2}(A) = 0{,}002,\ P_{H_3}(A) = 0{,}003.$$

Так же известны вероятности того, что шестерня, поступившая на сборку изготовлена первым, вторым или третьим автоматом соответственно:

$$P(H_1) = 0{,}25;\ P(H_2) = 0{,}3;\ P(H_3) = 0{,}45.$$

Используя формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A),$$

имеем

$$P(A) = 0{,}25\cdot 0{,}001 + 0{,}3\cdot 0{,}002 + 0{,}45\cdot 0{,}003 \approx 0{,}0022.$$

Пример 2.4.

Телеграфное сообщение состоит из сигналов ″точка″ и ″тире″, они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/3 сообщений ″точка″ и 1/3 сообщений ″тире″. Найти вероятность того, что принятый сигнал — ″тире″.

Решение.

Обозначим через A событие — передаваемый сигнал принят. Рассмотрим гипотезы: H_1 — передаваемый сигнал — ″точка″,

H_2 — передаваемый сигнал ″тире″.

Вероятности гипотез: $P(H_1) = \dfrac{5}{5+3} = \dfrac{5}{8}$; $P(H_2) = \dfrac{3}{5+3} = \dfrac{3}{8}$.

Вероятность того, что сигнал принят, если передаваемый сигнал ″точка″, равна $P_{H_1}(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, т.е. вероятность того, что передаваемый сигнал ″точка″ не искажен. Вероятность того, что сигнал принят, если сигнал ″тире″, равна $P_{H_2}(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, т.е. вероятность того, что передаваемый сигнал ″тире″ не искажен.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{8}.$$

Тогда по формуле Байеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Сумма двух событий.

2. Произведение двух событий.

3. Противоположные события.

4. Зависимые и независимые события.

5. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.

6. Условная вероятность.

7. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.

8. Формула полной вероятности.

9. Формулы Байеса.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события — появление герба при i-ом подбрасывании (i = 1,2,3). Представить в виде сумм, произведений и сумм произведений событий A_i следующие события: A — появились все три герба; B — появились все три цифры; C — появился хотя бы один герб; D — появилась хотя бы одна цифра; E — появился только один герб; F — появилась только одна цифра.

2. Контролер проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы? Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

3. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них оформлен правильно?

4. Предприятие обеспечивает регулярный выпуск продукции при безотказной поставке комплектующих от двух смежников. Вероятность отказа в поставке продукции от первого из смежников равна 0,05, а от второго — 0,08. Найти вероятность сбоя в работе предприятия.

5. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго — 6, от третьего — 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7. Какова вероятность того, что установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока; проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

6. Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй — 35, третий — 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03, у второго — 0,02, у третьего — 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

МОДУЛЬ 3
СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

§ 1 Формула Бернулли

Теорема. *Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, определяется по формуле Бернулли.*

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad \text{где} \quad q = 1 - p.$$

На практике формулой Бернулли удобно пользоваться, если n — не очень велико $(n < 10)$.

§ 2 Формула Пуассона

Теорема. *Если производится достаточно большое число испытаний (n— велико), в каждом из которых вероятность наступления события A постоянна, но мала, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, определяется приближенно формулой*

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad \text{где } \lambda = n \cdot p.$$

§ 3 Локальная теорема Лапласа

Теорема. *Если производится* n *независимых испытаний (*n *— велико), и вероятность наступления события* A *в каждом испытании постоянна и равна* p*, то вероятность того, что в* n *независимых испытаниях событие* A *наступит* m *раз, определяется по формуле*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$,

причем результат тем точнее, чем ближе значение p *к* $\frac{1}{2}$ *и больше* n.

Функция $\varphi(x)$ — четная. Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблице "Приложение №1", помещенной в конце методических указаний. Для $x \geq 5$ полагают $\varphi(x) = 0$.

§ 4 Интегральная теорема Лапласа

Теорема. *Если вероятность* p *наступления события* A *в каждом из* n *независимых испытаний постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в* n *независимых испытаниях событие* A *наступит не менее чем* m_1 *раз и не более чем* m_2 *раза, определяется по формуле*

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \qquad x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

Функция $\Phi(x)$ — нечетная. Значения находятся по таблице Приложения 2, помещенной в конце данного пособия. Для $x \geq 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

§ 5 Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний

Наивероятнейшим числом m_0 появления события A в n независимых испытаниях называется число, для которого вероятность $P_n(m)$ превышает или, по крайней мере, не меньше вероятности каждого из остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число определяется по формуле

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p,$$

где n — число независимых испытаний;

p — вероятность наступления события A в одном испытании;

q — вероятность не наступления события A в одном испытании;

m_0 — наивероятнейшее число наступлений событий A.

Пример 3.1.

Всхожесть семян данного растения составляет 90% . Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут:

а) четыре; б) не менее четырёх.

Решение.

Воспользуемся формулой Бернулли. Если производится n независимых испытаний, при каждом из которых вероятность осуществления события A постоянна и равна p, а вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$, то вероятность $P_n(m)$ того, что при этом событии А осуществляется ровно m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

а) По условию задачи вероятность всхожести семян $p = 0{,}9$; тогда $q = 0{,}1$; в данном случае $n = 5$ и $m = 4$. Подставляя эти данные в формулу Бернулли , получим

$$P_5(4) = C_5^4 (0{,}9)^4 (0{,}1) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0{,}656 \cdot 0{,}1 = 0{,}328.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$. Первое слагаемое уже найдено. Для вычисления второго снова применяем формулу Бернулли:

$$P_5(5) = C_5^5 (0{,}9)^5 (0{,}1)^0 = 1 \cdot 0{,}591 \cdot 1 = 0{,}591.$$

Следовательно, $P(A) = 0{,}328 + 0{,}591 = 0{,}919.$

Пример 3.2.

Вероятность наступления некоторого события при одном испытании равна 0,3. Найти вероятность того, что при 100 испытаниях:

а) событие появится 28 раз;

б) событие появится не менее 25 и не более 32 раз.

Решение.

а) Воспользуемся локальной теоремой Лапласа.

Здесь $p = 0{,}3$; $n = 100$; $m = 28$; $q = 0{,}7$.

$$P_{100}(28) = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x);$$

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{28 - 0{,}3 \cdot 100}{\sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 100}} = -0{,}43;$$

$$P_{100}(28) = \frac{1}{4{,}58} \cdot \varphi(-0{,}43) = \frac{1}{4{,}58} \cdot 0{,}3637 = 0{,}079,$$

где $\varphi\ (-0{,}43) = 0{,}3637$ найдено по таблице Приложения 1

б) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа

$$P_{100}(25 \le m \le 32) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{25 - 30}{4{,}58} = -1{,}09;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{32 - 30}{4{,}58} = 0{,}43;$$

Значения $\Phi(0{,}43)$ и $\Phi(-1{,}09)$ найдены по таблице Приложения 2

$$P_{100}(25 \le m \le 32) = \Phi(0{,}43) - \Phi(-1{,}09) = \Phi(0{,}43) + \Phi(1{,}09) =$$
$$= 0{,}1664 + 0{,}3621 = 0{,}5285.$$

Задача 3.3.

Пусть известно, что на выпечку 1000 сдобных булочек с изюмом полагается $n = 10000$ изюмин. Найти вероятность того, что в купленной булочке будет: а) не менее 7 и не более 10 изюмин; б) ни одной изюмины.

Решение.

Покупку булочки в магазине можно рассматривать как случайный выбор. Ясно, что при хорошем перемешивании теста с изюмом отдельные изюмины распределятся в нем статистически равномерно. Поскольку всего 1000 булочек, то вероятность каждой изюмины попасть в выбранную булочку есть $p = 0{,}001$. Условие статистической равномерности распределения изюмин и независимости числа изюмин в каждой булочке можно считать практически выполненным. Условие $n \cdot p \approx n \cdot p \cdot q$ тоже приближенно выполняется:

$10000 \cdot 0{,}001 \approx 10000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999$ или $10 \approx 9{,}99$.

Следовательно, имеется возможность применения формулы Пуассона.

Величина $\lambda = n \cdot p = 10$ - среднее число изюмин, приходящихся на одну булочку.

а) Вероятность того, что

$$P_{1000}(7 \le k \le 10) = P_{1000}(7) + P_{1000}(8) + P_{1000}(9) + P_{1000}(10) =$$

$$= \frac{10^7}{7!} e^{-10} + \frac{10^8}{8!} e^{-10} + = \frac{10^9}{9!} e^{-10} + \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} \approx 0{,}499.$$

б) Вероятность купить булочку вовсе без изюма

$$P_{1000}(0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = e^{-10} \approx 0{,}000045.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Схема испытаний Бернулли.

2. Формула Бернулли.

3. Формула Пуассона.

4. Локальная теорема Лапласа.

5. Интегральная теорема Лапласа.

6. Наивероятнейшее число наступивших событий в схеме Бернулли.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому покупателю потребуется холодильник марки A, равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: двум покупателям; не менее чем двум покупателям; не более чем трем покупателям; всем четырем покупателям.

2. Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено: ровно три изделия; более трех изделий.

3. Станок автомат делает детали. Вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

4. Вероятность получения отличной оценки на экзамене равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отличных оценок и вероятность этого числа, если сдают экзамен 75 студентов.

5. Известно, что 80% специалистов в районе имеет высшее образование. Найти вероятность того, что из 100 наудачу отобранных человек высшее образование имеет: не менее 70; от 65 до 90 человек.

МОДУЛЬ 4
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

§ 1 Дискретные и непрерывные случайные величины. Функции распределения случайной величины

Определение 1.

Случайной называется величина, которая в результате опыта может принять одно, и только одно, возможное значение, неизвестно заранее, какое именно.

Например, посеяно 100 зерен пшеницы для определения ее всхожести. Число взошедших зерен есть случайная величина, которая может принять одно из значений: 0, 1, 2, …, 100.

Определение 2.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает отдельные, изолированные друг от друга возможные значения, которые можно перенумеровать.

Число взошедших зерен пшеницы есть дискретная случайная величина.

Определение 3.

Непрерывной случайной величиной называется такая, случайная величина возможные значения которой, непрерывно заполняют какой-то промежуток, конечный или бесконечный.

Например, расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из оружия, есть непрерывная случайная величина. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку $[a,b]$.

Случайные величины обозначаются: X, Y, Z и т.д.

Определение 4.

Законом распределения дискретной случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения можно задать в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

x_i — возможные значения случайной величины X,

p_i — соответствующие им вероятности.

Причем $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Определение 5.

Интегральной функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$ выражающая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее чем x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства интегральной функции $F(x)$.

1. Значения интегральной функции принадлежат отрезку $[0;1]$.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ — неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$ если $x_2 > x_1$.

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

4. Вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно конкретное значение, равна нулю, т.е. $P(x = x_0) = 0$. Поэтому, для непрерывной случайной величины справедлива формула

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

Определение 6.

Дифференциальной функцией распределения или плотностью вероятности случайной величины X в точке x называется отношение вероятности попадания непрерывной случайной величины на элементарный участок от x до $x + \Delta x$ к длине этого участка, когда $\Delta x \to 0$.

Обозначается плотность вероятности через $f(x)$. По определению имеем:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Так как $P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$,

то $f(x) = F'(x)$.

Таким образом, если существует $F'(x)$, то существует $f(x)$, что обычно и предполагают.

Интегральная функция выражается через дифференциальную формулой:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Свойства дифференциальной функции

1. $f(x) \geq 0$, т.е. дифференциальная функция не отрицательна.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty;\infty)$, равна единице.

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx\,.$$

Геометрически эта вероятность равна площади S криволинейной трапеции на рисунке 4.1:

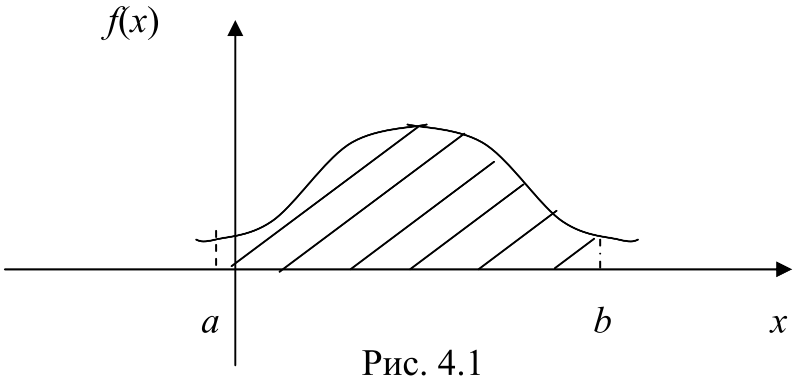


Рис. 4.1

§ 2 Числовые характеристики случайных величин

Определение 1.

Математическим ожиданием случайной величины X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$M[X] = m = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ — для дискретной случайной величины;

$M[X] = m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$ — для непрерывной случайной величины.

Для встречающихся на практике случайных величин, записанный несобственный интеграл сходится.

Свойства математического ожидания

1. $M[C] = 0$, где C — постоянная величина.

2. $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$.

3. $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, если X и Y независимые случайные величины.

4. $M[X + Y] = M[X] + M[Y]$.

Определение 2.

Разность между значением случайной величины X и ее математическим ожиданием $M[X]$ называется *отклонением* случайной величины X, т.е. по определению отклонение — это

$$X - M[X].$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M[X - M[X]] = 0$$

Определение 3.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2].$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M[X])^2 \cdot p_i$ — для дискретной случайной величины;

$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 \cdot f(x)dx$ — для непрерывной, случайной величины.

Свойства дисперсии

1. $D[C] = 0$, где C — постоянная величина.
2. $D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X]$.
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$,

если X и Y — независимые случайные величины.

Определение 4.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}.$$

Пример 4.1.

Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,75 и четвертого — 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа, если станки работают независимо.

Решение.

Здесь $p_1 = 0{,}9$; $q_1 = 0{,}1$;

$p_2 = 0{,}8$; $\quad q_2 = 0{,}2$;

$p_3 = 0{,}75$; $\quad q_3 = 0{,}25$;

$p_4 = 0{,}7$; $\quad q_4 = 0{,}3$.

Случайная величина X может принимать значения

$$x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 4.$$

Соответствующие вероятности будут:

$$P(x=0) = P_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}0015;$$

$$P(x=1) = P_1 = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + \\ + q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + \\ + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}0265;$$

$$P(x=2) = P_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_3 \cdot q_2 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_4 \cdot q_2 \cdot q_3 + \\ + p_2 \cdot p_3 \cdot q_1 \cdot q_4 + p_2 \cdot p_4 \cdot q_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot p_4 \cdot q_1 \cdot q_2 = \\ = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 + \\ + 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}1675.$$

$$P(x=3) = P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot q_4 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 \cdot p_4 + \\ + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 + \\ + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 0{,}4265;$$

$$P(x=4) = P_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}7 = 0{,}3780.$$

Закон распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4
p	0,0015	0,0265	0,1675	0,4265	0,3780

Для проверки правильности вычислений рекомендуется убедиться в том, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=0}^{4} p_i = 0{,}0015 + 0{,}0265 + 0{,}1675 + 0{,}4265 + 0{,}3780 = 1.$$

$$M[X] = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}0015 + 1 \cdot 0{,}0265 + 2 \cdot 0{,}1675 + \\ + 3 \cdot 0{,}4265 + 4 \cdot 0{,}3780 = 3{,}15.$$

$$M[X^2] = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \cdot p_i = 0 \cdot 0{,}0015 + 1 \cdot 0{,}0265 + 2^2 \cdot 0{,}1675 + \\ + 3^2 \cdot 0{,}4265 + 4^2 \cdot 0{,}3780 = 10{,}5.$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 0{,}665\,.$$

Пример 4.2.

Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \dfrac{x}{2} - 1, & 2 \le x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X, $M[X]$ — математическое ожидание и $D[X]$ — дисперсию. Построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

График распределения $F(x)$ показан на рис.4.2.

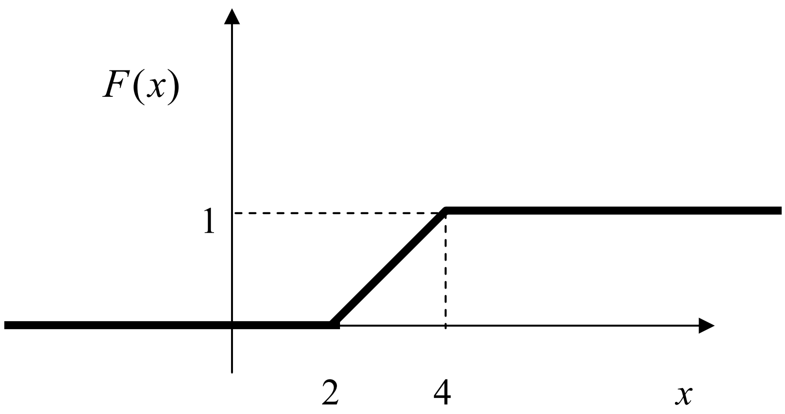


Рис.4.2.

Плотность распределения найдем из выражения:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 2 \le x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Ее график

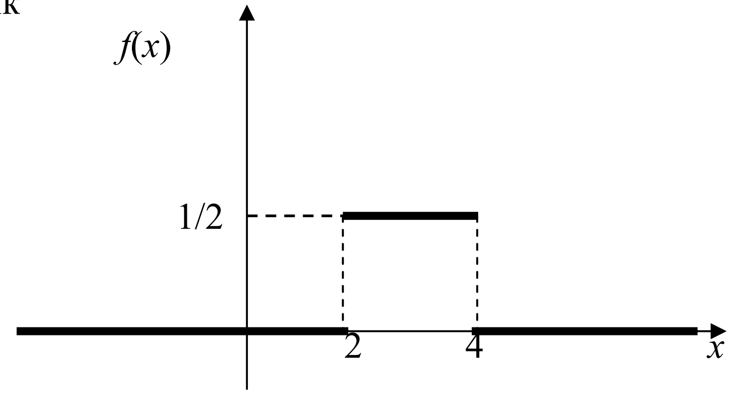


Рис.4.3

Следует, что случайная величина X имеет равномерное распределение на участке от 2 до 4, следовательно $a = 2$; $b = 4$, откуда $M[X] = \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3;$

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3}.$$

Эти же результаты можно получить по формуле для нахождения математического ожидания для непрерывных случайных величин

$$M[X] = \int_2^4 \frac{x}{2}dx = 3;$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \int_2^4 \frac{x^2}{2}dx - 9 = \frac{1}{3}.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие случайной величины.

2. Виды случайных величин.

3. Способы задания дискретной случайной величины.

4. Интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины: определения, свойства, графики.

5. Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение) их свойства, формулы для вычисления.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Найти закон распределения вероятностей числа выигрышных билетов среди купленных. Найти и построить функцию распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2. В партии из 25 кожаных курток 5 имеют скрытый дефект. Покупают 3 куртки. Найти закон распределения числа дефектных курток среди купленных. Построить многоугольник распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \le 1 \\ x - 0{,}5, & если\ 1 < x \le 2 \\ 0, & если\ x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

4. Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = x/2$ в интервале (0; 2), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

МОДУЛЬ 5
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1 Биномиальный закон распределения

Случайная величина X называется распределенной по *биномиальному закону*, если ее возможные значения 0, 1, 2, $\ldots n$, а вероятность того, что $X = m$ выражается формулой:

$$P(X = m) = P_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

где $0 < p < 1$ есть вероятность наступления события A при одном испытании, $q = 1 - p$.

Числовые характеристики биномиального закона распределения:

$$M[X] = n \cdot p,\ D[X] = n \cdot p \cdot q.$$

§ 2 Закон Пуассона

Дискретная случайная величина X называется распределенной по *закону Пуассона*, если ее возможные значения 0, 1, 2, …, m, …, а вероятность того, что $X = m$ выражается формулой:

$$P(X = m) = P_m = \frac{\alpha^m}{m!} \cdot e^{-\alpha},$$

где $\alpha > 0$ - параметр закона Пуассона.

Числовые характеристики закона Пуассона:

$M[X] = \alpha$, $D[X] = \alpha$.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Доказано, что если известна постоянная интенсивность потока λ, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Пример 5.1.

Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 ч., равно трем. Найти вероятность того, что за 2 ч. поступит 5 заявок. Предполагается, что поток заявок простейший.

Решение.

По условию $\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 5$. Воспользуемся формулой

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Искомая вероятность того, что за 2 ч. поступит 5 заявок, равна

$$P_2(5) = \frac{6^5 \cdot e^{-6}}{5!} = \frac{6^5 \cdot 0{,}00248}{120} \approx 0{,}268.$$

§ 3 Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* в интервале (α, β), если ее плотность распределения в этом интервале постоянна, а вне его равна нулю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha; \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x \le \beta; \\ 0, & x > \beta. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного закона распределения:

$$M[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad D[X] = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

График дифференциальной функции равномерного распределения.

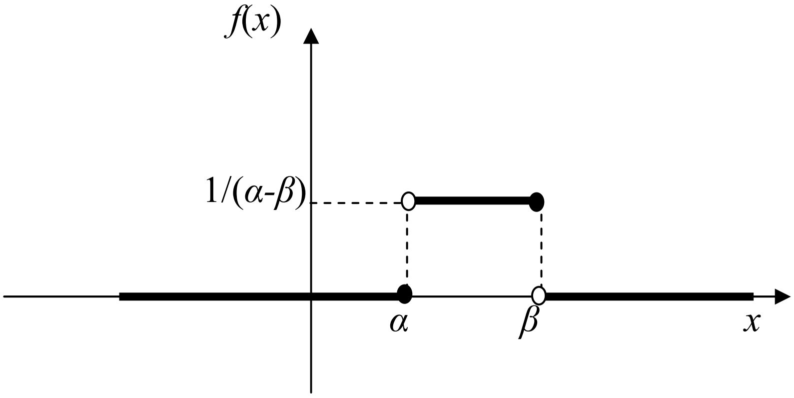


Рис.5.1.

§ 4 Показательный закон распределения

Показательным называется распределение, дифференциальная функция которого имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\end{cases}$$

где $\lambda>0$ — параметр показательного распределения.

График дифференциальной функции показательного распределения:

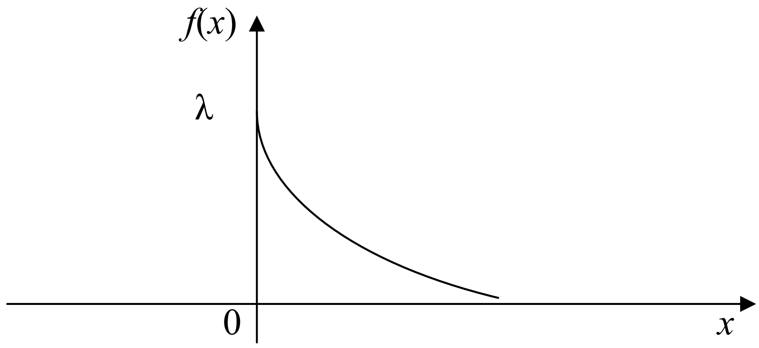


Рис.5.2.

Числовые характеристики показательного распределения:

$M[X]=\dfrac{1}{\lambda}$; $\qquad D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Интегральная функция $\quad F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

§ 5 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения играет исключительную роль в теории вероятностей. Это наиболее часто встречающийся закон распределения. Главная его особенность в том, что он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Непрерывная случайная величина называется *нормально распределенной*, если ее плотность распределения равна:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где m — математическое ожидание;
σ — среднее квадратическое отклонение.

График дифференциальной функции $f(x)$ нормального закона распределения (нормальная кривая или кривая Гаусса) имеет вид:

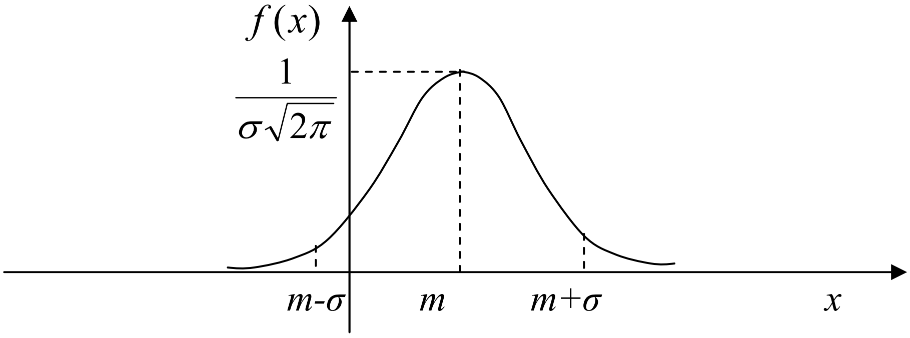


Рис.5.3.

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X примет значение в интервале (a,b), выражается формулой:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

§ 6 Функция надежности

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T > t),$$

где T — длительность времени безотказной работы элемента.

Для показательного закона распределения вероятность безотказной работы элемента за время t вычисляется по формуле:

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

Пример 5.2.

Автомат изготовляет шарики для подшипника. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально, где $\sigma[X] = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

Решение.

Так как X — отклонение диаметра от проектного размера, то

$M[X] = a = 0$. Тогда $P(|X| < \delta) = P(|X| < 0{,}7) =$

$$= 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 0{,}92 .$$

Таким образом, вероятность того, что диаметр шарика отклонится от проектного меньше чем на 0,7 мм, равна 0,92. Отсюда следует, что примерно 92 шарика из 100 окажутся годными.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Биномиальный закон распределения.
2. Закон Пуассона.
3. Показательный закон распределения.
4. Равномерный закон распределения.
5. Нормальный закон распределения.
6. Функция надежности.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке [0; 4]. Найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение величины X.

2. Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0 \\ 1 - e^{-0{,}1x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

3. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $M(X) = 5$, дисперсия равна $D(X) = 9$. Написать выражение для плотности вероятности.

МОДУЛЬ 6
СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Изложены системы случайных величин, ковариация и корреляция, функции случайных величин.

§ 1 Системы случайных величин

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами X_1, $X_2, \ldots, X_n$.

В этом случае говорят, что *указанные случайные величины образуют систему* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки $(X; Y)$ в область D, обозначим в виде $(X; Y) \subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин можно задать в виде табл. 1.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_1	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Здесь $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$; $p_{t\,j}$ — вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_j$, т.е. $p_{i\,j} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$, при этом $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Законом распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y), будем задавать с помощью плотности вероятности $f(x, y)$.

Вероятность попадания случайной точки $(X; Y)$ в область D определяется равенством

$$P\{(X;Y) \subset D\} = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $f(x, y) \geq 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

Если все случайные точки $(X; Y)$ принадлежат некоторой конечной области D_0, то условие 1 примет вид $\iint\limits_{D_0} f(x, y)dxdy = 1$.

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются так:

$$m_X = MX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, m_Y = MY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_i p_{ij}, \tag{6.1}$$

а соответствующие характеристики непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_X = MX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,\ m_Y = MY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy \tag{6.2}$$

Точку $(m_X; m_Y)$ называют *точкой рассеивания системы случайных величин* (*X, Y*).

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются формулами

$$DX = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i m_X)^2, \quad DY = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_i - m_Y)^2 \tag{6.3}$$

а дисперсии непрерывных случайных величин X, Y определяются формулами

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2\ f(x,y)\,dx\,dy,$$

(6.4)

$$DY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_Y)^2\ f(x,y)\,dx\,dy.$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y определяются так:

$$\sigma_X = \sqrt{DX}, \quad \sigma_Y = \sqrt{DY}. \tag{6.5}$$

Для дисперсии можно использовать также формулу

$$DX = M(X^2) - (MX)^2, \quad DY = M(Y^2) - (MY)^2.$$

Пример 6.1. Пусть (*X*, *Y*) имеет следующую таблицу распределения:

Y / *X*	-1	0	1
0	**0**	**0,1**	**0,5**
1	**0,2**	**0,1**	**0,1**

Найти математическое ожидание и дисперсии случайных величин *X* и *Y*.

Решение. Имеем:

$$m_X = 0\cdot 0 + 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$m_Y = -1\cdot 0 + 1\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}5 - 1\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

От системы величин (*X*, *Y*) перейдем к системе центрированных величин $(\tilde{X},\tilde{Y})$, где $\tilde{X} = X - m_X = X - 0{,}4, \quad \tilde{Y} = Y - m_Y = Y - 0{,}4,$

Составим таблицу

$\tilde{Y}$ \ $\tilde{X}$	-1,4	-0,4	0,6
-0,4	0	0,1	0,5
0,6	0,2	0,1	0,1

Получаем

$$DX = (-0,4)^2 \cdot 0 + (0,6)^2 \cdot 0,2 + (-0,4)^2 \cdot 0,1 + (0,6)^2 \cdot 0,1 +$$

$$+ (-0,4)^2 \cdot 0,5 + (0,6)^2 \cdot 0,1 = (0,6)^2 \cdot 0,4 + (0,4)^2 \cdot 0,6 = 0,24;$$

$$DY = (-1,4)^2 \cdot 0,2 + (0,4)^2 \cdot 0,2 + (0,6)^2 = 0,392 + 0,032 + 0,216 = 0,064.$$

§ 2 Ковариация и корреляция

Важную роль в теории систем случайных величин играет *корреляционный момент (ковариация)*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = K_{XY} = M\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$K_{XY} = \sum_m \sum_n (x_n - m_X)(y_m - m_X)\, p_{nm},$$

а для непрерывных

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y_m - m_Y) f(x,y)\, dx\, dy.$$

Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент K_{XY} равен нулю, и *коррелированным* — в противном случае.

По свойствам математического ожидания

$$K_{XY} = M\left[(X - m_X)(Y - m_Y)\right] = M(XY - m_X Y - m_Y X + m_X m_Y) =$$

$$= M(XY) - m_X MY - m_Y MX + m_X m_Y = M(XY) - m_X m_Y.$$

Такое выражение для корреляционного момента иногда удобнее для вычислений, и отсюда следует, что *независимые случайные величины некоррелированы*.

Если корреляционный момент положителен, то случайные величины называются *положительно коррелированными*, если отрицателен — то *отрицательно коррелированными.*

Вместо корреляционного момента часто используется *коэффициент корреляции*

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y},$$

являющийся безразмерной величиной.

Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y = aX + b$, то $r_{XY} = \operatorname{sgn} a$, т.е. $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $r_{XY} = -1$ при $a < 0$.

Легко видеть, что коэффициент корреляции удовлетворяет условию $-1 \le r_{XY} \le 1$.

Пример 6.2. Найти коэффициент корреляции r_{XY} для случайных величин X ,Y из примера 6.1.

Решение. Найдем *M(X Y)*. Для этого переберем все клетки таблицы, перемножим значения компонент *X*, *Y* и вероятности, записанные в этих клетках, и все эти произведения сложим. Тогда $M(XY) = 0 + 0 + 0 + (-1) \cdot 0{,}2 + 0 + 1 \cdot 0{,}1 = -0{,}1.$ Значит, $K_{XY} = M(XY) - m_X m_Y = -0{,}1 - 0{,}16 = -0{,}26.$ Теперь получаем $r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}26}{\sqrt{0{,}64 \cdot 0{,}24}} \approx -0{,}66.$

Пусть $\exp(u) = e^u$. Закон распределения двумерной случайной величины *(X, Y)*, задаваемый плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1 - r_{XY}^2}} \exp - \left(\frac{1}{2(1 - r_{XY}^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\left(\frac{x - m_X}{\sigma_X} \right)^2 + \left(\frac{y - m_Y}{\sigma_Y} \right)^2 - 2r_{XY} \frac{(x - m_X)(y - m_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \right) \right),$$

называют *нормальным законом распределения на плоскости.* Здесь $m_X, m_Y, \sigma_X > 0, \sigma_Y > 0, r_{XY} \left(|r_{XY}| \le 1 \right)$ — параметры этого распределения, вероятностный смысл которых ясен из обозначений.

В случае нормального распределения системы (X, Y) некоррелированность $K_{XY} = r_{XY} = 0$ *означает независимость случайных величин X, Y.* При $|r_{XY}| = 1$, X, Y связаны линейной зависимостью, поэтому значение коэффициента корреляции r_{XY} есть мера линейной зависимости нормально распределенных на плоскости случайных величин *X, Y*.

§ 3 Функции случайных величин

Пусть X — случайная величина, а $y=\varphi(x)$ — обычная функция, область определения которой содержит множество значений случайной величины X. Тогда $Y=\varphi(x)$ — случайная величина, являющаяся функцией от случайной величины X.

Говорят также, что X есть *аргумент функционально зависимой случайной величины Y*.

Возникает задача: как, зная распределение случайного аргумента X, определить закон распределения функции $Y=\varphi(X)$? Если X — дискретная случайная величина, то это сделать нетрудно; а если X — непрерывная случайная величина, то это сложнее, и на этот счет справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть X — непрерывная случайная величина с плотность распределения $f(x)$, а $\varphi(x)$ — монотонная дифференцируемая функция; тогда плотность распределения случайной величины $Y=\varphi(X)$ есть*

$$g(y)=f(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|,$$

где $\psi(y)$ функция обратная к φ.

Математическое ожидание случайной величины $Y=\varphi(X)$ находится так:

$MY=\sum\limits_i \varphi(x_i)p_i$,если случайная величина X дискретна; $MY=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\,dx$, если X непрерывна и ее плотность есть $f(x)$.

Пример 6.3. За каждый процент перевыполнения плана полагается 40 тыс. руб., а за каждый процент недовыполнения заработок уменьшается на 30 тыс. руб., но не более, чем на 100 тыс. руб. Найти ожидаемый размер премии, если прогноз выполнения плана следующий:

96	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**
0,0,1	**0,02**	**0,03**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,2**	**0,14**

Каков ожидаемый размер премии, если известно, что план выполнен?

Решение. Найдем ожидаемый размер премии Y. Это есть функция от процента выполнения плана. К прогнозу выполнения плана снизу пристраиваем еще одну строку значений Y (тыс. руб.)

96	97	98	99	100	101	102	103
0,01	0,02	0,03	0,2	0,2	0,2	0,2	0,14
-100	-90	-60	-30	0	40	80	120

Имеем

$MY = (-100 - 180 - 600 + 800 + 1600 + 1680)/100 = 302$ тыс. руб.

В заключении отметит, что зависимость между случайными величинами подробно будет рассмотрена позже.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Система двух случайных величин.
2. Числовые характеристики системы двух случайных величин.
3. Корреляционный момент.
4. Коэффициент корреляции.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Имеется таблица распределения двумерной случайной величины (X, Y):

Y \ X	1	2	3
2	0.07	0.16	0.10
4	0.13	0.09	0.18
6	0.10	0.05	0.12

Составить таблицы распределения вероятностей для каждой из величин X и Y.

2. Для заданного закона распределения вероятностей двумерной случайной величины (X,Y)

X \ Y	1	4
3	0.12	0.20
5	0.24	0.15
6	0.22	0.07

Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y.

МОДУЛЬ 7
ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1 Неравенство Чебышева

Нормальный закон является универсальным в том смысле, что при сложении большого числа достаточно произвольных случайных величин получаем нормально распределенную случайную величину. Этот факт устанавливают законы больших чисел.

Для доказательства важных теорем закона больших чисел сформулируем сначала *неравенство Чебышева.*

Пусть X — произвольная случайная величина со средним MX и конечной дисперсией D, тогда

$$P\{|X-MX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}. \qquad (7.1)$$

§ 2 Закон больших чисел в форме Чебышева

Теорема Чебышева. *Пусть случайные величины X_1, X_2,...X_n,...попарно независимы и их дисперсии ограничены одним и тем же числом c, тогда для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}MX_k\right|<\varepsilon\right\}\to 1. \qquad (7.2)$$

В частном случае если все X_k одинаково распределены и $MX_k=a$, то из (7.2) получим

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a\right|<\varepsilon\right\}\to 1. \qquad (7.3)$$

Если выполняется (7.3), то говорят, что *последовательность случайных величин* $\{Y_n\}=\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}$ *сходится к своему среднему значению, а по вероятности*, или, что к этой последовательности применим закон больших чисел.

§ 3 Теорема Бернулли

Пусть имеется n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, где m — число успехов, а q=1 – p, тогда для любого $\varepsilon>0$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}\to 1, \text{ если } n\to\infty, \qquad (7.4)$$

т.е. частота события A стремиться к его вероятности при неограниченном увеличении числа испытаний.

Эта теорема дает обоснование статистическому определению вероятности, т.е. при больших *n* за вероятность события можно принять его частоту.

Пример 7.1. При штамповке пластинок из пластмассы по данным ОТК брак составляет 3%. Оценить вероятность того, что при просмотре партии в 1000 пластинок, выявится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 1%.

Решение. Здесь следует найти

$$P_0 = P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \text{ при } p = 0{,}03,\ \varepsilon = 0{,}01,\ n = 1000.$$

По теореме Бернулли искомая вероятность

$$P_0 > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ где } \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{1000 \cdot 0{,}01^2} = 0{,}291.$$

Получаем $p_0 \geq 0{,}709$.

§ 4 Усиленный закон больших чисел

Закон больших чисел (7.2) утверждает, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k \to 0 \qquad (7.5)$$

по вероятности. Усиленный закон больших чисел утверждает, что соотношение (7.6) выполняется с вероятностью 1, т.е.

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k \to 0 = 1.\right\} \qquad (7.6)$$

Центральная предельная теорема. Эта теорема устанавливает предельное распределение сумм большого числа случайных величин.

Пусть $X_1,\ldots, X_i,\ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины; $MX_i = a,\ DX_i = \sigma^2\ (i = 1,\ 2,\ldots);\ Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_n.$ *Тогда при $n \to \infty$ равномерно по α и β имеем*

$$P\left(\alpha \leq \frac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq \beta\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (7.7)$$

Это значит, что закон распределения случайной величины $\dfrac{Y_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами 0; 1. Итак, универсальность нормального закона заключается в том, что *при соответствующей нормировке распределение последовательности сумм независимых случайных величин сходится к нормальному закону.*

Пример 7.2. Количество тонн цемента, взятое за день с цементного склада, является случайной величиной с рядом распределения

0	**20**	**40**
1/4	**1/2**	**1/4**

С какой вероятностью 2000 т цемента хватит на квартал (90 дней)?

Решение. Пусть X_1— случайное количество цемента, взятое в i-й день со склада. Считаем, что эти величины независимы и одинаково распределены с указанным выше рядом распределения. Тогда $MX_i = 20$, $DX_i = 200$. В соответствии с ЦПТ закон распределения их суммы за квартал Y_{90} — приближенно нормальный с параметрами $M(Y_{90}) = 90 \cdot 20 = 1800$, $D(Y_{90}) = 90 \cdot 200 = 18000$ и $\sigma_{Y_{90}} = \sqrt{180000} \cong 134$.

Следовательно, $P(Y_{90} \le 2000) = \dfrac{1}{2} + \Phi\left(\dfrac{2000 - 1800}{134}\right) = 0{,}93$,

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Неравенство Чебышева.
2. Теорема Чебышева.
3. Теорема Бернулли.
4. Центральная предельная теорема.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сколько надо произвести замеров диаметров деревьев, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения не более чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Известно, что среднее квадратическое отклонение диаметров деревьев не превышает 10 см.
2. Номинальное значение диаметра втулки равно 5 мм, а дисперсия, вследствие погрешностей изготовления, не превосходит 0,01. Оценить вероятность того, что размер втулки будет отличаться от номинала не более чем на 0,5 мм.

МОДУЛЬ 8
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1 Выборочный метод

Рассмотрим некоторый объект, у которого имеется какой-либо случайный параметр X. Например, деталь, которая имеет размер X.

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов. В данном примере — случайно отобранных деталей. Генеральной совокупностью называется совокупность всех объектов, из которых производится выборка. Генеральная и выборочная совокупности характеризуются объемами, которые будем обозначать N и n соответственно.

Например, если из 500 деталей отобрано 200 для измерения размера X, то объем генеральной совокупности $N = 500$, а объем выборки будет $n = 200$.

Допустим, что в выборке случайный параметр X принял следующие значения: x_1, x_2, …, x_i, …, x_k.

При этом значение x_1 встречалось n_1 раз,

x_2 встречалось n_2 раз,

----

x_i встречалось n_i раз,

----

x_k встречалось n_k раз.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

В примере с деталью это означает, что размер x_1 был зафиксирован n_1 раз, размер x_2 — n_2 раз и т.д.

Наблюдаемые значения случайной величины X:

x_1, x_2, …, x_i, …, x_k, называются *вариантами*. Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называется *вариационным рядом*, числа наблюдений n_i вариант x_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки n — относительными частотами $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{n} = 1$.

Статистическим распределением выборки (или распределением выборки) называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i или относительных частот ω_i.

Пример 8.1.
Выборка в виде распределенных частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

Решение.
Найдем объем выборки: $n = 1 + 3 + 6 = 10$.
Найдем относительные частоты:
$\omega_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$; $\omega_2 = \frac{3}{10} = 0{,}3$; $\omega_3 = \frac{6}{10} = 0{,}6$.
Напишем искомое распределение относительных частот:

x_i	2	5	7
n_i	0,1	0,3	0,6

Контроль: $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}6 = 1$.

§ 2 Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x (из возможных значений случайной величины X) относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант меньших x;
n — объем выборки.

Эмпирическая функция распределения обладает теми же свойствами, что функция распределения $F(x)$:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0,\ 1]$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая, то
$F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Пример 8.2.

Найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Решение.

Найдем объем выборки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$.

Наименьшая варианта равна единице, следовательно $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$.

Значение $x < 4$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 10 раз, следовательно $F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2$ при $1 < x \le 4$.

Значения $x < 6$, а именно $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, наблюдались 10+15=25 раз, следовательно $F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5$ при $4 < x \le 6$.

Так как $x = 6$ — наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 6$.

Напишем искомую эмпирическую функцию распределения:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 6, \\ 1 & \text{при} \quad x > 6. \end{cases}$$

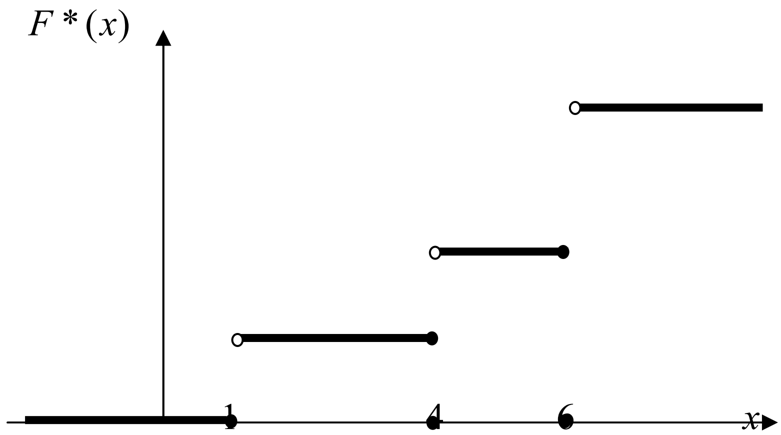


Рис.8.1

§ 3 Полигон и гистограмма

Полигоном частот называют ломаную на плоскости $x0n$, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), …, (x_k, n_k), где x_i — варианты выборки и n_i — соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную на плоскости $x0\omega$, отрезки которой соединяют точки

(x_1, ω_1), (x_2, ω_2), …, (x_k, ω_k), где x_i — варианты выборки и ω_i — соответствующие им относительные частоты.

Полигон частот и полигон относительных частот строят в том случае, если случайная величина X, значение которой наблюдается, является *дискретной случайной величиной.*

Если наблюдается значение непрерывной случайной величины X, то интервал, в котором заключены все наблюденные значения случайной величины X, разбивается на ряд частичных интервалов длиною h и находят n_i — сумму частот вариант, попавших в i - й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Площадь частичного i-ого прямоугольника равна $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ — сумме частот вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-ого прямоугольника равна $h \cdot \frac{\omega_i}{h} = \omega_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Пример 8.3.

Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
ω_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

Решение.

Отложим на оси абсцисс варианты x_i, а на оси ординат соответствующие относительные частоты ω_i. Соединив точки (x_i, ω_i) отрезками прямых, получим искомый полигон относительных частот (рис.8.2).

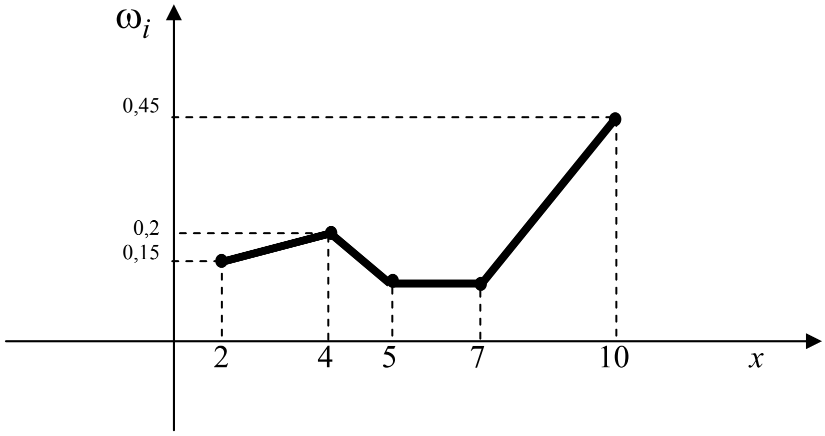


Рис.8.2

Пример 8.4.

Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки объема *n*=100.

Номер интервала	Частичный интервал	Сумма частот вариант интервала	Плотность частоты
	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / n
1	1 - 5	10	2,5
2	5 - 9	20	5
3	9 - 13	50	12,5
4	13 - 17	12	3
5	17 - 21	8	2

Решение.

Построим на оси абсцисс заданные интервалы длиною $h = 4$. Проведем над этими интервалами отрезки, параллельно оси абсцисс и находящихся от нее на расстояниях, равных соответствующим плотностям частоты n_i / n. Например над интервалом (1;5) построим отрезок параллельный оси абсцисс на расстоянии $\frac{n_i}{n} = \frac{10}{4} = 2{,}5$; аналогично строятся остальные отрезки (см. рис.8.3).

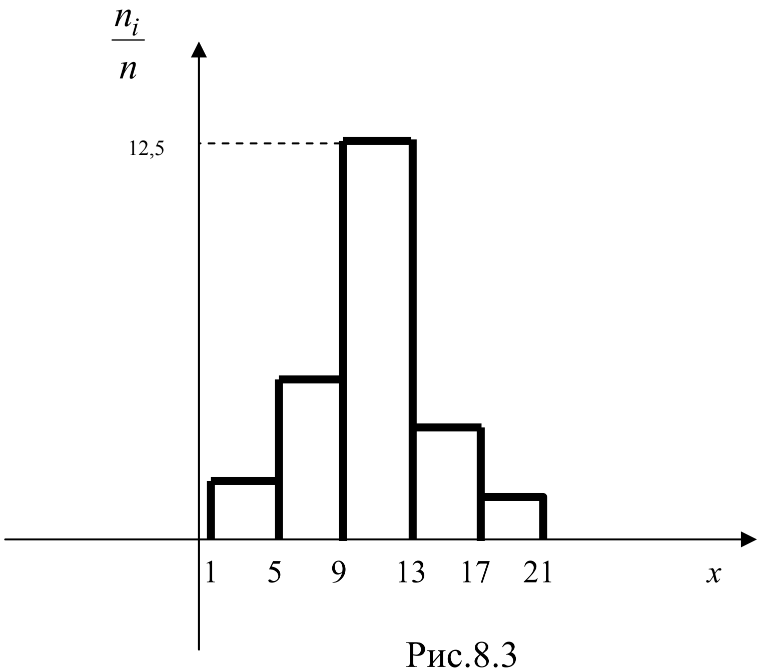


Рис.8.3

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Выборочная совокупность.
2. Генеральная совокупность.
3. Варианта.
4. Вариационный ряд.
5. Частота.
6. Относительная частота.
7. Статистическое распределение выборки.
8. Эмпирическая функция распределения.
9. Полигон частот, полигон относительных частот.
10. Гистограмма частот, гистограмма относительных частот.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из $n = 30$ наблюдений. Требуется составить ряд распределения частот (вариационный ряд) и полигон частот.

2. Построить гистограмму относительных частот по данным распределениям выборки объема $n = 100$:

i	$x_i < X \le x_{i+1}$	m_i
1	3 – 5	20
2	5 – 7	25
3	7 – 9	15
4	9 – 11	13
5	11 – 13	12
6	13 – 15	8
7	15 – 17	7

МОДУЛЬ 9
СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1 Точечные оценки

Статистической оценкой неизвестного параметра случайной величины X называется функция вариант x_1, x_2, …, x_i, …, x_n.

Несмещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которого равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Выборочной средней (оценкой математического ожидания) называют среднее арифметическое наблюдаемых значений количественного признака

$$X:\ \overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}.$$

Вспомним, что x_i — варианта выборки,

n_i — частота варианты,

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки,

k — число наблюдаемых различных значений случайного параметра X.

Таким образом, *выборочная средняя* есть средняя взвешенная значений признака с весами, равными соответствующим частотам.

Допустим, что все наблюдаемые значения количественного признака (случайной величины) X выборки разбиты на несколько групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную, можно найти ее среднюю арифметическую.

Групповой средней называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Зная групповые средние и объемы группы, можно найти общую среднюю**:** *общая средняя равна средней арифметической групповых средних, взвешенной по объемам групп.*

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X совокупности вокруг своего среднего значения $\overline{x_в}$, вводят характеристику — *выборочную дисперсию.*

Выборочной дисперсией называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений количественного признака X от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \overline{x_в})^2}{n},$$

то есть выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Кроме выборочной дисперсии для характеристики рассеяния значений количественного признака X вокруг своего выборочного среднего значения пользуются характеристикой — выборочным средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (выборочным стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

Вычисление дисперсии можно упростить, используя формулу:

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2, \qquad \text{где} \qquad \overline{x_в^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{n}.$$

Выборочная дисперсия $D_в$ является смещенной оценкой дисперсии. Для того, чтобы получить несмещенную оценку дисперсии, нужно "исправить" величину $D_в$.

Исправленной выборочной дисперсией $\underline{S^2}$ называется величина: $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в$.

Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением называется величина:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Все рассмотренные выше статистические оценки называются точечными, так как они определяются одним числом.

Пример 9.1.
Распределение выборки задано таблицей

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию.

Решение.
Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x_в} = \frac{20\cdot 1 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 5}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2\,.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_в = \frac{20\cdot(1-2)^2 + 15\cdot(2-2)^2 + 10\cdot(3-2)^2 + 5\cdot(4-2)^2}{50} = 1\,.$$

Можно расчеты произвести и по другим формулам:

$$\overline{x_в^2} = \frac{20\cdot 1^2 + 15\cdot 2^2 + 10\cdot 3^2 + 5\cdot 4^2}{50} = 5\,,$$

откуда

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 5 - 2^2 = 1\,.$$

Пример 9.2.
Найти средний улов дальневосточного краба, приходящегося на одно контрольное траление, используя статистические данные двух количественных съемок (интервал между съемками 1,5 месяца).

Съемка 1	$\overline{x}_{в_1} = 57{,}90$	$n_1 = 179$
Съемка 2	$\overline{x}_{в_2} = 39{,}75$	$n_2 = 167$

Решение.

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{2} \bar{x}_{в_i} \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{2} n_i} = \frac{57{,}9 \cdot 179 + 39{,}75 \cdot 167}{179 + 167} = 49{,}1 .$$

§ 2 Интервальные оценки

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал длиной 2δ, который с заданной вероятностью (надежностью) γ покрывает оцениваемый параметр. Величина δ, равна половине доверительного интервала, называется *точностью оценки.*

Для оценки математического ожидания a нормально распределенного количественного признака (случайной величины) X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при *известном среднем квадратическом отклонении* $\underline{\sigma}$ служит доверительный интервал:

$$\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ — точность оценки;

n — объем выборки;

t_γ — есть такое значение аргумента функции Лапласа (Гмурман В.Е., Приложение 2), при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

При неизвестном $\underline{\sigma}$ (и объеме выборки $n > 30$) — доверительный интервал получаем из выражения:

$$\bar{x}_в - t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где S — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение; t_γ находим по таблице (Гмурман В.Е., Приложение 3) по заданным h и γ.

Пример 9.3.

Найти точность оценки δ средней длины тела сардинеллы $\bar{x}_в = 19{,}96$ и вычислить доверительный интервал с надежностью

$\gamma = 0{,}95$ для математического ожидания длины тела сардинеллы, если среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 0{,}69$. Объем выборки $n = 100$. Считать, что длина тела сардинеллы есть случайная величина X, распределенная по нормальному закону.

Решение.

$2\Phi(t_\gamma) = 0{,}95$, $\quad\quad \Phi(t_\gamma) = 0{,}475$.

По таблице (Приложение 2) находим $t_\gamma = 1{,}96$.

Следовательно,

$$\delta = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}69}{10} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}69}{10} = 1{,}96 \cdot 0{,}069 = 0{,}14.$$

Доверительный интервал для математического ожидания длины тела сардинеллы с надежностью $\gamma = 0{,}95$ определяется так:

$19{,}96 - 0{,}14 < a < 19{,}96 + 0{,}14$

$$19{,}82 < a < 20{,}10. \tag{а}$$

Упрощенная оценка приближенного доверительного интервала может быть получена с помощью правила трех сигм; с большей вероятностью (если распределение нормально, то вероятностью большей чем 0,99) можно ожидать, что

$$\bar{x}_в \pm 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 19{,}96 \pm 3 \cdot \frac{0{,}69}{10} = 19{,}96 \pm 0{,}2.$$

Следовательно,

$$19{,}76 < a < 20{,}16 \tag{б}$$

Полученный интервал (б), как и следовало ожидать, немного шире, чем интервал (а).

§ 3 Отыскание параметров уравнения прямой линии по опытным данным. Метод наименьших квадратов

Пусть производится опыт, цель которого является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x (например, зависимости пути, пройденного телом, от времени). Предполагается, что величины x и y связаны функциональной зависимостью: y=φ (x, a, b, c, . . .), где a, b, c, . . . - параметры функциональной зависимости. Вид этой зависимости и требуется определить из опыта, то есть требуется найти параметры a, b, c, ...

Предположим, что в результате опыта мы получили ряд экспериментальных точек (рис. 9.1). Обычно экспериментальные точки на таком графике располагаются не совсем правильным образом — дают некоторый "разброс", то есть обнаруживают случайные отклонения от видимой общей закономерности. Эти отклонения связаны с неизбежными при всяком опыте *ошибками измерения* и другими случайными причинами.

Возникает вопрос, как по этим экспериментальным данным наилучшим образом воспроизвести зависимость y от x?

Желательно обработать экспериментальные данные так, чтобы по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x.

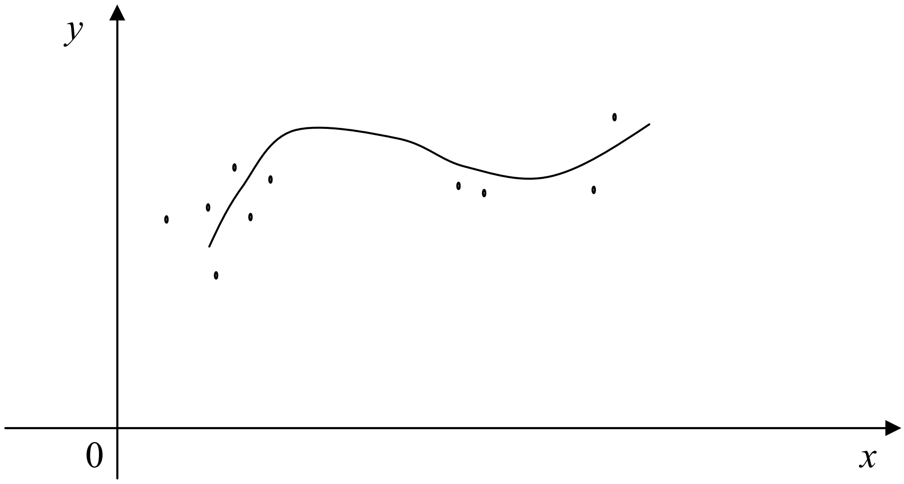


Рис. 9.1

Для решения подобных задач обычно применяется расчетный метод, известный под названием *"метода наименьших квадратов"*. Этот метод дает возможность при заданном виде зависимости $y = \varphi\ (x,\ a,\ b,\ c,\ .\ .\ .)$ так выбрать числовые параметры, a, b, c, . . . , чтобы кривая $y = \varphi\ (x, a, b, c, . . .)$ в известном смысле наилучшим образом соответствовала экспериментальным данным.

Часто этот вид кривой определяется непосредственно по внешнему виду экспериментальной зависимости. Например, экспериментальные точки, изображенные на рис. 9.2, явно наводят на мысль о прямолинейной зависимости вида $y = a \cdot x + b$. Зависимость, изображенная на рис. 9.3, хорошо может быть представлена полигоном второй степени $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ и т.д.

Метод наименьших квадратов имеет перед другими методами существенные преимущества: он приводит к сравнительно простому математическому аппарату определения неизвестных параметров a, b, c, …
.

Рассмотрим подробнее случай линейной зависимости $y = a \cdot x + b$.

Результаты измерений величины x и y записывают в виде статистической таблицы:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

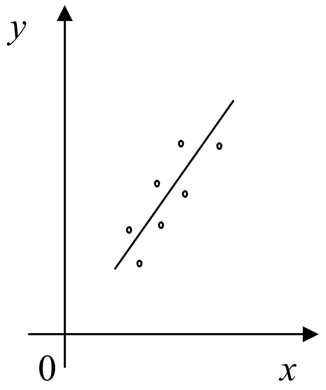


Рис. 9.2

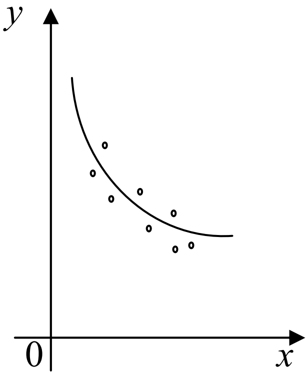


Рис. 9.3

Угловой коэффициент a искомой прямой называется выборочным коэффициентом регрессии y на x и обозначается ρ_{yx}:

$$y = \rho_{yx} \cdot x + b.$$

Параметры a и b можно найти из системы двух линейных уравнений. Предполагается, что значения x_1, x_2, … , x_n и соответствующие им значения y_1, y_2, … , y_n наблюдались по одному разу.

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}\right\}, \text{ откуда}$$

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{9.1}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{9.2}$$

Аналогично можно найти выборочное уравнение регрессии x на y: $x = \rho_{xy} \cdot y + c$, где ρ_{xy} - выборочный коэффициент регрессии x на y.

Пример 9.4.

Рассмотрим пример отыскания параметров уравнений прямой по опытным данным, приведенным в таблице:

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Решение.

Для определенности будем искать уравнение $y = a \cdot x + b$. Поскольку различные данные значения x признака X и соответствующие им значения y признака Y наблюдались по одному разу, то группировать данные нет необходимости.

Составим расчетную таблицу для вычисления параметров a и b по формулам (9.1) и (9.2):

Таблица 9.1

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,00	1,25	1,00	1,250
2	1,50	1,40	2,25	2,100
3	3,00	1,50	9,00	4,500
4	4,50	1,75	20,25	4,875
5	5,00	2,25	25,00	11,250
	$\sum_{i=1}^{n} x_i = 15$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 8{,}15$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 57{,}50$	$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i = 26{,}975$

Найдем искомые параметры a и b, для чего подставим вычисленные по таблице 9.1 суммы в формулы (9.1) и (9.2).

$$a = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202;$$

$$b = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{62{,}5} = 1{,}024.$$

Напишем искомое уравнение прямой $y = 0{,}202x + 1{,}024$, которое называется также уравнением линейной регрессии *Y* на *X*.

На рис. 9.4 показаны результаты статистических измерений, взятых из табл. 1, и прямая $y = 0{,}202x + 1{,}024$.

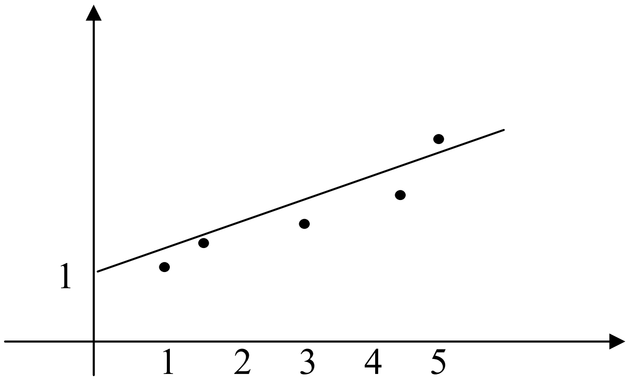


Рис. 9.4

§ 4 Вычисление выборочного коэффициента корреляции

В случае небольшого числа испытаний выборочный коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}_в \bar{y}_в}{nS_x S_y} \qquad (9.3)$$

А уравнения выборочных прямых регрессий по формулам:

$$y - \bar{y}_в = r\frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}_в) \qquad (9.4)$$

и прямой регрессии *X* на *Y*

$$x - \bar{x}_в = r\frac{S_x}{S_y}(y - \bar{y}_в) \qquad (9.5)$$

Если число испытаний велико, то для упрощения вычислений данные можно сгруппировать в виде, так называемой, корреляционной таблицы:

y / x	y_1	y_2	………………… $.x_t$	$\sum$
x_1	n_{11}	n_{12}	………………….. n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	………………….. n_{2l}	m_2
. . . .	. . . .	. . . .		. . . .
x_k	n_{11}	n_{11}	………………….. n_{kl}	m_k
$\sum$	n_1	n_2	……………………. n_l	n

где $m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}, \quad n_j = \sum_{j=1}^{k} n_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{k} m_i = \sum_{j=1}^{l} n_j = n.$

Тогда формула (9.3) принимает вид

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} x_i y_j - n\overline{x}_в \overline{y}_в}{nS_x S_y} \tag{9.6}$$

Пример 9.5.

В результате n = 10 независимых испытаний над (X, Y) получена таблица значений

x_k	y_k
2,1	3,0
2,1	2,8
2,0	3,0
2,5	2,0
2,8	1,8
2,2	2,5
3,2	1,5
3,2	1,1
3,2	1,0
4,7	1,3

Найти оценки основных числовых характеристик для X, Y; для пары (X, Y).

Записать уравнение линейной регрессии Y на X и X на Y.

Построить графики полученных прямых регрессий.

Решение.

Для удобства вычислений составим таблицу

№	x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2	y_k^2
1	2,1	3,0	6,30	4,41	9,00
2	2,1	2,8	5,88	4,41	7,84
3	2,0	3,0	6,00	4,00	9,00
4	2,5	2,0	5,00	6,25	4,00
5	2,8	1,8	5,04	7,84	3,24
6	2,2	2,5	5,50	4,84	6,25
7	3,2	1,5	4,80	10,24	2,25
8	3,2	1,1	3,52	10,24	1,21
9	4,7	1,0	3,20	10,24	1,00
10		1,3	6,11	22,09	1,69
Сумма	28	20	51,35	84,56	45,48

Используя данные таблицы, находим:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k = \frac{28}{10} = 2{,}8, \qquad \overline{y}_в = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k = \frac{20}{10} = 2{,}0;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - \overline{x}_в^2 = \frac{1}{10}\cdot 84{,}56 - 2{,}8^2 = 0{,}616;$$

$$S_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} y_k^2 - \overline{y}_в^2 = \frac{1}{10}\cdot 45{,}48 - 2^2 = 0{,}548;$$

$$S_x \approx 0{,}785, \qquad S_y \approx 0{,}74;$$

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{10} x_k y_k - n\overline{x}_в\overline{y}_в}{nS_xS_y} = \frac{51{,}36 - 10\cdot 2{,}8\cdot 2}{10\cdot 0{,}785\cdot 0{,}74} \approx -0{,}8;$$

$$r\frac{S_y}{S_x} = -0{,}8\cdot\frac{0{,}74}{0{,}785} = -0{,}75, \quad r\frac{S_x}{S_y} = -0{,}8\cdot\frac{0{,}785}{0{,}74} = -0{,}85.$$

Подставляя полученные результаты в уравнение прямой регрессии *Y* на *X*, получаем

$$y - 2 = -0{,}75(x - 2{,}8),$$
$$y = -0{,}75x + 4{,}1.$$

и в уравнение прямой регрессии *Y* на *X*

$$x - 2{,}8 = -0{,}85(y - 2),$$
$$x = -0{,}85y + 4{,}5.$$

См. рис. 9.5.

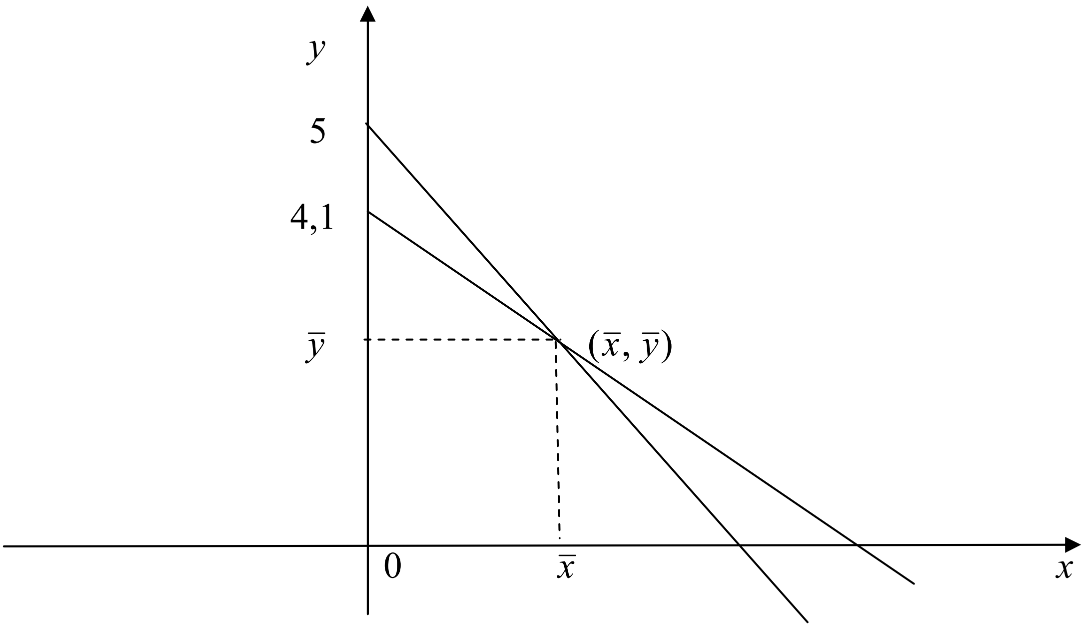


Рис. 9.5

Пример 9.6. В таблице даны результаты измерений массы (*x* кг) и роста (*y* см) 50 учеников.

x \ *y*	117,5-122,5	122,5-127,5	127,5-132,5	132,5-137,5	137,5-142,5	142,5-147,5	147,5-152,5	m_i
22,5-25,5	1	-	-	-	-	-	-	1
25,5-28,5	3	2	1	1	-	-	-	7
28,5-31,5	-	6	5	6	1	-	-	18
31,5-34,5	-	1	5	7	4	1	-	18
34,5-37,5	-	-	-	2	2	1	1	6
n_i	4	9	11	16	7	2	1	50

Определить коэффициент корреляции признаков Y и X.

Записать уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение.

Перепишем корреляционную таблицу, принимая за варианты середины исходных интервалов.

$x_1 = 24, \quad x_2 = 27, \quad x_3 = 30, \quad x_4 = 33, \quad x_5 = 36;$

$y_1 = 120, \quad y_2 = 125, \quad y_3 = 130, \quad y_4 = 135, \quad y_5 = 140,$

$y_6 = 145, \quad y_7 = 150.$

y / x	120	125	130	135	140	145	150	m_i
24	1	-	-	-	-	-	-	1
27	3	2	1	1	-	-	-	7
30	-	6	5	6	1	-	-	18
33	-	1	5	7	4	1	-	18
36	-	-	-	2	2	1	1	6
n_i	4	9	11	16	7	2	1	50

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i = \frac{1}{50}(1\cdot 24 + 7\cdot 27 + 18\cdot 30 + 18\cdot 33 + 6\cdot 36) = 31{,}26;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i^2 = \frac{1}{50}(1\cdot 24^2 + 7\cdot 27^2 + 18\cdot 30^2 + 18\cdot 33^2 + 6\cdot 36^2) = 985{,}14;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} m_i x_i^2 - \overline{x}_в = 985{,}14 - 31{,}26^2 = 7{,}9524; \quad S_x = 2{,}82.$$

$$\overline{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i = \frac{1}{50}(4\cdot 120 + 9\cdot 125 + 11\cdot 130 + 16\cdot 135 + 7\cdot 140 + 2\cdot 145 + 1\cdot 150) = 132{,}3;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i^2 = \frac{1}{50}(4\cdot 120^2 + 9\cdot 125^2 + 11\cdot 130^2 + 16\cdot 135^2 + 7\cdot 140^2 + 2\cdot 145^2 + 1\cdot 150^2) =$$
$$= 17549{,}5;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} n_i y_i^2 - \overline{y}_в = 17549{,}5 - 132{,}3^2 = 46{,}21; \quad S_y = 6{,}8.$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7} n_{ij} x_i y_j = 1\cdot 24\cdot 120 + 3\cdot 27\cdot 120 + 2\cdot 27\cdot 125 + 1\cdot 27\cdot 130 + 1\cdot 27\cdot 135 + 6\cdot 30\cdot 125 +$$
$$+ 5\cdot 30\cdot 130 + 6\cdot 30\cdot 135 + 1\cdot 30\cdot 140 + 1\cdot 33\cdot 125 + 5\cdot 33\cdot 130 + 7\cdot 33\cdot 135 + 4\cdot 33\cdot 140 +$$
$$+ 1\cdot 33\cdot 145 + 2\cdot 36\cdot 135 + 2\cdot 36\cdot 140 + 1\cdot 36\cdot 145 + 1\cdot 36\cdot 150 = 207450;$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{7} n_{ij} x_i y_i - n\overline{x}_в\overline{y}_в}{nS_x S_y} = \frac{207450 - 50\cdot 31{,}26\cdot 132{,}3}{50\cdot 2{,}82\cdot 6{,}8} \approx 0{,}694$$ — коэффициент корреляции;

$$r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}694\cdot\frac{2{,}82}{6{,}8} = 0{,}288.$$

Подставляя полученные данные в уравнение прямой регрессии Y и X. имеем:

$$x - \overline{x}_в = r\frac{S_x}{S_y}(y - \overline{y}_в),$$

$$x - 31{,}26 = 0{,}288(y - 132{,}3),$$

$$x = 0{,}288y - 6{,}842.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Статистическая оценка.
2. Несмещенная и смещенная статистическая оценка.
3. Выборочная средняя.
4. Групповая средняя.
5. Общая средняя.
6. Выборочная дисперсия.
7. Выборочное среднее квадратическое отклонение.
8. Исправленная выборочная дисперсия.
9. Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.
10. Интервальная оценка.
11. Доверительный интервал.
12. Точность оценки.
13. Метод наименьших квадратов.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Из генеральной совокупности

x_i	1	3	7	12
n_i	8	16	6	10

Найти выборочную среднюю.

2. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_i	1	5	6	8
n_i	6	4	7	3

3. Выручка в магазине от продажи обуви составила соответственно по месяцам следующие значения (млн. руб.):

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0,2	0,5	0,4	0,2	0,4	0,5	0,2	0,2	0,4	0,5	0,4	0,2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

"Теория вероятностей и математическая статистика" один из прикладных разделов курса высшей математики. Он входит в учебный план для студентов экономических специальностей отдельной дисциплиной. При изучении этого раздела математики студент-заочник выполняет одну контрольную работу.

Приступая к выполнению контрольной работы, студент-заочник должен изучить все вопросы рабочей программы данного раздела.

Вариант заданий для выполнения контрольной работы студент выбирает по таблице 1, если предпоследняя цифра учебного шифра - нечетное число и по таблице 2, если предпоследняя цифра - четное число или 0. Номера решаемых задач определяются последней цифрой учебного шифра. Например, если последние две цифры образуют число 53, то студент-заочник решает все задачи третьего варианта из таблицы 1.

При выполнении контрольной работы надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работа, выполненная без соблюдения этих правил, не зачитывается и возвращается студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы. Заголовок работы надо поместить на обложке тетради; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и почтовый адрес студента.

3. Решения задач следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

4. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

Например, условие задачи должно быть переписано так:

"Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 15, среднее квадратическое отклонение равно 2. Найти:

1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (9, 19);

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X - 15 окажется меньше 3".

5. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия.

6. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, не зачитывается.

7. После получения прорецензированной работы (как незачтенной, так и зачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты.

Если рецензент предлагает переделать в работе ту или иную задачу или дать более обстоятельное решение и прислать эти исправления для проверки, то это следует выполнить в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться повторным представлением исправленных решений отдельных задач, вся контрольная работа должна выполняться заново.

Вместе с высылаемыми исправлениями должна обязательно находиться прорецензированная ранее работа и рецензия на нее. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями рецензента.

Таблица 1

№ варианта	**Номера решаемых задач**					
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
7	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7	6.7
8	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8	6.8
9	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9	6.9
0	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10	6.10

Таблица 2

№ варианта	**Номера решаемых задач**					
1	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11	6.11
2	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12	6.12
3	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13	6.13
4	1.14	2.14	3.14	4.14	5.14	6.14
5	1.15	2.15	3.15	4.15	5.15	6.15
6	1.16	2.16	3.16	4.16	5.16	6.16
7	1.17	2.17	3.17	4.17	5.17	6.17
8	1.18	2.18	3.18	4.18	5.18	6.18
9	1.19	2.19	3.19	4.19	5.19	6.19
0	1.20	2.20	3.20	4.20	5.20	6.20

ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1.1 – 1.10

Партия из *n* пар мужской и женской обуви содержит *m* пар мужских сапог. Из данной партии выбирают наугад *k* пар обуви. Найти вероятность того, что среди отобранной обуви: 1) *l* пар женских сапог; 2) хотя бы одна пара будет женских сапог.

данные	№ задачи									
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**1.7**	**1.8**	**1.9**	**1.10**
n	10	9	11	11	9	10	12	12	12	9
m	7	7	6	6	6	6	7	5	8	5
k	5	5	6	5	5	6	5	7	5	5
l	2	2	3	2	3	3	2	2	1	2

Задача 1.11 – 1.20

В поле работают 3 комбайна. Вероятность того, что в течение рабочего дня будет поломка в первом комбайне, равна P_1, во втором — P_2; в третьем P_3. Найти вероятность безотказной работы в течение дня: 1) только двух комбайнов; 2) хотя бы одного комбайна.

данные	№ задачи										
	1.11	**1.12**	**1.13**	**1.14**	**1.15**	**1.16**	**1.17**	**1.18**	**1.19**	**1.20**	**1.«α»**
P_1	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2
P_2	0,2	0,3	0,2	0,3	0,3	0,1	0,2	0,4	0,3	0,4	0,4
P_3	0,3	0,4	0,4	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,3	0,6

Задача 2.1. – 2.10

Статистика показывает, что *a* % покупателей необходима одежда 48-го размера. Найти вероятность того, что из *N* покупателей одежда 48-го размера необходима хотя бы *m* покупателям.

данные	№ задачи									
	2.1	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**2.5**	**2.6**	**2.7**	**2.8**	**2.9**	**2.10**
a	25	25	25	25	50	50	50	50	75	75
N	6	7	6	7	6	5	5	6	60	7
m	3	4	4	5	4	3	2	3	4	5

Задача 2.11. – 2.20

В некотором вузе на экономическом факультете девушки составляют *a* %. Найти вероятность того, что из *N* студентов этого факультета юноши составляют не более *m* студентов

данные	№ задачи										
	2.11	**2.12**	**2.13**	**2.14**	**2.15**	**2.16**	**2.17**	**2.18**	**2.19.**	**2.20**	**2.«a»**
a	85	85	85	85	75	75	75	75	75	75	85
N	700	600	600	700	700	700	600	600	750	750	750
m	180	160	100	110	182	180	165	152	185	190	115

Задача 3.1 – 3.10

Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна P_1; второго экзамена — P_2, третьего — P_3. Записать ряд распределения случайной величины X — числа сданных экзаменов. Составить функцию распределения $F(x)$, построить её график. Найти $M(X)$; $D(X)$, $\sigma(X)$.

данные	№ задачи									
	3.1	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**3.6**	**3.7**	**3.8**	**3.9**	**3.10**
P_1	0,9	0,95	0,9	0,8	0,9	0,95	0,9	0,8	0,85	0,9
P_2	0,8	0,9	0,8	0,8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,85	0,85
P_3	0,75	0,8	0,8	0,7	0,8	0,9	0,6	0,6	0,7	0,7

Задача 3.11 — 3.20

На некотором производстве работают *n* мужчин и *m* женщин. По табельным **номерам наугад отобраны *k* человека. Записать ряд распределения случайной величины *X* — числа женщин среди случайно отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти** $M(X)$; $D(X)$, $\sigma(X)$.

данные	№ задачи										
	3.11	**3.12**	**3.13**	**3.14**	**3.15**	**3.16**	**3.17**	**3.18**	**3.19**	**3.20**	**3.«a»**
n	7	7	9	8	8	9	9	9	9	10	10
m	5	6	6	5	6	5	6	7	7	5	6
k	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Задача 4.1 – 4.20

Случайная величина *X* задана функцией распределения *F*(*x*).
Требуется найти:
1) плотность распределения вероятностей *f*(*x*);
2) математическое ожидание *M*(*X*) и дисперсию *D*(*X*);
3) построить графики функций *F*(*x*) и *f*(*x*);
4) найти вероятность попадания случайной величины (*СВ*) *X* в интервал (*a*; *b*).

4.1 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<\dfrac{3\pi}{4},\\ \cos 2x, \text{ если } \dfrac{3\pi}{4}\le x\le\pi,\\ 1, \text{ если } x>\pi;\end{cases}$

$a=\dfrac{3\pi}{4};\quad b=\dfrac{5\pi}{6}.$

4.2 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{1}{24}\left(x^2+2x\right), \text{ если } 0\le x\le 4,\\ 1, \text{ если } x>4;\end{cases}$

$a=0;\quad b=1.$

4.3 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<-1,\\ \dfrac{1}{9}\left(x+1\right)^2, \text{ если } -1\le x\le 2,\\ 1, \text{ если } x>2;\end{cases}$

$a=1;\quad b=2.$

4.4 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{x^2}{100}, \text{ если } 0\le x\le 10,\\ 1, \text{ если } x>10;\end{cases}$

$a=5;\quad b=10.$

4.5 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<1,\\ \dfrac{1}{2}\left(x-1\right), \text{ если } 1\le x\le 3,\\ 1, \text{ если } x>3;\end{cases}$

$a=2;\quad b=3.$

4.6 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1-\sin x, \text{ если } \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi,\\ 1, \text{ если } x>\pi;\end{cases}$

$a=\dfrac{\pi}{2};\quad b=\dfrac{3\pi}{4}.$

4.7 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ если } 0\le x\le 3,\\ 1, \text{ если } x>3;\end{cases}$

$a=0;\quad b=1.$

4.8 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{1}{33}\left(3x^2+2x\right), \text{ если } 0\le x\le 3,\\ 1, \text{ если } x>3;\end{cases}$

$a=0;\quad b=2.$

4.9 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0,\\ \dfrac{x^2}{49}, \text{ если } 0\le x\le 7,\\ 1, \text{ если } x>7;\end{cases}$

$a=6;\quad b=7.$

4.10 $F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<\dfrac{3\pi}{2},\\ \cos x, \text{ если } \dfrac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi,\\ 1, \text{ если } x>2\pi;\end{cases}$

$a=\dfrac{3\pi}{2};\quad b=\dfrac{7\pi}{4}.$

4.11 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{x}{3},\ если\ 0\le x\le 3,\\ 1,\ если\ x>3;\end{cases}$

$a=1;\quad b=2.$

4.12 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \sin x,\ если\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ если\ x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

$a=\dfrac{\pi}{6};\quad b=\dfrac{\pi}{3}.$

4.13 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{1}{15}\left(x^2+2x\right),\ если\ 0\le x\le 3,\\ 1,\ если\ x>3;\end{cases}$

$a=0;\quad b=2.$

4.14 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right),\ если\ 0\le x\le 2,\\ 1,\ если\ x>2;\end{cases}$

$a=0;\quad b=1.$

4.15 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{x}{5},\ если\ 0\le x\le 5,\\ 1,\ если\ x>5;\end{cases}$

$a=3;\quad b=4.$

4.16 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{1}{6}\left(x^2+x\right),\ если\ 0\le x\le 2,\\ 1,\ если\ x>2;\end{cases}$

$a=0;\quad b=1.$

4.17 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{x}{4},\ если\ 0\le x\le 4,\\ 1,\ если\ x>4;\end{cases}$

$a=2;\quad b=3.$

4.18 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<-2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2},\ если\ -2\le x\le 2,\\ 1,\ если\ x>2;\end{cases}$

$a=-1;\quad b=1$

4.19 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<2,\\ \dfrac{1}{2}x-1,\ если\ 2\le x\le 4,\\ 1,\ если\ x>4;\end{cases}$

$a=3;\quad b=4$

4.20 $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<-1,\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4},\ если\ -1\le x\le \dfrac{1}{3},\\ 1,\ если\ x>\dfrac{1}{3};\end{cases}$

$a=0;\quad b=\dfrac{1}{2}$

4.«α» $F(x)=\begin{cases}0,\ если\ x<0,\\ \dfrac{1}{6}x,\ если\ 0\le x\le 6,\\ 1,\ если\ x>6;\end{cases}$

$a=2;\quad b=5.$

Задача 5.1 – 5.20

Службой городского водоканала проверен расход воды в течение месяца в *n* квартирах *N*–квартирного дома, в результате получены значения (см. таблицу). Определить доверительный интервал для оценки среднего расхода воды в доме с надежностью γ = 0,95.

№ задачи											
5.1		**5.2**		**5.3**		**5.4**		**5.5**		**5.6**	
расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир
5-7	1	8-10	2	7-9	3	6-8	3	5-7	2	5-7	3
7-9	2	10-12	3	9-11	3	8-10	3	7-9	3	7-9	1
9-11	2	12-14	3	11-13	4	10-12	2	9-11	3	9-11	2
11-13	3	14-16	2	13-15	2	12-14	3	11-13	3	11-13	3
13-15	4	16-18	2	15-17	1	14-16	3	13-15	2	13-15	3
15-17	4	18-20	1	17-19	2	16-18	1	15-17	2	15-17	3
***N*=80**		***N*=70**		***N*=65**		***N*=70**		***N*=80**		***N*=75**	

№ задачи											
5.7		**5.8**		**5.9**		**5.10**		**5.11**		**5.12**	
расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир
4-6	2	8-10	3	4-8	1	5-9	2	4-8	1	7-9	2
6-8	3	10-12	3	8-12	3	9-11	3	8-10	3	9-11	2
8-10	3	12-14	2	12-16	3	11-13	3	10-12	3	11-13	5
10-12	2	14-16	1	16-20	2	13-15	2	12-14	1	13-15	4
12-14	2	16-18	3	20-24	2	15-17	1	14-16	2	15-17	2
14-16	3	18-20	3	24-28	1	17-19	1	16-18	1	17-19	1
***N*=65**		***N*=70**		***N*=75**		***N*=60**		***N*=80**		***N*=65**	

№ задачи											
5.13		**5.14**		**5.15**		**5.16**		**5.17**		**5.18**	
расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир
6-8	4	3-7	3	5-7	1	2-6	2	2-4	1	2-6	2
8-10	2	7-11	3	7-9	3	6-8	3	4-6	3	6-10	2
10-12	5	11-15	2	9-11	3	8-10	3	6-8	3	10-14	3
12-14	3	15-19	1	11-13	2	10-12	2	8-10	1	14-20	2
14-16	2	19-23	3	13-15	2	12-14	1	10-12	2	20-24	3
16-18	4	23-27	3	15-17	1	14-16	1	12-14	1	24-28	1
***N*=80**		***N*=60**		***N*=60**		***N*=75**		***N*=80**		***N*=65**	

№ задачи					
5.19		**5.20**		**5.«*α*»**	
расход воды	число квартир	расход воды	число квартир	расход воды	число квартир
7-9	3	6-8	5	6-10	5
9-11	3	8-10	5	10-14	5
11-13	7	10-12	4	14-18	2
13-15	5	12-14	3	18-22	3
15-17	2	14-16	2	22-26	1
17-19	5	16-18	1	26-30	1
***N*=75**		***N*=80**		***N*=80**	

Задача 6.1 – 6.20

В таблице приводятся данные стоимости продукции *Y* (тыс. руб.) и количество выпускаемой продукции *X* (тыс. штук) по данным *N* предприятий.

Найти: 1) числовые характеристики $\overline{X}, \overline{Y}, S_x, S_y$; 2) коэффициент корреляции *r*; 3) уравнение линейной регрессии *Y* на *X*; 4) построить корреляционное поле и график регрессии *Y* на *X*.

№ задачи											
6.1		**6.2**		**6.3**		**6.4**		**6.5**		**6.6**	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
2	2,8	1	1,5	1	2,1	1	1,2	2	3,5	2	1,1
3	2	2	1,8	2	2,3	2	1,5	3	3,3	3	1,4
4	3,2	3	1,7	3	1,9	3	1,3	4	3,2	4	1,2
5	2,4	4	1,9	4	2,2	4	1,4	5	4,1	5	1,2
6	2,5	5	2	5	2,5	5	1,3	6	4,1	6	1,3
7	3	6	2,1	6	2,1	6	1,6	7	3,7	7	1,5
8	3,2	7	2,5	7	2,4	7	1,7	8	3,8	8	1,4

№ задачи											
6.7		**6.8**		**6.9**		**6.10**		**6.11**		**6.12**	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
3	2,1	4	1,5	4	1,6	4	1,5	4	5,1	1	1,7
4	2,5	5	1,3	5	1,8	5	1,4	5	5,6	2	1,9
5	2,3	6	1,6	6	1,7	6	1,6	6	5,2	3	2,1
6	2,4	7	1,5	7	1,7	7	1,8	7	4,9	4	1,3
7	2,2	8	1,7	8	1,9	8	2,1	8	5,3	5	1,7
8	2,1	9	1,3	9	2,1	9	2,3	9	5,7	6	1,9
9	2,6	10	1,9	10	2,0	10	2,2	10	5,6	7	2,2

№ задачи											
6.13		**6.14**		**6.15**		**6.16**		**6.17**		**6.18**	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1	2,2	1	1,9	1	2	1	1,5	3	2,5	3	1,3
2	2,5	2	1,8	2	2,1	2	1,6	4	2,4	4	1,4
3	2,3	3	1,7	3	2,2	3	1,4	5	2,3	5	1,2
4	2,1	4	1,9	4	2,1	4	1,7	6	2,1	6	1,2
5	2,2	5	1,5	5	1,9	5	1,8	7	2,2	7	1,1
6	2,5	6	1,6	6	1,6	6	1,6	8	2,3	8	1,0
7	2,8	7	1,7	7	1,5	7	1,4	9	2,0	9	1,1

№ задачи					
6.19		**6.20**		**6.«α»**	
x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
2	1,5	2	2,1	2	2
3	1,3	3	2,5	3	1,9
4	1,4	4	2,1	4	2,2
5	1,2	5	2,2	5	2,4
6	1,1	6	2,1	6	2,3
7	1,4	7	2,3	7	2,5
8	1,3	8	2,4	8	2,5

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА «α»

Задача 1. «α»

В поле работают 3 комбайна. Вероятность того, что в течение рабочего дня будет поломка в первом комбайне, равна 0,2; во втором — 0,4; в третьем — 0,5. Найти вероятность безотказной работы в течение дня: 1) только двух комбайнов; 2) хотя бы одного комбайна.

Решение. Введем обозначения: A_1 — событие состоящее в том, что работает без поломок 1-й комбайн, A_2 — 2-й комбайн, A_3 — 3-й комбайн, тогда $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ - противоположные события A_1, A_2, A_3. По условию задачи имеем: $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}5$, $P(\overline{A}_1) = 0{,}2$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}4$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}5$.

1) Пусть событие A состоит в том, что в течение дня безотказно будут работать два комбайна.

$$A = A_1 \times A_2 \times \overline{A}_3 + A_1 \times \overline{A}_2 \times A_3 + \overline{A}_1 \times A_2 \times A_3.$$

Так как A_1, A_2, A_3 являются независимыми событиями, а события $A_1 \times A_2 \times \overline{A}_3$, $A_1 \times \overline{A}_2 \times A_3$, $\overline{A}_1 \times A_2 \times A_3$ — несовместные, то по теореме сложения несовместных событий и умножения независимых имеем

$P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(\overline{A}_3) + P(A_1) \times P(\overline{A}_2) \times P(A_3) + P(\overline{A}_1) \times P(A_2) \times P(A_3) =$
$= 0{,}8 \times 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}8 \times 0{,}4 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}24 + 0{,}16 + 0{,}06 = 0{,}46.$

2) Пусть событие B состоит в том, что работает хотя бы один комбайн, $\overline{B}$ — не работает ни один из трех комбайнов.

$\overline{B} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2 \times \overline{A}_3$, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1 \times \overline{A}_2 \times \overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1) \times P(\overline{A}_2) \times P(\overline{A}_3)$,
$P(B) = 1 - 0{,}2 \times 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}96.$

Задача 2. «α»

В некотором вузе на экономическом факультете девушки составляют 85 %. Найти вероятность того, что их 750 студентов этого факультета юноши составляют не более 115 студентов.

Решение. По условию задачи $n = 750$, $p = 0{,}15$, $q = 0{,}85$, $m_1 = 0$, $m_2 = 115$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа.

$P_{750}(0 \le m \le 115) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 750 \cdot 0{,}15}{\sqrt{750 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} = \frac{-112{,}5}{9{,}78} \approx -11{,}5,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{115 - 750 \cdot 0{,}15}{\sqrt{750 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85}} = \frac{2{,}5}{9{,}78} \approx 0{,}26,$$

а $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа, значение которой даны в таблице приложения 2. Находим по указанной таблице $\Phi(-11,5)=-0,5$ и $\Phi(0,26)=0,1026$.

$P_{750}(0\le m\le 250)=0,1026+0,5=0,6026$.

Задача 3. «α»

На некотором производстве работаю 10 мужчин и 6 женщин. По табельным номерам наугад отобраны 4 человека. Записать ряд распределения случайной величины *X* — числа женщин среди случайно отобранных работников. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение.

Пусть X — число женщин среди случайно отобранных 4 человек. По условию задачи случайная величина (*СВ*) X может принимать следующие значения: $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2;\ x_4=3;\ x_5=4.$

Находим вероятности для всех возможных значений случайной величины *X*.

$$P(x=0)=\frac{C_{10}^4}{C_{16}^4}=0,115;\quad P(x=1)=\frac{C_6^1\,C_{10}^3}{C_{16}^4}=0,396;\quad P(x=2)=\frac{C_6^2\,C_{10}^2}{C_{16}^4}=0,371;$$

$$P(x=3)=\frac{C_6^3\,C_{10}^1}{C_{16}^4}=0,110;\qquad P(x=4)=\frac{C_6^4}{C_{16}^4}=0,008.$$

Распределение имеет следующий вид.

X	0	1	2	3	4
$P(x)$	0,115	0,396	0,371	0,110	0,008

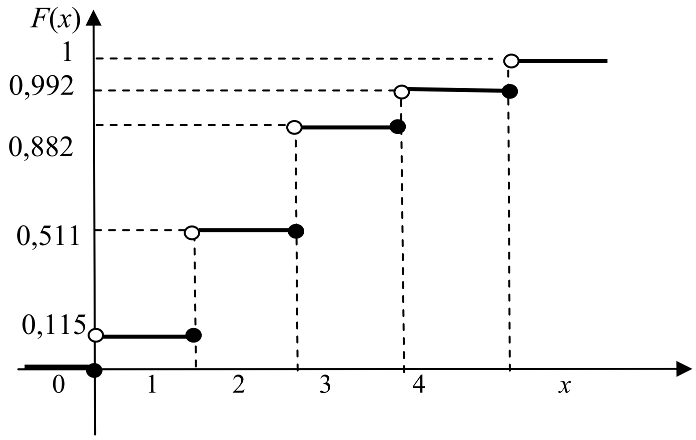
Выполним проверку: $\sum_{i=1}^{5}p_i=1$.

Составим функцию распределения случайной величины *X*.

$$F(x)=P(X<x).$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ 0+0,115 & при\quad x<0\le 1,\\ 0,115+0,396 & при\quad 1<x\le 2,\\ 0,511+0,371 & при\quad 2<x\le 3,\\ 0,882+0,110 & при\quad 3<x\le 4,\\ 0,992+0,008 & при\quad x>4.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ 0,115 & при\quad x<0\le 1,\\ 0,511 & при\quad 1<x\le 2,\\ 0,882 & при\quad 2<x\le 3,\\ 0,992 & при\quad 3<x\le 4,\\ 1 & при\quad x>4.\end{cases}$$

Построим график $F(x)$ см рисунок.



Найдем числовые характеристики составленного распределения

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i\, p(x_i)=0\cdot 0{,}115+1\cdot 0{,}396\ +2\cdot 0{,}371+3\cdot 0{,}11+4\cdot 0{,}008=$$

$$=0{,}396+0{,}742+0{,}33+0{,}032=1{,}5\,;$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=0^2\cdot 0{,}115+1^2\cdot 0{,}396+2^2\cdot 0{,}371+3^2\cdot 0{,}11+$$

$$+4^2\cdot 0{,}008-1{,}5^2=0{,}396+1{,}484+0{,}99+0{,}128-2{,}25=0{,}748;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}86$$

Задача 4. «α» Случайная величина *X* задана функцией распределения *F*(*x*).

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/6\,x, & 0\le x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Требуется найти:
1) плотность распределения вероятностей *f* (*x*);
2) математическое ожидание *M*(*X*) и дисперсию *D* (*X*);
3) построить графики функций *F* (*x*) и *f* (*x*);
4) найти вероятность попадания *СВ X* в интервал (*a*; *b*).

Решение.
плотности распределения

$$1)\ f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/6\,, & 0\le x\le 6,\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

2) По определению математического ожидания имеем $M(X)=\int\limits_a^b f(x)x\,dx$

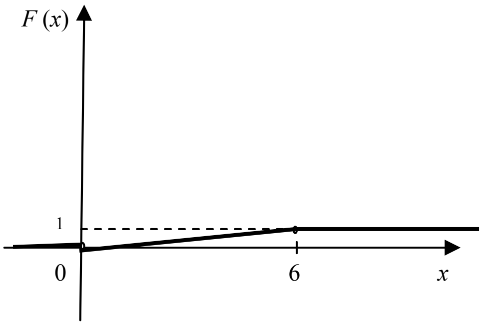
$$M(X)=\int\limits_0^6 \frac{1}{6}x\,dx=\left.\frac{x^2}{12}\right|_0^6=3.$$

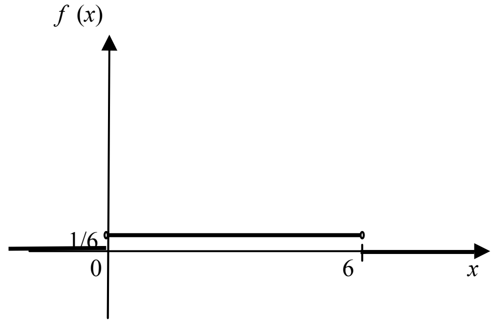
Для вычисления дисперсии применяем ее свойство:

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$

$$M(X^2)=\int\limits_0^6 \frac{1}{6}x^2\,dx=\frac{1}{6}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^6=12, \qquad (M(X))^2=9, \qquad D(X)=12-9=3.$$

Строим графики $F(x)$ и $f(x)$:





Для нахождения вероятности попадания в интервал применяем формулу $P(a \le x \le b)=F(b)-F(a)$. По формуле имеем

$$P(2\le x\le 5)=F(5)-F(2)=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{2}.$$

Задача 5. «α» Службой водоканала проверен расход воды в течение месяца в *n* квартирах *N* — квартирного дома, в результате получены значения (м^3).Определить доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки среднего расхода воды в доме.

Количество м^3	6 - 10	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30
Число квартир	5	5	2	3	1	1
$N = 80$						

Решение.

Считаем выборку бесповторной (при $n = 17 < 30$), в качестве значения случайной величины X — количества воды выбираем середины интервалов, т.е. $x_1 = 8$, $x_2 = 12$, $x_3 = 16$, $x_4 = 20$, $x_5 = 24$, $x_6 = 28$.

Находим среднее выборочное

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{1}{17}\left(8\times 5 + 12\times 5 + 16\times 2 + 20\times 3 + 24\times 1 + 28\times 1\right) = 14{,}35 .$$

Находим выборочную дисперсию

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{16}\left(\left(8-14{,}35\right)^2\times 5 + \left(12-14{,}35\right)^2\times 5 + \left(16-14{,}35\right)^2\times 2 + \left(20-14{,}35\right)^2\times 3 + \right.$$
$$\left. + \left(24-14{,}35\right)^2\times 1 + \left(28-14{,}35\right)^2\times 1\right) = 38{,}12$$

Вычисляем предельную ошибку выборки по формуле $\Delta = t_{n-1}\frac{\bar{S}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$.

По данным задачи n = 17, N = 80. При γ = 0,95 получим $t_{16} = 2{,}12$ из Приложения 3, тогда

$$\Delta = 2{,}12\times\frac{6{,}17}{\sqrt{17}}\sqrt{1-\frac{17}{80}} = 2{,}83.$$

Получаем доверительный интервал

$$\bar{x} - \Delta < a < \bar{x} + \Delta \quad\Rightarrow\quad 14{,}35 - 2{,}83 < a < 14{,}35 + 2{,}83,$$
$$11{,}52 < a < 17{,}18$$

Задача 6. «*а*» В таблице проводятся данные себестоимости продукции *Y* (тыс. руб.) и количество выпускаемой продукции *X* (тыс. штук) по данным *N* предприятий.

Найти: 1)числовые характеристики $\bar{x}_в, \bar{y}_в, S_x, S_y$**;**

2) коэффициент корреляции *r*;

3) уравнение прямой регрессии *Y* на *X* ;

4) Построить корреляционное поле и график регрессии *Y* на *X*.

X	2	3	4	5	6	7	8
Y	2	1,9	2,2	2,4	2,3	2,5	2,5

Решение. Для вычислений составим таблицу

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
1	2	2	4	4	4
2	3	1,9	9	3,61	5,7
3	4	2,2	16	4,84	8,8
4	5	2,4	25	5,76	12
5	6	2,3	36	5,29	13,8
6	7	2,5	49	6,25	17,5
7	8	2,5	64	6,25	20
$\sum$	35	15,8	203	36	81,8

1) Находим выборочные средние

$$\bar{x}_в = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7} x_k = \frac{35}{7} = 5; \quad \bar{y}_в = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7} y_k = \frac{15{,}8}{7} = 2{,}26.$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{7} x_k^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{29-25} = 2, \qquad S_y = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{K=1}^{7} y_k^2 - \bar{Y}^2} = \sqrt{5{,}14-5{,}11} = 0{,}17$$

2) Находим коэффициент корреляции по формуле

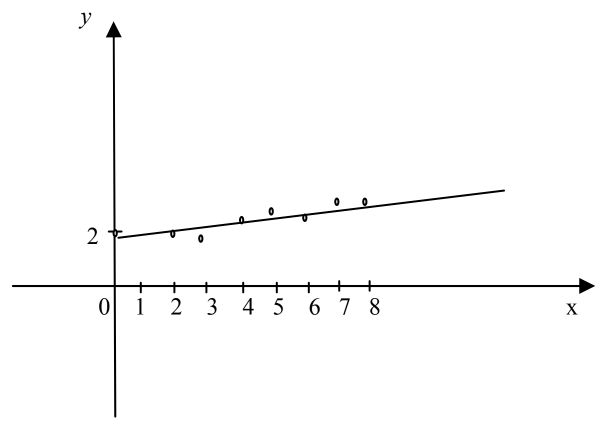
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - n\cdot \bar{x}_в \bar{y}_в}{n\cdot S_x S_y} = \frac{81{,}8 - 7\cdot 5\cdot 2{,}26}{7\cdot 2\cdot 0{,}17} = 1{,}13\,.$$

3) Для составления уравнения линейной регрессии Y на X воспользуемся формулой $y - \bar{y}_в = \rho_{yx}(x - \bar{x}_в)$, где $\rho_{yx} = r\dfrac{S_y}{S_x} = 1{,}13\cdot\dfrac{0{,}17}{2} = 0{,}1$.

Подставляем полученные результаты в уравнение прямой регрессии и получаем:

$$y - 2{,}26 = 0{,}1\,(x-5)$$
$$y = 0{,}1\,x - 1{,}76$$

4) Построим корреляционное поле и график регрессии Y на X:



СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Случайные события

1. Основные формулы комбинаторики

а) перестановки $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n.$

б) размещения $A_n^m = n \cdot (n-1) \ldots (n-m+1).$

в) сочетания $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

2. Классическое определение вероятности события

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

3. Вероятность суммы событий

а) $P(A+B) = P(A) + P(B)$ — для несовместных

б) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ — для совместных

4. Вероятность произведения событий

а) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ — для независимых

б) $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ — для зависимых

5. Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$$

6. Формула Байеса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}$$

7. Формула Бернули

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \ q = 1-p$$

8. Наивероятнейшее число наступления события

$$np - q \le m_0 \le np + p, \ q = 1-p$$

9. Локальная формула Лапласа

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \ x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \ p \ne 0, \ p \ne 1$$

10. Интегральная формула Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \ x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Случайные величины

11. Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	y_1	y_2	…	y_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

12. Функция распределения (интегральная функция)

$$F(x) = P(X < x)$$

13. Плотность распределения (дифференциальная функция)

$$f(x) = F'(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

14. Связь функции распределения с плотностью распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

15. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

а) $P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

б) $P(\alpha \le x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

16. Математическое ожидание случайной величины

а) $M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$ — для дискретной

б) $M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ — для непрерывной

17. Дисперсия случайной величины

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2] - m_x^2$$

а) $D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - m_x^2$ — для дискретной

б) $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2$ — для непрерывной

18. Среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$G[X] = \sqrt{D[X]}$$

19. Начальный момент r – го порядка случайной величины

$\nu_r = M[X^r]$, в частности $\nu_1 = M[X]$

20. Центральный момент r – го порядка случайной величины

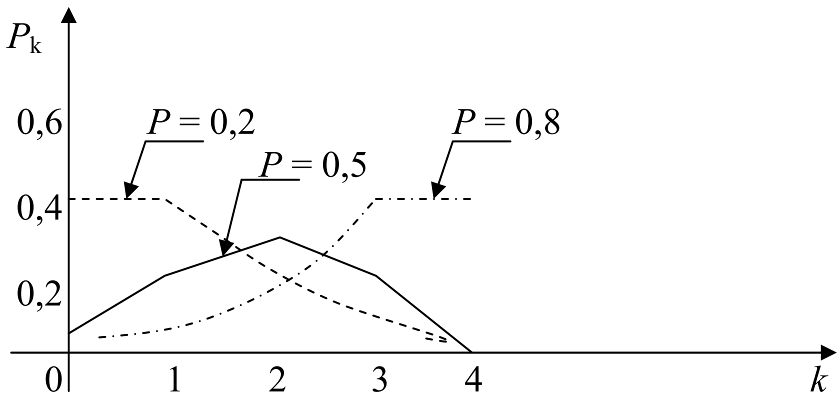
$\mu_r = M[(X - m_x)^r]$, в частности $\mu_2 = D[X]$

21. Биноминальное распределение (дискретное)

x_k	0	1	…	k	…	n
p_k	q^n	npq^{n-1}		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		p^n

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1, \;\; q = 1 - p$$

$M[X] = np, \qquad D[X] = npq, \qquad \sigma[X] = \sqrt{npq}$

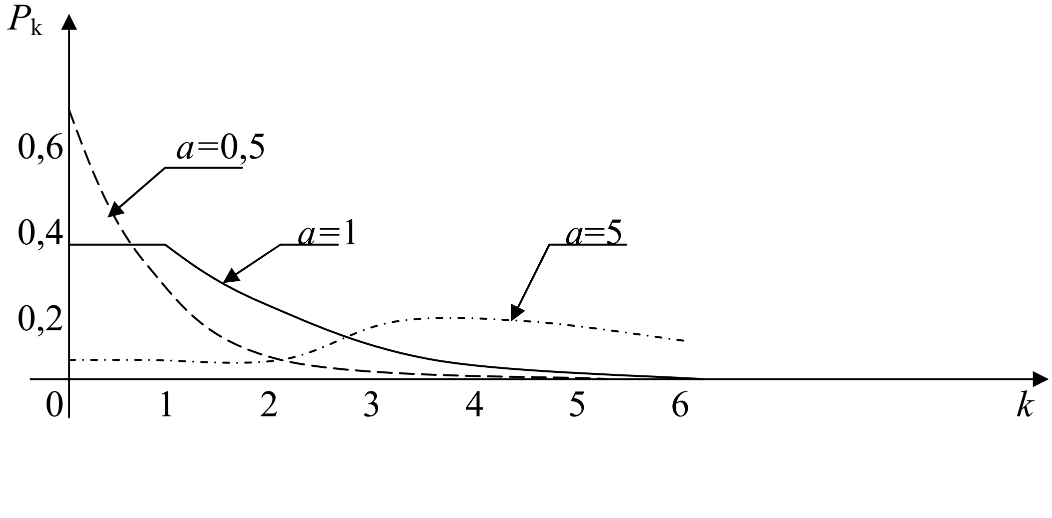


22. Пуассоновское распределение (дискретное)

x_k	0	1	…	k	…
p_k	e^{-a}	ae^{-a}	…	$\dfrac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}$	…

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} = 1; \quad a > 0$$

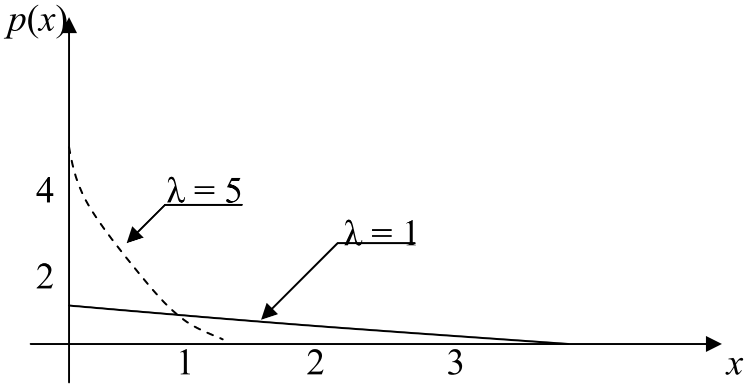
$M[X] = D[X] = a, \qquad \sigma[X] = \sqrt{a}$



23. Показательное распределение (непрерывное)

$$p(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x},\ x\ge 0\end{cases},\quad \text{где } \lambda>0;\quad \int\limits_0^{+\infty}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=1$$

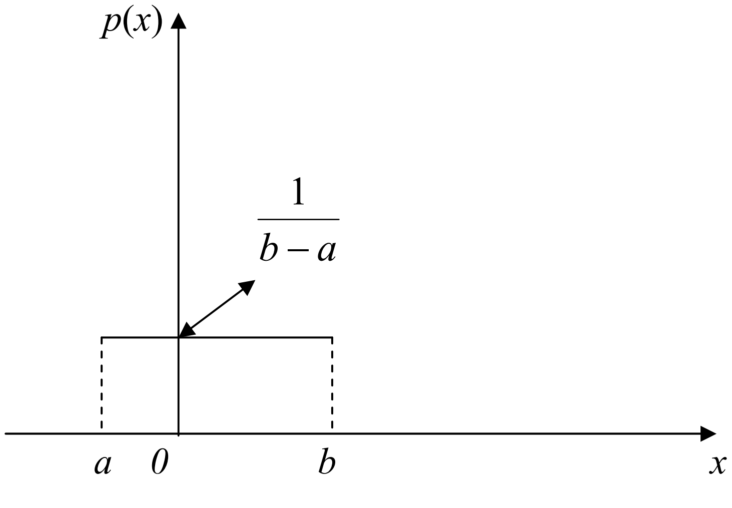
$$M[\mathrm{X}]=\sigma[\mathrm{X}]=\frac{1}{\lambda},\quad D[\mathrm{X}]=\frac{1}{\lambda^2}$$



24. Равномерное распределение (непрерывное)

$$p(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x>b\end{cases}$$

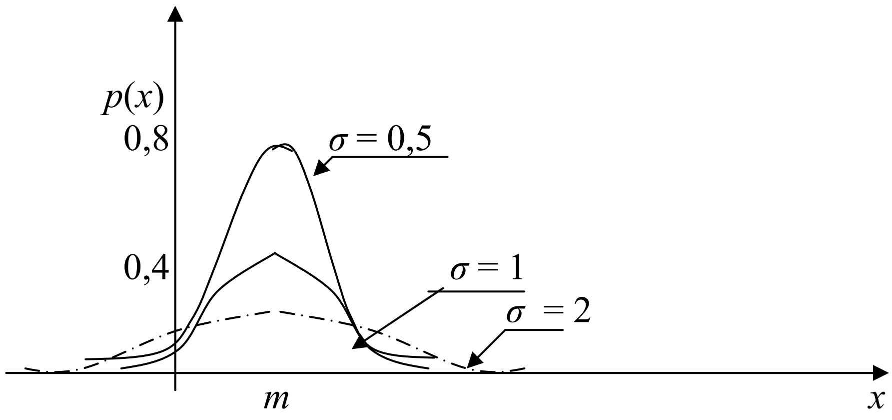
$$M[\mathrm{X}]=\frac{a+b}{2},\ D[\mathrm{X}]=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma[\mathrm{X}]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$



25. Нормальное распределение (непрерывное)

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)$$

$$M[\mathrm{X}]=m,\quad D[\mathrm{X}]=\sigma^2,\quad \sigma[\text{нор}]=\sigma$$



26. Функция Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

27. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

28. Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания m на величину δ

$$P(|X-m|<\delta)=2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

29. Асимметрия

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

30. Эксцесс

$$E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$$

31. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности на величину ε

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\cdot\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Элементы математической статистики

32. *Статистической (эмпирической) функцией распределения выборки* называется функция $F^*(x)$, определяющая для всякого $x \in R$ относительную частоту события $(X < x)$, т.е.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} \frac{m_i}{n},$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

33. *Средним значением выборки* или *выборочным средним* называется число

$$x_в = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Если x_i — варианты выборки, m_i — частоты вариант x_i,

$i = \overline{1,\ k}$, $\quad n = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ — объем выборки, то

$$\bar{x}_в = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i .$$

34. *Выборочной статистической дисперсией СВ X* называется число

$$D^*(X) = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

или

$$D^*(X) = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\ (x_i - \bar{x})^2 ,$$

где $\bar{x}$ — выборочное среднее.

Так как $M(s^2) = \dfrac{n-1}{n} D(X)$, то в качестве несмещенной оценки дисперсии генеральной совокупности принимается величина

$$\tilde{D}(X) = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

или

$$\tilde{D}(X) = S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{в} m_i\ (x_i - \bar{x})^2.$$

При известном математическом ожидании m_x несмещенная оценка дисперсии

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - m_x)^2.$$

Если в каждом из наблюдений рассматриваются одновременно два признака X и Y с выборками:

X	x_1	x_2	...	x_k ,		Y	y_1	y_2	...	y_k ,
m	m_1	m_2	...	m_k ,		m	m_1	m_2	...	m_k ,

соответственно, то для характеристики их связи вводится *момент корреляции*

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}),$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — выборочные средние признаков X и Y; n — объем выборки.

35. *Коэффициентом корреляции* называют величину

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y},$$

где S_x, S_y — выборочные средние квадратичные отклонения.

Замечание. При больших объемах выборок $(n \geq 30)$ s и s_0 принимаются равными.

36. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ — выборка объемом n и γ — доверительная вероятность, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ — выборочное среднее. Тогда

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}},$$

где $x = t$ — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma / 2$.

37. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном среднем квадратичном отклонении нормально распределенной *СВ X* определяется из неравенств

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

38. *Уравнение прямой регрессии y* на *x* имеет вид

$$y - \bar{y}_в = \rho_{yx}\,(x - \bar{x}_в),$$

где $\bar{x}_в, \bar{y}_в$ — средние значения признаков X и Y; $\rho_{yx} = r\frac{S_y}{S_x}$; r — коэффициент корреляции; S_x^2, S_y^2 — эмпирические дисперсии признаков X и Y.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

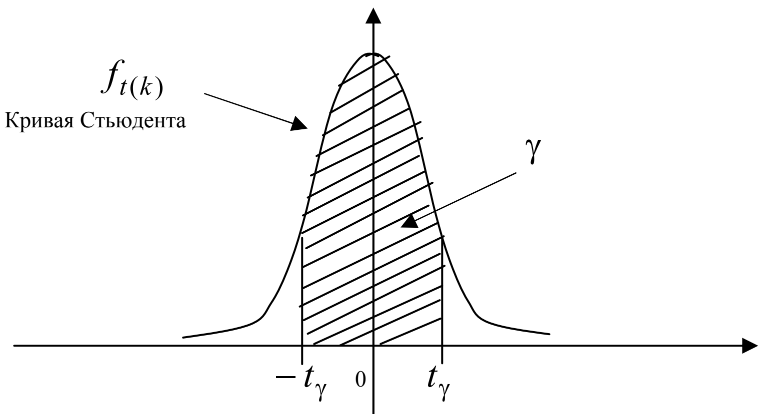
Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z$.

x	**Ф(*x*)**	***x***	**Ф(*x*)**	***x***	**Ф(*x*)**	***x***	**Ф(*x*)**
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0,4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4673
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732		
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

Приложение 3

Значения t_γ, определяемые уравнением

$$P = \left(\left| t(k) < t_\gamma \right| \right) = \gamma$$



k \ γ	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,685	0,887	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

СОДЕРЖАНИЕ