

Модуль № 7

«РАБОТА С ДВУМЕРНЫМИ МАССИВАМИ (МАТРИЦАМИ)»

Комплексная цель

Студент должен:

- уметь составлять схемы алгоритмов и программы на языке Turbo Pascal для решения практических задач.
- анализировать возможность применения определённой типовой структуры алгоритма к решению конкретной задачи.

№ и тема модуля	Общее кол-во часов на модуль	В том числе			Базовые проблемы, которые излагаются на занятии	Управляемая самостоятельная работа студентов (УСРС)			Научно-методическое обеспечение
		Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов		Кол-во часов	Задания	Форма контроля	
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<p>Занятие 1 Работа с двумерными массивами (матрицами).</p> <p>Занятие 2 Составление алгоритмов вложенных циклов</p> <p>Занятие 3 Программирование вложенных циклов (матрицы)</p>	16	Усвоение нового материала	Лекция	6	1.Составление алгоритмов с использованием двумерных массивов данных (матриц). 2.Программирование вложенных циклов. 3. Составление алгоритмов обработки табличных данных (вложенные циклы)				[1], [2]
		Ознакомление, углубление	Лабораторные занятия	2	1.Объявление массивов. 2.Ввод/вывод массива 3.Поиск в массиве				
		Углубление, систематизация и обобщение знаний	Лабораторные занятия	3	1.Программирование вложенных циклов 2.Ошибки при составлении программ со вложенными циклами				
		Контроль	Зачет	1					

3.СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

3.1 Словарь новых понятий

Новое понятие	Определение
Двумерный массив (матрица)	Представляет собой таблицу, заполненную элементами с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, второй индекс - номер столбца, на пересечении которых он находится
Вложенные циклы	Циклы, которые имеют внешний и внутренний циклы
Квадратная матрица	Матрица называется квадратной, если количество строк соответствует количеству столбцов

3.2.Понятия для повторения

Понятие для повторения	Определение
Массив данных	Совокупность однотипных данных, имеющих общее имя и разные порядковые номера
Индекс (порядковый номер)	Указывает место (положение) элемента в массиве
Сложные циклы	Циклы, в теле которых имеются разветвления и другие встроенные в них циклы

4.ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

4.1.Основной текст

4.1.1. Программирование алгоритмов с использованием двумерных массивов данных (матриц)

В двумерном массиве (матрице) положение каждого элемента определяется двумя индексами, разделенными запятой, например:

$A[i,j]$, $B[3,7]$, $C[k,l]$.

Первый из индексов всегда обозначает номер строки, а второй - номер столбца матрицы, на пересечении которых находится данный элемент.

Все элементы матриц, встречающихся в программе, должны быть объявлены в разделе **VAR**, например:

VAR

I,J: INTEGER;

A: ARRAY [1..10, 1..15] OF INTEGER;

X: ARRAY [1..8, 1..3] OF REAL;

Ввод и вывод элементов матриц отличается более сложной структурой, так как требует последовательного изменения двух переменных циклов: номера строки и номера столбца. Для организации ввода-вывода матриц используют два вложенных друг в друга цикла **FOR**, какой из них будет внешним, а какой внутренним (вложенным) зависит от условия решаемой задачи.

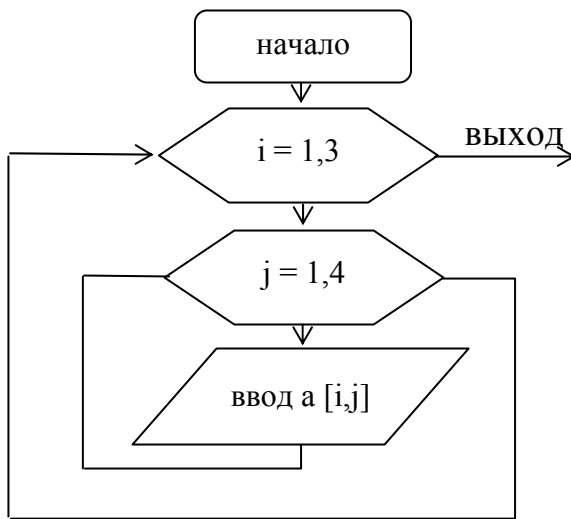
Пусть задана матрица $\mathbf{a}(3,4)$, где $\mathbf{a}[i,j]$ – элементы матрицы, стоящие на пересечении строки с номером i и столбца с номером j .

$\mathbf{a}_{1,1}$ $\mathbf{a}_{1,2}$ $\mathbf{a}_{1,3}$ $\mathbf{a}_{1,4}$

$\mathbf{a}_{2,1}$ $\mathbf{a}_{2,2}$ $\mathbf{a}_{2,3}$ $\mathbf{a}_{2,4}$

$\mathbf{a}_{3,1}$ $\mathbf{a}_{3,2}$ $\mathbf{a}_{3,3}$ $\mathbf{a}_{3,4}$

Ввод элементов матрицы по строкам:

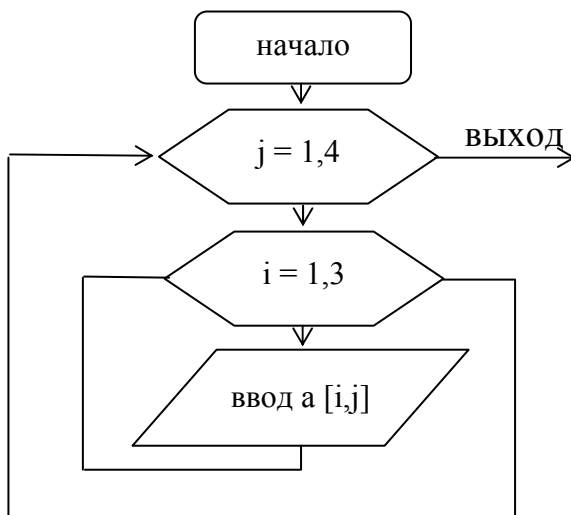


```
program vvod;  
var i, j: integer;  
a: array [1..3, 1..4] of integer;  
Begin  
for i: = 1 to 3 do  
for j: = 1 to 4 do readln (a [i,j] );
```

Рисунок 1. Ввод элементов матрицы по строкам.

Такие циклы называются вложенными. Причем в данном случае, цикл по переменной **i** - называется внешним, цикл по **j** - внутренним. Пока переменная **i** изменяется на 1 шаг, переменная **j** проходит все значения от начального до конечного.

Ввод элементов матрицы по столбцам:



```
program vvod;  
var i, j: integer;  
a: array [1..3, 1..4] of integer;  
Begin  
for j := 1 to 4 do  
for i := 1 to 3 do readln (a [i,j] );
```

Рисунок 2. Ввод элементов матрицы по столбцам.

В этом случае внешним является цикл по переменной **j**, а внутренним – по переменной **i**.

Пример 1. Задана матрица из семи строк и пяти столбцов. Найти среднее арифметическое отрицательных элементов матрицы $a(7,5)$:

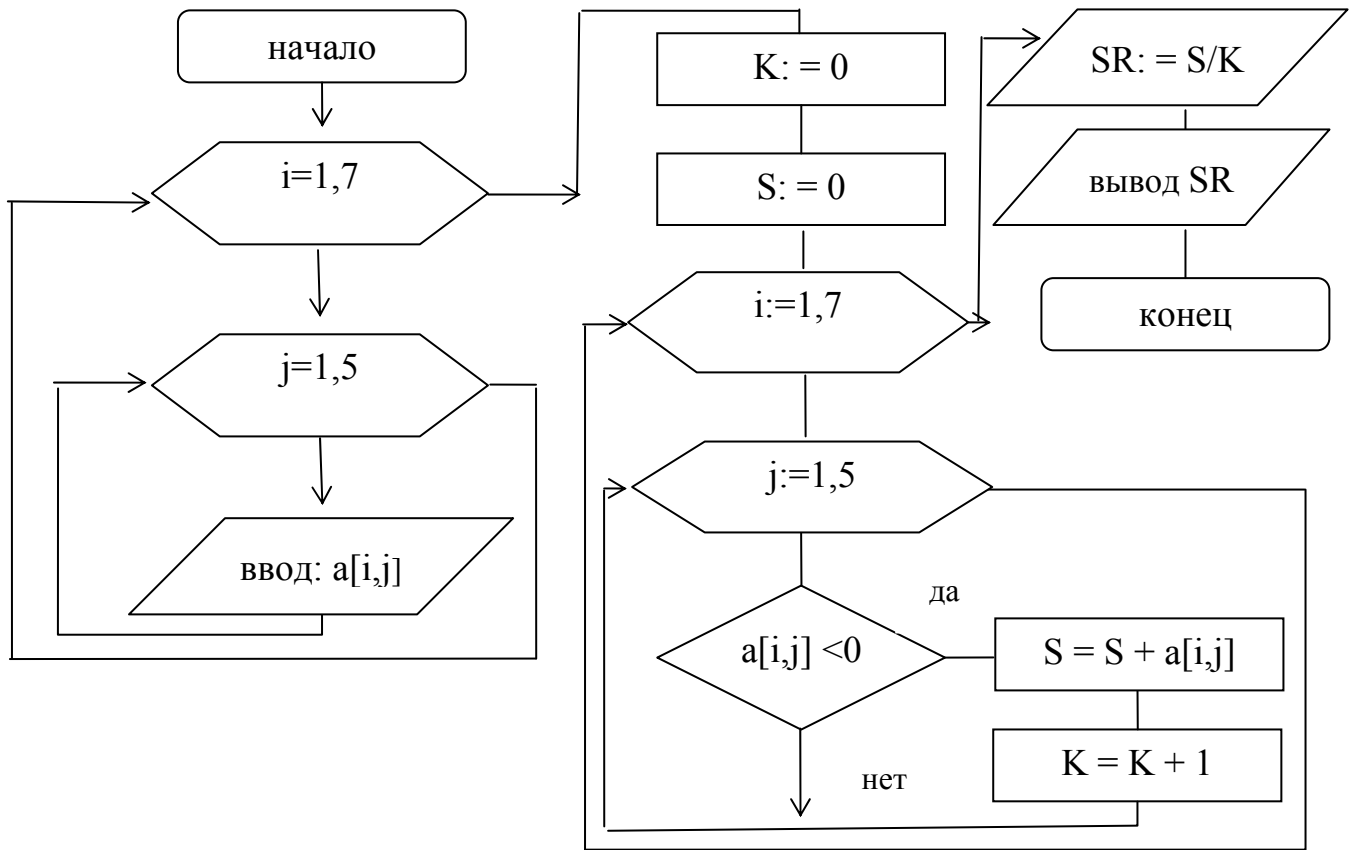


Рисунок 3. Схема алгоритма к решению примера 1.

Программа на языке Pascal к примеру 1.

```

program prim1;
var
  i, j, k: integer;
  SR, S: real;
  a: array [1..7, 1..5] of real;
Begin
  for i := 1 to 7 do
  for j := 1 to 5 do readln (a [i,j] );
  k:=0;
  S:=0;
  for i := 1 to 7 do
  for j := 1 to 5 do if a [i,j] < 0 then begin
    S: = S + a [i,j];
    K = K + 1;
  end;

  SR: = S/K;
  writeln ('среднее арифметическое', SR:10:3);
end.
  
```

4.1.2. Квадратные матрицы

Матрица называется квадратной, если количество строк соответствует количеству столбцов. Элементы стоящие на главной диагонали матрицы имеют одинаковые номера строки и столбца.

Пример 2. Задана квадратная матрица a (5,5). Найти сумму элементов матрицы, стоящих на главной диагонали.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$

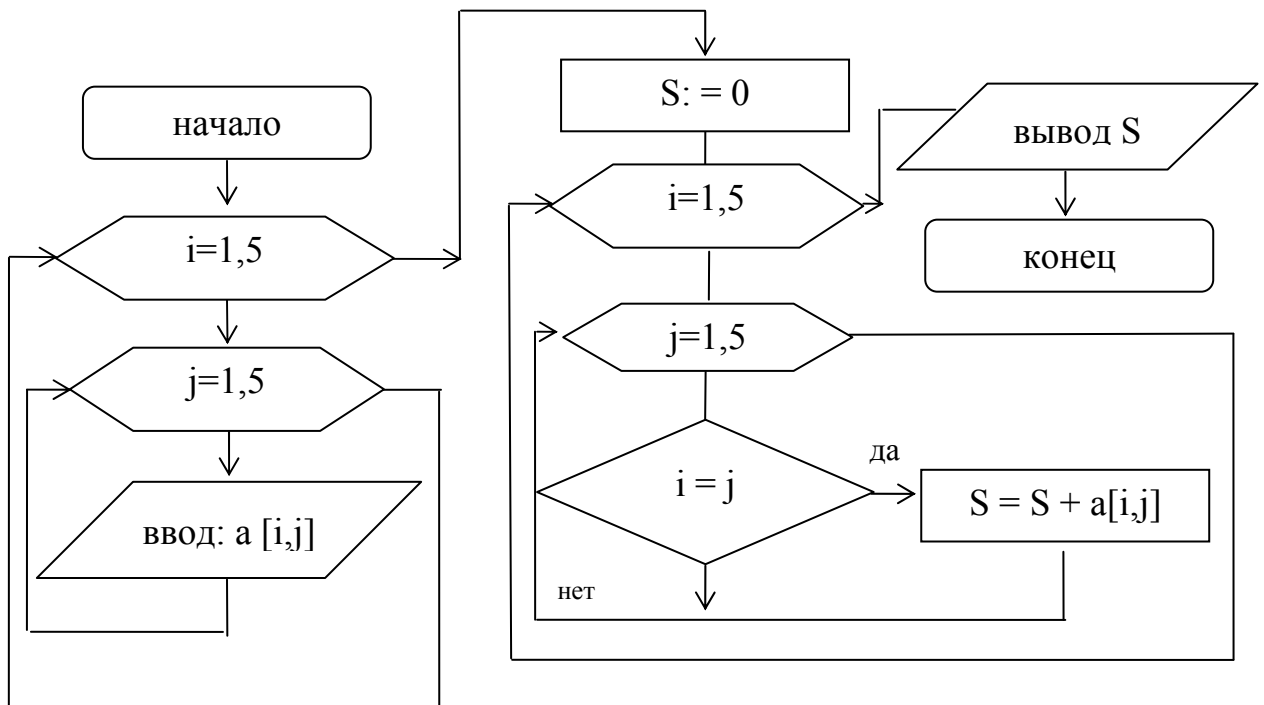


Рисунок 4. Схема алгоритма к решению примера 2.

Программа на языке Pascal к примеру 2.

```
program prim 2;  
var  
  i, j: integer;  
  S: real;  
  a: array [1..5, 1..5] of real;  
Begin  
  for i: = 1 to 5 do  
  for j: = 1 to 5 do readln (a [i,j] );  
  S:=0;  
  for i := 1 to 5 do  
  for j := 1 to 5 do if i=j then S: = S + a [i,j];  
  writeln ('сумма', S:10:3);  
end.
```

Заметим, что у всех элементов, стоящих над главной диагональю, $i < j$ (верхний треугольник), под главной диагональю $i > j$ (нижний треугольник).

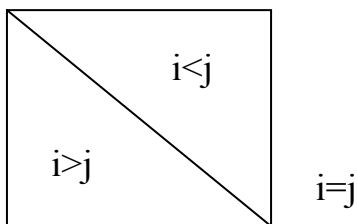


Рисунок 5. Соотношение номера строки i и номера столбца j в квадратной матрице.

5.МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1.Материалы к лекции

План лекции:

Тема 1. Составление алгоритмов с использованием двумерных массивов данных (матриц) и вложенных циклов.

Тема 2. Программирование алгоритмов с использованием двумерных массивов данных (матриц).

Тема 3. Квадратные матрицы.

Вопросы для обратной связи

1. Какие циклы называются вложенными?
2. Какие массивы называются двумерными (матрицами)?
3. Что означают индексы i и j в обозначении элемента матрицы $a[i,j]$?

5.2. Лабораторная работа

Тема: Программирование алгоритмов с использованием двумерных массивов данных (матриц)

Цель:

- Приобрести навыки разработки алгоритмов циклических вычислительных процессов сложной структуры на примере матриц.
- Уметь составлять программы со вложенными циклами на алгоритмическом языке TURBO-PASCAL и проводить по ним расчёт на компьютере.

Понятие вложенного цикла тесно связано с понятием внешнего и внутреннего цикла. Схема алгоритма с одним вложенным циклом приведена на рис. 6.

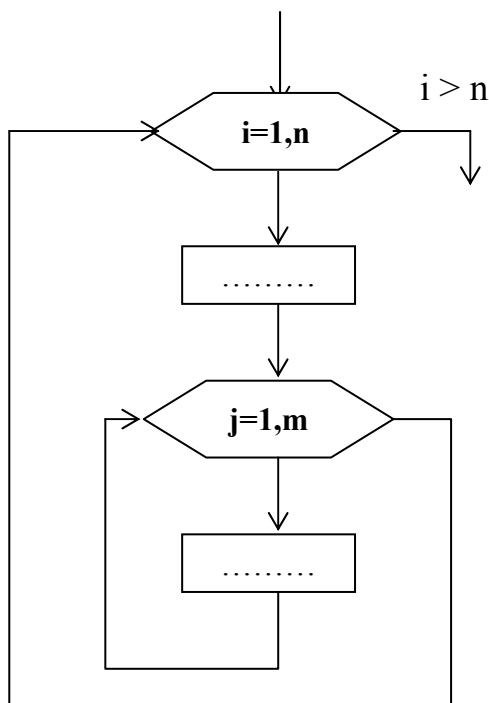


Рисунок 6. Схема алгоритма вложенного цикла.

Как видно из рисунка цикл по j вложен в цикл по i и по отношению к нему является внутренним, а цикл по i – внешним. Из схемы алгоритма следует, что при $i=1$ цикл по j повторяется m раз, т.е. на 1 внешний цикл по i приходится m внутренних по j , поэтому общее число циклов в данном алгоритме будет $n \times m$. В алгоритмах может быть любое число вложений в цикл.

Циклы с одним вложением обычно используются при обработке таблиц, состоящих из строк и столбцов, и имеющих вид двумерных массивов. В таких массивах положение элемента и его значение определяется номером строки и номером столбца:

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,m} \end{matrix}$$

Элемент такого массива будет $a[i,j]$. Первый индекс i указывает на номер строки, а второй j – на номер столбца. Тогда при работе с элементами каждой строки массива необходимо зафиксировать первый индекс i , а изменять второй индекс j , что сможет обеспечить схема алгоритма на рис. 7. При работе с элементами каждого столбца необходимо зафиксировать второй индекс j , а изменять первый индекс i , что обеспечивает схема алгоритма на рис. 8.

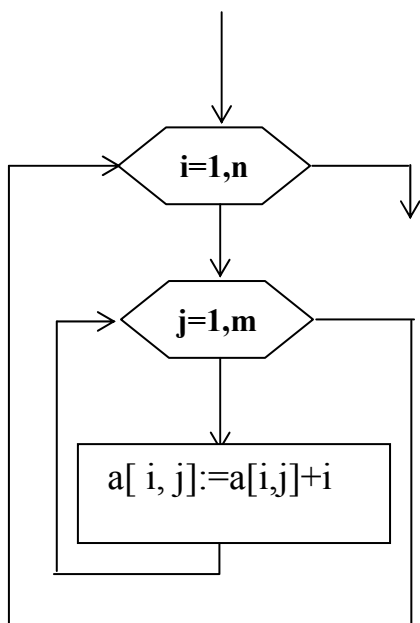


Рисунок 7. Схема алгоритма работы с элементами строки.

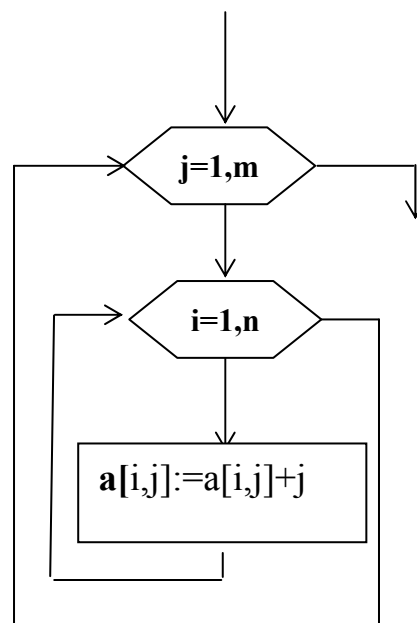


Рисунок 8. Схема алгоритма работы с элементами столбца.

Пример 3.

Группа из 8 студентов сдала 5 экзаменов. Определить, сколько студентов сдали сессию со средним баллом более 7.

Экзаменационная ведомость студентов имеет вид матрицы:

$$\begin{matrix}
 X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} & X_{1,4} & X_{1,5} \\
 X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} & \dots & X_{2,5} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 X_{8,1} & X_{8,2} & X_{8,3} & X_{8,4} & X_{8,5}
 \end{matrix}$$

Элемент матрицы $x[i,j]$ - оценка за экзамен, где первый индекс i указывает номер строки (номер студента), а второй индекс j – номер столбца (номер экзамена). Схема алгоритма решения задачи приведена на рис. 9.

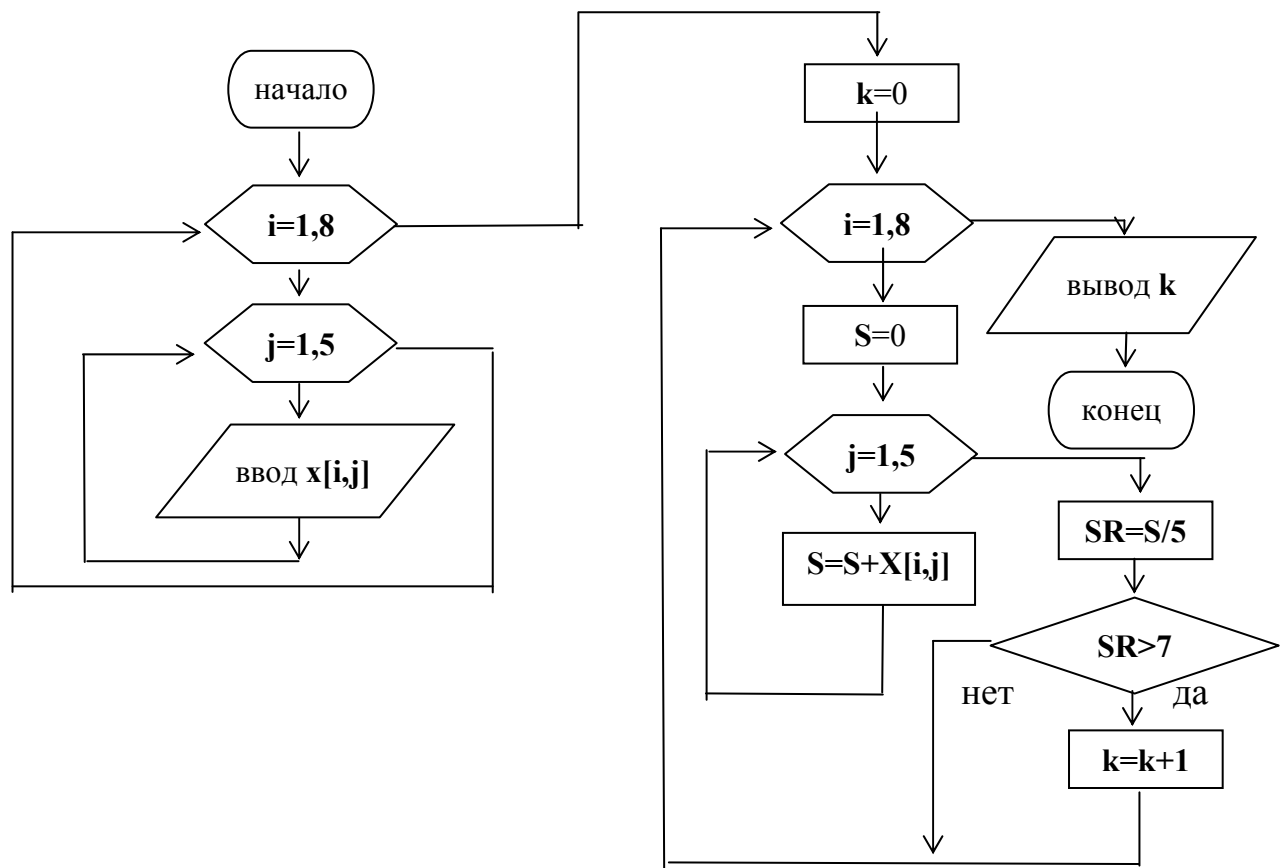


Рисунок 9.Схема алгоритма решения к примеру 3.

```

program prim 3;
var
  S,i, j,k: integer;
  SR: real;
  x: array [1..8, 1..5] of integer;
Begin
for i: = 1 to 8 do
for j: = 1 to 5 do readln (x[i,j] );
k:=0;
for i := 1 to 5 do begin
  S:=0;
  for j := 1 to 5 do S:= S + x[i,j];
  SR:= S/5;
  If SR >7 then k:=k+1;
end;
writeln (' количество студентов', k:2);
end.
  
```

В данном алгоритме ввод элементов матрицы проведен по строкам , а затем обнуляется счётчик количества студентов (блок 6). Далее при $i=1$ внутренний цикл по $j=1, 5$ осуществляет суммирование баллов по каждому из экзаменов ($S=S+X_{i,j}$) в блоках 9...10, предварительно принимая сумму баллов

для каждого студента, равной нулю ($S=0$). По выходе из внутреннего цикла вычисляется SR и количество студентов увеличивается на единицу ($k=k+1$) при $SR > 7$, а при невыполнении этого условия k остаётся прежним (блоки 11,12,13). После этого осуществляется выход во внешний цикл и процесс повторяется для следующего студента ($i=2$) и т.д., пока i не превысит 8.

6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО МОДУЛЮ

1 вариант

1. Для матрицы $a(2,4)$ определить средние арифметические каждого столбца матрицы.
2. В матрице $b(3,4)$ заменить на 1 все положительные элементы и на 0 все отрицательные элементы и вывести полученную новую матрицу.

2 вариант

1. Подсчитать количество положительных элементов в каждом столбце матрицы $b(3,5)$.
2. В матрице $a(4,3)$ найти средние арифметические тех строк, в которых отрицательный элемент главной диагонали.

3 вариант

1. Найти среднее арифметическое значение неотрицательных элементов матрицы $a(3,5)$.
2. В матрице $z(5,3)$ найти сумму всех элементов каждой строки, кроме элемента, стоящего на главной диагонали.

4 вариант

1. В матрице $b(2,5)$ найти средние арифметические значения элементов тех столбцов, у которых первый элемент равен нулю.
2. В матрице $z(3,4)$ найти суммы элементов каждой строки.

5 вариант

1. Из матрицы $a(3,3)$ получить новую $b(3,3)$, умножив элементы каждого столбца на элемент главной диагонали, находящейся в данном столбце.
2. Дана действительная матрица размера $x(5,3)$. Определить количество отрицательных элементов в каждой строке матрицы.

6 вариант

1. Из матрицы $b(4,4)$ получить новую матрицу $c(4,4)$, умножив элементы каждой строки на элемент главной диагонали, находящийся в данной строке.
2. Для матрицы $a(2,5)$ напечатать номера тех столбцов, сумма элементов которых положительна.

7 вариант

1. В каждой строке матрицы $\mathbf{b}(4,3)$ подсчитать количество элементов, равных нулю.
2. В каждом столбце матрицы $\mathbf{z}(3,6)$ найти суммы положительных и отрицательных элементов.

8 вариант

1. Для матрицы $\mathbf{a}(5,2)$ найти среднее арифметическое значение элементов в каждой строке матрицы.
2. Дана действительная квадратная матрица $\mathbf{b}(5,5)$. Заменить нулями все ее элементы, расположенные на главной диагонали и выше нее. Полученную матрицу вывести на печать.

9 вариант

1. В матрице $\mathbf{a}(3,5)$ подсчитать количество столбцов, сумма элементов которых положительна.
2. В матрице $\mathbf{x}(3,4)$ найти максимальный элемент и вывести на печать номера строки и столбца, на пересечении которых он находится.

10 вариант

1. Для матрицы $\mathbf{a}(4,2)$ напечатать номера тех строк, суммы элементов которых положительны.
2. Для каждой строки матрицы $\mathbf{b}(5,2)$ подсчитать количество элементов, совпадающих с элементом, стоящим на главной диагонали соответствующей строки.

11 вариант

1. Для каждой строки матрицы $\mathbf{a}(5,3)$ определить сумму и произведение элементов.
2. В матрице $\mathbf{b}(3,4)$ найти минимальный элемент и вывести на печать номера строки и столбца, на пересечении которых он находится.

12 вариант

1. В матрице $\mathbf{a}(3,4)$ определить количество положительных и количество отрицательных элементов.
2. Дана действительная матрица размера $\mathbf{x}(3,4)$, в которой не все элементы равны нулю. Получить новую матрицу путем деления всех элементов данной матрицы на ее наибольший по модулю элемент.

13 вариант

1. В матрице $\mathbf{x}(3,4)$ найти среднее арифметическое положительных элементов и количество отрицательных элементов.
2. Задана матрица $\mathbf{a}(5,3)$. В каждом столбце матрицы найти произведение положительных элементов.

14 вариант

1. Задана матрица $\mathbf{a}(3,6)$. Найти максимальный элемент матрицы и вывести на печать все элементы, расположенные в строке, где он находится.
2. В матрице $\mathbf{x}(3,4)$ найти средние арифметические значения элементов каждого столбца.

15 вариант

1. В матрице $\mathbf{a}(3,5)$ найти и вывести на печать номера тех столбцов, у которых первый элемент больше второго.
2. В матрице $\mathbf{x}(4,4)$ найти средние арифметические значения элементов каждой строки.

16 вариант

1. В матрице $\mathbf{x}(3,4)$ найти среднее арифметическое значение элементов в каждой строке.
2. В матрице $\mathbf{b}(5,4)$ найти и вывести на печать номера тех строк матрицы, сумма элементов которых больше 20.

17 вариант

1. Задана матрица $\mathbf{a}(3,6)$. Найти минимальный элемент матрицы и сумму всех элементов столбца, в котором он находится.
2. В матрице $\mathbf{x}(3,4)$ найти произведение элементов каждой строки.

18 вариант

1. В матрице $\mathbf{z}(3,4)$ найти максимальный и минимальный элементы.
2. Задана матрица $\mathbf{a}(3,6)$. В каждом столбце матрицы найти количество положительных и отрицательных элементов.

19 вариант

1. В данной действительной квадратной матрице $\mathbf{a}[3,4]$ найти сумму элементов строки, в которой расположен элемент с наименьшим значением. Предполагается, что такой элемент единственный.
2. Задана матрица $\mathbf{b}(3,6)$. В каждом столбце матрицы найти сумму положительных элементов.

20 вариант

1. Найти суммы положительных и отрицательных элементов в каждой строке матрицы $\mathbf{a}(6,3)$.
2. Задана матрица $\mathbf{z}(3,5)$. Найти и вывести на печать все элементы матрицы, удовлетворяющих условию $0 < \mathbf{a}[i,j] < 15$, считая, что такие элементы есть.

21 вариант

1. Найти среднее арифметическое значение отрицательных элементов в каждом столбце матрицы **b(5,4)**.
2. Задана матрица **a(3,5)**. Найти и вывести на печать все отрицательные элементы матрицы, а также номера строки и столбца, на пересечении которых они находятся.

22 вариант

1. Дана действительная матрица размера **a(4,3)** Определить числа b_1, \dots, b_4 , равные произведениям элементов строк.
2. Задана матрица **b(3,4)**. В каждом столбце матрицы найти суммы отрицательных элементов.

23 вариант

1. Задана матрица **a(3,6)**. Найти минимальный элемент матрицы и вывести на печать все элементы столбца, в котором он расположен.
2. Задана матрица **z(3,4)**. Определить, каких элементов в матрице больше: положительных или отрицательных.

24 вариант

1. Задана матрица **z(3,5)**. Найти и вывести на печать все элементы матрицы, удовлетворяющих условию $1 < a[i,j] < 10$, считая, что такие элементы есть.
2. Найти суммы элементов первой и последней строк матрицы **b(4,3)**.

25 вариант

1. Дана действительная матрица размера **a(4,3)**. Найти сумму наибольших значений элементов ее строк.
2. Задана матрица **a(3,6)**. Определить, каких элементов в матрице больше: отрицательных или элементов ≥ 20 ?

26 вариант

1. Дана действительная матрица размера **b(4,3)**. Определить числа b_1, \dots, b_4 , равные наименьшим значениям элементов строк.
2. Для матрицы **x(3,5)** вывести на печать суммы элементов каждого из её столбцов, у которых элемент главной диагонали отрицательный.

27 вариант

1. Дана действительная матрица **a(3,4)**. Найти среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений ее элементов.
2. Задана матрица **a(3,4)**. Определить номер строки, сумма элементов которой максимальная.

28 вариант

1. Найти и вывести на печать количество элементов в матрице $\mathbf{a}(5,4)$: отрицательных, положительных, равных нулю.
2. Задана матрица $\mathbf{z}(3,5)$. Определить номер столбца с наибольшим количеством отрицательных элементов.

29 вариант

1. Определить общую сумму наибольших элементов каждой из строк матрицы $\mathbf{a}(4,3)$.
2. Для матрицы $\mathbf{x}(3,5)$ определить номер столбца, в котором наибольшее число положительных элементов.

30 вариант

1. Найти общую сумму элементов тех столбцов матрицы $\mathbf{a}(2,6)$, сумма элементов каждого из которых положительна.
2. Элементы каждой строки матрицы $\mathbf{x}(5,3)$ умножить на наибольший элемент соответствующей строки, полученную матрицу вывести на печать.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое матрица?
2. Ввод элементов матрицы по столбцам.
3. Ввод элементов матрицы по строкам.
4. Вывод элементов матрицы по строкам и столбцам.
5. Нахождение максимального элемента матрицы (номер строки и номер столбца, на пересечение которых он находится).

7. Литература

№	Перечень литературных источников	Год издания
1.	Прищепов М.А., Севернёва Е.В., Шакирин А.И. Программирование на языках Basic, Pascal и Object Pascal в среде Delphi: Мн: Тетра Системс,	2006
2.	Экзамен по информатике. Основы алгоритмизации и программирования. Прищепов М.А., Степанцов В.П., Севернёва Е.В - Мн: Тетра Системс	2001
3.	Практикум по алгоритмизации и программированию на языке Паскаль: Учеб. пособие / Ю.А. Аляев; В.П. Гладков, О.А. Козлов. – Финансы и статистика	2004

4.	<p>Основы алгоритмизации и программирования на языке TURBO PASCAL. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине “Вычислительная техника и программирование”. Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: Прищепов М.А., Шакирин А.И., Севернева Е.В., Жалобкевич Н.М.</p>	2004
5.	<p>Интегрированная среда программирования <i>Turbo Pascal</i>” Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине “Вычислительная техника и программирование. Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: Прищепов М.А., Шакирин А.И., Севернева Е.В., Жалобкевич Н.М., Киселев Б.М.</p>	2002
6.	<p>Математическая формулировка прикладных задач и алгоритмизация их решений. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Вычислительная техника и информатика». Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: М.А.Прищепов, Н.В.Исаеня.</p>	2006

Модуль № 8

«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

Комплексная цель

Студент должен:

- Знать сущность математической формализации численных методов решения задач.
- Уметь решать задачи численными методами и составлять для них программы на алгоритмическом языке Pascal
- Сформировать системный подход к освоению учебного материала по заданной теме.

№ и тема модуля	Общее кол-во часов на модуль	В том числе			Базовые проблемы, которые излагаются на занятии	Управляемая самостоятельная работа студентов (УСРС)			Научно-методическое обеспечение
		Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов		Кол-во часов	Задания	Форма контроля	
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Занятие 1 Решение задач с помощью численных методов	18	Усвоение нового материала	Лекция	8	1.Вычисление определённых интегралов численными методами. 2.Решение нелинейных уравнений численными методами. 3.Нахождение экстремума функции.	2	Вычисление определённых интегралов методами: левых прямоугольников, правых прямоугольников, средних прямоугольников, трапеций	Зачет	[1], [2], [8]
Занятие 2 Решение нелинейных уравнений численными методами		Углубление, систематизация и обобщение знаний	Лабораторные занятия	4	1.Отделение корней нелинейного уравнения 2.Метод деления отрезка пополам 3Метод хорд.				[8]
Занятие 3 Нахождение экстремума функции		Углубление, систематизация и обобщение знаний	Лабораторные занятия	2	1.Нахождение экстремума функции: - Метод дихотомии (деления пополам) - Метод золотого сечения -Метод поразрядного приближения				
Занятие 4 Контроль по модулю № 8		Контроль	Зачет	2					

3.СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

1. Словарь новых понятий

Новое понятие	Определение
Итерационные (численные) методы	Методы последовательного приближения к корню уравнения с заданной точностью ϵ
Итерация	Каждое повторное вычисление корня, приближающее к результату решения задачи
Нелинейные уравнения	Уравнение вида $f(x)=0$, левая часть которого представляет собой многочлен от x в степени больше единицы или содержит тригонометрические, логарифмические и другие элементарные функции
Экстремум функции	Нахождение максимального или минимального значения функции на заданном отрезке

3.2.Понятия для повторения

Понятие для повторения	Определение
Массив данных	Совокупность однотипных данных, имеющих общее имя и разные порядковые номера
Индекс (порядковый номер)	Указывает место (положение) элемента в массиве
Сложные циклы	Циклы, в теле которых имеются разветвления и другие встроенные в них циклы

4. ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

4.1. Основной текст

4.1.1. Вычисление определенных интегралов численными методами

Определенный интеграл от непрерывной функции $f(x) \geq 0$ в пределах от a до b представляет площадь криволинейной трапеции S , ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис 1). Из курса высшей математики известно, что

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (1)$$

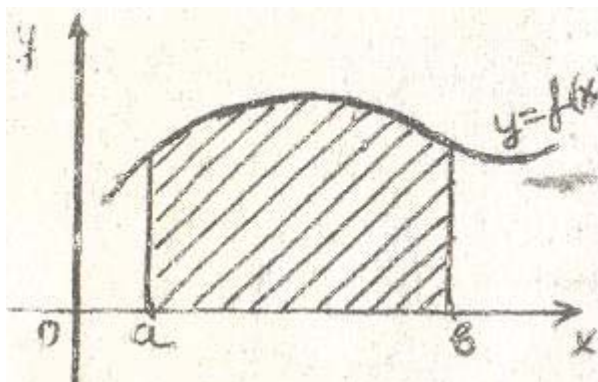


Рисунок 1

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $f(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то в формуле (1) $S < 0$, но $|S|$ равно площади криволинейной трапеции, находящейся под осью абсцисс. Однако на практике формулой (1) часто нельзя воспользоваться по двум основным причинам: 1) вид функции $f(x)$ не

допускает непосредственного интегрирования, т.е. первообразную нельзя выразить в элементарных функциях; 2) значения функции $f(x)$ заданы только на фиксированном конечном множестве точек x_i , т.е. функция задана в виде таблицы. В этих случаях используются методы численного интегрирования. Они основаны на аппроксимации подинтегральной функции некоторыми более простыми выражениями, например, многочленами нулевой ($y = c$), первой ($y = cx + d$) или второй ($y = cx^2 + dx + k$) степени, а численные методы вычисления определенного интеграла, основанные на подобной аппроксимации, называются соответственно методами прямоугольников, трапеций и Симпсона (парабол).

4.1.2. Метод прямоугольников

Пусть требуется приближенно вычислить значение интеграла $S = \int_a^b f(x) dx$. В методе

прямоугольников криволинейная трапеция разбивается на n частей, каждая из которых представляет собой прямоугольник, основание которого равно $\frac{b-a}{n}$, а длины сторон соответственно $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$, где $x_0 = a$, x_1 , ..., x_{n-1} , $x_n = b$ - точки деления отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Тогда (см. рис.17)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$

Различают методы правых, левых и средних прямоугольников, в зависимости от месторасположения начальной точки x_0 при вычислении площади элементарного прямоугольника.

$$\int_a^b f(dx) \approx \frac{b-a}{n} * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - \text{формула метода левых прямоугольников;}$$

$$\int_a^b f(dx) \approx \frac{b-a}{n} * \sum_{i=0}^n f(x_i) - \text{формула метода правых прямоугольников;}$$

$$\int_a^b f(dx) \approx \frac{b-a}{n} * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2}) - \text{формула метода средних прямоугольников, где}$$

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

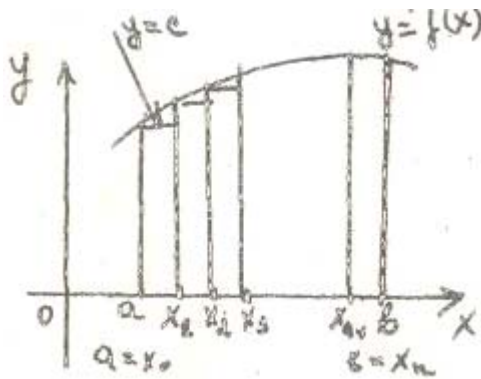


Рисунок 2 .

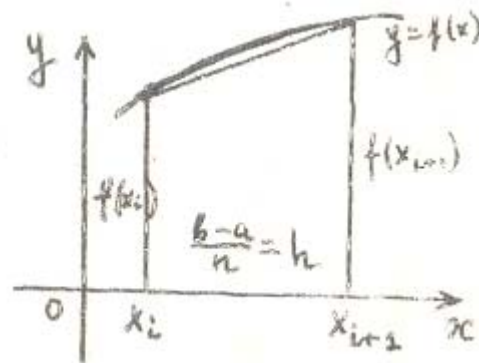


Рисунок 3

4.1.3. Метод трапеций

Этот метод заключается в том, что каждую дугу линии $y=f(x)$, соответствующую частичному интервалу, заменяют хордой, соединяющей конечные точки этой дуги. Иными словами, функция $y=f(x)$ заменяется многочленом первой степени $y=sx+d$. Разбиваем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и заменяем каждую криволинейную трапецию на участке $[x_i, x_{i+1}]$ n прямоугольными трапециями (рис.18).

Известно, что площадь каждой трапеции, построенной на частичном интервале длины h , равна высоте трапеции $\frac{b-a}{n}$, умноженной на длину её средней линии $\frac{f(x_i)+f(x_i+h)}{2}$, т.е. равна $\frac{b-a}{n} * \frac{f(x_i)+f(x_i+h)}{2}$. Площадь же всей криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс, определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(dx) \approx \frac{b-a}{n} * \left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right) \approx$$

$$\frac{b-a}{n} * \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right)$$

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1. Материалы к лекции

План лекции:

Тема 1. Вычисление определённых интегралов методами левых, правых и средних прямоугольников.

Тема 2. Вычисление определённых интегралов методом трапеций.

Вопросы для обратной связи

1. От чего зависит точность вычисления определённого интеграла?
2. Чем отличаются методы левых, правых, средних прямоугольников?
3. При каких методах вычисление определённого интеграла более точное?

5.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Тема: Вычисление определённого интеграла.

Цель работы: уяснить сущность метода численного решения задачи и овладеть первичными навыками составления, ввода, трансляции, отладки, исполнения и оформления программного модуля.

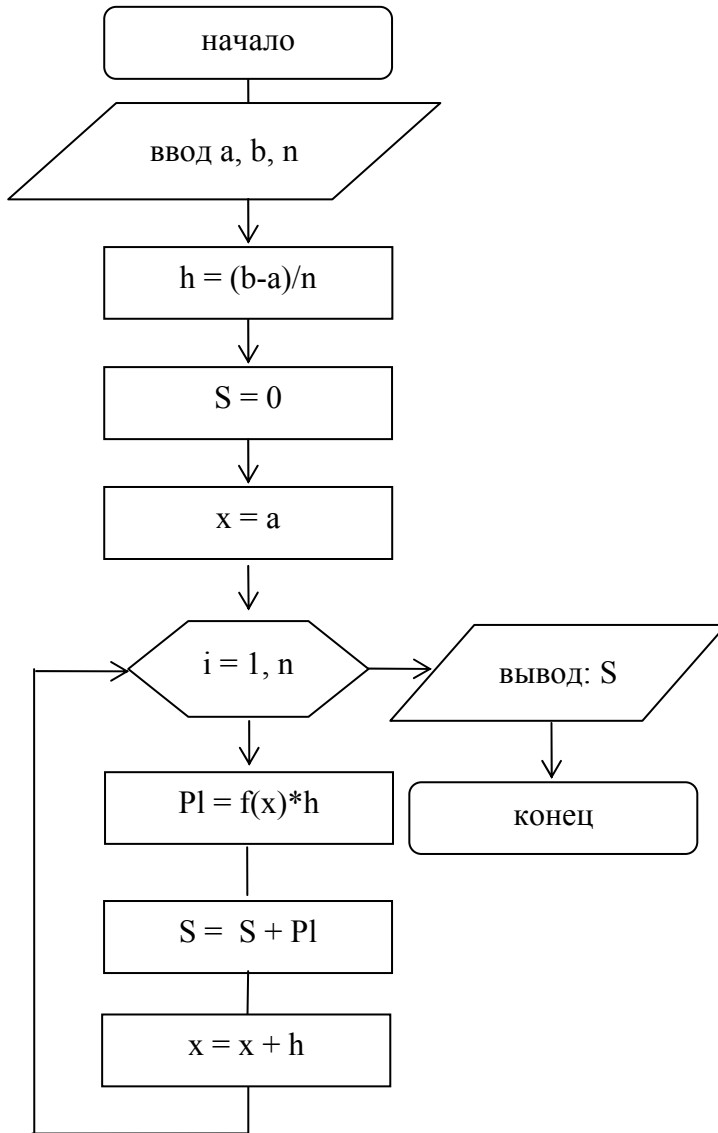
Для заданного варианта интегрируемой функции (номер варианта соответствует порядковому номеру в списке группы) составить схемы алгоритмов и программы на алгоритмическом языке TURBO-PASCAL.

Методы вычисления определённого интеграла

Численное решение рассматриваемой задачи в режиме программирования может быть выполнено рядом методов. Среди них можно отметить следующие методы: метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона (метод парабол). Эти методы с точки зрения программной реализации отличаются только методом вычисления площади фигуры, ограниченной отрезками функции в точках нижнего и верхнего пределов интегрирования $[a, b]$, линией графика функции и отрезком оси X в границах $[a, b]$. Методы могут отличаться точностью результатов вычислений и скоростью решения. Различия в скорости решения можно определить по величине числа n , которое зависит от количества повторений (итераций) внешнего цикла в алгоритме задачи. Поэтому остановимся только на методе прямоугольников как наиболее простом.

Алгоритм вычисления определённого интеграла методом левых прямоугольников.

Рассмотрим вычисление определённого интеграла $S = \int_a^b \sin x dx$:



```

Program primlp;
var i, n: integer;
x,a,b,h, S, P1: real;
Begin
writeln ('введите a, b, n, ');
readln (a, b, n);
h = (b-a)/n;
S: = 0;
x: = a;
For i: = 1 to n do begin
    P1: = sin(x)*h;
    S: = S + P1;
    x: = x + h;
end;
writeln ('значение интеграла=',S:10:5);
end.
  
```

Просуммировав все найденные площади P1, мы получим значение искомого интеграла с некоторой погрешностью, которую можно уменьшить, увеличив число разбиений n.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО МОДУЛЮ

Таблица 1

Варианты задания к лабораторной работе № п/п	Функция f(x)	a	b	№ п/п	Функция f(x)	a	b
1	$4 \cdot \cos(x)$	0	$\pi/2$	15	$5 \cdot \sin(x)$	$\pi/2$	π
2	$x^3 \cdot e^{\cos(x)}$	0	2	16	$2 \cdot \cos(\cos(x))$	-1	1
3	$3 \cdot \sin(\sin(x))$	0	2	17	$2 \cdot x^5$	1	4
4	$e^x \cdot \ln(1+x)$	0,5	1,5	18	$3 \cdot \cos(\cos(x))$	-1	1
5	$2 \cdot \sin(\sin(x))$	0	3	19	$(1+x) \cdot \ln(1+x)$	0	2
6	$3 \cdot \cos(x)$	$\pi/2$	π	20	$3 \cdot \sin(x)$	$\pi/2$	π
7	$e^x \cdot \ln(1+x)$	0	1	21	$x^2 \cdot \ln(x)$	0,5	1,5
8	$9 \cdot x^2$	1	2	22	$\sin(\ln(1+x))$	0	2
9	$x \cdot \ln(x)$	0,5	2	23	$\cos(x) \cdot \ln(x)$	1	3
10	$\cos(\ln(1+x)) \cdot e^x$	0	1,5	24	$2 \cdot \cos(x)$	$\pi/2$	π
11	$e^x \cdot \sin(x)$	0	1	25	$4 \cdot \cos(x)$	$\pi/2$	π
12	$\sin(x) \cdot (1+x^3)$	0	2	26	$\cos(\pi \cdot x^2)$	0	2
13	$2 \cdot x^3$	0	2	27	$3 \cdot x^2$	1	2
14	$\ln(1-x^3) \cdot e^x$	1	2	28	$\sin(x) + \cos(x)$	0	1

В отчет по работе следует включить цель работы, алгоритмы и программы вычисления определенного интеграла заданными методами. Все результаты вычислений свести в таблицу 2.

Таблица 2

Число итераций	Значения определенного интеграла вычисленного методами:			
	Левых прямоугольников	Правых прямоугольников	Средних прямоугольников	Трапеций
10				
50				
100				

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите сущность и отличия известных вам методов вычисления определенных интегралов?
2. Поясните геометрический смысл вычисления определенных интегралов.
3. Поясните алгоритм вычисления определенного интеграла методами прямоугольников и трапеций.

7. Литература

№	Перечень литературных источников	Год издания
1.	Прищепов М.А., Севернёва Е.В., Шакирин А.И. Программирование на языках Basic, Pascal и Object Pascal в среде Delphi: Мн: Тетра Системс,	2006
2.	Экзамен по информатике. Основы алгоритмизации и программирования. Прищепов М.А., Степанцов В.П., Севернёва Е.В - Мн: Тетра Системс	2001
3.	Практикум по алгоритмизации и программированию на языке Паскаль: Учеб. пособие / Ю.А. Аляев; В.П. Гладков, О.А. Козлов. – Финансы и статистика	2004
4.	Основы алгоритмизации и программирования на языке TURBO PASCAL. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине “Вычислительная техника и программирование”. Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: Прищепов М.А., Шакирин А.И., Севернева Е.В., Жалобкевич Н.М.	2004
5.	Основы численных методов Л.И.Турчак, П.В.Плотников. Учебное пособие – 2-е издание. М.:ФИЗМАЛИТ	2002
6.	Интегрированная среда программирования Turbo Pascal” Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине “Вычислительная техника и программирование. Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: Прищепов М.А., Шакирин А.И., Севернева Е.В., Жалобкевич	2002

	Н.М., Киселев Б.М.	
7.	Математическая формулировка прикладных задач и алгоритмизация их решений. Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Вычислительная техника и информатика». Ротапринт БГАТУ, Минск. Составители: М.А.Прищепов, Н.В.Исаеня.	2006