

# Расчет электротепловых характеристик непроточных электродных нагревателей с плоскопараллельной электродной системой

М.А. ПРИЩЕПОВ, канд. техн. наук, доцент (БАТУ)

Наиболее простой конструкцией электродных электронагревателей (ЭЭН) является непроточный нагреватель с плоскопараллельной электродной системой, представленный на рис. 1. В этом случае процесс нагрева термообрабатываемой среды в упрощенном виде при линейной температурной зависимости проводимости обрабатываемой среды можно описать следующим уравнением:

$$C_p M \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = U^2 \sigma_0 (1 + \beta \theta_c) \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} - KF_{II} (\theta_c - \theta_0), (1)$$

где  $\sigma_0$  — удельная проводимость термообрабатываемой среды,  $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ;  
 $\beta$  — температурный коэффициент проводимости,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ;

$L_3$  — длина (высота) электрода, м;  
 $\Pi_3$  — ширина электрода, м;  
 $h_3$  — межэлектродное расстояние, м;  
 $F_n$  — площадь поверхности теплопотерь,  $\text{м}^2$ ;  
 $\theta_0$  — температура окружающей среды,  $^{\circ}\text{C}$ .

После некоторых преобразований уравнение (1) приведем к виду:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} + \frac{1}{C_p M} (KF_{II} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}) \theta_c - \frac{KF_{II}}{C_p M} (\frac{U^2 \sigma_0 \Pi_3 L_2}{KF_{II} h_3} + \theta_0) = 0, (2)$$

Полное решение этого уравнения при условии

$$KF_{II} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{L_2}{h_3}, (3)$$

определяющем соотношение теплопотерь и интенсивность изменения тепловыделения за счет ТКП, будет:

$$\theta_c(\tau) = C \cdot \exp\left[-\frac{1}{C_p M} (KF_{II} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}) \tau\right] + \theta_y, (4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная;  
 $\theta_y$  — частное решение, представляющее собой установившуюся температуру при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Постоянная  $C$  может быть найдена из принятых начальных условий:

$$\text{при } \tau = 0 \quad \theta_c = \theta_H \tau=0, (5)$$

Тогда из уравнения (4)

$$\theta_H = C + \theta_y \text{ или}$$

$$C = \theta_H - \theta_y. (6)$$

Следовательно, решение примет вид:

$$\theta_c(\tau) = \theta_y (1 - \exp\left[-\frac{1}{C_p M} (KF_{II} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}) \tau\right]) + \theta_H \cdot \exp\left[-\frac{1}{C_p M} (KF_{II} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}) \tau\right]. (7)$$

При незначительных теплопотерях электронагревателя и интенсивном увеличении тепловыделения, т.е. высоких значениях ТКП могут возникнуть условия для изменения знака неравенства (3), т.е.

$$KF_{II} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}, (8)$$

тогда исходное уравнение (2) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} + \frac{1}{C_p M} (U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} - KF_{II}) \theta_c - \frac{KF_{II}}{C_p M} (\frac{U^2 \sigma_0 \Pi_3 L_2}{KF_{II} h_3} + \theta_0) = 0, (9)$$

а полное решение

$$\theta_c(\tau) = \theta_y (1 - \exp\left[\frac{1}{C_p M} (U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} - KF_{II}) \tau\right]) + \theta_H (\exp\left[\frac{1}{C_p M} (U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} - KF_{II}) \tau\right]). (10)$$

Для случая, когда теплопотери равны, изменение тепловыделения за счет ТКП, т.е.

$$KF_{II} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}, (11)$$

исходное уравнение примет вид

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} - \frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0 \right) = 0. \quad (12)$$

Полное решение этого уравнения

$$\theta_c(\tau) = \frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0 \right) \tau + C, \quad (13)$$

тогда при  $\tau = 0$  и  $\theta_c = \theta_H$

$$C = \theta_H. \quad (14)$$

Следовательно, решение примет вид

$$\theta_c(\tau) = \frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} - \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0 \right) \tau + \theta_H = 0. \quad (15)$$

На рис. 2 приведены кривые изменения температуры обрабатываемой среды при включении в сеть ЭЭН для всех трех рассмотренных случаев. Из рисунка видно, что при

$$KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

температура среды изменяется по экспоненте, стремясь к установившемуся значению  $\theta_y$ . При

$$KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

температура среды изменяется по возрастающей экспоненте, стремясь к бесконечности. Процесс нагрева среды, относящийся к критическому случаю

$$KF_{\Pi} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3},$$

протекает по закону прямой, проходящей под углом  $\alpha$  к оси времени  $\tau$ , причем

$$\alpha = \arctg \frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0 \right). \quad (16)$$

Частное решение, т.е. установившаяся температура  $\theta_y$ , для случая

$$KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

определяется из исходного уравнения (2) при

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = 0$$

и будет равна

$$\theta_y = \frac{U^2 \sigma_0 \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0}{1 - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{KF_{\Pi} h_3}}. \quad (17)$$

Для случая

$$KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

определяется аналогично из уравнения (9)

$$\theta_y = - \frac{\frac{U^2 \sigma_0 \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0}{KF_{\Pi}}}{U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{KF_{\Pi} h_3} - 1}. \quad (18)$$

Из полученных решений (7), (10) и (15) нетрудно получить выражение для определения времени нагрева среды до любой температуры  $\theta_c$  в промежутке от  $\theta_H$  до  $\theta_y$ :

$$\tau = \left( \frac{C_p M}{KF_{\Pi} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}} \right) \ln \frac{\theta_y - \theta_H}{\theta_y - \theta_c} \quad (19)$$

при

$$KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

$$\tau = \left( \frac{C_p M}{U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} - KF_{\Pi}} \right) \ln \frac{\theta_y - \theta_c}{\theta_y - \theta_H} \quad (20)$$

при

$$KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3};$$

$$\tau = \frac{\theta_c - \theta_H}{\frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} \cdot \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} + \theta_0 \right)} \quad (21)$$

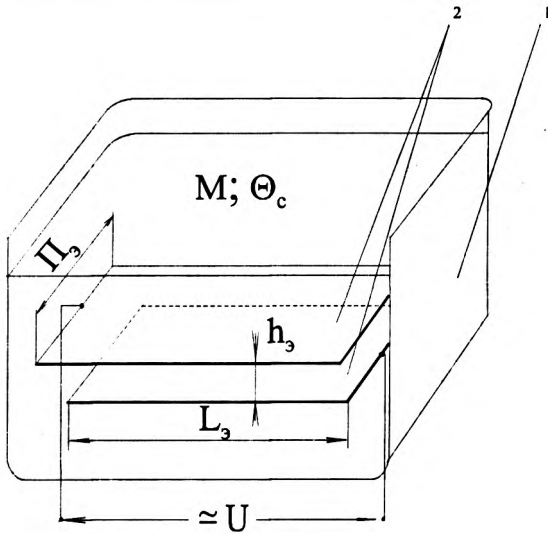


Рис. 1. Электротепловая схема непроточного ЭЭН с плоскопараллельной электродной системой: 1 — корпус емкости; 2 — токоподводящие электроды.

при

$$KF_{\Pi} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}.$$

Обозначив через  $t_n = \Theta_n - \Theta_0$ ,  $t = \Theta_c - \Theta_0$  и  $t_y = \Theta_y - \Theta_0$  начальное, текущее и установившееся превышение температуры обрабатываемой среды над температурой окружающей среды, уравнения (7), (10) и (15), можно соответственно представить в следующем виде:

$$t(\tau) = t_y (1 - \exp[-\frac{1}{C_p M} (KF_{\Pi} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}) \tau]) + t_n (\exp[-\frac{1}{C_p M} (KF_{\Pi} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}) \tau]); \quad (22)$$

$$t(\tau) = t_y (1 - \exp[\frac{1}{C_p M} (U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} - KF_{\Pi}) \tau]) + t_n (\exp[\frac{1}{C_p M} (U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} - KF_{\Pi}) \tau]); \quad (23)$$

$$t(\tau) = \frac{U^2 \sigma_0 \Pi_2 L_2}{C_p M h_3} \tau + t_n. \quad (24)$$

Обозначим

$$T = \frac{C_p M}{KF_{\Pi} - U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}} \text{ при } KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}; \quad (25)$$

$$T = \frac{C_p M}{U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3} - KF_{\Pi}} \text{ при } KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}; \quad (26)$$

$$T = \frac{C_p M h_3}{U^2 \sigma_0 \Pi_2 L_2} \text{ при } KF_{\Pi} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}, \quad (27)$$

и по аналогии с [1, 2] назовем ее постоянной времени нагрева, являющейся важным параметром теплового объекта. Численно она равна отношению теплоемкости среды к теплопотерям ЭЭН, скорректированным на изменение интенсивности тепловыделений за счет ТКП среды и представляет собой время, в течение которого среда достигла бы установившейся температуры при адиабатическом нагреве, т.е. без теплоотдачи в окружающую среду. При этих условиях температура тела изменялась бы во времени по прямой, в чем можно убедиться из выражений (22) и (23), подставив в них соответственно  $\tau = T$  и  $\tau = -T$  и получив  $t(\tau) = 0,632 t_y$ . Но в отличие от [1], где скорость изменения температуры среды при адиабатическом нагреве постоянна во времени для любой температуры среды, при адиабатическом нагреве среды с термозависимой удельной проводимостью

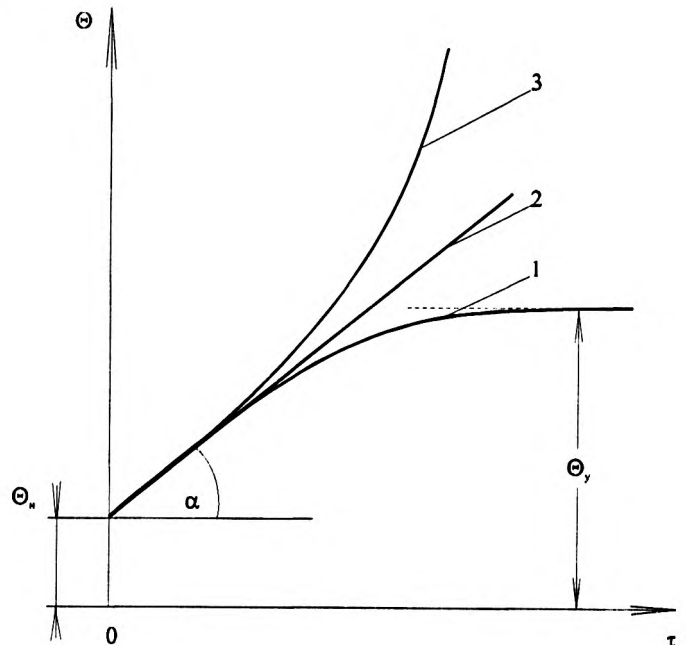


Рис. 2. Кривые изменения температуры обрабатываемой среды:

$$1 - KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}; \quad 2 - KF_{\Pi} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3};$$

$$3 - KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_2 L_2}{h_3}$$

мостью, характеризуемой ТКП, скорость изменения температуры среды является переменной величиной, в чем нетрудно убедиться, подставив в исходное уравнение (1)  $K=0$ , после чего оно примет вид:

$$C_p M \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = U^2 \sigma_0 (1 + \beta \theta_c) \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}. \quad (28)$$

Откуда, выразив скорость изменения температуры среды, получим:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = \frac{U^2 \sigma_0}{C_p M} \cdot \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} (1 + \beta \theta_c). \quad (29)$$

Из полученного выражения очевидно, что скорость изменения температуры среды так же, как и удельная проводимость, изменяется по линейному закону, определяемому значением температуры, абсолютной величиной и знаком ТКП. Это свидетельствует также о том, что указанная постоянная времени нагрева является переменной величиной, т.е. зависит от температуры среды или времени нагрева, абсолютной величины и знака ТКП и, кроме того, от условий отвода тепла.

Аналогично уравнению скорости изменения температуры среды (29) можно из исходной формулы (1) получить уравнение охлаждения, положив

$$P = U^2 \sigma_0 (1 + \beta \theta_c) \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} = 0.$$

$$\theta_c(\tau) = \theta_y \cdot \exp\left[-\frac{KF_{\Pi} \tau}{C_p M}\right] + \theta_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{KF_{\Pi} \tau}{C_p M}\right]\right), \quad (30)$$

или по аналогии с (22), (23) и (24)

$$t(\tau) = t_y \cdot \exp\left[-\frac{KF_{\Pi} \tau}{C_p M}\right], \quad (31)$$

где

$$T = \frac{C_p M}{KF_{\Pi}} \text{ — постоянная времени охлаждения, не}$$

равная постоянной времени нагрева.

Важной характеристикой теплового процесса является скорость нагрева, которую можно получить, продифференцировав решения (7), (10) и (15) исходных уравнений по  $\tau$  с учетом обозначений (25) ... (27):

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = \frac{\theta_y - \theta_H}{T} \cdot \exp[-\tau / T] \text{ при } KF_{\Pi} > U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}; \quad (32)$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = \frac{\theta_H - \theta_y}{T} \cdot \exp[\tau / T] \text{ при } KF_{\Pi} < U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = \frac{KF_{\Pi}}{C_p M} \left( \frac{U^2 \sigma_0}{KF_{\Pi}} \cdot \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} + \theta_0 \right) \text{ при } KF_{\Pi} = U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_2}{h_3}. \quad (34)$$

Из формул очевидно, что максимальную скорость нагрева имеем для (32) при  $\tau=0$ , для (33) — при  $\tau \rightarrow \infty$ , для (34) она постоянна. При расчете и проектировании установок скорость нагрева ограничивается во избежание порчи нагреваемой среды.

Все вышеизложенное на рис. 3 и 4 пояснено графически. Реальные кривые нагрева сред отличаются от приведенных на рис. 2...4 в силу тех упрощений, которые были приняты при решении исходного уравнения (1) (постоянные значения  $K$  и  $C_p$ , линейная зависимость  $\sigma$ ). Однако общий принцип динамики нагрева и характеризующие его параметры остаются неизменными. Для учета указанных ограничений при решении исходного уравнения (1) его необходимо записать в общем виде:

$$C_p(\theta_c) M \frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = U^2 \sigma(\theta_c) \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} + K(\theta_c) F_{\Pi} (\theta_c - \theta_0) \quad (35)$$

и решить численно на ЭВМ, например, методом Рунге-Кутты четвертого порядка, как наиболее распространенным, простым и довольно высокоточным. При этом уравнение (35) необходимо привести к виду:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \tau} = \frac{U^2 \sigma_0(\theta_c)}{C_p(\theta_c) M} \cdot \frac{\Pi_3 L_2}{h_3} + \frac{K(\theta_c) F_{\Pi}}{C_p(\theta_c) M} (\theta_c - \theta_0), \quad (36)$$

и задаться начальными условиями (5), т.е. при  $\tau=0$   $\theta_c = \theta_{c, \tau=0}$ .

Тогда значение температуры обрабатываемой среды на каждом шаге по времени определяется по следующей рекуррентной формуле:

$$\theta_{c,i+1} = \theta_{c,i} + \Delta \theta_{c,i}, \quad (37)$$

где

$\theta_{c,i+1}$  — значение температуры среды в последующей точке по времени, °С;

$\theta_{c,i}$  — значение температуры среды в настоящий момент времени, °С;

$\Delta \theta_{c,i}$  — приращение температуры среды за время, равное шагу интегрирования по времени  $h_{\tau}$ , и определяемое по формуле:

$$\Delta \theta_{c,i} = \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (38)$$

где  $K_1, K_2, K_3, K_4$  — коэффициенты, соответ-

ственно, равные:

$$K_1 = h\tau \left( \frac{U^2 \sigma_0(\theta_{c,i})}{C_p(\theta_{c,i})M} \cdot \frac{\Pi_3 L_3}{h_3} + \frac{K(\theta_{c,i})F_{II}}{C_p(\theta_{c,i})M} (\theta_{c,i} - \theta_0) \right); \quad (39)$$

$$K_2 = h\tau \left( \frac{U^2 \sigma_0(\theta_{c,i} + K_1/2)}{C_p(\theta_{c,i} + K_1/2)M} \cdot \frac{\Pi_3 L_3}{h_3} + \frac{K(\theta_{c,i} + K_1/2)F_{II}}{C_p(\theta_{c,i} + K_1/2)M} (\theta_{c,i} + \frac{K_1}{2} - \theta_0) \right); \quad (40)$$

$$K_3 = h\tau \left( \frac{U^2 \sigma_0(\theta_{c,i} + K_2/2)}{C_p(\theta_{c,i} + K_2/2)M} \cdot \frac{\Pi_3 L_3}{h_3} + \frac{K(\theta_{c,i} + K_2/2)F_{II}}{C_p(\theta_{c,i} + K_2/2)M} (\theta_{c,i} + \frac{K_2}{2} - \theta_0) \right); \quad (41)$$

$$K_4 = h\tau \left( \frac{U^2 \sigma_0(\theta_{c,i} + K_3)}{C_p(\theta_{c,i} + K_3)M} \cdot \frac{\Pi_3 L_3}{h_3} + \frac{K(\theta_{c,i} + K_3)F_{II}}{C_p(\theta_{c,i} + K_3)M} (\theta_{c,i} + K_3 - \theta_0) \right); \quad (42)$$

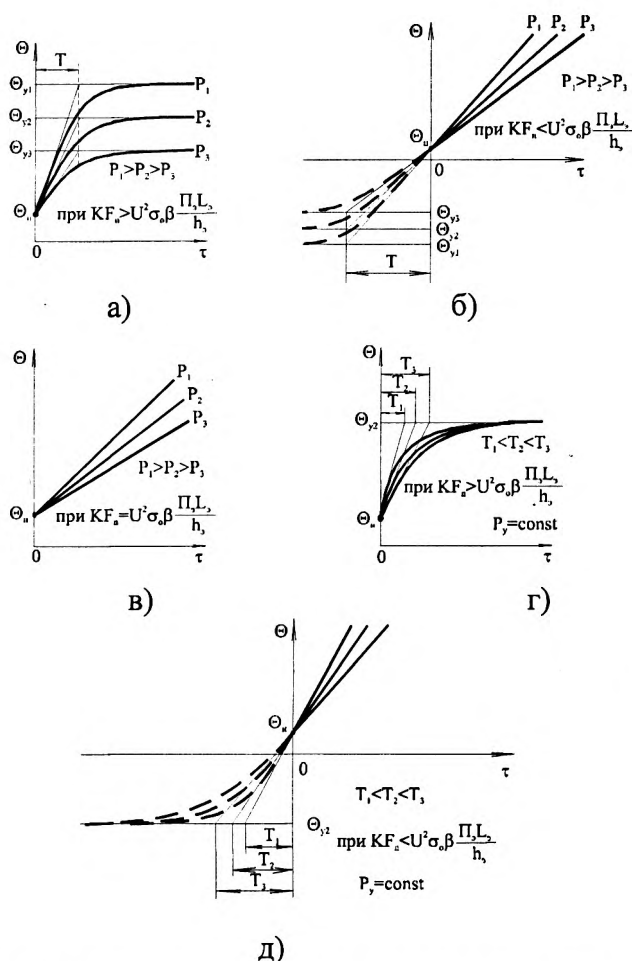


Рис. 3. Кривые нагрева среды при различной мощности, подводимой к среде (а), (б), (в) и при различных условиях охлаждения (г), (д) для возможных соотношений

$$KF_{II} \text{ и } U^2 \sigma_0 \beta \frac{\Pi_3 L_3}{h_3}.$$

Предложенный алгоритм решения уравнения (1) позволяет определять (уточнять) величины, функциональнозависимые от температуры обрабатываемой среды ( $K(\theta_c)$ ,  $C_p(\theta_c)$ ,  $\sigma(\theta_c)$ ) на любом шаге по времени, что в конечном итоге повышает точность решения.

### Литература

1. Кудрявцев И.Ф., Карасенко В.А. Электрический нагрев и электротехнология. - М.: Колос, 1975. - 384 с.
2. Залесский А.М., Кукеков Г.А. Тепловые расчеты электрических аппаратов. - Л.: Энергия, 1967. - 380 с.

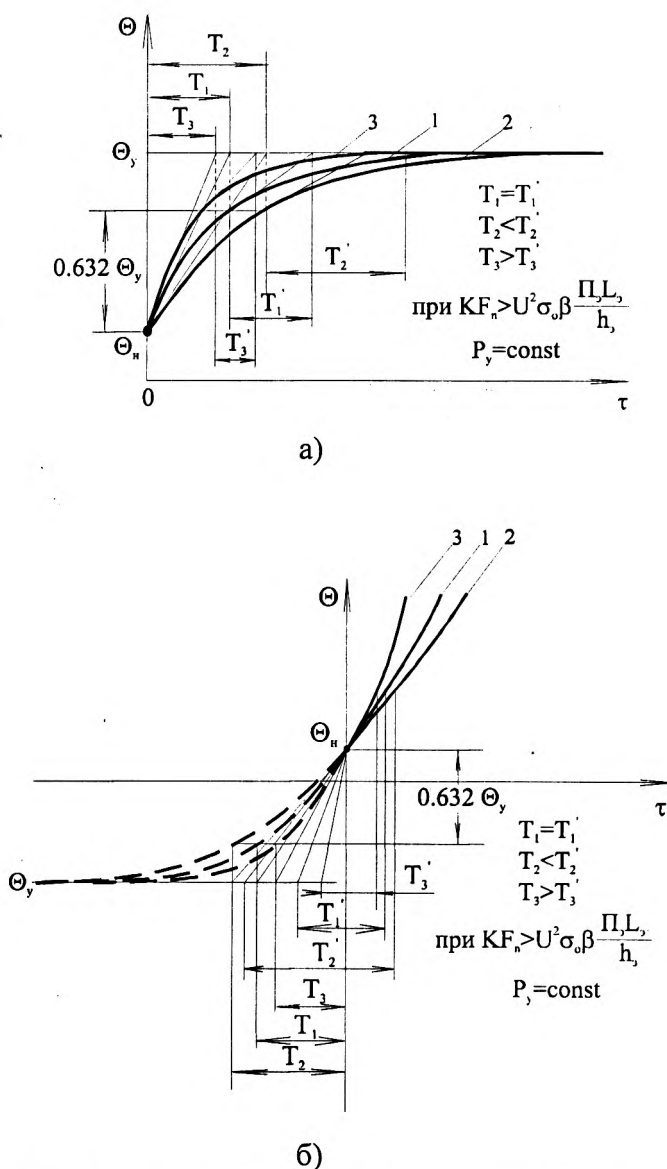


Рис. 4. Кривые нагрева среды и изменения постоянной времени  $T$  (а) и (б) при одинаковых условиях охлаждения для возможных соотношений  $KF_n$  и  $U^2 \sigma_0 \beta (\Pi_3 L_3) / h_3$  и различных значениях ТКП  $\beta$ : 1 —  $\beta = 0$ ; 2 —  $\beta < 0$ ; 3 —  $\beta > 0$ .