ния от прогнозируемых, а также действенности разработанных механизмов управления теми или иными видами рисков. На этом этапе происходит оценка соответствия используемых тактических приемов риск-менеджмента его стратегическим способам и методам и при необходимости вносятся корректировки в саму систему управления рисками.

Таким образом, формирование компенсационного потенциала предприятия позволяет существенно снизить влияние рисковых факторов и повысить устойчивость функционирования производственно-хозяйственной системы в аграрном производстве.

ТЕОРИЯ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И ЭКОНОМИКА

И.М. Морозова, *канд. физ.-мат. наук, доцент,*
Э.И. Ковалевская, *канд. физ.-мат. наук, доцент*
Белорусский государственный агарный технический университет (г. Минск)

В 2006 году в Вильнюсе проводилась 9-я Международная конференция «Теория вероятностей и математическая статистика», в которой участвовали сотрудники кафедры высшей математики БГАТУ. Особый интерес участников конференции вызвали доклады, в которых ярко были показаны глубокие взаимосвязи экономических наук и математики. Так, например, бразильского математика Н. Колева «Границы для основанных на квантилях мер зависимых функций риска» [9], литовского математика Р. Лиепус «Недавние продвижения в моделировании финансового непостоянства с акцентом на долгую диазонную зависимость» [11], а также [10]–[13].

1. Цель данной работы — заинтересовать экономистов и специалистов других социальных наук Беларуси в использовании результатов теории чисел (теории диофантовых приближений) для построения математических моделей изучаемых ими процессов.

2. Приведем один результат, связывающий теорию чисел (числа Фибоначчи) и теорию поиска [1, с. 85–110]. Названные числа появились как решение знаменитой «задачи о кроликах» почти 790 лет назад. Последующее развитие математики привело к открытию квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, через корни которого n–е число Фибоначчи F_n записывается в виде

$$F_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) / \sqrt{5}. \qquad (1)$$

Это формула Бине (1843). С помощью (1) была получена скорость роста чисел: число Фибоначчи F_n есть ближайшее целое число к $\alpha^n/\sqrt{5}$, где $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. Позднее, в 80-е годы XX века, были найдены интересные связи чисел F_n с отысканием оптимальных планов, так называемых n-шаговых фибоначчиевых планов. Например, в решении задачи о наиболее экономичной скорости автомобиля при передвижении по местности, где в пути не удастся дозаправиться топливом. Таким образом, числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной теории чисел и теории диофантовых приближений.

3. Теперь мы предлагаем совместно научно обсудить недавние результаты, полученные сотрудниками кафедры высшей математики БГАТУ, и их возможные приложения к экономике как, например, в [2].

Известно, что теория диофантовых приближений применяется в теоретической физике (квантовая теория, космология), обработке изображений, моделировании биологических процессов [5], математической физике [4], психологии, теории принятия решений [3].

4. Будем говорить о наших исследованиях в следующих нормированных полях: R — поле действительных чисел, C — поле комплексных чисел, Q_p — поле p-адических чисел, $R \times C \times Q_p$ — декартово произведение названных полей. Хорошим введением в теорию нормированных полей для нематематиков является статья [3]. Напомним, что нормирован-

ное поле K — это поле с заданной на нем нормой $\|\cdot\|_K: K$. Норма — это отображение $\|\cdot\|_K: K \to R^+$, удовлетворяющее условиям: (2) $\| x \|_K = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (3) $\| xy \|_K = \| x \|_K \cdot \| y \|_K$, (4) $\| x + y \|_K \le \| x \|_K + \| y \|_K$. Неравенство (4) хорошо известно как неравенство треугольника. Норма $\|\cdot\|_K$ называется неархимедовой, если выполняется усиленное неравенство треугольника:

$$\| x + y \|_K \le \max(\| x \|_K, \| y \|_K). \tag{5}$$

Тогда соответствующее поле называется неархимедовым. Поле, в котором выполняется только (4), называется архимедовым.

Наибольший интерес для анализа представляют локально компактные, или локальные поля, так как в них имеется мера Хаара, а значит и нетривиальный анализ Фурье. Среди выше названных полей R и C — архимедовы поля, Q_p — неархимедово поле нулевой характеристики.

Любая норма порождает метрику (расстояние). Если она неархимедова, то соответствующая ей метрика имеет много необычных свойств. Поле p-адических чисел (Q_p) — один из наиболее важных примеров неархимедовых полей. Также как и поле действительных чисел (R), это поле является пополнением поля рациональных чисел Q. Но вместо обычной абсолютной величины $|\cdot|$ (архимедовы нормы) здесь используют так называемою p-адическую форму $|\cdot|_p$ (неархимедову норму), где p — фиксированное простое число, т. е. $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$. Для каждого p поле Q_p строиться следующим образом. Пусть натуральное число n разложено на простые множители

$$n = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} ... p^{a_p},$$

где $a_i = 0, 1, 2, ...$. Тогда по определению $|n|_p = p^{-a_p}$ (знак минус играет важную роль при доказательстве неравенства (4)). Также полагаем $|0|_p = 0$ и, если $x = m/n$, где m и n — натуральные числа, то по определению $|x|_p = |m|_p / |n|_p$.

Например, $|5|_2 = 1$, $|4|_2 = 2^{-2}$, $|5/2|_2 = 2$ (здесь p = 2), но $|5|_5 = 5^{-1}$, $|4|_5 = 1$, $|5/2|_p = 5^{-1}$ (здесь p = 5). Видно, что нормы $|\cdot|_{p_1}$ и $|\cdot|_{p_2}$ не эквивалентны, если $p_1 \ne p_2$. Более того, если рациональное число представимо в виде $x = m/n$, где целые числа m и n не делятся на p, то $|x|_p = 1$. таким образом, p-адическая метрика (расстояние между точками) в пространстве Q_p существенно отличается от обычного расстояния в R. Удивительно, что на Q нет других норм, кроме $|\cdot|$ (теорема А. Островского, 1917).

С математической точки зрения R и Q_p равноправны и представляют собой некоторые математические идеализации. Отметим, что на практике мы пользуемся только рациональными числами и поэтому, если речь заходит о пространстве, то математической моделью его следует считать трехмерные пространства R^3 и Q_p^3 (в силу теоремы Островского). Возникает вопрос: «Какую из них выбирать?»

В Евклидовой геометрии немаловажную роль играет аксиома Архимеда: для всякого $x \notin Q$ существует натуральное число $n = n(x)$ такое, что $|n| > |x|$, или для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$. Другими словами, аксиома Архимеда означает, что мы можем измерять сколь угодно большие и сколь угодно малые расстояния. Так как геометрическому понятию расстояния соответствует аналитическое понятие нормы на Q, то неархимедовость означает, что $|n|_p \le 1$ для всех натуральных чисел n, или невозможность измерить расстояние, меньше некоторой величины. А это, как хорошо известно, эквивалентно усиленному неравенству треугольника (4) для нормы. Вот почему такие нормирования называют неархимедовыми.

В квантовой теории с учетом гравитации есть результат: невозможно измерение расстояний, меньших расстояния Планка, равного $\sqrt{h\,G/C^3}$, где h — постоянная Планка, C — скорость света, G — гравитационная постоянная [3]. Таким образом, квантово-математической моделью реального пространства является Q_p^3.

Возможно, и в экономических теориях существуют абсолютные констакты, ниже которых не могут опускаться некоторые прогнозируемые параметры и, следовательно, применим неархимедов анализ.

Немного истории: p-адические числа открыл К. Гензель в начале XX века подобно тому, как это было ранее с вещественным и комплексным анализом. В последние десятилетия возникли и расширяются его приложения. К перечисленному выше добавим еще приложения к математической статистике, анализу данных и программированию.

5. Теперь укажем несколько новых результатов метрической теории диофантовых приближений на гладких многообразиях, полученных сотрудниками нашей кафедры [6–8].

Пусть $\psi : N \to R^+$ — монотонно убывающая функция и $\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n) < \infty$. Пусть $P_n = P_n(t)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n. Обозначим через $H = h(P_n)$ высоту многочлена P_n. Пусть p_1 и p_2 — простые числа ≥ 2, Q_{p_i} — поле p_i-адических чисел $(i = 1, 2)$, $p_1 \neq p_2$. Положим

$$Q = R \times C \times Q_{p_1} \times Q_{p_2}, \qquad Q_1 = R \times C \times Q_{p_1}.$$

Далее определим меру $\bar{\mu}$ на Q как произведение мер Лебега μ и μ' в R и C соответственно, и мер μ_i в Q_{p_i} $(=1, 2)$, т.е. $\widetilde{\mu} = \mu \cdot \mu' \cdot \mu_1 \cdot \mu_2$. Аналогично определим меру $\widetilde{\mu} = \mu \cdot \mu' \cdot \mu_1$ на Q_1. Рассмотрим две системы неравенств

$$\begin{cases} |P_3(x)| < H^{\lambda}\psi^{\lambda}(H), \quad |P_3(z)|^2 < H^{2\lambda'}\psi^{2\lambda'}(H), \\ \qquad |P_3(\omega_i)|_{p_i} < H^{\lambda_i}\psi^{\lambda_i}(H) \quad (i = 1, 2), \end{cases} \tag{6}$$

где $(x, z, \omega_1, \omega_2) \notin Q$ и

$$\begin{cases} |P_n(x) + d_1| < H^{\lambda}\psi^{\nu}(H), \quad |P_n(z) + d_2|^2 < H^{2\lambda'}\psi^{2\nu'}(H), \\ \qquad |P_n(\omega_1) + d_3|_{p_1} < H^{\lambda_1}\psi^{\nu_2}(H), \end{cases} \tag{7}$$

где $d_1, d_2, d_3 \in Q_1$, $\quad (x, z, \omega_1,) \in Q_1$, $\quad n \geq 2$.

Параметры, входящие в системы (6), (7), удовлетворяют следующим условиям: $\max(\lambda, \lambda') \leq 1$, $\min(\nu, \nu', \nu_1, \nu_2) \geq 0$, $\lambda - \nu < 1$, $\lambda' - \nu' < 1$, $\lambda_i - \nu_i < 0$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, имеем равенства

$$\nu + 2\nu' + \nu_1 + \nu_2 = 1, \qquad \lambda + 2\lambda' + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

в случае системы (6) и

$$\nu + 2\nu' + \nu_1 = 1, \qquad \lambda + 2\lambda' + \lambda_1 = 3 - n$$

в случае системы (7). Доказаны теоремы.

ТЕОРЕМА 1 [7]. Системы неравенств (6) имеют только конечное число решений в многочленах P_3 для почти всех точек $(x, z, \omega_1, \omega_2) \notin Q$.

ТЕОРЕМА 2 [8]. Для каждого вектора $d_1, d_2, d_3 \in Q_1$, $(x, z, \omega_1,) \in Q_1$ система неравенств (7) имеет только конечное число решений в многочленах P_n $(n \geq 2)$ для почти всех точек $(x, z, \omega_1, \omega_2) \notin Q_1$.

Отметим, что в теореме 1 изучаются однородные диофантовы приближения совместно в архимедовых и неархимедовых метриках, а в теореме 2 — неоднородные.

Литература

1. Воробьев, Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. — Москва, 1969.
2. Дымков, М.П. Оптимизация портфеля ценных бумаг на неполном рынке : сб. статей Международной научно-практической конференции «Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления». БГАТУ / М.П. Дымков, И.А. Карачун, С.В. Рогозин. — Минск. — 2006. — Часть 2. — С. 19–22.
3. Леонов, Н.Н. Неархимедов анализ в Беларуси / Н.Н. Лнонов, Я.В. Радыно // Вестник БГУ. Сер. 1: Физ. мат. информ. — 2006. — № 3. — С. 70–80.
4. Пташник, Б.И. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений м частными производными / Б.И. Пташник. — Киев, 1984.
5. Хренников, А.Ю. Неархимедов анализ и его приложения / А.Ю. Хренников. — Москва, 2003.
6. Beresnevich, V. On approximation of *p*-adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, E. Kovalevskaya // I Number Theory. — 2005 — 11. — P. 33–56.
7. Kovalevskaya, E. Rational points near the square and cubic parabolas in the space $R \times Q_{p_1} \times Q_{p_2}$ / E. Kovalevskaya, I. Morozova // abstracts. 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistich. — Vilnius, 2006. — P. 189–190.
8. Kovalevskaya, E., Bernik V. Simultaneous inhomogeneous Diophantine approximation of the values of integral polynomials with regards to Archimedian and non–Archimedean valuations / E. Kovalevskaya, V. Bernik // Acta Math. Univ. Ostraviensis. — 2006. — 14. — P. 37–42.
9. Kolev, N. Bounds for quantile-based measures of dependent risk functions. Abstracts of Communications 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistics / N. Kolev, M. Goncalves. — June 25–30. — 2006. — P. 187.
10. Davis Mark H.A. Monte Carlo computation of «Greeks» in jump-diffusion models. Abstracts of Communications 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistics / H.A. Davis Mark. — June 25–30. — 2006.— P. 26.
11. Leipus, R. Recent advances in financial volatility modeling with emphasis on long range dependence. Abstracts of Communications 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistics / R. Leipus. — June 25–30. — 2006. — P. 43.
12. Bratcikoviene, N. Model of Lithuanian macroeconomic indicators. Abstracts of Communications 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistics / N. Bratcikoviene. — June 25–30. — 2006. — P. 113.
13. Maciulaityle, E. The ways of modellings ans forecasting of profit tax revenue in Lithuanica. Abstracts of Communications 9th Inter. Vilnius conf. on Probability Theory and Math. Statistics / E. Maciulaityle. — June 25–30. — 2006. — P. 220.

РАЗВИТИЕ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА В ПРОЦЕССЕ РЕФОРМИРОВАНИЯ АПК

Н.Н. Морозова, *канд. экон. наук, доцент,*
В.П. Шорохов, *канд. экон. наук, доцент*
МГУ им. А.А.Кулешова (г. Могилев)

Инновационное развитие в социальной сфере означает, на наш взгляд, совокупность мер по совершенствованию воспроизводства человека, что на практике представляется в повышении уровня и улучшении качества жизни населения. В сфере техники и технологии под инновациями понимают разработку и внедрение новейших машин, их систем, технологий, то есть качественное развитие материальных условий производства, а в социальной сфере речь идет не обязательно о чем-то неизвестном, новом, а о тех изменениях, которые