

тановки  $\alpha$  (рад) и радиуса  $R$  (м) лопастей; ширины лопатки  $b$  (м) и угла наполнения  $\psi$  (рад).

Конструктивные параметры смесителя, входящие в формулы (9.1 – 9.6), определяют исходя из требуемой однородности смеси и производительности.

В связи с тем, что характеризующие физико-механические свойства кормовых материалов можно определить только экспериментальным путем, были проведены экспериментальные исследования по смешиванию различных кормовых материалов в лопастном двухкамерном смесителе. При этом измеряли мощность, затрачиваемую на процесс смешивания, производительность смесителя, угол наполнения и отбирали пробы для определения качества смешивания на различных скоростных режимах работы смесителя. При известных значениях  $b$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $k_s$ ,  $\psi$  и  $\alpha$ , составив систему уравнений, по формулам (9.1 – 9.6) определяли коэффициенты  $k$  и  $\epsilon$ , которые соответственно равны 5200 и 48.

### Библиография

1. Сыроватка В.И., Алябьев Е.А. Методика проведения испытаний машины для смешивания кормов. – М.: ВИЭСХ, 1972.
2. Нагорский И.С., Рувиц А.А., Селезнев А.Д. К обоснованию устройства для непрерывного смешивания кормовых материалов. «Механизация и электрификация сельского хозяйства». Вып. 3. – Мн.: Урожай, 1968.
3. Севров К.П. Исследование перемешивания минеральных смесей с битумом в лопастном смесителе. В кн.: «Труды Саратовского автомобильно-дорожного института», сб. 12, 1953.
4. Евдокименко И.К. Расчет мощности, затрачиваемой на перемешивание соломы кормов в двухкамерных смесителях непрерывного действия. «Механизация и электрификация сельского хозяйства». Вып. 3. – Киев, Урожай, 1965.
5. Комаров Б.А. Исследование непрерывного процесса смешивания кормов с солями микрорэлементов. «Вопросы механизации и электрификации сельскохозяйственного производства». Вып. XI, Изд-во Ростовского университета, 1968.

\*\*\*

УДК 001.891.57: 631.363.7

В.Н. Дашков, И.С. Нагорский,  
А.И. Пунько  
(УП «БелНИИМСХ»)

### ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СМЕСИТЕЛЯ КОРМОВ

*Рассмотрена методика планирования и статистической обработки опытов с целью построения математических моделей, которые использованы для прогнозирования параметров конструкции и режимов работы смесителя кормов, обеспечивающих требуемое качество смеси и минимум затрат энергии.*

### Введение

В Научно-производственном объединении «Белсельхозмеханизация» разработана новая мало затратная технология подготовки кормов к скармливанию на фермах крупного рогатого скота. Корма, которые не нуждаются в

обработке (силос, сенаж, сено), скармливают напрямую, а из зернофуража, корнеплодов и белково-минеральных-витаминных добавок готовят обогащённую смесь и балансируют ею рацион животных по питательности, а также с учётом минерального состава местных кормов.

Ключевым агрегатом технологической линии приготовления кормовых добавок является смеситель предварительно измельчённых компонентов обогащённой смеси.

Анализ конструкций смесителей периодического действия показал эффективность использования в качестве рабочих органов ленточных лопастей полукольцевого типа. Для увеличения воздействия их на смешиваемые материалы на валу смесителя установлено два ряда лопастей, которые образуют внутреннюю и внешнюю спирали с навивками различного направления, создающие противоточное движение смеси. Это способствует перемешиванию компонентов смеси, внедрению частиц одного материала между частицами другого и, в конечном итоге, обеспечивает равномерное их распределение.

Для установления рациональных параметров конструкции и режимов работы смесителя, при которых качество смешивания в диапазоне зоотехнических требований достигается с наименьшими затратами энергии, проведены исследования с применением методов построения и анализа статистических моделей.

#### Методика проведения и обработки опытов

Исходные компоненты (корнеклубнеплоды и зернофураж) предварительно взвешивали, затем измельчали (корнеклубнеплоды измельчителем ИКМ-5, а зернофураж – дробилкой ИЗЛ-0,3) и загружали в смеситель в пропорции 1:5 по массе так, чтобы обеспечить заданный коэффициент его заполнения (табл.10).

Таблица 10

Коэффициент заполнения смесителя в зависимости от массы загружаемых в него компонентов кормовой смеси

Коэффициент заполнения	0,6	0,7	0,8	0,9
Масса кормосмеси, кг	550...560	650...660	745...755	840...850
Производительность, т/ч *	2,25	2,62	2,99	3,37

\* Производительность рассчитана ориентировочно при времени цикла приготовления смеси 1 мин. и её плотности  $\approx 800 \text{ кг/м}^3$ .

Частоту вращения рабочего органа смесителя устанавливали путём замены ведущей звёздочки на валу мотора-редуктора привода.

Мощность на привод смесителя регистрировали с трёхкратной повторностью на установившихся рабочем и холостом режимах ваттметром К-56.

Неравномерность смешивания балансирующей добавки оценивали коэффициентом вариации ( $V$ , %) контрольного компонента в пробах, отбираемых с шестикратной повторностью по объёму смеси. В качестве контрольного компонента использовали окрашенные зёрна ячменя, которые вводили вготавливаемую смесь в количестве 1,5% от общей её массы. Контрольные пробы отбирали массой 1,5 кг.

Для построения моделей, которые отображают зависимость показателя эффективности функционирования смесителя (функции отклика  $y = v$ ) от параметров его конструкции и режимов работы (факторов  $x_i$ ), в виде уравнений регрессии

$$y = \beta_0 + \sum_i \beta_i x_i + \sum_{\substack{j \\ i=1, 2, \dots, k; \\ j \neq i}} \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{l \\ i=1, 2, \dots, k}} \beta_{ii} x_i^2, \quad (1)$$

использовали методы математической теории планирования экспериментов [1], которые заключаются в выборе числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных, чтобы решить задачу отыскания экстремума функции отклика с минимальными затратами и требуемой точностью.

Экспериментальные данные аппроксимировали также шаговым регрессионным методом [2], который начинается с построения корреляционной матрицы, последовательного включения в уравнение регрессии переменных, наиболее сильно коррелированных с откликом и дополнительного исследования на каждом шаге всех ранее включённых в модель переменных с исключением из неё тех, вклад которых незначимый.

В общем случае статистическую модель можно представить матричным уравнением

$$y = \mathbf{x}\mathbf{b} + \mathbf{e}, \quad (2)$$

где  $y = \|y_u\|$  - вектор наблюдений ( $u = 1, 2, \dots, n$ );  $n$  - число вариантов опыта;

$\mathbf{x} = \|x_{u,j}\|$  - матрица независимых переменных размером  $n \times q$ ;  $q$  - общее число коэффициентов уравнения регрессии;  $\mathbf{b}$  - вектор оценок коэффициентов регрессии;  $\mathbf{e}$  - вектор остатков (невязок между наблюдаемыми и расчётными значениями переменной  $Y$ ).

Для определения оценок  $b_h$  коэффициентов  $\beta_h$  использовали метод наименьших квадратов, минимизируя сумму квадратов остатков:

$$\sum_{u=1}^n e_u^2 = \min,$$

что сводится к решению относительно коэффициентов регрессии  $\beta_h$  системы нормальных уравнений

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \mathbf{b} = \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

а именно:

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} \mathbf{x}^T \mathbf{y},$$

где  $\mathbf{x}^T$  - транспонированная матрица, соответствующая матрице независимых переменных;  $\mathbf{c} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{-1}$  - информационная (ковариационная) матрица, которая является обратной по отношению к матрице системы нормальных уравнений  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ .

Если план эксперимента ортогональный, т.е. для любых двух столбцов матрицы  $x$  выполняется условие

$$\sum_{u=1}^n x_{ui} x_{uj} = 0,$$

то матрица системы нормальных уравнений  $x^T x$  является диагональной, что приводит к простому выражению

$$b_j = \sum_{u=1}^n x_{uj} \bar{y}_u / \sum_{u=1}^n x_{uj}^2; \quad b_0 = \bar{b}_0 - \bar{x}_1 \sum_{i=1}^k b_i,$$

где  $j$  - номер столбца расширенной матрицы планирования;  $\bar{y}_u = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{uj}$

среднее арифметическое результатов  $u$ -го опыта;  $b_0$  - оценка свободного члена квадратичного уравнения (1), вычисленная для столбца с фиктивной переменной  $x_{u0} = 1$  композиционного плана.

Значимость регрессии оценивали, используя таблицу дисперсионного анализа (табл. 11), путём проверки гипотезы о равенстве средних квадратов  $MS_R$  (обусловленного регрессией) и  $MS_e$  (относительно регрессии). При этом коэффициент  $\beta_0$ , который не зависит от  $x_i$ , не включали в критерий значимости.

Таблица 11  
Дисперсионный анализ в матричной форме применительно к модели (2)

Источник вариации	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Средний квадрат
Регрессия	$b^T x^T y - n\bar{y}^2$	$q-1$	$MS_R$
Остаток	$y^T y - b^T x^T y$	$n-q$	$MS_e$
Общая вариация	$y^T y - n\bar{y}^2$	$n-1$	

Нулевую гипотезу  $H_0: K=0$  при альтернативной гипотезе  $H_0: K \neq 0$  проверяли с помощью  $F$ -критерия:

$$F = \frac{MS_R}{MS_e} \geq F_{\alpha p} = F(\alpha; q-1; n-q), \quad (4)$$

где  $F(\alpha; q-1; n-q)$  - табличное значение  $F$ -распределения при уровне значимости  $\alpha$ , числа степеней свободы  $q-1$  и  $n-q$ .

При выполнении условия (4) гипотеза о равенстве  $MS_R$  и  $MS_e$  отвергается, т.е. уравнение регрессии статистически значимо.

При выборе уравнения множественной регрессии, «наилучшим» образом аппроксимирующего результаты наблюдений, можно также использовать коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{b^T x^T y - n\bar{y}^2}{y^T y - n\bar{y}^2},$$

который характеризует долю общей суммы квадратов (относительно среднего  $\bar{y}$ ), объясненную регрессией.

Ещё один показатель того, насколько хорошо подобранное уравнение объясняет вариацию исходных данных, - это относительная среднеквадратическая ошибка (коэффициент вариации, %)

$$\delta = \frac{s}{\bar{y}} \cdot 100,$$

где  $s = \sqrt{MS_e}$ .

Если имеются данные параллельных опытов, то можно оценить воспроизводимость результатов эксперимента.

Вычислив построчные выборочные дисперсии

$$s^2\{y_u\} = \frac{1}{n_u - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_u} (y_{ui} - \bar{y}_u)^2,$$

проверяли гипотезу об однородности этих дисперсий, используя критерий Кохрена, (при одинаковом числе повторностей  $n_u$  во всех опытах):

$$G = \frac{s^2\{y_u\}_{\max}}{\sum_{u=1}^k s^2\{y_u\}} < i_{кр} = G(a; \nu_n; n), \quad (5)$$

где  $G(a; \nu_n; n)$  - табличное значение критерия при уровне значимости  $\alpha$ , числе степеней свободы  $\nu_n = n_u - 1$  и  $n$ .

Если условие (5) выполняется то расхождения между построчными выборочными дисперсиями незначимы, поэтому можно, усреднив их, вычислить дисперсию воспроизводимости опытов

$$s^2\{y\} = n^{-1} \sum_{u=1}^k s^2\{y_u\}, \quad (6)$$

с числом степеней свободы  $\nu_s = n(k - 1)$ .

Тогда можно проверить значимость коэффициентов регрессии, вычислив оценки их дисперсий. Так, для квадратичного уравнения (1), которое построено путём композиционного планирования, имеем:

$$\begin{aligned} s^2\{b_j\} &= \left( n \sum_{u=1}^k x_{uj}^2 \right)^{-1} s^2\{y\}; \\ s^2\{b_0\} &= s^2\{b'_0\} + \sum_i (\bar{x}_i)^2 s^2\{b_{ii}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $s^2\{b'_0\}$  - дисперсия свободного члена, вычисленного по формуле (3) для столбца с фиктивной переменной  $x_{u0} = 1$ .

Коэффициент регрессии  $b_j$  статистически значимый, если

$$|b_j| > \Delta b_j = s\{b_j\} \cdot t(\gamma; \nu_s), \quad (8)$$

где  $t(\gamma; \nu_s)$  - табличное значение  $t$ -распределения при двустороннем ограничении доверительном уровне  $\gamma$  и числе степеней свободы  $\nu_s$ .

Исключив незначимые коэффициенты и вычислив оценку дисперсии адекватности  $s_{\text{ад}}^2$  с числом степеней свободы  $\nu_{\text{ад}} = n - q$ :

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{n}{n - q} \cdot \sum_{u=1}^n (\hat{y}_u - \hat{y}_u)^2,$$

где  $\hat{y}_u$  - расчётное значение функции отклика для  $u$ -го варианта, можно оценить ошибку расчётных значений в пределах ошибки воспроизводимости опытов, используя  $F$  - критерий:

$$F = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s^2 \{y\}}.$$

Уравнение регрессии адекватно экспериментальным данным, если

$$F < F(a; \nu_{\text{ад}}; \nu_{\sigma}).$$

Используя составленные модели для обоснования времени смешивания  $t_k$ , надо вычислять средние значения и интервальные оценки функции отклика.

Вектор расчётных значений функции отклика

$$\hat{y} = \mathbf{z} \mathbf{b},$$

где  $\mathbf{z} = \|\mathbf{z}_{u,h}\|$  - матрица размером  $n \times q$ , элементами первого столбца которой является фиктивная переменная  $z_{u,0} = 1$ , а в остальных столбцах помещены, соответственно последовательности оценок коэффициентов регрессии  $b_j$ , включённые в модель  $Z$  - переменные (определённые функции факторов  $x_i$ );

Если по аналогии со строками матрицы  $\mathbf{Z}$  составить некоторую матрицу-строку

$$\mathbf{z}_k = \|1; z_{k,1}; z_{k,2}; \dots; z_{k,q-1}\|, \quad (10)$$

то прогнозируемое среднее значение функции отклика в точке факторного пространства, координаты которой  $z_{k,h}$ ,

$$\hat{y}_k = \mathbf{z}_k \mathbf{b}.$$

Границы интервальной оценки предсказанного с доверительной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$  значения  $\hat{y}_k$  [2]:

$$\hat{y}_k \pm t \left(1 - \frac{\alpha}{2}; n - q\right) \cdot s \cdot \sqrt{\mathbf{z}_k (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{-1} \mathbf{z}_k^T},$$

где  $t \left(1 - \frac{\alpha}{2}; n - q\right)$  - значение  $t$  - распределения, соответствующее границе его односторонней критической области при уровне значимости  $\alpha/2$  и числе степеней свободы  $n - q$  скопектированной дисперсии  $s^2 = MS_{\sigma}$ .

Предсказанное *индивидуальное* наблюдение  $y_k$ , варьирующее относительно среднего арифметического, определяется тоже величиной  $\hat{y}_k$ , но дисперсией

$$s^2\{y_k\} = s^2 \left[ 1 + z_k (z^T z)^{-1} z_k^T \right],$$

и интервал, в который с заданной доверительной вероятностью  $\gamma$  попадают возможные значения  $y_k$ ,

$$[\hat{y}_k - \Delta y_k, \hat{y}_k + \Delta y_k], \quad (11)$$

где

$$\Delta y_k = t \left( 1 - \frac{\alpha}{2}; n - q \right) \cdot s \cdot \sqrt{1 + z_k (z^T z)^{-1} z_k^T}.$$

Приравняв верхнюю границу интервальной оценки (11) регламентированному зоотехническими требованиями значению  $[y] = 15\%$ , численными методами можно определить фактор  $t_k$ , входящий в состав  $Z$  - переменных матрицы (10).

#### Результаты исследований

На первом этапе исследований определена область факторного пространства, в которой неоднородность смеси находится в пределах зоотехнического допуска. В качестве факторов рассматривали частоту вращения вала смесителя  $n$ , *мин.<sup>-1</sup>*; ширину полувитков  $B$ , *м* и угол установки полувитков смешивающего органа к плоскости, перпендикулярной к оси вала смесителя,  $a_n$ , *град.*, которые кодировали (табл. 12), согласно формуле

$$x_i = \frac{z_i - z_{i1} - z_{i2}}{z_{i2} - z_{i1}}, \quad (12)$$

где  $z_i$  - натуральное значение  $i$ -го фактора;  $z_{i1}$  и  $z_{i2}$  - соответственно нижняя и верхняя границы изменения величины  $z_i$  (уровни её стабилизации при проведении опытов)

Таблица 12

Кодирование факторов

Варируемые параметры	$n$	$B$	$a_n$
Единицы измерения	<i>мин.<sup>-1</sup></i>	<i>м</i>	<i>град.</i>
Кодовые обозначения факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Основные уровни ( $x_i = 0$ )	35	0,065	70
Интервалы варьирования	5	0,015	10
Нижние уровни ( $x_i = -1$ )	30	0,05	60
Верхние уровни ( $x_i = +1$ )	40	0,08	80

Тогда значениям  $z_{i1}$  и  $z_{i2}$  соответствуют кодированные значения  $x_{i1} = -1$  и  $x_{i2} = +1$ .

Строки матрицы планирования эксперимента содержат все сочетания факторов  $x_i$ . Матрица полного трёхфакторного плана первого порядка и результаты опытов приведены в табл.13.

Матрица планирования и результаты опытов

Таблица

u	Уровни факторов			$y_{u1}$	$y_{u2}$	$y_{u3}$	$\bar{y}_u$	$s^2\{y_u\}$	$\hat{y}$
	$x_1$	$x_2$	$x_3$						
1	-1	-1	-1	10,2	9,4	10,9	10,17	0,563	9,5
2	+1	-1	-1	14,0	14,1	15,2	14,43	0,443	14,4
3	-1	+1	-1	32,7	33,4	35,9	34,00	2,830	34,4
4	+1	+1	-1	24,5	25,1	27,1	25,57	1,853	25,9
5	-1	-1	+1	11,2	12,3	13,1	12,20	0,910	12,2
6	+1	-1	+1	17,0	17,5	18,7	17,73	0,763	17,7
7	-1	+1	+1	37,3	38,3	41,2	38,93	4,103	38,1
8	+1	+1	+1	26,6	29,5	29,1	28,40	2,470	28,4

Согласно условию (5):

$$G = \frac{4,103}{13,937} = 0,294 < G_{кр} = G(0,05; 2; 8) = 0,5157,$$

т.е. гипотеза об однородности построчных выборочных дисперсий не противоречит экспериментальным данным, что позволяет вычислить дисперсы воспроизводимости опытов (6)

$$s^2\{y\} = \frac{13,937}{8} = 1,742.$$

По фс. муре (3) вычислены оценки коэффициентов регрессии (табл.14).

Таблица

Оценки коэффициентов регрессии неполного квадратического уравнения

z-переменная	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$
$b_j$	22,679	-1,146	9,046	1,637	-3,596	-0,104	0,304

Согласно формуле (8), доверительный интервал коэффициентов регрессии

$$db = \sqrt{\frac{1,742}{3 \cdot 8}} \cdot 2,12 = 0,571.$$

Таким образом, незначимы коэффициенты при парных взаимодействиях факторов  $x_1x_3$  и  $x_2x_3$ .

Среднее арифметическое результатов опыта в центре плана  $\bar{y}_0 = 13,9$  дисперсия среднего значения  $s^2\{\bar{y}_0\} = 0,19$ .

Поскольку среднее арифметическое  $\bar{y}_0$  является оценкой коэффициента  $\beta_0$ , не смешанной с какими-либо взаимодействиями, линейное уравнение приемлемо, если разность  $|\bar{y}_0 - b_0|$  статистически незначима, т.е. выполняется неравенство

$$|\bar{y}_0 - b_0| < s \cdot \sqrt{\frac{N + n_0}{n_0 N}} \cdot t(\gamma; \nu), \quad (13)$$

где  $s^2 = \nu^{-1} \{ (N-1)s^2\{b_j\} + (n_0-1)s^2\{\bar{y}_0\} \}$  - средневзвешенное двух дисперсий с числом степеней свободы  $\nu = N + n_0 - 2$ ;  $N = 2^k = 8$  - число точек плана полного трёхфакторного эксперимента первого порядка;  $n_0$  - число повторностей опыта в центре плана;  $s^2\{b_j\} = (n_n N)^{-1} s^2\{y\}$  - дисперсия коэффициентов регрессии;  $s^2\{\bar{y}_0\} = n_0^{-1} s^2\{y_0\}$  - дисперсия среднего значения  $\bar{y}_0$ ;  $t(\gamma; \nu)$  - табличное значение  $t$ -распределения при двустороннем ограничении, доверительном уровне  $\gamma$  и числе степеней свободы  $\nu$ .

Неравенство (13) не выполняется, а именно:

$$|13,9 - 22,679| = 8,779 > \sqrt{\frac{(8-1) \cdot 0,073 + (3-1) \cdot 0,19}{8+3}} \cdot \sqrt{\frac{8+3}{3 \cdot 8}} \cdot 2,262 = 0,482.$$

Таким образом, линейная модель не приемлема.

Для описания полиномом второго порядка почти стационарной области вблизи экстремума на поверхности отклика надо составить и реализовать такой план, в котором каждая переменная принимает хотя бы три разных значения.

Следуя идее шагового эксперимента, использовали так называемое *композиционное (последовательное) планирование*, дополнив уже реализованный план первого порядка и эксперимент в центре плана опытами в  $2k$  «звёздных» точках (табл. 15), координаты которых, если  $k=3$ ,  $(\mp a_k, 0, 0)$ ,  $(0, \mp a_k, 0)$ ,  $(0, 0, \mp a_k)$ .

Таблица 15

Результаты опытов по композиционному плану

и	Уровни факторов			$Y_{u1}$	$Y_{u2}$	$Y_{u3}$	$\bar{Y}_u$	$s^2\{y_u\}$	$\hat{y}_u$
	$x_1$	$x_2$	$x_3$						
10	$-a_k$	0	0	14,7	15,3	16,5	15,50	0,840	15,76
11	$+a_k$	0	0	11,5	11,8	13,8	12,37	1,563	12,89
12	0	$-a_k$	0	10,1	12,5	11,7	11,43	1,493	12,09
13	0	$+a_k$	0	35,0	32,3	35,1	34,13	2,523	34,26
14	0	0	$-a_k$	12,0	13,1	14	13,30	1,990	13,29
15	0	0	$+a_k$	16,3	15,7	16,5	16,17	0,173	16,96

Звёздное плечо  $a_k$ , обеспечивающее ортогональность плана второго порядка.

$$a_k = \sqrt{\frac{-N + \sqrt{NN_k}}{2}} = 1,215,$$

где  $N_k = 2^k + 2k + 1 = 15$  - число опытов композиционного плана.

Чтобы обеспечить ортогональность расширенной матрицы плана второго порядка, введены новые  $Z$ -переменные:  $x'_i = x_i^2 - \bar{x}_i^2 = x_i^2 - 0,73016$   $i = 1, 2$ , т.е. уравнение регрессии (1) представлено в виде полинома второго порядка

$$y = b'_0 + b_1 x_1 + \dots + b_k x_k + b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{(k-1)k} x_{k-1} x_k + b_{11} (x_1^2 - \bar{x}_1^2) + \dots + b_{kk} (x_k^2 - \bar{x}_k^2) \quad (14)$$

По формуле (3) вычислены коэффициенты регрессии (табл.16).

Таблица 16

Коэффициенты регрессии уравнения (14)

$Z$ -переменная	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$
$b_j$	19,882	-1,185	9,126	1,514	-3,596
$Z$ -переменная	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x'_1$	$x'_2$	$x'_3$
$b_j$	-0,104	0,304	1,097	7,092	1,639

Свободный член уравнения (1):

$$b_0 = 19,882 - 0,73016 \cdot (1,097 + 7,092 + 1,639) = 12,705.$$

С учётом всех опытов композиционного плана, после проверки гипотезы об однородности построчных выборочных дисперсий:

$$G = \frac{4,103}{23,09} = 0,178 < G_{\alpha p} = G(0,05; 2; 15) = 0,328,$$

уточнена дисперсия воспроизводимости опытов

$$s^2\{y\} = \frac{23,09}{15} = 1,539.$$

По формулам (7) вычислены дисперсии коэффициентов регрессии:

$$s^2\{b'_0\} = \frac{1,539}{3 \cdot 15} = 0,034; \quad s^2\{b_1\} = \frac{1,539}{3 \cdot 10,952} = 0,047; \quad s^2\{b_{ij}\} = \frac{1,539}{3 \cdot 8} = 0,064;$$

$$s^2\{b_{ii}\} = \frac{1,539}{3 \cdot 4,361} = 0,118; \quad s^2\{b_0\} = 0,034 + 3 \cdot 0,73016^2 \cdot 0,118 = 0,222,$$

и доверительные интервалы соответствующих коэффициентов (табл.17).

Таблица 17

Доверительные интервалы коэффициентов регрессии уравнения (1)

$Z$ -переменная	$x_0$	$x_1$	$x_{ij}$	$x_{ii}$
$b_j$	0,963	0,442	0,517	0,700

(в согласии с условием (8), не значимы коэффициенты при парных взаимодействиях факторов  $x_1 x_3$  и  $x_2 x_3$ . После исключения этих коэффициентов

вычислена по формуле (9) дисперсия  $s_{\text{до}}^2 = 2,334$  и проверена адекватность уравнения регрессии (1) экспериментальным данным:

$$F = \frac{2,33}{1,539} = 1,516 < F_{\text{кр}} = F(0,05; 7; 30) = 2,33.$$

Таким образом, ошибки расчётных значений функции отклика по уравнению регрессии второго порядка находятся в пределах ошибок воспроизводимости опытов, поэтому составленную модель можно использовать для прогнозирования параметров смесителя, обеспечивающих требуемое качество смеси.

Однако уравнение регрессии, которое описывает гиперповерхность второго порядка, содержит в общем случае  $n_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$  членов, что затрудняет его анализ. Чтобы облегчить исследование функции отклика, её уравнение приводят к так называемому *каноническому виду*.

Если уравнение (1) записать в виде:

$$y = \sum a_{ij} x_i x_j + 2 \sum b_i x_i + c, \quad (15)$$

где  $\sum a_{ij} x_i x_j$  - квадратичная форма (группа старших членов);  $\sum b_i x_i$  - линейная форма (группа членов первой степени);  $c$  - свободный член.

то оно становится неполным, а именно:

$$y = \sum a_{ij} x_i x_j + \tilde{c},$$

при переносе начала координат в центр гиперповерхности - точку, относительно которой левая часть уравнения (15) обладает центральной симметрией (не меняется, если все  $x_i$  заменить на  $-x_i$ ).

Признаком центральной гиперповерхности является неравенство

$$\det a \neq 0,$$

где  $a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$  - симметричная матрица коэффициентов квадратичной

формы уравнения (15).

В нашем случае

$$\det a = \begin{vmatrix} 1,097 & -3,596/2 & 0 \\ -3,596/2 & 7,092 & 0 \\ 0 & 0 & 1,639 \end{vmatrix} = 7,453.$$

Координаты центра гиперповерхности определяют, решая уравнения центра, которые в матричной форме записи имеют вид:

$$ax^0 = -b,$$

где  $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0]^T$  и  $b = [b_1/2, b_2/2, \dots, b_k/2]^T$  - столбцевые матрицы со-

ответственно координат центра и коэффициентов линейной формы.

В нашем случае

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}_x = \begin{pmatrix} -0,880 \\ -0,867 \\ -0,462 \end{pmatrix}$$

Перенос начала координат в центр гиперповерхности осуществляем с помощью замены старых координат  $x_i$  новыми координатами  $\tilde{x}_i$  по формуле

$$x_i = \tilde{x}_i + x_i^*$$

При этом матрица квадратичной формы уравнения (15) остаётся без изменения, линейные члены пропадают, а свободный член  $\tilde{c}$  представляет собой правую часть первоначального уравнения, в которую вместо текущих значений  $x_i$  подставлены координаты центра  $x_i^*$ :

$$\tilde{c} = (\mathbf{a}\mathbf{x}^*)^T \mathbf{x}^* + 2\mathbf{b}_x^T \mathbf{x}^* + c = 8,923$$

Дальнейшее преобразование, связанное с приведением уравнения гиперповерхности к каноническому виду, сводится к замене ортонормированного базиса, при которой матрица  $\mathbf{a}$  становится диагональной, а группа старших членов принимает канонический вид:

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 (x'_1)^2 + \dots + \lambda_k (x'_k)^2,$$

где  $\lambda_i$  - корни характеристического многочлена самосопряжённого преобразования  $\mathbf{a}$ :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad x'_i - \text{координаты } \tilde{x}_i \text{ в новом}$$

ортонормированном базисе.

В нашем случае  $\lambda_1 = 0,599$ ;  $\lambda_2 = 7,59$  и  $\lambda_3 = 1,639$ .

В результате получаем компактное и удобное для анализа уравнение

$$y - 8,923 = 0,599(x'_1)^2 + 7,59(x'_2)^2 + 1,639(x'_3)^2.$$

Ортонормированный базис, в котором матрица  $\mathbf{a}$  приводится к диагональному виду, находим как решения (собственные векторы  $\mathbf{e}_i$ ) системы

$$\sum (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0,$$

где  $\delta_{ij}$  - элемент единичной матрицы (символ Кронекера).

Вычисляем нормы векторов

$$\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = \sqrt{e_{i1}^2 + e_{i2}^2 + \dots + e_{ik}^2},$$

где  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  - скалярное произведение векторов,

и нормируем собственные векторы:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|}$$

В результате имеем:

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 0,964 \\ 0,267 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} -0,267 \\ 0,964 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Выписав квадратную матрицу

$$P = \begin{bmatrix} 0,964 & 0,267 & 0 \\ -0,267 & 0,964 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

у которой  $i$ -ая строка образована координатами вектора  $\bar{e}_i$  в первоначальном базисе, можно вектор  $x = \|\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \dots \ \bar{x}_k\|^T$ , состоящий из старых координат, преобразовать в вектор  $x' = \|x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_k\|^T$ , состоящий из координат в новом ортонормированном базисе, по формуле

$$x' = Px$$

Формула обратного преобразования новых координат в старые имеет вид:

$$x = P^T x'$$

Анализ канонических уравнений регрессии упрощается благодаря имеющейся классификации гиперповерхностей второго порядка в евклидовом пространстве [3]. По этой классификации уравнения, для которых все диагональные элементы преобразованной матрицы квадратичной формы  $\lambda_i > 0$  и в общем случае  $H = y - \bar{c} > 0$ , описывают гиперповерхности, которые называют многомерными эллипсоидами. Экстремум функции  $y$  находится в центре такой гиперповерхности.

С учётом формулы (12), значения варьируемых параметров, при которых достигается  $y_{\min}$ :  $n_s = 30,6 \text{ мин}^{-1}$ ;  $B = 0,052 \text{ м}$  и  $a_n = 65,38 \text{ град}$ .

Если принять  $n_s = 30 \text{ мин}^{-1}$ ;  $B = 0,05 \text{ м}$  и  $a_n = 65 \text{ град}$ , то  $y = 9,01$ . Относительное ухудшение показателя неравномерности смешивания  $y_{\min} = v_{\min}$  при этом

$$\delta_y = \frac{y - y_{\min}}{y_{\min}} \cdot 100 = 0,98,$$

т.е. менее одного процента.

С использованием составленной модели  $y = f(n_s, B, a_n)$  исследована чувствительность показателя  $y = v$  к отклонениям варьируемых параметров от их номинальных значений в центре гиперповерхности (рис.22). На коэффициент вариации  $v$  наиболее влияет ширина полулитков  $B$ , а меньше — частота вращения вала смесителя  $n_s$ .

На втором этапе исследований при фиксированных значениях  $n_s = 30 \text{ мин}^{-1}$ ;  $B = 0,05 \text{ м}$  и  $a_n = 65 \text{ град}$  варьировали продолжительность смешивания ( $t$ , мин) и степень заполнения смесителя  $\Psi$ . Результаты этих опытов приведены в табл.18.

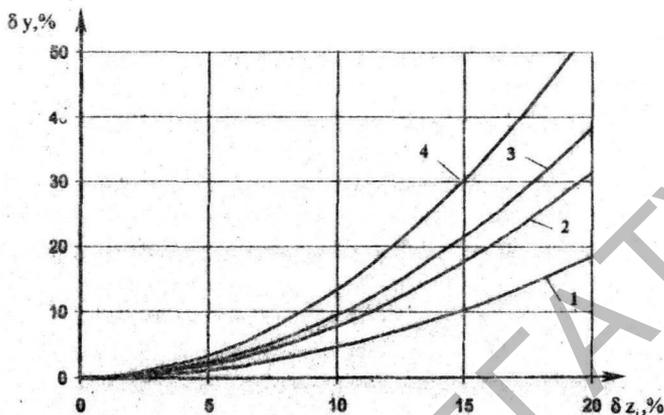


Рис.22. Относительные погрешности неравномерности смешивания при отклонениях варьируемых параметров  $z_i$  от номинальных значений:

1 -  $\delta z_i = \delta n_o, \delta a_n = \delta B = 0$ ; 2 -  $\delta z_i = \delta a_n, \delta n_o = \delta B = 0$ ; 3 -  $\delta z_i = \delta B, \delta a_n = \delta n_o = 0$ ;

4 - одновременно изменяются все параметры ( $n_o, a_n$  и  $B$ )

Таблица 10

Неоднородность обогащительной добавки ( $\psi$ , %) в зависимости от времени смешивания при различных коэффициентах заполнения смесителя

$t$ , мин.		4	6	8	10	12	14
$\psi$	0,6	20,6	14,2	11,5	10,8	11,9	11,6
	0,7	17,9	13,1	11,3	10,7	10,8	11,0
	0,8	16,5	10,0	9,4	10,0	11,0	10,3
	0,9	19,6	12,8	11,0	11,4	11,6	10,4

Неоднородность приготавливаемой смеси с течением времени асимптотически приближается к некоторой постоянной величине.

Такой предпосылке противоречит аппроксимация зависимости  $v = f(t)$  степенным многочленом, поскольку тогда она имеет минимум. Поэтому в качестве модели следовало бы принять нелинейное по параметрам уравнение

$$v_i = a \exp(bt_i) + c + e_i, \quad (16)$$

коэффициенты которого (табл.19) можно определить, используя метод наименьших квадратов и решая путём итераций систему нелинейных нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum [v_i - a \exp(bt_i) - c] \exp(bt_i) &= 0; \\ \sum [v_i - a \exp(bt_i) - c] \exp(bt_i) v_i &= 0; \\ \sum [v_i - a \exp(bt_i) - c] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Однофакторные модели неравномерности смешивания

$\psi$	$v = f(t)$	$F$	$F_{кр}$	$R^2$	$\delta, \%$
0,6	$v = 127,4 \exp(-0,654t) + 11,3$	83,32	9,55	-	4,7
	$v = 34,3 - 4,408t + 0,203t^2$ ; $t_m = 10,9$ мин.	24,52	9,55	0,942	8,5
0,7	$v = 75,4 \exp(-0,588t) + 10,8$	297,94	9,55	-	2,1
	$v = 28,0 - 3,242t + 0,147t^2$ ; $t_m = 11,0$ мин.	40,22	9,55	0,995	5,6
0,8	$v = 565,1 \exp(-1,12t) + 10,0$	21,03	9,55	-	7,9
	$v = 25,8 - 3,275t + 0,16t^2$ ; $t_m = 10,2$ мин.	4,12	9,55	0,733	15,9
0,9	$v = 435,5 \exp(-0,982t) + 11,0$	78,56	9,55	-	4,8
	$v = 30,0 - 3,617t + 0,164t^2$ ; $t_m = 11,0$ мин.	5,95	9,55	0,799	15,8

Однако уравнение (16) затруднительно использовать для построения доверительных интервалов предсказанных значений  $\hat{v}_k$  - см. формулу (11), необходимых при анализе процесса смешивания компонентов обогатительной добавки. Поэтому данные табл.18 аппроксимировали также степенными многочленами второго порядка (см. табл.19), но при анализе рассматривали эти зависимости для  $t < t_m$ , где  $t_m$  - время, соответствующее минимуму функции  $v = f(t)$ .

Графики функций  $v = f(t)$  показывают (рис.23), что при  $t > 10$  мин. коэффициент вариации  $v$  колеблется относительно некоторых постоянных значений - ординат, равных свободному члену  $c$  уравнения (16). Это вносит большие погрешности в аппроксимацию исследуемых зависимостей степенными многочленами (см. табл.19).

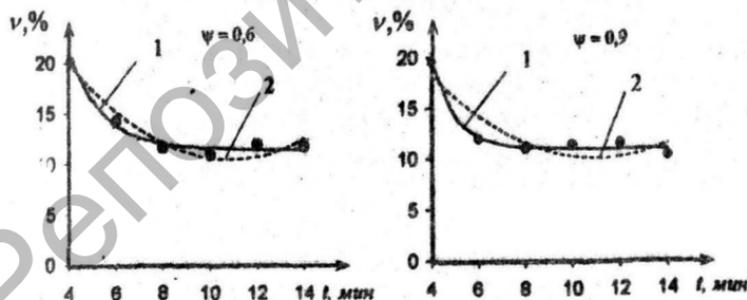


Рис.23. Аппроксимация зависимости  $v = f(t)$ :  
1 - уравнением (16); 2 - степенным многочленом (1)

Поэтому время смешивания  $t_k$ , при котором гарантируется  $v \leq [v]$ , определяли, прогнозируя интервальные (11) оценки индивидуальных наблюдений

$y_k = \nu$  коэффициента неравномерности смешивания, используя аппроксимацию степенным многочленом (1) экспериментальных точек, для которых  $t \leq 10$  мин. Рис.24 иллюстрирует определение  $t_k$ , результаты исследования приведены в табл.20.

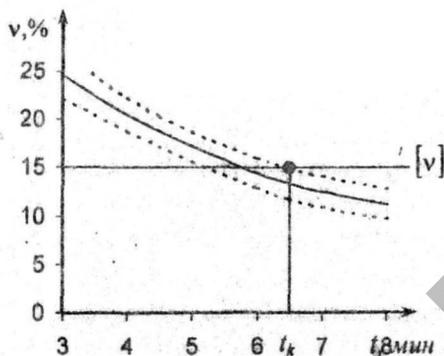


Рис.24. Прогнозируемое среднее значение функции отклика  $\hat{y}_k = \nu_{cp}$  при  $\psi = 0,6$  и границы индивидуальных наблюдений, предсказываемых с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$

Таблица 20  
Продолжительность смешивания  $t_k$ , энергоемкость  $E$  и производительность  $Q$  процесса при разной степени заполнения смесителя  $\psi$

$\psi$	0,6	0,7	0,8	0,9
$t_k$ , мин.	6,5	5,9	6,5	7,7
$E$ , кВт·ч/т	0,429	0,424	0,498	0,618
$Q$ , т/ч	5,12	6,66	6,92	6,58

Поскольку степень заполнения смесителя мало влияет на продолжительность смешивания  $t_k$  шаговым регрессионным методом [2] с использованием алгоритма расчетов на ПЭВМ [4], полагая, что зависимость  $\nu = f(t, \psi)$  может быть аппроксимирована выражением (1), составлено уравнение регрессии:

$$\nu = 39,26 - 6,763t + 0,393t^2, \quad (17)$$

для которого  $F = 43,23 > F_{cp} = F(0,05; 2; 13) = 3,81$ ,  $R^2 = 0,869$  и  $\delta = 10,6\%$ .

Таким образом, влияние фактора  $\psi$  на функцию отклика  $\nu$  статистически незначимо. Если, вопреки алгоритму шагового регрессионного метода, включить фактор  $\psi$  в уравнение регрессии, хотя при этом шаге последовательный  $F$ -критерий

$$F_n = 1.89 < F_{кр} = F(0,05; 2; 12) = 3.89,$$

то

$$\nu = +2,36 - 6,763x + 0,393x^2 - 4,137\psi.$$

При этом  $R^2 = 0,887$ , т. е. объяснённая регрессией доля общей суммы квадратов увеличилась лишь на 1,8 %, а относительная среднеквадратическая ошибка  $\delta = 9,9\%$ , т. е. по сравнению с ошибкой показателя  $\nu$ , прогнозируемого формулой (17), уменьшилась на 0,7 %.

Прогнозируемая продолжительность смешивания, которая гарантирует  $\nu \leq [\nu]$ , если использовать формулу (17),  $t_k = 6,5$  мин.

Для оценки энергоёмкости процесса смешивания измеряли мощность на привод рабочего органа (за вычетом мощности холостого хода) при разных значениях частоты его вращения и коэффициента заполнения смесителя (табл.21).

Таблица 21  
Мощность ( $P$ , кВт) на привод смесителя в зависимости от коэффициента его заполнения и частоты вращения рабочего органа

Частота вращения $n_g$ , мин. <sup>-1</sup>	Коэффициент заполнения смесителя $\psi$			
	0,6	0,7	0,8	0,9
20	1,50	1,75	2,28	2,78
25	1,81	2,28	3,00	3,23
30	2,12	2,77	3,44	4,23
35	2,76	3,22	3,94	4,75

Постулируя, что экспериментальные данные табл.21 можно аппроксимировать зависимостью (1), шаговым регрессионным методом составлено уравнение множественной регрессии

$$P = -0,0713 + n_g(0,2083\psi - 0,0494), \quad (18)$$

для которого  $F = \frac{MS_R}{MS_c} = 533,7 \gg F_{кр} = F(0,05; 2; 13) = 3,81$ , коэффициент детерминации  $R^2 = 0,988$  и относительная среднеквадратическая ошибка  $\delta = 3,8\%$  (в исследованном диапазоне варьирования  $n_g$  и  $\psi$ ).

С учётом обоснованной при исследовании качества смешивания частоты вращения вала смесителя  $n_g = 30$  мин.<sup>-1</sup>, из формулы (18) имеем:

$$P = -1,553 + 6,249\psi.$$

Энергоёмкость ( $E$ , кВт·ч/т) и производительность ( $Q$ , т/ч) процесса смешивания соответственно

$$E = \frac{P \cdot t_k}{60 \cdot M} \text{ и } Q = \frac{60 \cdot M}{t_k}, \quad (19)$$

где  $M$  – масса компонентов, загружаемых в смеситель, т.

Результаты расчётов по формулам (19), с учётом данных табл.10, показывают (см. табл.20), что для снижения энергоёмкости процесса следует принять  $\psi = 0,7$ . Тогда при практически одинаковой производительности энергоёмкость смешивания компонентов обогатительной добавки оказывается в 1,46 раза меньше, чем в случае  $\psi = 0,9$ .

Если, повышая достоверность того, что  $\nu \leq [v]$ , принять  $t_k = 6,5$  мин., то для обоснованных значений факторов и  $\psi = 0,7$  энергоёмкость смешивания компонентов обогатительной добавки  $E = 0,467 \text{ кВт} \cdot \text{ч}/\text{м}$  при производительности  $Q = 6,0 \text{ м}^3/\text{ч}$ .

Таким образом, прогнозируемые параметры и режимы работы обеспечивают энергоёмкость смешивания, которая меньше энергоёмкости процесса, выполняемого вертикально-шнековыми смесителями, для которых  $E = 0,930 \dots 1,046 \text{ кВт} \cdot \text{ч}/\text{м}$  при  $Q = 7,5 \dots 10,7 \text{ м}^3/\text{ч}$  [5].

### Выводы

В результате построения и анализа статистических моделей процесса функционирования смесителя для приготовления обогатительной кормовой добавки обоснованы рациональные параметры его конструкции и режимы работы ( $n_s = 30 \text{ мин}^{-1}$ ;  $B = 0,05 \text{ м}$ ;  $\alpha_n = 65 \text{ град}$ ;  $t_k = 6,5 \text{ мин.}$  и  $\psi = 0,7$ ), которые обеспечивают требуемое качество смеси ( $\nu \leq [v] = 15\%$ ) и минимум энергоёмкости технологического процесса  $E = 0,467 \text{ кВт} \cdot \text{ч}/\text{м}$ . Это позволило без значительных затрат материальных средств и времени на изготовление, трудоёмкие исследования и доводку большого числа вариантов экспериментального оборудования создать опытный образец смесителя, который успешно прошёл государственные приёмочные испытания.

### Библиография

1. Божан Н.И., Дмитриев А.М., Нагорский И.С. Планирование экспериментов в исследованиях по механизации и автоматизации сельскохозяйственного производства. Горки, 1986. 80 с.
2. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Изд-во «Статистика», 1973. - С.39-32, 132.
3. Ефимов Н.В., Розендори Э.Р. Линейная алгебра и нелинейная геометрия. М.: Изд-во «Наука», 1970. - С.451-459.
4. Нагорский И.С., Селезнев А.Д., Гришков А.В. Построение статистических моделей. Сб.: Повышение эффективности использования сельскохозяйственной техники. Материалы международной научно-практической конференции. Ч.1, Горки, 1998. - С.25-31.
5. Nagorski I., Selezniw A., Griszkow A., Romaniuk W. Budowa i analiza modeli mieszarek do pasz pełnoporejowych. - Problemy intensyfikacji produkcji zwierzęcej z uwzględnieniem ograniczeń ochrony środowiska / V Międzynarodowa Konferencja Naukowa, Część I. - Warszawa: 1999. - S.45-51.

\*\*\*