



Учебно-
Методический
Комплекс

МАТЕМАТИКА

В четырех частях

Часть 1

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Классификация

Удостоверения



МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

В четырех частях

Часть 1

Минск
БГАТУ
2011

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
М34

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета предпринимательства и управления БГАТУ.
Протокол № 5 от 27 мая 2010 г.*

Авторы:

кандидат физико-математических наук, доцент *И. М. Морозова*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Л. А. Хвоцинская*,
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*,
ассистент *О. Н. Кемеш*,
заместитель декана ФПУ *Л. В. Лобанок*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
теории функций БГУ *С. В. Rogozin*;
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической
механики и теории механизмов и машин БГАТУ *А. Н. Орда*

Морозова, И. М.

М34 Математика : учебно-методический комплекс. В 4 ч. Ч. 1 /
И. М. Морозова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2011. – 232 с.
ISBN 978-985-519-372-3.

Учебно-методический комплекс дисциплины «Математика» предназначен
для студентов дневной формы обучения инженерных специальностей сельскохо-
зяйственных высших учебных заведений.

**УДК 51(07)
ББК 22.1я7**

**ISBN 978-985-519-372-3 (ч. 1)
ISBN 978-985-519-371-6**

БГАТУ, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебно-методическое пособие – это первая из четырех частей УМК, каждая из которых содержит учебный материал, излагаемый в соответствующем семестре. Первая часть данного комплекса содержит перечень основных вопросов учебной программы дисциплины «Математика» 1 семестра, учебные материалы по темам: «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Функции нескольких переменных». УМК составлен в соответствии с типовой учебной программой дисциплины «Математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, соответствующий темам лекций, в который включены задачи с подробными решениями. Также предлагаются задачи для решения с преподавателем на практических занятиях и самостоятельной работы, примерный вариант контрольного теста (образцы итоговых тестовых заданий даны по уровням и отмечены знаками: репродуктивного уровня - знаком 0 , творческого уровня – знаком *), индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) и решение задач типового варианта ИДЗ для выявления достижений студентов.

В результате изучения дисциплины «Математика» в первом семестре студент должен **знать**:

- основные понятия и методы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа;
- численные методы решения инженерных задач;

уметь:

- решать алгебраические системы уравнений;
- дифференцировать функции;
- составлять математические модели производственных задач, решать их математическими методами.

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (1 СЕМЕСТР)

Модуль 1.

Элементы линейной и векторной алгебры

Определители 2-го, 3-го и n -го порядков, их свойства и методы вычисления; системы линейных алгебраических уравнений, их решение методом Крамера. Скалярные и векторные величины. Векторы и линейные операции над ними. Проекция вектора на ось. Теоремы о проекциях. Разложение вектора по базису, декартова система координат. Координаты точки и вектора. Простейшие задачи, в которых вычисляются: длина вектора; его направляющие косинусы; расстояние между точками; координаты точки, делящей отрезок в данном отношении; координаты центра масс системы n тел. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, их основные свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов; приложения скалярного, векторного и смешанного произведений векторов в геометрии и механике [3], гл.4,5.

Модуль 2.

Аналитическая геометрия

Способы задания поверхностей и линий в трехмерном пространстве в декартовой системе координат. Теория плоскостей в пространстве. Различные виды уравнения плоскости: общее, по точке и нормальному вектору, по трем точкам, «в отрезках». Взаимное расположение двух плоскостей: условия их параллельности, перпендикулярности, совпадения, вычисление угла между ними. Вычисление расстояния от точки до

плоскости. Теория прямых в пространстве. Различные виды уравнений прямых: векторно-параметрическое, канонические, по двум точкам, общие уравнения (пара пересекающихся плоскостей). Взаимное расположение двух прямых в пространстве: условия параллельности, пересечения, скрещиваемости, перпендикулярности. Вычисление расстояния от точки до прямой, угла и расстояния между прямыми.

Теория прямых на плоскости. Различные виды уравнений прямых: общее, векторно-параметрическое, каноническое, по двум точкам, с угловым коэффициентом, «в отрезках». Декартовы и полярные координаты на плоскости. Уравнения линий в декартовых, полярных координатах и в параметрическом виде. Кривые 2-го порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола; их уравнения в декартовых и полярных координатах, в параметрическом виде; их геометрические и оптические свойства и форма. Поверхности и их уравнения в пространстве. Каноническая теория поверхностей 2-го порядка: геометрические свойства и исследование их формы методом сечений. Уравнения поверхностей вращения [3], гл.2,6.

Модуль 3.

Введение в анализ

Функции одной переменной, области ее определения и значений, способы задания. Класс элементарных функций. Предел функции в точке и в бесконечности. Односторонние пределы. Свойства пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Сравнение бесконечно малых, эквивалентные бесконечно малые функции, их использование при нахождении пределов. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке, интервале, на отрезке. Непрерывность основных элементарных и элементарных функций в области их определения. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке [1], гл.1,2.

Модуль 4.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Производная функции, ее смысл (геометрический, физический). Производная суммы, разности, произведения, частного функций, сложной и обратной функций. Таблица производных основных элементар-

ных функций. Уравнения касательной и нормали к графику функции. Дифференциал, его геометрический и механический смыслы, свойства. Инвариантность формы дифференциала. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей вида 1^∞ , ∞^0 , $\infty - \infty$, 0^0 , $0 \cdot \infty$. Необходимые и достаточные условия монотонности функции и ее локального экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Необходимые и достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции и его точек перегиба. Асимптоты графика функции, методы их отыскания. Схема полного исследования функции и построения ее графика. [1], гл.3-5.

Модуль 5.

Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Область существования (определения) и значений. Предел функции. Непрерывность. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Частные производные. Вычисление частных производных сложных функций. Неявные функции, их дифференцирование. Полный дифференциал, его связь с частными дифференциалами и частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Геометрический смысл полного дифференциала. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в трехмерном пространстве. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия локального экстремума функции двух и трех переменных. Наибольшее и наименьшее значения функций нескольких переменных в замкнутой области [1], гл.8.

МОДУЛЬ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) **знать** а) *понятия и определения* определитель, вектор, базис, координаты вектора, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов; б) *характеризовать* связь между задачами геометрии и механики; в) *моделировать* задачи геометрии и механики с применением векторной алгебры.

2) **уметь** решать системы линейных уравнений по правилу Крамера, вычислять скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, выводить формулы для вычисления векторного, скалярного и смешанного произведения.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

Определение. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размерности $m \times n$* и записывается в виде

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства матриц изложены в [3] и выносятся для самостоятельного изучения.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 2×2 .

Определение. *Определителем второго порядка* называется число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

равное разности произведений элементов *главной* и *побочной* диагоналей.

Пример 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7$.

Рассмотрим квадратную матрицу размерности 3×3 .

Определение. *Определителем третьего порядка* называется число, задаваемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению алгебраической суммы трех определителей 2-го порядка. При этом каждое слагаемое в правой части (1.1) есть произведение элемента первой строки определителя на определитель 2-го порядка, полученный после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Если сумма номеров строки и столбца четная, то перед определителем 2-го порядка стоит знак “плюс”, если нечетная – то знак “минус”.

Пример 1.2. Вычислить определитель, пользуясь разложением по

первой строке: а) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot 14 - 3 \cdot 10 + 5 \cdot (-6) = -102,$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 + 0 = 4.$$

Последний пример показывает, что при разложении определителя следует выбирать такие строки или столбцы, в которых много нулевых элементов.

Определители третьего порядка можно вычислять также и по правилу треугольников (см. рис.1.1).



Рис.1.1

Смысл правила треугольников состоит в следующем:

- произведения всех элементов, лежащих на главной диагонали, а также произведения всех элементов, лежащих в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, берем с получившимися собственными знаками;
- произведения всех элементов, лежащих на побочной диагонали, а также произведения всех элементов, лежащих в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали, берем с противоположными знаками.

Вычисление определителя третьего порядка по правилу треугольников соответствует вычислению его по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \quad (1.2)$$

Пример 1.3. Вычислить определитель, пользуясь правилом треугольников:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot (-4) -$
 $- 2 \cdot 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-4) \cdot (-3) = 6 - 20 - 24 - 10 - 6 - 48 = -102,$

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) -$
 $- 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot (-3) - 5 \cdot (-1) \cdot 2 = -6 + 0 + 0 - 0 - 0 + 10 = 4.$

Определители называют также *детерминантами*.

§ 2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Свойства определителей докажем в случае определителей третьего порядка. Доказательства свойств определителей второго порядка проводятся аналогично. Для наглядности свойства определителей будем демонстрировать на конкретных строках или столбцах.

Свойство 1. Если все строки определителя заменить на столбцы с теми же номерами, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

► Найдем оба определителя и сравним их:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Очевидно, $\Delta_1 = \Delta_2$. ◀

Из доказательства следует, что определитель не изменится и в том случае, если все его столбцы заменить на строки с соответствующими номерами. Таким образом, *любое свойство определителя, справедливое для строк, является справедливым и для столбцов, и наоборот*.

Определение. Операция замены строк на столбцы (и наоборот) называется *транспонированием*.

Свойство 2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный (абсолютная величина определителя при этом не меняется):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

► Пусть переставлены местами первая и вторая строки. Тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{11}a_{32}a_{23} - \\ - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{13}a_{32}a_{21}.$$

Очевидно, $\Delta_1 = -\Delta_2$. Остальные случаи могут быть доказаны аналогично. ◀

Свойство 3. Если в определителе есть две одинаковые строки (столбца), то такой определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

► Пусть в исходном определителе Δ есть две одинаковые строки. Поменяем их местами. Так как строки одинаковы, то очевидно, что новый определитель Δ_1 не изменится, $\Delta_1 = \Delta$. С другой стороны, согласно свойству 2, при перемене местами двух строк знак определителя меняется на противоположный, то есть $\Delta_1 = -\Delta$.

Следовательно, $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$. ◀

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

► Доказательство проведем непосредственной проверкой. Вычислим эти определители и сравним их:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}ka_{22}a_{33} + a_{12}ka_{23}a_{31} + ka_{21}a_{32}a_{13} - \\ &\quad - a_{13}ka_{22}a_{31} - a_{12}ka_{21}a_{33} - ka_{23}a_{32}a_{11} = \\ &= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то этот определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

► Нулевые элементы строки (столбца) определителя имеют общий множитель ноль, который, в соответствии со свойством 4, можно вынести за знак определителя. ◀

Свойство 6. Если все элементы одной строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

► Применяя последовательно свойства 4 и 3, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Свойство 7. Если каждый элемент некоторой строки определителя равен сумме двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей, у первого из которых элементы этой строки – первые слагаемые, а у второго определителя – вторые слагаемые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a'_{22} + a''_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Доказательство сводится к непосредственной проверке.

Свойство 8. Если каждому элементу некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на любое число, то определитель не изменится, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

► Применяя последовательно свойства 7, 6 и 3, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n -ГО ПОРЯДКА

Понятие определителя может быть введено для квадратной матрицы любого порядка n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления определителей n -го порядка ($n \geq 3$) на практике применяется многократное разложение этих определителей по строке (столбцу), что позволяет уменьшать каждый раз порядок вычисляемых определителей на единицу.

Пример 1.4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Решение. Разложим этот определитель четвертого порядка по первой строке, а затем каждый из получившихся определителей третьего порядка еще раз разложим по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 0 - 0 = \\
 = 2 \cdot \left(3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 0 \right) - 1 \cdot \left(0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \right) = \\
 = 2 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot (-27)) - 1 \cdot (-1 \cdot (-17)) = 66 - 17 = 49.$$

§ 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

На практике определители используют для решения систем линейных алгебраических уравнений, для нахождения объемов тел, для нахождения максимумов и минимумов функций нескольких переменных и др. Сейчас мы рассмотрим применение определителей для решения систем линейных алгебраических уравнений. С другими приложениями определителей мы встретимся в соответствующих разделах.

1. Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где x_1, x_2 – переменные, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – коэффициенты (первый индекс соответствует номеру уравнения, второй – номеру переменной), b_1, b_2 – свободные члены.

Решением системы (1.3) является пара чисел (x_1, x_2) , подстановка которых в оба уравнения системы обращает эти уравнения в верные равенства.

Определение. *Определителем системы* называется определитель, составленный из коэффициентов при переменных.

Определителем системы (1.3) является определитель Δ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определение. *Дополнительным определителем* называется определитель, полученный из определителя системы заменой одного из его столбцов на столбец свободных членов.

В случае систем линейных уравнений с двумя неизвестными можно составить два дополнительных определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера (в случае $n = 2$). Если определитель системы (1.3) не равен нулю, $\Delta \neq 0$, то система (1.3) имеет единственное решение (x_1, x_2) , где

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (1.4)$$

Формулы (1.4) называются *формулами Крамера*.

Пример 1.5. Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ -x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -3 + 1 = -2.$$

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 - 1 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 3 + 3 = 6.$$

Найдем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

2. Решение систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пусть дана система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (1.5)$$

Определителем системы (1.5) является определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а дополнительными определителями являются определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера (в случае $n = 3$). Если определитель системы (1.5) не равен нулю, $\Delta \neq 0$, то система (1.5) имеет единственное решение (x_1, x_2, x_3) , где

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (1.6)$$

Формулы (1.6) называются **формулами Крамера**.

Пример 1.6. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$ по формулам Крамера.

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 3 \cdot (-4) - 0 \cdot (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 2 - 40 + 0 - 0 + 12 + 16 = -10.$$

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & 3 & -5 \\ -1 & -1 & -4 \\ -8 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-10) \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \cdot (-5) + (-8) \cdot 3 \cdot (-4) - (-8) \cdot (-1) \cdot (-5) - (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - 4 \cdot (-4) \cdot (-10) = -20 + 20 + 96 + 40 - 6 - 160 = -30,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -10 & -5 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-8) \cdot (-5) + 0 \cdot (-10) \cdot (-4) - 0 \cdot (-1) \cdot (-5) - 2 \cdot (-10) \cdot (-2) - (-8) \cdot (-4) \cdot 1 = 2 + 80 + 0 - 0 - 40 - 32 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -10 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-8) + 2 \cdot 4 \cdot (-10) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) \cdot (-10) - 2 \cdot 3 \cdot (-8) - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 8 - 80 + 0 - 0 + 48 + 4 = -20.$$

По формулам Крамера найдем решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-10} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{-10} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2.$$

Замечание. Если $\Delta = 0$, то система может либо иметь бесконечное множество решений, либо не иметь решений (быть несовместной). В этом случае применяются другие методы решения.

3. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными.

Теорема Крамера остается верной для системы n линейных уравнений с n неизвестными. Пусть дана система n уравнений с n неизвестными:

(1.7)

Определителем системы (1.7) является определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а дополнительные определители $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ получается из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при неизвестном x_i на столбец свободных членов.

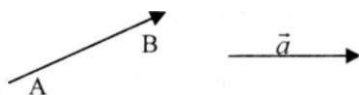
Теорема Крамера (в случае произвольного значения n). Если определитель системы (1.7) не равен нулю, $\Delta \neq 0$, то система (1.7) имеет единственное решение $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

§5. ВЕКТОРЫ

1. Основные определения

► **Определение.** Вектором называется направленный отрезок. Обозначают вектор: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ (рис.1.2).



Puc. 1.2

Определение. Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* или *модулем*. Обозначают модуль вектора: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Определение. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* $\vec{0}$. Модуль $|\vec{0}| = 0$, а направление можно считать любым.

Определение. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным вектором* (или *ортом*).

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой. Если вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$, то пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Определение. Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, равны по длине и одинаково направлены.

2. Линейные операции над векторами

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ называется новый вектор, имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ или направленный противоположно с $\vec{a}$ при $\lambda < 0$.

Для сложения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ применяют правило *параллелограмма* (рис. 1.3) или *правило треугольника* (рис. 1.4).

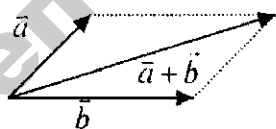


Рис. 1.3

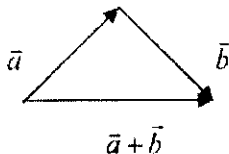
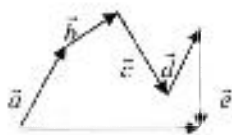


Рис. 1.4

Для сложения трех некомпланарных векторов применяют правило *параллелепипеда*.

В общем случае для сложения любого числа векторов применяют правило *многоугольника* (рис. 1.5).



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

Рис. 1.5

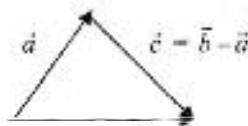


Рис. 1.6

Определение. Разностью векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется третий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$), который нужно сложить с вектором $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$ (рис. 1.6).

§6. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

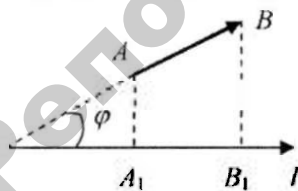
Определение. Всякая прямая, на которой указано направление, называется *осью*.

Определение. Углом между вектором и осью называется угол между вектором и положительным направлением оси.

Определение. Проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось l называется число, равное произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью, т.е.

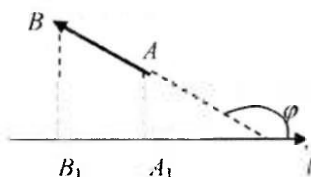
$$\text{пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cdot \cos \varphi.$$

Если угол φ – острый, то $\text{пр}_l \vec{AB} > 0$ (рис. 1.7), если φ – тупой, то $\text{пр}_l \vec{AB} < 0$ (рис. 1.8).



$$\text{пр}_l \vec{AB} = |A_1B_1| > 0$$

Рис. 1.7



$$\text{пр}_l \vec{AB} = -|A_1B_1| < 0$$

Рис. 1.8

Свойства проекций

1. $\text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}$, ($\lambda = \text{const}$).
2. $\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

$$\text{Но } \overrightarrow{OM_1} = X\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = Y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = Z\vec{k}.$$

Поэтому вектор $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (1.8)$$

и дать другое определение координат вектора.

Определение. Коэффициенты X, Y, Z разложения вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *координатами вектора*.

Формула (1.8) задает представление вектора $\vec{a}$ в системе орт.

Определение. Координатами точки M называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Пишут $M(x, y, z)$.

Приведем некоторые формулы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. Действия над векторами, заданными своими координатами.

1) Если $\vec{a} = (x, y, z)$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda = \text{const}$.

2) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

2. Условие равенства векторов.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

3. Условие коллинеарности векторов.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\vec{a} = \lambda\vec{b}) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

т.е. координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

4. Длина вектора.

$$\text{Если } \vec{a} = (x, y, z), \text{ то } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

$$\text{Но } \overrightarrow{OM_1} = X\vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = Y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = Z\vec{k}.$$

Поэтому вектор $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \quad (1.8)$$

и дать другое определение координат вектора.

Определение. Коэффициенты X, Y, Z разложения вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются *координатами вектора*.

Формула (1.8) задает представление вектора $\vec{a}$ в системе орт.

Определение. Координатами точки M называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Пишут $M(x, y, z)$.

Приведем некоторые формулы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1. Действия над векторами, заданными своими координатами.

1) Если $\vec{a} = (x, y, z)$, то $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda = \text{const}$.

2) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

2. Условие равенства векторов.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

3. Условие коллинеарности векторов.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad (\vec{a} = \lambda\vec{b}) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2},$$

т.е. координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

4. Длина вектора.

$$\text{Если } \vec{a} = (x, y, z), \text{ то } |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5. Вычисление координат и длины вектора через координаты его начала и конца.

Если $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A),$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

6. Направляющие косинусы (косинусы углов α, β, γ , которые вектор $\vec{a}$ образует с осями координат).

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Пример 1.7. Даны точки $A(5, 3, -2)$ и $B(3, 0, 4)$. Записать вектор $\overrightarrow{AB}$ в системе орт, найти его длину и направляющие косинусы.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5, 0 - 3, 4 + 2) = (-2, -3, 6) \text{ или } \overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7,$$

$$\cos \alpha = \frac{-2}{7}, \quad \cos \beta = \frac{-3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{6}{7}.$$

§ 8. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть M_1 и M_2 - некоторые точки плоскости. Рассмотрим следующую задачу: на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , найти такую точку M , которая делит направленный отрезок $\overline{M_1 M_2}$ в отношении λ , что $\overline{M_1 M} = \lambda \overline{M M_2}$.

Если $\lambda > 0$, то т. M находится внутри отрезка $M_1 M_2$ (рис. 1.11 а).

Если $\lambda < 0$, то т. M находится вне $M_1 M_2$ (рис. 1.11 б).

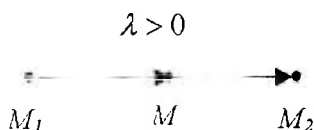


Рис. 1.11 а

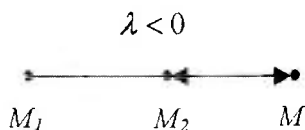


Рис. 1.11 б

Зная координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и отношение λ , найдем координаты т. $M(x, y, z)$.

Так как $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}$, то в координатной форме справедливы равенства:
$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z). \end{cases}$$
 откуда находим

координаты точки М:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}} \quad (1.9)$$

Если точка M – середина отрезка M_1M_2 , то $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}$ и $\lambda=1$. Тогда

$$\boxed{x_{\text{сер}} = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_{\text{сер}} = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_{\text{сер}} = \frac{z_1 + z_2}{2}} \quad (1.10),$$

т.е. координаты середины отрезка равны полусумме координат его концов.

Пример 1.8. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$ и $B(6, 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

Решение. Обозначим искомые точки C и D (рис. 1.12)



Рис. 1.12

По условию задачи $AD = 2DB$, т.е. $\lambda = 2$.

Подставляя в формулы (1.10) координаты точек A и B и полагая $\lambda = 2$, находим координаты точки D :

$$x_D = \frac{3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5, \quad y_D = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{6}{3} = 2 \quad D(5, 2).$$

Точка C является серединой отрезка AD , т.е. $AC = CD$. Поэтому ее координаты можно найти по формулам (1.9):

$$x_C = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4, \quad y_C = \frac{-2 + 2}{2} = 0, \quad C(4, 0).$$

§9. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

(φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$).

1. Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют следующие координаты:

$$\vec{a} = (X_1; Y_1; Z_1) = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = (X_2; Y_2; Z_2) = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}.$$

Найдем различные попарные произведения векторов базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (табл. 1.1).

Табл. 1.1

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}) \cdot (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}) = X_1 X_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + X_1 Y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + \\ + X_1 Z_2 \vec{i} \cdot \vec{k} + Y_1 X_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + Y_1 Y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + Y_1 Z_2 \vec{j} \cdot \vec{k} + Z_1 X_2 \vec{k} \cdot \vec{i} + \\ + Z_1 Y_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + Z_1 Z_2 \vec{k} \cdot \vec{k} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Таким образом, мы получили формулу

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2,$$

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.

3. Приложения скалярного произведения к задачам геометрии и механики

1. Угол между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на направление другого вектора

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_b \vec{a}$, то

$$\text{пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|},$$

$$\text{пр}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Работа силы (механический смысл скалярного произведения).

Работа A силы $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении тела на вектор $\vec{S}$ под действием силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

Пример 1.9. Дан треугольник с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$. Найти угол $\angle A$ и проекцию вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$.

Решение. Находим координаты векторов:

$$\vec{AB} = (2 - 1; 3 - 1; 4 - 1) = (1; 2; 3), \quad \vec{AC} = (4 - 1; 3 - 1; 2 - 1) = (3; 2; 1).$$

Тогда

$$\cos \angle A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1 + 4 + 9} \cdot \sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7},$$

$$\text{пр}_{\vec{AC}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

Пример 1.10. Найти работу силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, если ее точка приложения движется прямолинейно из точки $M(2, -1, 3)$ в точку $N(6, 1, 5)$.

Решение. Найдем вектор $\vec{S}$ перемещения:

$$\vec{S} = \vec{MN} = (6 - 2, 1 + 1, 5 - 3) = (4, 2, 2).$$

Тогда работа $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2.$

§10. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

$$1. |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi;$$

$$2. \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b};$$

3. тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (т.е. при наблюдении из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 1.13)).

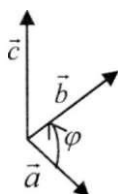


Рис. 1.13

1. Свойства векторного произведения

$$1. \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

$$2. (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$3. \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

$$4. \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

2. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют следующие координаты:

$$\vec{a} = (X_1; Y_1; Z_1) = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = (X_2; Y_2; Z_2) = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}.$$

Найдем попарные векторные произведения векторов базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (табл. 1.2).

Табл. 1.2

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}) \times (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k}) = X_1 X_2 \vec{i} \times \vec{i} + X_1 Y_2 \vec{i} \times \vec{j} + \\ &+ X_1 Z_2 \vec{i} \times \vec{k} + Y_1 X_2 \vec{j} \times \vec{i} + Y_1 Y_2 \vec{j} \times \vec{j} + Y_1 Z_2 \vec{j} \times \vec{k} + Z_1 X_2 \vec{k} \times \vec{i} + \\ &+ Z_1 Y_2 \vec{k} \times \vec{j} + Z_1 Z_2 \vec{k} \times \vec{k} = 0 + X_1 Y_2 \vec{k} - X_1 Z_2 \vec{j} - Y_1 X_2 \vec{k} + 0 + Y_1 Z_2 \vec{i} + \\ &+ Z_1 X_2 \vec{j} - Z_1 Y_2 \vec{i} + 0 = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \vec{i} - (X_1 Z_2 - Z_1 X_2) \vec{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили формулу

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

2. Приложения векторного произведения к задачам геометрии и механики

1. Площадь параллелограмма (геометрический смысл векторного произведения).

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.14), находится по формуле $S = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$



Площадь треугольника $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

Рис. 1.14

2. Момент силы (механический смысл векторного произведения).

Пусть точка A твердого тела закреплена, а в точке B приложена сила $\vec{F}$. Тогда возникает вращающий момент $\vec{M}$, равный векторному произведению плеча силы $\vec{AB}$ на вектор силы $\vec{F}$, т.е.

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}$$

Пример 1.11. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$.

Решение. Находим векторы $\vec{AB} = (-6, -3, 2)$, $\vec{AC} = (-3, 2, -6)$. Вычисляем векторное произведение

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \frac{49}{2} = 24,5.$$

Пример 1.12. Найти момент силы $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, приложенной в точке $A(3, 2, -1)$ относительно начала координат.

Решение. Вектор плеча силы $\vec{OA} = (3, 2, -1)$. Тогда момент

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 11\vec{j} + \vec{k}.$$

§11. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

1. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\vec{c} = (X_3, Y_3, Z_3)$.

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получили формулу

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Геометрический смысл смешанного произведения

Пусть тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая. Построим на этих векторах параллелепипед (рис. 1.15).

Проведем вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярно плоскости основания параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а из конца вектора $\vec{c}$ опустим высоту длиной H .

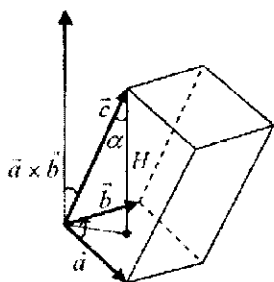


Рис. 1.15

По определению смешанного и скалярного произведений

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha.$$

$$\text{Но } |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{осн}}, \quad |\vec{c}| \cos \alpha = H.$$

Поэтому $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = S_{\text{осн}} \cdot H = V$, что дает объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Пусть тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая. Построим на этих векторах параллелепипед (рис. 1.16)

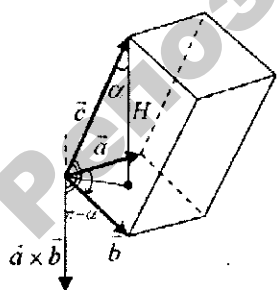


Рис. 1.16

$$\text{Тогда } \vec{a} \vec{b} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos(\pi - \alpha) =$$

$$= -|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha = -S_{\text{осн}} \cdot H = -V$$

$$= -S_{\text{осн}} \cdot H = -V, \text{ что дает объем}$$

параллелепипеда с противоположным знаком.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{cases} V, \text{ если тройка векторов правая,} \\ -V, \text{ если тройка векторов левая.} \end{cases}$$

3. Свойства смешанного произведения.

$$1. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c});$$

$$2. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c};$$

$$3. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарны};$$

4. Приложения смешанного произведения к задачам геометрии

1. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, равен

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

2. Условие компланарности векторов в координатной форме:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ — компланарны} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 1.13. Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(4, 0, 6), D(2, 3, 8)$.

Решение. Находим векторы $\vec{AB} = (-2, 3, 0), \vec{AC} = (2, 0, 6), \vec{AD} = (0, 3, 8)$. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$-2(0 - 18) - 3(16 - 0) = 36 - 48 = -12$$

Тогда
$$V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}| = \frac{|-12|}{6} = 2.$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить определители а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.
2. Найти такое значение λ , что $\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.
3. Решить уравнение $5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \lambda & 5 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$.
4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ а) разложением по строке или столбцу, б) по правилу треугольников.
5. При каких значениях x определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & x \\ 6 & x & 9 \end{vmatrix}$ равен нулю?
6. Решить системы линейных уравнений:
- а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 11. \end{cases}$
7. По заданным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$.
8. Даны три вершины $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D .
9. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$ и $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A .

10. Дан треугольник с вершинами в точках $A(3; 9; 5)$, $B(-7; 1; 1)$, $C(-8; -1; 3)$. Найти угол A и проекцию вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$.
11. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$, $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.
12. Установить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ортогональны.
13. Найти работу равнодействующей силы $\vec{f}_1 = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{f}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{f}_3 = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ при перемещении из точки $M(2; -3; 5)$ в точку $N(2; 1; 2)$.
14. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(5; -2; 4)$, $B(3; 2; 8)$, $C(-5; 9; 6)$ и длину высоты AD .
15. Найти величину и направляющие косинусы момента силы $\vec{F} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$, приложенной к точке $A(1; 5; -3)$, относительно точки $B(2; 0; 6)$.
16. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, когда $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$.
17. Найти объем пирамиды с вершинами $A(1; 0; -1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(3; 4; 0)$, $D(3; -2; 1)$.
18. Компланарны ли векторы $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$?

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$

по формулам Крамера.

3. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{CD}$, если $A(4; -1; 0)$, $B(2; -1; 1)$, $C(-2; 7; -3)$, $D(-1; 1; -1)$.

4. Найти момент силы $\vec{F} = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, приложенной к точке $A(3; 2; -1)$, относительно точки $B(5; 3; 2)$.

5. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(0; 3; 4)$, $B(0; -4; -1)$, $C(1; 2; -2)$, $D(6; 0; 2)$.

Вариант 2.

1. Вычислить определители: а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -4, \\ x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$

по формулам Крамера.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 7\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, если ее точка приложения движется прямолинейно из точки $M(2; -1; 3)$ в точку $N(4; 2; 7)$.

4. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1; 0; -3)$, $B(0; -2; -1)$, $C(-2; 1; 3)$.

5. Установить, являются ли компланарными векторы

$$\vec{a} = (2; 5; -2), \vec{b} = (0; -3; 1), \vec{c} = (-3; -8; 2).$$

Домашнее задание

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

а) разложением по первой строке; б) по правилу треугольников.

3. При каких значениях x определитель $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ x & 6 & 4 \\ 4 & x & 3 \end{vmatrix}$ равен нулю?

4. По формулам Крамера решить системы линейных уравнений

а)
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_3 = 5. \end{cases}$$

5. Доказать свойство 3 определителей путем непосредственной проверки.

6. Вершинами пирамиды являются точки $A(1; -4; 0)$, $B(5; 0; -2)$, $C(3; 7; -10)$, $D(1; -2; 1)$. Найти а) угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$; б) площадь грани ABC ; в) объем пирамиды $ABCD$.

Управляемая самостоятельная работа студентов.

Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

матрицы и действия с матрицами; обратные матрицы; матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений; метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений; координаты центра масс системы n тел; n -мерное линейное пространство, базис и координаты в нем; квадратичные формы и приведение их к каноническому виду.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 1

1 ^o . Определитель	$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$	равен: а) - 11; б) 12; в) - 4; г) 5.
2 ^o . Вычислить	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 10 & 7 & -6 \end{vmatrix}$	.
3 ^o . Если $\vec{n} = (3, 0, -6)$, то проекция этого вектора на ось Ox равна	а) 3; б) 5; в) 6; г) 14.	
4 ^o . Если $B(3, 0, -5)$, $C(5, 2, 1)$, то координаты середины отрезка BC равны	а) $(2; 1; 2)$; б) $(6; 2; -2)$; в) $(2,5; 0; -1,5)$; г) $(4; 1; -2)$.	
5. Длина вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ равна:	а) $\sqrt{7}$; б) 9; в) 3; г) $\sqrt{3}$.	
6. Если $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ для $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$	а) ортогональны; б) компланарны; в) коллинеарны; г) равны.	
7. Если для ненулевых векторов $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, то векторы $\vec{m}, \vec{n}$	а) коллинеарны; б) ортогональны; в) равны; г) компланарны.	
8. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{j} - 2\vec{k}$ равно:	а) числу 5; б) вектору $\vec{c} (2; 1; -1)$; в) числу -1; г) числу 1.	
9. Площадь треугольника, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле:	а) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{a} \vec{b} $; б) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{a} + \vec{b} $; в) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b} $; г) $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b}$.	

10. Проекция вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ на направление вектора $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ находится по формуле:

$$\text{а) } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$$\text{б) } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|};$$

$$\text{в) } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$$\text{г) } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

ИДЗ 1

Задание №1.

Вычислить определитель A :

- а) разложением по строке или столбцу;
- б) по правилу треугольников.

Задание №2.

Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.

Задание №3.

В вариантах 1-15 найти работу A равнодействующей трех сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, если ее точка приложения движется прямолинейно из точки M в точку N .

В вариантах 16-30 найти величину и направляющие конусы момента силы $\vec{F}$, приложенной к точке B относительно точки A .

Задание №4.

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Требуется:

- 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти их длины этих векторов;
- 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
- 3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
- 4) найти площадь грани ABC ;
- 5) найти объем пирамиды $ABCD$.

Вариант 1.

$$1. A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \\ M(1, 3, 4), \quad N(2, 3, 6).$$

$$4. 1. A(-9; 8; 4), B(6; 1; -1), C(1; -3; 2), D(2; -1; 2).$$

Вариант 2.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 17. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 8\vec{i} + 4\vec{k}, \\ M(5, -2, 4), \quad N(6, 8, -1).$$

$$4. A(-14; 10; 7), B(9; 3; -6), C(-4; -1; 5), D(5; 1; -3).$$

Вариант 3.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -18. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 9\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \\ M(5, 1, 6), \quad N(5, 5, 3).$$

$$4. A(-10; 7; 3), B(5; 0; -2), C(0; -4; 1), D(1; -2; 1).$$

Вариант 4.

$$1. A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 5\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = \vec{j} + 2\vec{k}, \\ M(1, -3, -4), \quad N(2, 3, 6).$$

$$4. A(-8; 5; -1), B(1; -2; 0), C(2; -6; -3), D(-3; -4; 3).$$

Вариант 5.

$$1. A = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -5\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = \vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k},$$

$$M(-4, 6, 1), \quad N(7, 8, -2).$$

$$4. A(-15; 12; 1), B(3; 5; -7), C(-5; 1; -1), D(-1; 3; -4).$$

Вариант 6.

$$1. A = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 17, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 2\vec{i} - 4\vec{j},$$

$$M(2, 3, 4), \quad N(-1, 2, 0).$$

$$4. A(-11; 13; -2), B(0; 6; -3), C(-4; 5; -1), D(-4; 4; 0).$$

Вариант 7.

$$1. A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 8\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k},$$

$$M(2, -2, 4), \quad N(1, 5, -4).$$

$$4. A(-7; 15; 2), B(4; 8; 1), C(3; 4; 0), D(0; 6; 4).$$

Вариант 8.

$$1. A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -5\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},$$

$$M(2, 3, 4), \quad N(7, 0, 8).$$

$$4. A(-12; 11; 0), B(2; 4; -4), C(-2; 0; -2), D(-2; 2; -1).$$

Вариант 9.

$$1. A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -6. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 10\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$M(1, 3, 4), \quad N(2, 3, 6).$$

$$4. A(-13; 14; 5), B(7; 7; -5), C(-3; 3; 3), D(3; 5; -2).$$

Вариант 10.

$$1. A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -12. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{f}_2 = -3\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{f}_3 = \vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$M(2, 3, 4), \quad N(-1, 2, 0).$$

$$4. A(-5; 9; 6), B(8; 2; 3), C(5; -2; 4), D(4; 0; 6).$$

Вариант 11.

$$1. A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 8\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k},$$

$$M(5, 8, -4), \quad N(3, -2, 0).$$

$$4. A(11; 2; -4), B(-4; -2; 3), C(1; 0; -5), D(3; 4; 9).$$

Вариант 12.

$$1. A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = \vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k},$$

$$M(-3, 1, 0), \quad N(8, 6, 1).$$

$$4. A(5; -1; -4), B(9; 3; -6), C(7; 10; -14), D(5; 1; -3).$$

Вариант 13.

$$1. A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}.$$

$$M(2, 3, 4), \quad N(8, 0, 4).$$

$$4. A(1; -4; 0), B(5; 0; -2), C(3; 7; -10), D(1; -2; 1).$$

Вариант 14.

$$1. A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \vec{f}_2 = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{f}_3 = \vec{i} - 2\vec{j},$$

$$M(1, 3, 1), \quad N(-3, 4, -3).$$

$$4. A(-3; -6; 2), B(1; -2; 0), C(-1; 5; -8), D(-3; -4; 3).$$

Вариант 15.

$$1. A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -10, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3. \vec{f}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{f}_2 = 7\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{f}_3 = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$M(-3, 1, 0), \quad N(8, 6, 1).$$

$$4. A(-1; 1; -5), B(3; 5; -7), C(1; 12; -15), D(-1; 3; -4).$$

Вариант 16.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \quad A(7, 6, 8), \quad B(-3, 4, -3).$$

$$4. A(-4; 2; -1), B(0; 6; -3), C(-2; 13; -11), D(-4; 4; 0).$$

Вариант 17.

$$1. A = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 8\vec{i} + 4\vec{k}, \quad A(3, 4, 2), \quad B(1, 3, 2).$$

$$4. A(0; 4; 3), B(4; 8; 1), C(2; 15; -7), D(0; 6; 4).$$

Вариант 18.

$$1. A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}, \quad A(6, -2, 2), \quad B(-4, 0, -9).$$

$$4. A(-2; 0; -2), B(2; 4; -4), C(0; 11; -12), D(-2; 2; -1).$$

Вариант 19.

$$1. A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = \vec{j} + 2\vec{k}, \quad A(5, 1, 6), \quad B(1, 1, -2).$$

$$4. A(3; 3; -3), B(7; 7; -5), C(5; 14; -13), D(3; 5; -2).$$

Вариант 20.

$$1. A = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 17. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}, \quad A(1, 5, 5), \quad B(-5, 1, -3).$$

$$4. A(4; -2; 5), B(8; 2; 3), C(6; 9; -5), D(4; 0; 6).$$

Вариант 21.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}, \quad A(1, 5, 5), \quad B(-5, 1, -3).$$

$$4. A(-5; 0; 1), B(-4; -2; 3), C(6; 2; 11), D(3; 4; 9).$$

Вариант 22.

$$1. A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j}, \quad A(3, 0, 5), \quad B(3, 4, 7).$$

$$4. A(1; -4; 0), B(2; -6; 2), C(12; -2; 10), D(9; 0; 8).$$

Вариант 23.

$$1. A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad A(0, 8, 6), \quad B(-1, 2, -2).$$

$$4. A(-1; -2; -8), B(0; -4; -6), C(10; 0; 2), D(7; 2; 0).$$

Вариант 24.

$$1. A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \quad A(5, 3, 5), \quad B(-6, 1, -5).$$

$$4. A(0; 2; -10), B(1; 0; -8), C(11; 4; 0), D(8; 6; -2).$$

Вариант 25.

$$1. A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -12, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 10\vec{i} + 11\vec{j} + 2\vec{k}, \quad A(3, 4, -1), \quad B(1, 3, 1).$$

$$4. A(3; 1; -2), B(4; -1; 0), C(14; 3; 8), D(11; 5; 6).$$

Вариант 26.

$$1. A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad A(-3, 1, 1), \quad B(2, -2, 5).$$

$$4. A(-8; 3; -1), B(-7; 1; 1), C(3; 5; 9), D(0; 7; 7).$$

Вариант 27.

$$1. A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}, \quad A(4, 4, 1), \quad B(0, 1, -1).$$

$$4. A(2; -1; -4), B(3; -3; -2), C(13; 1; 6), D(10; 3; 4).$$

Вариант 28.

$$1. A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}. \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, \quad A(5, 5, 3), \quad B(1, -1, -5).$$

$$4. A(-4; 5; -5), B(-3; 3; -3), C(7; 7; 5), D(4; 9; 3).$$

Вариант 29.

$$1. A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -13, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{k}, \quad A(3, 4, 6), \quad B(-2, 1, 2).$$

$$4. A(-2; -3; 2), B(-1; -5; 4), C(9; -1; 12), D(6; 1; 10).$$

Вариант 30.

$$1. A = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3. \vec{F} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad A(4, 1, 6), \quad B(4, -7, 2).$$

$$4. A(-3; 4; -3), B(-2; 2; -1), C(8; 6; 7), D(5; 8; 5).$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Вычислить определитель A :

$$A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-7) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 5 - (-7) \cdot 2 \cdot 4 =$$

$$= 20 + 0 + 4 - 0 + 15 + 56 = 95$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot (-7)) + (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-2)) + 0 \cdot (3 \cdot (-7) - 1 \cdot (-2)) = 4 \cdot 19 + 19 + 0 = 95.$$

Задание 2.

Решить систему линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 4 =$$
$$= 36 - 5 - 4 - 30 - 6 - 4 = -13$$

и дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 12 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= (-1) \cdot 3 \cdot 3 + 12 \cdot 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 5 - 12 \cdot (-2) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) =$$
$$= -9 + 60 - 10 - 75 + 72 + 1 = 39$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 12 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 12 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 12 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 =$$
$$= 144 - 25 - 2 - 120 - 3 - 20 = -26$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 12 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-2) \cdot 5 - 1 \cdot 12 \cdot 4 =$$
$$= 60 + 1 - 48 + 6 - 10 - 48 = -39$$

Решение системы найдем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{-13} = -3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3$$

Задание 3 а. Найти работу A равнодействующей трех сил $\vec{f}_1 = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{f}_2 = \vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{f}_3 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, если ее точка приложения движется прямолинейно из точки $M(3, 0, 5)$ в точку $N(4, -1, 7)$.

Решение.

Найдем равнодействующую $\vec{F}$ трех сил $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$:

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = (4\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}) + (\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}) + (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (7; 6; -3).$$

Найдем вектор перемещения:
 $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = (4-3; -1-0; 7-5) = (1; -1; 2).$

Тогда работа $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 7 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = -5.$

Задание 3 б. Найти величину и направляющие косинусы момента силы $\vec{F} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, приложенной к точке $B(4; 5; 6)$, относительно точки $A(-4; -1; 2)$.

Решение.

Вектор плеча силы $\overrightarrow{AB} = (4+4; 5+1; 6-2) = (8; 6; 4)$. Момент силы $\vec{F}$ находим по формуле

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(30-12) - \vec{j}(40-16) + \vec{k}(24-24) = 18\vec{i} - 24\vec{j}.$$

Следовательно,

$$|\vec{M}| = \sqrt{18^2 + (-24)^2} = 6\sqrt{3^2 + 4^2} = 6 \cdot \sqrt{9+16} = 6 \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30,$$

$$\cos \alpha = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{-24}{30} = -\frac{4}{5}, \quad \cos \gamma = \frac{0}{30} = 0.$$

Задание 4. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:
 $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(4, 8, -9)$, $D(2, 3, -2)$.

Требуется:

- 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти их длины этих векторов;
- 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
- 3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
- 4) найти площадь грани ABC ;
- 5) найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и запишем их в системе орт:

$$\overrightarrow{AB} = (-1-1; 6-2; 1+3) = (-2; 4; 4) = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-1; 8-2; -9+3) = (3; 6; -6) = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-1; 3-2; -2+3) = (1; 1; 1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

2) Угол между векторами находим по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

В нашем случае имеем:

$$\cos \varphi = \frac{(-2)3 + 4 \cdot 6 + 4(-6)}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + (-6)^2}} = \frac{-6}{6 \cdot 9} = -\frac{1}{9},$$

$$\varphi = \arccos(-1/9).$$

3) Проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ найдем по формуле

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{-2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{6} = 1.$$

4) Для определения площади грани ABC найдем векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = -48\vec{i} - 24\vec{k}.$$

Следовательно,

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-48)^2 + (-24)^2} = 24\sqrt{2^2 + 1^2} = 24\sqrt{5}.$$

Тогда
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} 24\sqrt{5} = 12\sqrt{5}.$$

5) Находим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 12 - 4 \cdot 9 + 4 \cdot (-3) = -72.$$

Тогда
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 72 = 12.$$

МОДУЛЬ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) понятия плоскость, прямая, вектор нормали, направляющий вектор; *понятия и определения:* окружность, эллипс, гипербола, парабола, поверхности второго порядка, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоид, конус второго порядка, цилиндрические поверхности; б) *характеризовать* расположение прямой и плоскости по виду уравнения; вид кривой и поверхности по заданному уравнению; в) *моделировать* задачи на движение материальной точки в плоскости и в пространстве; задачи на движение материальной точки, приводящие к составлению уравнений кривых второго порядка;

2) уметь составлять уравнения прямой и плоскости, находить угол между плоскостями, прямыми, прямой и плоскостью, расстояние от точки до плоскости;

развивать навыки воспринимать новую информацию, изображать кривые и поверхности.

§ 1. ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а) Общее уравнение плоскости

Рассмотрим плоскость P в прямоугольной декартовой системе координат. Положение плоскости определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C) \perp P$ ($\vec{n} \neq 0$) (рис. 2.1).

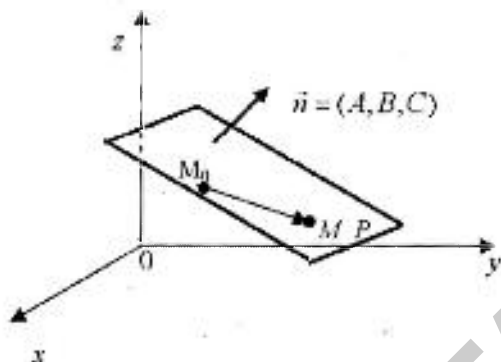


Рис. 2.1

Возьмем любую точку $M(x, y, z) \in P$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Так как $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, то скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, или

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.1)$$

Получили уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором нормали $\vec{n} = (A, B, C)$.

Если в уравнении (2.1) раскрыть скобки и обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0). \quad (2.2)$$

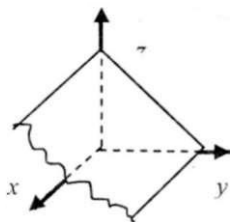
Теорема. Всякое уравнение вида (2.2) определяет некоторую плоскость в пространстве.

Если в уравнении (2.2) какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении. Например, при $A = 0$ плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox ; при $A = B = 0$ плоскость $Cz + D = 0$ параллельна осям Ox и Oy , т.е. плоскости xOy и т.д. (табл.2.1).

Частные случаи расположения плоскости, определяемой
общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

Табл.2.1

1. Плоскость параллельна оси Ox .

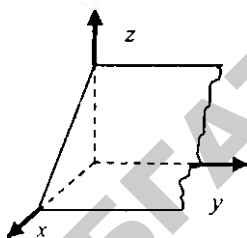


$$A=0$$

Общее уравнение имеет вид

$$By + Cz + D = 0$$

2. Плоскость параллельна оси Oy .

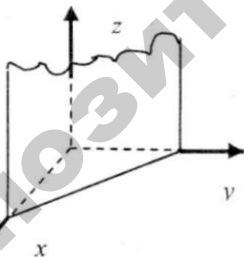


$$B=0$$

Общее уравнение имеет вид

$$Ax + Cz + D = 0$$

3. Плоскость параллельна оси Oz .

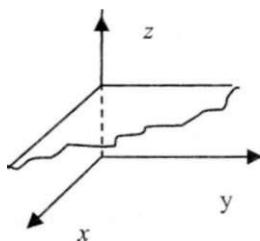


$$C=0$$

Общее уравнение имеет вид

$$Ax + By + D = 0$$

4. Плоскость перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy)

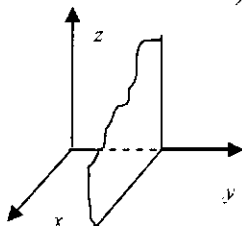


$$A=B=0$$

Общее уравнение имеет вид

$$Cz + D = 0$$

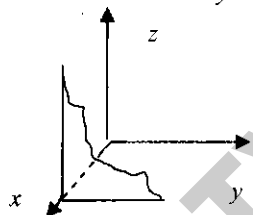
5. Плоскость перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz).



$$A=C=0$$

Общее уравнение имеет вид
 $By + D = 0$

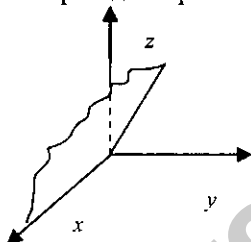
6. Плоскость перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz).



$$C=B=0$$

Общее уравнение будет иметь вид
 $Ax + D = 0$

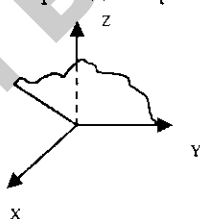
7. Плоскость проходит через ось Ox



$$A=D=0$$

Общее уравнение имеет вид
 $By + Cz = 0$

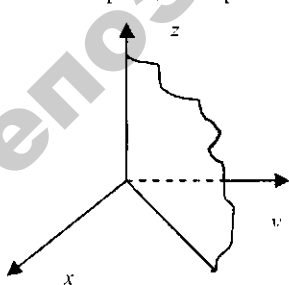
8. Плоскость проходит через ось Oy



$$B=D=0$$

Общее уравнение имеет вид
 $Ax + Cz = 0$

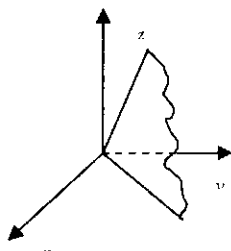
9. Плоскость проходит через ось Oz



$$C=D=0$$

Общее уравнение имеет вид
 $Ax + By = 0$

10. Плоскость проходит через начало координат



$$D=0$$

Общее уравнение имеет вид
 $Ax + By + Cz = 0$

б) Уравнение плоскости в отрезках

Пусть в уравнении (2.2) ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен 0. Перепишем уравнение (2.2) в виде $Ax + By + Cz = -D$, разделим обе части этого равенства на $-D$ и обозначим $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$. Получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (2.3)$$

где a, b, c — это величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат (рис. 2.2).

в) Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то через эти точки проходит единственная плоскость (рис. 2.3). Чтобы записать уравнение этой плоскости, возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, следовательно смешанное произведение этих векторов равно нулю: $\overrightarrow{M_1M} \overrightarrow{M_1M_2} \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Записывая смешанное произведение в координатной форме, получаем уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.4)$$

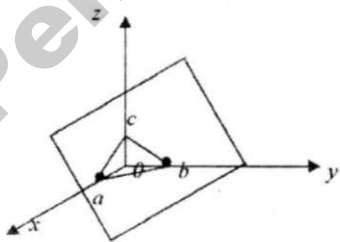


Рис. 2.2

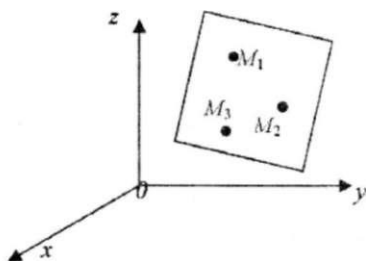


Рис. 2.3

г) Угол между двумя плоскостями

Пусть даны две плоскости $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Угол φ между двумя плоскостями равен углу между их векторами нормали (рис. 2.4 а):

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

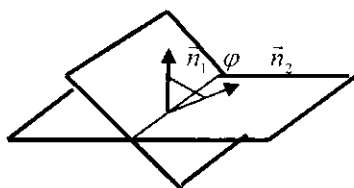


Рис. 2.4 а

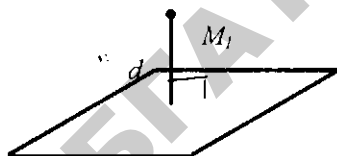


Рис. 2.4 б

д) Взаимное расположение плоскостей
 $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (условие перпендикулярности плоскостей),

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{условие параллельности плоскостей}).$$

е) Расстояние от точки до n плоскости

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 2.4 б) определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Пример 2.1. Даны две точки $M_1(-2, 0, 1)$ и $M_2(1, 4, 2)$. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

Решение. Поскольку искомая плоскость перпендикулярна $\overline{M_1M_2}$, то в качестве вектора нормали $\vec{n}$ возьмем вектор $\overline{M_1M_2} = (3, 4, 1)$ (рис.2.5).

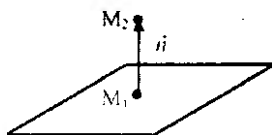


Рис. 2.5

Подставив теперь в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ $A=3$, $B=4$, $C=1$, а также координаты точки M_1 : $x_0 = -2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, получим уравнение $3(x + 2) + 4(y - 0) + 1(z - 1) = 0$ или $3x + 4y + z + 5 = 0$ – это и есть искомое общее уравнение плоскости.

Пример 2.2. Найти величины отрезков, которые отсекает плоскость $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ на осях координат.

Решение. Преобразуем уравнение плоскости:

$$2x - 3y + 4z = 12, \quad \frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{4z}{12} = 1, \quad \frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$$

Получили уравнение плоскости в отрезках (см. 2.3).

Следовательно, данная плоскость отсекает на осях координат отрезки $a=6$, $b=-4$, $c=3$.

Пример 2.3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(4, 8, -9)$.

Решение. Подставляя в уравнение (2.4) координаты точек A, B, C , получим уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1-1 & 6-2 & 1+3 \\ 4-1 & 8-2 & -9+3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим искомое уравнение плоскости:

$$(x-1) \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-48(x-1) - 0 \cdot (y-2) - 24(z+3) = 0, \text{ или } 2(x-1) + (z+3) = 0,$$

$$2x - 2 + z - 3 = 0, \quad 2x + z - 5 = 0.$$

Пример 2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; -2; 7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

Решение. Так как искомая плоскость параллельна данной, то в качестве ее нормального вектора можно выбрать нормальный вектор плоскости $2x - 3z + 5 = 0$. Таким образом, $\vec{n} = (2; 0; -3)$, подставляем данные задачи в уравнение (2.1) и записываем уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \\ 2(x - 3) + 0(y + 2) + (-3)(z + 7) = 0 \Rightarrow 2x - 3z - 27 = 0.$$

Пример 2.5. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M(2; 3; -5)$ на плоскость $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

Решение. Расстояние от точки M до плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 5 \cdot 5 - 12|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{35}{\sqrt{45}}.$$

§ 2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а) Канонические уравнения прямой в пространстве

Рассмотрим прямую l в прямоугольной декартовой системе координат. Положение прямой в пространстве определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p) \parallel l$ ($\vec{s} \neq \vec{0}$) (рис. 2.6).

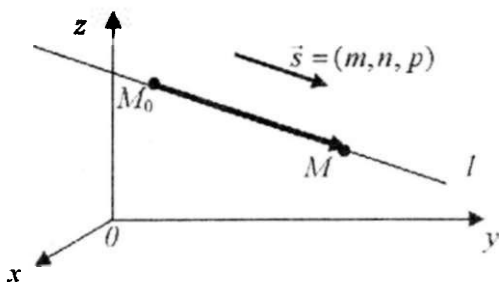


Рис. 2.6

Возьмем любую точку $M(x, y, z) \in l$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, из условия коллинеарности этих векторов получим канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (2.5)$$

б) Параметрические уравнения прямой в пространстве
Обозначим в (2.5) коэффициент пропорциональности через t и выразим через t переменные x, y, z . Приходим к параметрическим уравнениям прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad t - \text{параметр.} \quad (2.6)$$

в) Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (2.7)$$

г) Общие уравнения прямой в пространстве

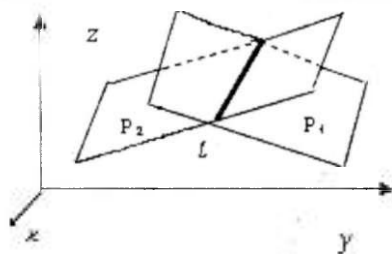
Рассмотрим две плоскости $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если эти плоскости не параллельны, то они пересекаются по прямой, задаваемой системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Система (2.8) называется общими уравнениями прямой в пространстве (рис.2.7).

Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой (2.8) можно найти по формуле



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Рис.2.7

д) Угол φ между двумя прямыми в пространстве

Угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2 равен углу между их направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (2.10)$$

е) Условия взаимного расположения прямых в пространстве

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ (условие перпендикулярности прямых),

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{условие параллельности прямых}).$$

ж) Угол между прямой и плоскостью

Угол ψ между прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью

$Ax + By + Cz + D = 0$ (Рис 2.8) определяется по формуле

$$\sin \psi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (2.11)$$

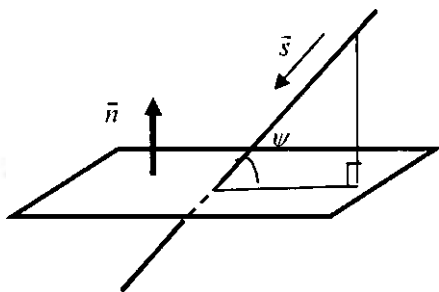


Рис. 2.8

з) Условия взаимного расположения прямой и плоскости

$l \parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$ (условие параллельности прямой и плоскости),

$l \perp P \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ (условие перпендикулярности прямой и плоскости).

Пример 2.6. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(3, 2, -1)$ и $M_2(4, 2, 1)$.

Решение. Подставляем в формулу (2.7) координаты точек M_1

и M_2 :

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z+1}{1+1}$$

или $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}$ – канонические уравнения прямой (ноль в знаменателе означает, что направляющий вектор $\vec{s} = (1, 0, 2)$ перпендикулярен оси Oy , т.е. прямая перпендикулярна оси Oy).

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2} = t$$

$$\begin{aligned} x-3 &= t, & y-2 &= 0, & z+1 &= 2t, \\ x &= 3+t, & y &= 2, & z &= -1+2t. \end{aligned}$$

Пример 2.7. Проверить, являются ли прямая $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и плоскость $6x + 4y - 2z + 5 = 0$ а) параллельными;

б) перпендикулярными.

Решение. Запишем координаты направляющего вектора $\vec{s}$ прямой и вектора нормали $\vec{n}$ плоскости: $\vec{s} = (3; 2; -1)$, $\vec{n} = (6, 4, -2)$.

а) прямая параллельна плоскости, если $\vec{s} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 18 + 8 + 2 = 28 \neq 0.$$

Следовательно, прямая и плоскость не параллельны.

б) прямая перпендикулярна плоскости, если $\vec{s} \parallel \vec{n}$, то есть координаты векторов пропорциональны.

Так как $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = 2$, то прямая и плоскость перпендикулярны.

Пример 2.8. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x + 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение. Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор. Положив $z = 0$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}, \text{ из которой находим } x = 1; y = -1,5.$$

Итак, точка на прямой известна $M(1; -1,5; 0)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4i - 7j - 6k.$$

Тогда согласно формуле (2.5) получаем канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1,5}{-7} = \frac{z-0}{-6} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+1,5}{7} = \frac{z}{6}.$$

Пример 2.9. Заданы плоскость $x + y - z + 1 = 0$ и прямая $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Найти: а) точку пересечения прямой и плоскости,

б) угол между прямой и плоскостью.

Решение. а) Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости приведем уравнения прямой к параметрическому виду

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases} \quad \text{Подставим параметрические}$$

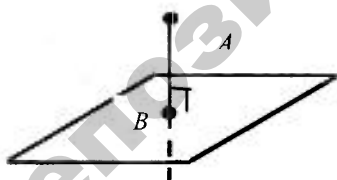
уравнения прямой в уравнение плоскости и найдем значение параметра t : $1 + 2t - t + 1 + 1 = 0 \Rightarrow t = -3$. Тогда координаты точки пересечения прямой и плоскости будут: $x = 1$; $y = -6$; $z = -4$.

б) угол между прямой и плоскостью находим по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}, \quad \text{где} \quad \vec{n} = (1; 1; -1) \quad \text{и} \quad \vec{s} = (0; 2; 1),$$

$$\sin \varphi = \frac{|0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Пример 2.10. Найти проекцию точки $A(4; -3; 1)$ на плоскость $x + 2y - z = 3$.



Решение. Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; -3; 1)$ перпендикулярно плоскости: $x + 2y - z = 3$.

Используем канонические уравнения прямой (2.5), где в качестве направляющего вектора выбираем нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

$$\text{Получим уравнения вида} \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Точка пересечения B прямой и плоскости является проекцией точки A на плоскость. Для этого переводим канонические уравнения пря-

мой к параметрическому виду (2.6):
$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$
 Подставим полу-

ченные уравнения в общее уравнение плоскости: $t + 4 + 2(2t - 3) - (-t + 1) - 3 = 0$, и найдем из последнего уравнения значение параметра t : $t + 4 + 4t - 6 + t - 1 - 3 = 0 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$.

Подставив значение параметра $t = 1$ в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки В: $x = 1 + 4 = 5$, $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $z = -1 + 1 = 0$, т.е. $B(5; -1; 0)$ - проекция точки A на плоскость.

§ 3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

а) Виды уравнений прямой на плоскости

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + b \quad \text{или} \quad y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого этой прямой на оси Oy , (x_0, y_0) – точка, лежащая на прямой (рис. 2.9).

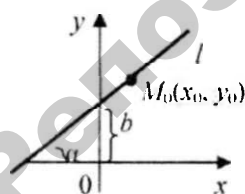


Рис. 2.9

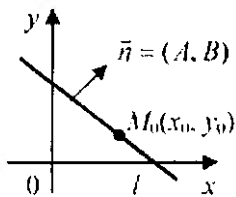


Рис. 2.10

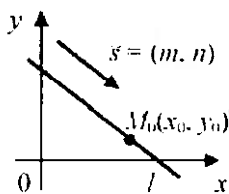


Рис. 2.11

Кроме того, прямую l на плоскости можно задать вектором нормали $\vec{n} = (A, B) \perp l$ и точкой $M_0(x_0, y_0) \in l$ (рис. 2.10). Получим 3 уравнения, аналогичные уравнениям (2.1) – (2.3) для плоскости:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, заданной точкой и вектором нормали;

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

Прямая l на плоскости также определяется направляющим вектором $\vec{s} = (m, n) \parallel l$ и точкой $M_0(x_0, y_0) \in l$ (рис. 2.11). Получим еще 3 уравнения, аналогичные уравнениям (2.5) – (2.7) прямой в пространстве:

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой;

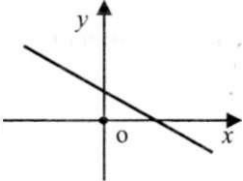
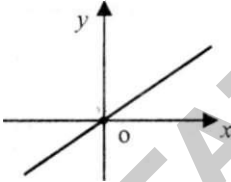
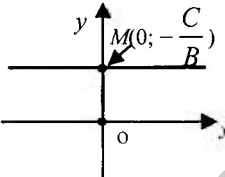
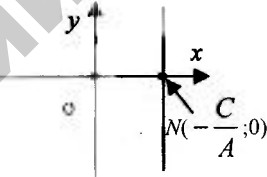
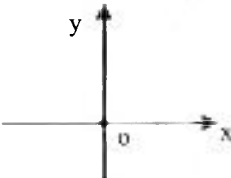
$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой;

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Если в общем уравнении прямой на плоскости какой-либо из коэффициентов A, B равен нулю, то плоскость расположена параллельно той оси, координата которой отсутствует в уравнении. (табл. 2.2).

Частные случаи расположения прямой, определяемой общим уравнением $Ax + By + C = 0$

Табл. 2.2

1.  $Ax + By + C = 0$	2. Прямая проходит через начало координат  $Ax + By = 0$
1. Прямая параллельна оси Oх.  $A = 0$ $By + C = 0$	2. Прямая параллельна оси Oy.  $B = 0$ $Ax + C = 0$
3. Прямая совпадает с осью Oх.  Уравнение имеет вид $y = 0$	4. Прямая совпадает с осью Oy.  Уравнение имеет вид $x = 0$

б) Угол между двумя прямыми на плоскости

Угол φ между двумя прямыми, заданными уравнениями:

$l_1: y = k_1x + b_1$ и $l_2: y = k_2x + b_2$ можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

в) Условия взаимного расположения прямых на плоскости

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1, \text{ т.е. } k_1 = -\frac{1}{k_2} \quad (\text{условие}$$

перпендикулярности прямых),

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \quad (\text{условие параллельности прямых}).$$

г) Расстояние от точки до прямой на плоскости

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 2.11. Найти точку пересечения прямых, одна из которых проходит через точки $M(-1; 0)$ и $N(0; 2)$, другая через точки $P(1; 0)$ и $Q(0; 1)$.

Решение. Воспользовавшись формулой: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

составим уравнения прямых.

$$MN: \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x + 1}{0 + 1} \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{x + 1}{1} \Rightarrow 2x - y + 2 = 0,$$

$$PQ: \frac{y - 0}{1 - 0} = \frac{x - 1}{0 - 1} \Rightarrow \frac{y}{1} = \frac{x - 1}{-1} \Rightarrow x + y - 1 = 0.$$

Для нахождения точки пересечения двух прямых необходимо решить систему $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$. Сложим эти уравнения:

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Подставив $x = -\frac{1}{3}$ в уравнение $x + y - 1 = 0$, получаем $y = \frac{4}{3}$.

Значит, данные прямые пересекаются в точке $K(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$ (рис.2.12).

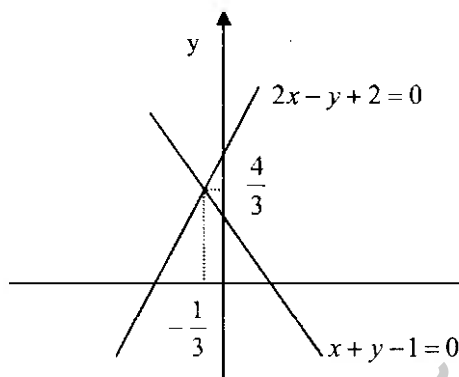


Рис.2.12

Пример 2.12. Найти площадь S треугольника, образованного прямой $2x + y + 2 = 0$ и осями координат.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках.

Для этого перенесем число 2 в правую часть и разделим полученное уравнение на -2:

$$\frac{2x}{-2} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{-2} = 1. \text{ Значит } a = -1,$$

$$b = -2.$$

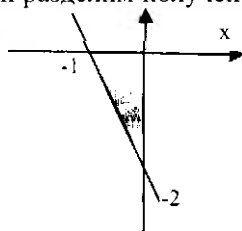


Рис. 2.13

$$\text{Площадь треугольника } S = \frac{1}{2}|a||b| = \frac{1}{2}|-1||-2| = 1.$$

Пример 2.13. Найти угол между прямыми $9x + 10y - 10 = 0$ и $y - x - 1 = 0$.

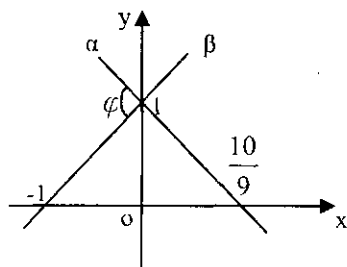


Рис. 2.14

Решение.

Построим данные прямые (рис. 2.14)

Запишем уравнения прямых с угловым коэффициентом в виде

$$\alpha: y = -\frac{9}{10}x + 1 \quad \text{и} \quad \beta: y = x + 1.$$

Значит, угловые коэффициенты

равны: $k_1 = -\frac{9}{10}$, $k_2 = 1$. Подставляем эти значения в формулу:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad \text{и получаем} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \left(-\frac{9}{10}\right)}{1 + \left(-\frac{9}{10}\right)} = 19.$$

Из решения этого уравнения угол между прямыми равен $\varphi = \arctg 19$.

Пример 2.14. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $M(-2, 1)$ параллельно и перпендикулярно прямой $3x - 4y + 12 = 0$.

Решение. Выполним чертеж (рис. 2.15). Перепишем общее уравнение прямой $3x - 4y + 12 = 0$ (l), выразив из него

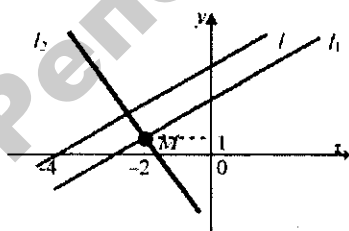


Рис. 2.15

переменную y : $l: y = \frac{3}{4}x + 3$.

Получили уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \frac{3}{4}$. Запишем

уравнение прямой $l_1 \parallel l$ и проходящей через точку $M(-2, 1)$.

Поскольку для параллельных прямых угловые коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k = \frac{3}{4}$, то $l_1: y - 1 = \frac{3}{4}(x + 2)$ или

$$4y - 4 = 3x + 6, \quad 3x - 4y + 10 = 0.$$

Составим уравнение прямой $l_2 \perp l$, проходящей через точку $M(-2, 1)$. Так как угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k} = -\frac{4}{3}$, то

$$l_2: y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2) \text{ или}$$

$$3y - 3 = -4x - 8, \quad 4x + 3y + 5 = 0.$$

Пример 2.15. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $3x - 4y - 10 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 3$.

Решение. Возьмем на искомой прямой текущую точку $M(x; y)$, то-

гда
$$d = \frac{|3x - 4y - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow 3 = \frac{|3x - 4y - 10|}{5} \Rightarrow 3x - 4y - 10 = \pm 15.$$

$$3x - 4y - 25 = 0 \text{ и } 3x - 4y + 5 = 0.$$

Пример 2.16. Площадь треугольника $S = 8$ кв.ед.; две его вершины есть точки $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Определить координаты вершины C .

Решение.

Очевидно, что задача имеет два решения (рис.2.16). Найдем их. По условию $S_{\triangle ABC} = 8$, иначе,

$$\frac{1}{2} |BA \times BC| = 8. \text{ Вычислим векторное произведение векторов}$$

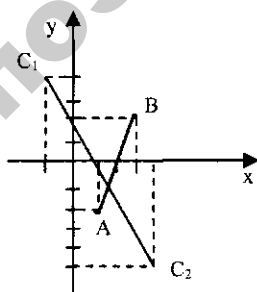


Рис.2.16

$\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA} = (1-2; -2-3) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-1; -5)$ и $\overrightarrow{BC} = (x-2; y-3)$.

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-2 & y-3 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x-2 & y-3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{k}(-5(x-2) + (y-3)). \text{ Тогда}$$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |5x - y - 7| = 8 \Rightarrow 5x - y - 7 = \pm 16$. Получаем для нахождения координат точки C две системы линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} 5x - y - 7 = 16 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = (\frac{25}{7}; \frac{36}{7})$ и $C_2 = (-1; 4)$.

§ 4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривой второго порядка называется линия, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (2.9)$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль. При $A = B = C = 0$ уравнение (2.9) задает прямую, которая называется *линией первого порядка*.

К числу линий второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

а) Окружность

Определение. *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

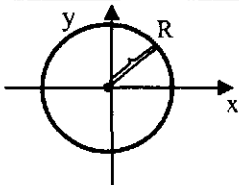
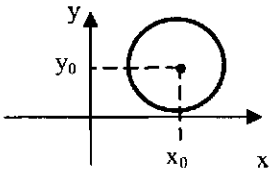
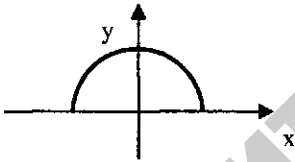
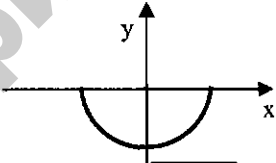
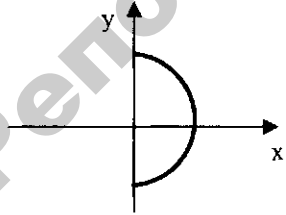
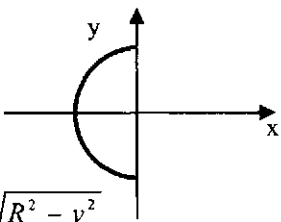
Если центр окружности поместить в начало координат, то каноническое уравнение окружности радиусом R имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности находится в точке $C(x_0, y_0)$, то ее уравнение записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эти окружности изображены в табл. 2.3.

Схематический чертеж	Формулы и комментарии
	$x^2 + y^2 = R^2, \text{ где}$ R – радиус окружности. Центр в начале координат
	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \text{ где}$ R – радиус окружности. Центр в точке $(x_0; y_0)$.
Уравнения полуокружностей	
 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$	 $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$
 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$	 $x = -\sqrt{R^2 - y^2}$

б) Эллипс

Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a > c$.

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$. (рис. 2.17)

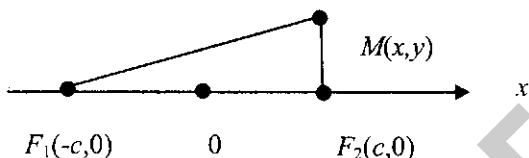


Рис. 2.17

Если выбрать прямоугольную систему координат с началом в точке $O(0,0)$, то из определения следует, что точка плоскости $M(x, y)$ будет лежать на эллипсе, если $|MF_1| + |MF_2| = 2a$,

или в координатной форме $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$,

откуда последовательно получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2cxa^2 + c^2x^2;$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2);$$

обозначив $b^2 = a^2 - c^2$, т.к. $a > c$, получим $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

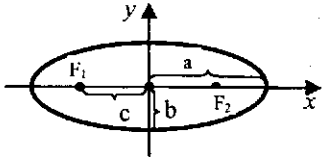
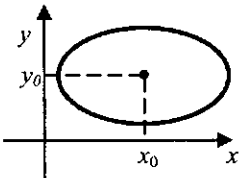
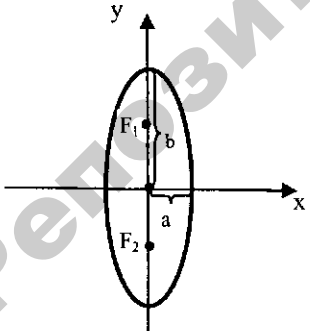
Разделив последнее равенство на b^2a^2 , получим каноническое уравнение эллипса

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,}$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, a — большая, b — малая полуоси эллипса (при $a > b$). Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Окружность есть частный случай эллипса при $a = b$. Различные случаи расположения эллипса приведены в табл. 2.4.

Табл. 2.4

Схематический чертеж	Формулы и комментарии
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси. Центр в точке $(0;0)$. Если $a > b$, то $b^2 = a^2 - c^2$. Фокусы: $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$.
	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси. Центр в точке (x_0, y_0) .
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси. Центр в точке $(0;0)$. Если $a < b$, то $a^2 = b^2 - c^2$. Фокусы: $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$.

в) Гипербола

Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2 , расстояние между которыми равно $2c$, и задано число $a < c$.

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$.

Если выбрать прямоугольную систему координат с началом в точке $O(0,0)$, то каноническое уравнение гиперболы запишется в виде

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, a – действительная, b – мнимая полуоси гиперболы.

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно координатных осей. При этом ее ветви при удалении в бесконечность как угодно близко подходят к прямым

$y = \pm \frac{b}{a}x$, которые называются асимптотами гиперболы.

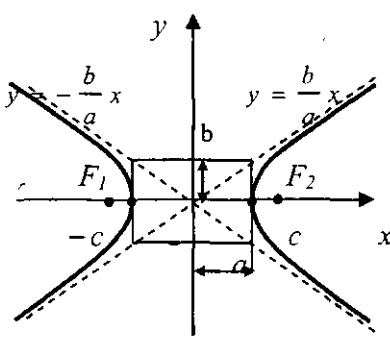
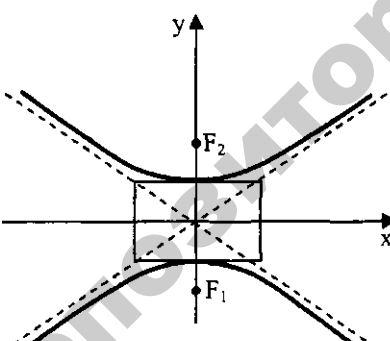
При построении гиперболы вначале строят основной прямоугольник со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводят прямые, которые являются асимптотами гиперболы.

Вершины гиперболы расположены в точках с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, а фокусы – в точках $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (или $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) также задает гиперболу, сопряженную с гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Действительная и мнимая полуоси этой гиперболы соответственно равны b и a .

Различные случаи расположения гиперболы приведены в табл. 2.5.

Схематический чертеж	Формулы и комментарии
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a - действительная полуось, b - мнимая полуось, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы, $c^2 = a^2 + b^2$. Со смещенным центром относительно начало координат $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a - действительная полуось, b - мнимая полуось, $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ - фокусы, $c^2 = a^2 + b^2$

з) Парабола

Пусть на плоскости задана точка F и прямая D , расстояние между которыми равно p .

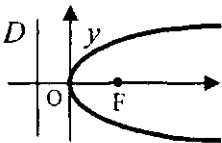
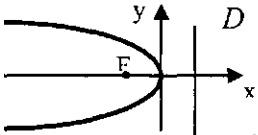
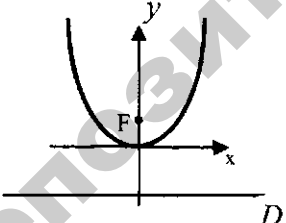
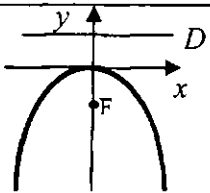
Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (фокуса) и данной прямой D (директрисы).

Если выбрать прямоугольную систему координат с началом в точке $O(0,0)$, то каноническое уравнение параболы запишется в виде

$$y^2 = 2px.$$

Эта парабола симметрична относительно оси Ox . Директрисой является прямая $x = -\frac{p}{2}$, точка $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус параболы, p – параметр параболы.

Таб. 2.6

Схематический чертеж	Формулы и комментарии
	$y^2 = 2px \ (p > 0)$ $D: x = -\frac{p}{2}$ – директриса, $F(\frac{p}{2}, 0)$ – фокус
	$y^2 = -2px \ (p > 0)$ $D: x = \frac{p}{2}$ – директриса, $F(-\frac{p}{2}, 0)$ – фокус
	$x^2 = 2py \ (p > 0)$ $D: y = -\frac{p}{2}$ – директриса, $F(0, \frac{p}{2})$ – фокус
	$x^2 = -2py \ (p > 0)$ $D: y = \frac{p}{2}$ – директриса, $F(0, -\frac{p}{2})$ – фокус

Оптические свойства некоторых кривых

- 1) лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой его фокус;
- 2) лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы кажутся выходящими из другого ее фокуса;
- 3) лучи света, выходящие из фокуса параболы, после отражения от нее образуют пучок лучей, параллельных оси параболы.

Для того, чтобы построить кривую второго порядка, заданную общим уравнением, уравнение кривой приводят к каноническому виду и переходят к новой системе координат.

Пример 2.17. Определить тип кривой, заданной уравнением $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$, и построить ее.

Решение. Данное уравнение задает окружность с центром в точке $C(-1; 2)$ и радиусом $R = \sqrt{9} = 3$. Окружность изображена на рис. 2.18.

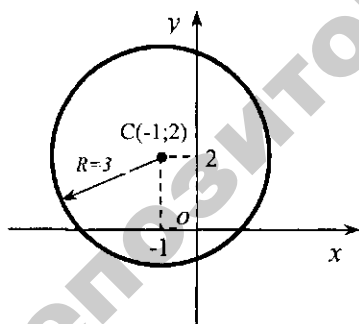


Рис. 2.18

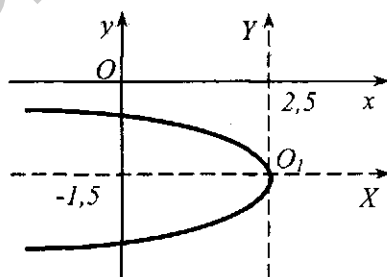


Рис. 2.19

Пример 2.18. Определить тип линии и схематически построить ее:

$$2y^2 + x + 6y + 2 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2(y^2 + 3y) + x + 2 = 0$$

и выделим полный квадрат:

$$2\left[\left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}\right] + x + 2 = 0,$$

$$2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + x + 2 = 0, \quad \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

Совершим параллельный перенос по формулам

$$X = x - \frac{5}{2}, \quad Y = y + \frac{3}{2}.$$

Координаты нового центра $O_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Уравнение примет вид

$$Y^2 = -\frac{1}{2}X.$$

Это каноническое уравнение параболы вида $Y^2 = 2pX$, где $p = -\frac{1}{4} < 0$. Поэтому парабола направлена в отрицательную сторону оси O_1X .

Парабола изображена на рис. 2.19.

Пример 2.19. Построить гиперболу, заданную уравнением $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти ее полуоси, координаты фокусов и записать уравнения ее асимптот.

Решение. Данное уравнение является каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Поэтому действительная полуось

$a = \sqrt{25} = 5$, мнимая полуось $b = \sqrt{9} = 3$. Найдем координаты фокусов F_1 и F_2 : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$, $F_1(-\sqrt{34}; 0)$, $F_2(\sqrt{34}; 0)$.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm \frac{3}{5}x$.

Построение гиперболы начинаем с построения основного прямоугольника со сторонами $2a=10$ и $2b=6$, параллельными осям координат. Асимптоты гиперболы проходят по диагоналям этого

прямоугольника. Вершины гиперболы расположены в точках пересечения основного прямоугольника с осью Ox .
Гипербола изображена на рис. 2.20.

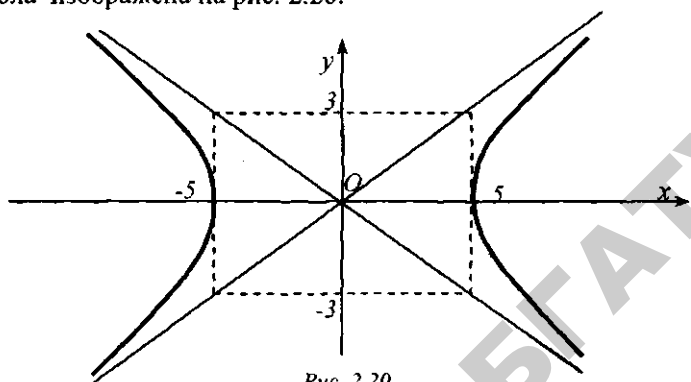


Рис. 2.20

Пример 2.20. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $A(1; 3\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $B(4\frac{\sqrt{2}}{3}, 1)$.

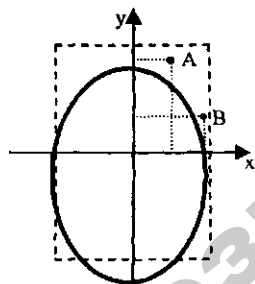


Рис. 2.21

Решение.

Так как точки A и B находятся на эллипсе, то их координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляя координаты точки A , а затем точки B в уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ и получаем

$$\frac{\left(4\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{32}{9a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} = 1 - \frac{32}{9a^2}.$$

Подставляем в первое уравнение $1 - \frac{32}{9a^2}$ вместо $\frac{1}{b^2}$. Получаем:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{27}{4} \left(1 - \frac{32}{9a^2} \right) = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4. \text{ Значит } b^2 = 9.$$

Запишем уравнение искомого эллипса: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ рис.2.21.

§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в плоскости xOy эллипс, гиперболу, сопряженную гиперболу, параболу и пару пересекающихся прямых. Совершим вращение этих линий вокруг оси Oy и деформацию (сжатие или растяжение) образованных таким образом *поверхностей второго порядка*. Эти поверхности со своими каноническими уравнениями изображены на рис. 2.22 - 2.30.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая образуется при поступательном перемещении некоторой линии (*образующей*) вдоль некоторой кривой (*направляющей*). Выбирая в качестве направляющей эллипс, гиперболу и параболу, расположенные в плоскости xOy , а в качестве образующей – прямую, параллельную оси Oz , получим соответственно *эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры*, изображенные на рис. 2.28 - 2.30.

При построении поверхностей второго порядка часто пользуются таблицей этих поверхностей (см. табл. 2.7), учитывая, что ось фигуры или образующая может быть параллельна не только оси Oz .

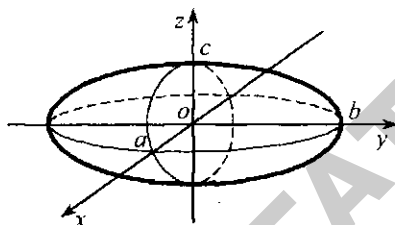
Поверхности второго порядка

Табл. 2.7

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

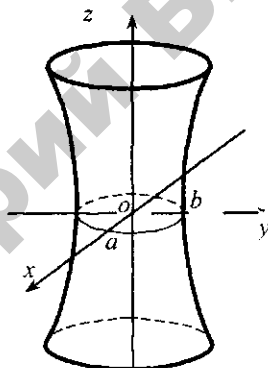
Рис. 2.22



Однополостный
гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

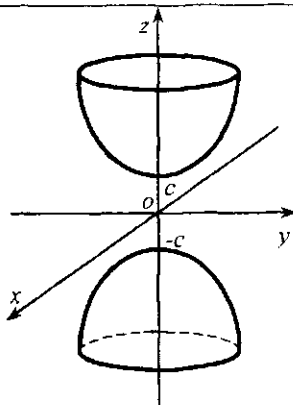
Рис. 2.23



Двуполостный
гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Рис. 2.24



Эллиптический
параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

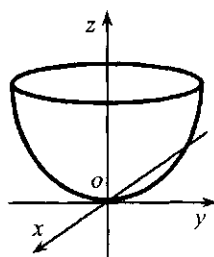


Рис. 2.25

Конус второго
порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

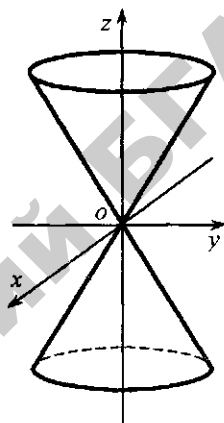


Рис. 2.26

Гиперболический
параболоид
(седло)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

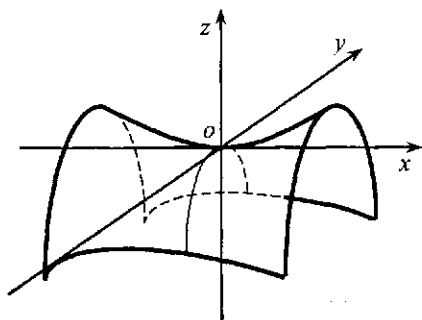


Рис. 2.27

Эллиптический
цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

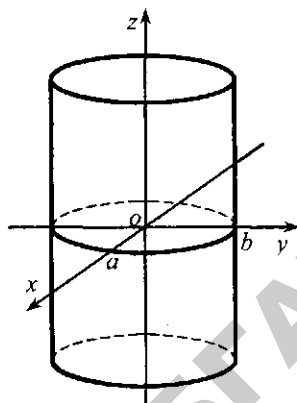


Рис. 2.28

Гиперболический
цилиндр

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

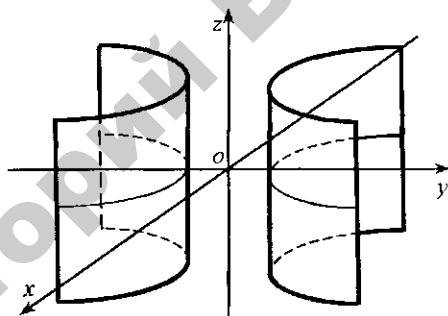


Рис. 2.29

Параболический
цилиндр

$$x^2 = 2py$$

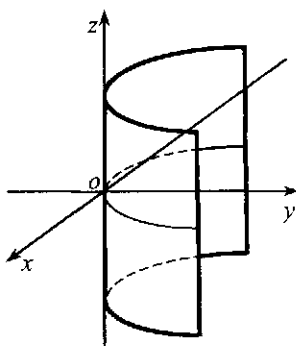


Рис. 2.30

Пример 2.21. Определить тип поверхности, задаваемой уравнением $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Это каноническое уравнение однополостного гиперболоида, у которого осью симметрии является ось Oy (перед y^2 стоит знак "-"). Поверхность представлена на рис. 2.31.

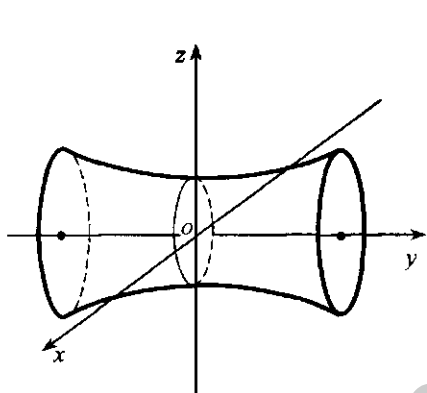


Рис. 2.31

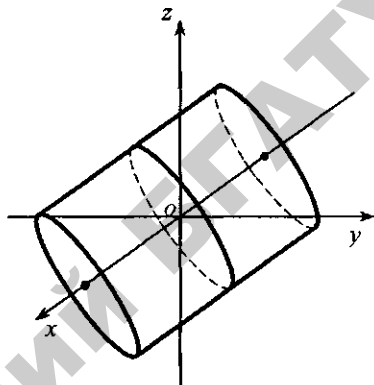


Рис. 2.32

Пример 2.22. Построить поверхность, задаваемую уравнением $y^2 + 2z^2 = 4$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$. Это каноническое уравнение эллиптического цилиндра, образующая которого параллельна оси Ox . Поверхность изображена на рис. 2.33.

Пример 2.23. Какую поверхность определяет уравнение $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4x + 2y + 8z + 1 = 0$.

Решение. Чтобы привести данное уравнение к каноническому виду, выделим полные квадраты по x , y , z :
 $2(x^2 + 2x + 1) - 2 - (y^2 - 2y + 1) + 1 + 2(z^2 + 4z + 4) - 8 + 1 = 0$;
 $2(x + 1)^2 - (y - 1)^2 + 2(z + 2)^2 = 8$. Разделим и правую и левую часть уравнения на 8: $\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{8} + \frac{(z + 2)^2}{4} = 1$. Сравнивая полу-

Эллиптический
параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

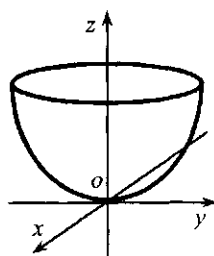


Рис. 2.25

Конус второго
порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

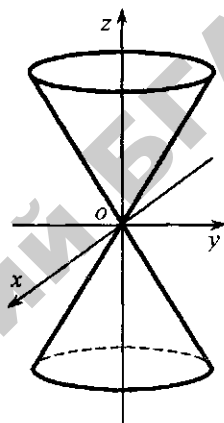


Рис. 2.26

Гиперболический
параболоид
(седло)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

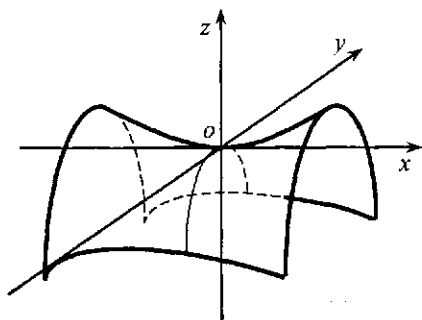


Рис. 2.27

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

К § 1 «ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

1. Даны две точки $A(1, -2, 3)$; $B(0, 1, 5)$. Какая из этих точек принадлежит плоскости $x - 2y + 3z - 12 = 0$?
2. Записать уравнение и построить плоскость:
 - а) проходящую через точку $B(2, 1, -1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = (1, -2, 3)$;
 - б) параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7, -3, 5)$;
 - в) параллельную плоскости $2x - 3y - z + 1 = 0$ и проходящую через точку $A(-2, 0, 4)$;
 - г) проходящую через точку $C(3, 4, -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (3, 1, -1)$ и $\vec{b} = (3, 1, -1)$.
3. Проекция точки $A(1; 2; 3)$ на плоскость P есть точка $B(4; 3; -1)$. Составить уравнение плоскости P .
4. Построить точки $A(-2, 1, 4)$, $B(1, -2, 3)$; $C(-2, -1, 2)$ в трехмерном пространстве и составить уравнение плоскости проходящей через эти точки.
5. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $N(5; 2; 7)$ и отсекает на оси Ox отрезок равный 6, на оси Oy отрезок равный 3.
6. Найти при каких значениях B и C плоскость $2x + By - Cz - 1 = 0$, будет параллельна плоскости $-8x + 6y - 4z - 7 = 0$.
7. Вершины тетраэдра $ABCD$ находятся в точках $A(5, 4, 3)$, $B(2, 3, -2)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-1, 2, 1)$. Составить уравнение грани тетраэдра ABC и найти длину высоты, опущенную из вершины D .
8. Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.
9. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$.

К § 2 «ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

1. Провести прямую через точки $A(1;2;1)$ и $B(2;1;3)$. Составить канонические и параметрические уравнения этой прямой.

2. Привести общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 8 = 0, \\ x - 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

к каноническому виду.

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) параллельно вектору $\vec{s} = (2, -3, 5)$;

б) параллельно прямой
$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$$

4. Установить взаимное расположение прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

5. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{-8}$ и $\begin{cases} x = 5 - 8t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$.

6. Через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(0; 2; -1)$ проведена прямая. Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью $3x + y + 2z - 7 = 0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $B(2; 2; 1)$ и перпендикулярно прямой
$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$
.

8. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2; 3; 1)$ на плоскость $3x + y + 2z - 7 = 0$.

9. Вычислить угол между прямой

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$.

К § 3 «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

1. Определить какие из точек $M_1(3,1)$, $M_2(-2,1)$, $M_3(-3,-3)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$.
2. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат:
а) $2x - y + 30 = 0$; б) $5x + 2y - 8 = 0$; в) $3x + 8y + 16 = 0$; г) $3x - y = 0$.
3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1,3)$ и $B(4, 5)$.
4. Записать уравнение прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$.
5. Прямая наклонена к оси абсцисс под углом равным 60° и проходит через точку $M(1;-2)$. Записать уравнение этой прямой.
6. Найти точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
7. Даны прямая $x + 2y - 4 = 0$ и точка $A(5,7)$. Найти:
а) проекцию точки A на данную прямую;
б) точку симметричную точке A относительно данной прямой.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4,-3)$ и образующей с осями координат треугольник площадью 3.
9. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60° . Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции — на оси ординат.

11. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты

точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча.

12. Точка $A (-2, 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой.

13. Точка $A (2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

14. Найти площадь треугольника, образованного прямой $2x + y + 2 = 0$ и осями координат.

15*. Прямая отсекает на оси Ox положительный отрезок a и отрицательный отрезок b на оси Oy , расстояние между точками пересечения прямой с осями координат равно 4. Составить уравнение прямой в отрезках, если угол наклона ее к оси Ox равен $\frac{\pi}{3}$.

К § 4 «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА».

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти координаты его фокусов, сделать рисунок.

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10.

3. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ найти ее полуоси, фокусы, уравнения асимптот. Сделать рисунок.

4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;

б) точки $P(-5, 2)$ и $Q(2\sqrt{5}, 1)$ лежат на гиперболе.

5. Построить параболу, ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы: $x^2 = 6y$;

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус $F(0, 2)$ и вершину в точке $O(0, 0)$;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0, 0)$ и $N(6, -2)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0, 0)$ и $M(1, -4)$.

7. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

а) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 - 8x - 10y - 17 = 0$;

в) $x^2 - 6y^2 + 12x + 36y - 48 = 0$;

г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

К § 5 «ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА».

1. Определить вид поверхности и схематически построить ее:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$;

б) $2x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$;

в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$;

г) $2x^2 + z^2 = 2y$;

д) $2x^2 + 4z^2 = 4$;

е) $y^2 - 6z = 0$;

ж) $x^2 - 4z^2 = 16$.

2. Определить вид поверхности и схематически построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4z$;

в) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$;

г) $x^2 + 2x - y + 1 = 0$.

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 5$;

б) $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 2 + x^2 + y^2$;

в) $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

К § 1 «ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

Вариант 1

1. Составить уравнение плоскости, проходящую через точку $A(1, -2, 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2, 3, 5)$.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 0, -3)$, $B(2, 2, 3)$, $C(0, 2, 1)$.

Вариант 2

1. Составить уравнение плоскости, проходящую через точку $M(-2, 3, 4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, 5, 3)$.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(0, 1, -1)$, $B(2, 0, 1)$, $C(2, 0, -1)$.

Домашнее задание

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки $M(2; 2; -2)$ и $N(4; -2; 0)$, перпендикулярно данному отрезку.
2. Найти при каком значении A , плоскости $A_1x - 2y + z + 1 = 0$ и $4x - z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 0; -2)$ параллельно плоскости $x - 2y + z + 10 = 0$.
4. Определить расстояние от точки $M(3; 5; -8)$ до плоскости $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.

К § 2 «ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

Вариант 1

1. Записать направляющий вектор прямой $\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 - 4t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, 2, -2)$ и $B(6, 2, 1)$.
3. Записать направляющий вектор прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{-4}$.

Вариант 2

1. Записать направляющий вектор прямой $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -2 - t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3, -2, 1)$ и $B(4, 2, 3)$.
3. Записать направляющий вектор прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

Домашнее задание

1. Составить уравнение прямой проходящей через точку $Q(-1; 2; 4)$ перпендикулярно плоскости $x - y - 2z - 2 = 0$.
2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:
а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{5}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;
3. Найти величину угла между прямой $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$.
4. Найти проекцию точки $N(2; -3; 4)$ на плоскость $3x + y - 2z - 9 = 0$.

К § 3 «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ».

Вариант 1

1. Записать уравнение оси Ox .
2. Найти угловой коэффициент прямой $2y - 4x + 5 = 0$.
3. Найти точку пересечения двух прямых
 $2x - y + 4 = 0$ и $x + y - 1 = 0$.

Вариант 2

1. Записать уравнение оси Oy .
2. Найти угловой коэффициент прямой $3y + 9x - 2 = 0$.
3. Найти точку пересечения двух прямых
 $3x + 2y - 6 = 0$ и $2x - 2y + 1 = 0$.

Домашнее задание

1. Стороны треугольника AB , BC , AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$.
Определить координаты его вершин, составить уравнение высоты AD , медианы BN и средней линии, параллельной стороне AC .
2. Прямая отсекает на осях координат положительные отрезки, один из которых вдвое больше другого. Составить уравнение прямой в отрезках, если площадь треугольника, образованного прямой с осями координат, равна 4.

К § 4 «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА».

Вариант 1

1. Составить уравнение окружности, с центром в т. $A(2, 3)$ и радиусом 2.
2. Построить параболу $(y - 2)^2 = x - 1$.

Вариант 2

1. Составить уравнение окружности, с центром в т. $A(3, 1)$ и радиусом 3.
2. Построить параболу $(x + 1)^2 = y - 3$.

Домашнее задание

1. Составить уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3, 9)$ и $B(7, 3)$. Построить окружность.
2. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах. Построить гиперболу.
3. Дана параболa $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус. Построить параболу.

К § 5 «ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА».

Вариант 1

1. Указать вид поверхности $(x-4)^2 - (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36$ и схематически изобразить ее.

Вариант 2

1. Указать вид поверхности $-(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$ и схематически изобразить ее.

Домашнее задание

1. Определить вид поверхности и схематически построить ее:

а) $2x^2 - 4y^2 - z^2 = 36$; б) $y^2 + 3z^2 = 2x$;

2. Определить вид поверхности и схематически построить ее:

а) $x^2 + 2x - z - 1 = 0$; б) $x^2 + 3z^2 - 8y^2 + 18z + 26 = 0$;

Управляемая самостоятельная работа студентов.

1. Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

декартовы, цилиндрические и сферические системы координат в пространстве; взаимное расположение прямой и плоскости: условия их параллельности, принадлежности, перпендикулярности; вычисление угла между ними, координат точки их пересечения; условия параллельности и перпендикулярности прямых, вычисление угла между двумя прямыми, расстояния от точки до прямой; замечательные линии в полярной системе координат; использование кривых второго порядка в науке и технике; использование теории поверхностей в науке и технике.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 2

1°. В уравнении плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ коэффициенты A, B, C задают: а) координаты вектора параллельного плоскости ; б) координаты некоторого вектора; в) точки, через которые проходит плоскость; г) координаты вектора перпендикулярного плоскости.	
2°. С помощью каких уравнений можно задать прямую в пространстве? а) $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$; б) $Ax + By + Cz = 0$; в) $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt ; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.	
3°. Уравнение плоскости вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ называется: а) уравнением плоскости в отрезках; б) общим уравнением; в) каноническим; г) нормальным.	
4°. Записать координаты центра окружности $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 25$.	
5°. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ имеет вид: а) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$; в) $Ax + By + Cz + D = 0$; г) $A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0$.	

6°. Уравнение эллипса имеет вид:

- а) ; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + c^2 = 0$;
в) $x^2 - y^2 = a^2$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7°. Укажите уравнение эллиптического параболоида

- а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2y$;
в) $x^2 = 2y$; г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

8. Плоскость с уравнением $3x + 4y + z = 0$ проходит:

- а) через начало координат; б) параллельно оси Ox ;
в) параллельно плоскости xOy ; г) параллельно оси Oz .

9. Прямая $3x + 2y = 6$ отсекает на оси Oy отрезок какой длины?

10. Условие параллельности двух прямых на плоскости, заданных уравнениями: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$

- а) $k_1 \cdot k_2 = 0$; б) $k_1 = k_2$; в) $k_1 \cdot k_2 = 1$; г) $k_1 \cdot k_2 = -1$.

11. Тангенс угла наклона прямой $y = 3x - 5$ к положительному направлению оси Ox равен:

- а) 3; б) 5; в) -5; г) 1.

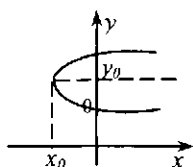
12*. Плоскости с уравнениями $2x + y + 3z - 1 = 0$ и $4x + 2y + 6z + 5 = 0$ являются:

- а) перпендикулярными ; б) параллельными;
в) совпадающими. г) скрещивающимися

13*. Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $M(1,2)$, имеет вид:

- а) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1}$; б) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 0$; в) $\frac{x}{1} = \frac{y}{2}$; г) $\frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 0$.

14*. Уравнение данной параболы имеет вид:



а) $x - x_0 = 2p(y - y_0)$;

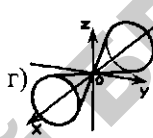
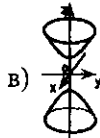
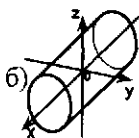
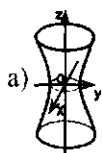
б) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$;

в) $(y - y_0)^2 = 2px$;

г) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

15*. Какая поверхность определяется уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1?$$



ИДЗ 2

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$.

Требуется: 1) написать уравнение ребра AD ;

2) написать уравнение грани ABC ;

3) найти угол между прямой AD и гранью ABC ;

4) записать уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AD .

Задача 2. Даны координаты вершин треугольника ABC .

Найти:

1) уравнение стороны AB ;

2) уравнение медианы CD ;

3) уравнение высоты BH ;

4) угол между прямыми CD и CH ;

5) точку пересечения медианы CD и высоты BH .

Задача 3. Определить тип линии и схематически построить её.

Задача 4. Определить вид поверхности (название) и построить их.

Вариант 1

1. $A(3, 2, -1), B(0, -3, 0), C(-3, 1, 1), D(1, 0, 5)$.

2. $A(-2, 3), B(3, 2), C(1, -4)$.

3. а) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$; б) $y^2 - 6x + 8y - 12 = 0$.

4. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.

Вариант 2

1. $A(2, 4, 3), B(1, -2, 1), C(-1, 3, 3), D(1, 1, 6)$.

2. $A(-5, 2), B(2, 3), C(2, -6)$.

3. а) $x^2 + 6x - 2y + 5 = 0$; б) $3x^2 + 4y^2 + 12x - 12 = 0$.

4. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.

Вариант 3

1. $A(4, 3, 0), B(-1, -4, 0), C(-2, 2, 1), D(2, 0, 6)$.

2. $A(3, -2), B(1, 0), C(-5, 11)$.

3. а) $4x^2 - y^2 - 8x + 16 = 0$; б) $x^2 - 8x + 2y + 5 = 0$;

4. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.

Вариант 4

1. $A(3, 2, -2), B(0, -2, 1), C(-3, 1, 1), D(1, 1, 4)$.

2. $A(-12, 1), B(0, 2), C(5, 14)$.

3. а) $-2y^2 + x + 12y - 14 = 0$; б) $3x^2 + y^2 - 12x - 12 = 0$.

4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.

Вариант 5

1. $A(3, 1, -2), B(-1, -2, 0), C(-3, 0, 1), D(1, 1, 7)$.

2. $A(9, -6), B(3, -3), C(7, 10)$.

3. а) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 12 = 0$; б) $-2y^2 + x^2 + 12y - 14 = 0$;

4. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 = 21$.

Вариант 6

1. $A(-3, 0, 1), B(0, -1, -2), C(3, 3, 0), D(2, 4, -6)$.

2. $A(0, 1), B(2, -3), C(-1, -2)$.

3. а) $2x^2 + y^2 - 8x - 6y + 1 = 0$; б) $4x - y^2 + 4y - 4 = 0$.
 4. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.

Вариант 7

1. $A(3, 3, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(-1, -1, 1)$, $D(1, 1, 5)$.
 2. $A(4, 1)$, $B(-8, 3)$, $C(0, 10)$.
 3. а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; б) $4x - y^2 - 4y + 8 = 0$.
 4. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = 20x^2$.

Вариант 8

1. $A(4, 4, -1)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(0, -2, 1)$, $D(2, 0, 6)$.
 2. $A(3, 6)$, $B(14, -4)$, $C(-4, 13)$.
 3. а) $7x^2 - 6y^2 - 42x - 12y + 15 = 0$; б) $16x^2 - 4x - 18y = 0$.
 4. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

Вариант 9

1. $A(4, 0, -1)$, $B(4, 4, 1)$, $C(-3, -1, 0)$, $D(1, 1, 8)$.
 2. $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(-3, -1)$.
 3. а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$; б) $9x^2 - 54x - 2y + 90 = 0$.
 4. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 = 18$.

Вариант 10

1. $A(1, 0, 6)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 4, 0)$, $D(6, 8, 0)$.
 2. $A(-3, 3)$, $B(2, -5)$, $C(-4, -1)$.
 3. а) $y^2 - 2x + 8y + 12 = 0$; б) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 = 0$;
 4. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.

Вариант 11

1. $A(8, 0, 0)$, $B(1, 4, 1)$, $C(-2, -4, 0)$, $D(0, -1, 5)$.
 2. $A(-7, 2)$, $B(-3, -8)$, $C(5, -3)$.
 3. а) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$; б) $y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$.
 4. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4$.

Вариант 12

1. $A(4, -1, 0)$, $B(1, 4, 1)$, $C(-2, -4, 0)$, $D(0, -1, 5)$.

2. $A(2, -10)$, $B(5, -4)$, $C(-2, -8)$.

3. а) $4x^2 - y^2 - 8x + 4y - 4 = 0$;

б) $4x^2 - 8x + 4y - 1 = 0$;

4. а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$;

б) $8y^2 + 2z^2 = 1$.

Вариант 13

1. $A(3, 0, 0)$, $B(0, -4, 2)$, $C(-1, 1, -2)$, $D(0, 1, 7)$.

2. $A(-11, 1)$, $B(1, -2)$, $C(5, -6)$.

3. а) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$;

б) $3x^2 - 12x + y - 4 = 0$;

4. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$;

б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.

Вариант 14

1. $A(-3, 0, 2)$, $B(0, 4, 2)$, $C(3, 0, -2)$, $D(5, -1, 3)$.

2. $A(12, -2)$, $B(10, -2)$, $C(3, -1)$.

3. а) $3y^2 + x - 6y - 3 = 0$;

б) $3x^2 + 4y^2 + 12x + 24 = 0$;

4. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$;

б) $x^2 + 3z = 0$.

Вариант 15

1. $A(5, 0, 3)$, $B(2, 2, 0)$, $C(0, -1, -1)$, $D(-1, 2, 4)$.

2. $A(-1, 5)$, $B(1, -5)$, $C(0, 2)$.

3. а) $3x^2 - 12x - 6y = 0$;

б) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$;

4. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$;

б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.

Вариант 16

1. $A(8, 2, 5)$, $B(0, -2, 7)$, $C(2, 8, 4)$, $D(9, -6, 4)$.

2. $A(2, -7)$, $B(5, -5)$, $C(2, 1)$.

3. а) $4x^2 - y^2 - 8x - 4 = 0$;

б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$;

4. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$;

б) $3x^2 + 12x - 6y + 4 = 0$.

Вариант 17

1. $A(4, 4, 0)$, $B(4, -10, 2)$, $C(2, 8, -4)$, $D(7, 5, -9)$.

2. $A(-8, -3)$, $B(3, -5)$, $C(8, 2)$.

3. а) $7x^2 + 6y^2 - 42x + 12y + 27 = 0$; б) $x^2 + x - 6y + 3 = 0$;
 4. а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$.

Вариант 18

1. $A(4, 6, 8)$, $B(6, 9, 4)$, $C(-2, 1, 1)$, $D(4, 7, 8)$.
 2. $A(1, 0)$, $B(2, -1)$, $C(-1, -4)$.
 3. а) $-x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$; б) $x^2 - 2x + 12y + 3 = 0$;
 4. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.

Вариант 19

1. $A(3, 5, 4)$, $B(8, -7, 4)$, $C(-5, 10, 4)$, $D(4, -7, -8)$.
 2. $A(0, -5)$, $B(6, -2)$, $C(-5, -7)$.
 3. а) $7x^2 - 42x + 12y + 3 = 0$; б) $x^2 - 2y^2 - 8x - 12y + 30 = 0$.
 4. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.

Вариант 20

1. $A(1, 8, 2)$, $B(5, -2, 6)$, $C(5, 7, 4)$, $D(4, 10, -9)$.
 2. $A(6, -12)$, $B(-1, 8)$, $C(15, -17)$.
 3. а) $x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 30 = 0$; б) $-y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$.
 4. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$.

Вариант 21

1. $A(-3, 1, 1)$, $B(0, -3, 0)$, $C(3, 2, -1)$, $D(1, 0, 5)$.
 2. $A(1, -4)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 3)$.
 3. а) $x^2 - y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$; б) $x^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.
 4. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $15z = 10x^2 + 6y^2$.

Вариант 22

1. $A(-1, 3, 3)$, $B(1, -2, 1)$, $C(2, 4, 3)$, $D(1, 1, 6)$.
 2. $A(2, -6)$, $B(2, 3)$, $C(-5, 2)$.
 3. а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$; б) $y^2 + 6y - 2x + 2 = 0$.
 4. а) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.

Вариант 23

1. $A(-2, 2, 1), B(-1, -4, 0), C(4, 3, 0), D(2, 0, 6)$.

2. $A(-5, 11), B(1, 0), C(3, -2)$.

3. а) $y^2 + 8y - 2x + 22 = 0$;

б) $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.

4. а) $4x^2 + 3y^2 = 12z$;

б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.

Вариант 24

1. $A(-3, 1, 1), B(0, -2, 1), C(3, 2, -2), D(1, 1, 4)$.

2. $A(5, 14), B(0, 2), C(-12, 1)$.

3. а) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$;

б) $2x^2 - 8x - 6y + 3 = 0$.

4. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$;

б) $y - 4z^2 = 3x^2$.

Вариант 25

1. $A(-3, 0, 1), B(-1, -2, 0), C(3, 1, -2), D(1, 1, 7)$.

2. $A(7, 10), B(3, -3), C(9, -6)$.

3. а) $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 1 = 0$;

б) $-8x + y^2 - 4y + 1 = 0$.

4. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$;

б) $x - 3z^2 = 9y^2$.

Вариант 26

1. $A(3, 3, 0), B(0, -1, -2), C(-3, 0, 1), D(2, 4, -6)$.

2. $A(-1, -2), B(2, -3), C(0, 1)$.

3. а) $x^2 + y + 6x + 7 = 0$;

б) $y^2 - 8y - x^2 + 2x = 0$.

4. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$;

б) $2x^2 + 3z = 0$.

Вариант 27

1. $A(-1, -1, 1), B(0, 2, 0), C(3, 3, 0), D(1, 1, 5)$.

2. $A(0, 10), B(-8, 3), C(4, 1)$.

3. а) $y^2 - 6y - x^2 + 2x = 0$;

б) $y^2 + 10x - 4y + 1 = 0$.

4. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$;

б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.

Вариант 28

1. $A(0, -2, 1), B(-1, 3, 0), C(4, 4, -1), D(2, 0, 6)$.

2. $A(-4, 13), B(14, -4), C(3, 6)$.

3. а) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$; б) $y^2 - 8y - x^2 + 2x = 0$.
 4. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 5z^2 = 3x^2$.

Вариант 29

1. $A(-3, -1, 0)$, $B(4, 4, 1)$, $C(4, 0, -1)$, $D(1, 1, 8)$.
 2. $A(-3, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 5)$.
 3. а) $y - 2x^2 + 4x - 8 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
 4. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$.

Вариант 30

1. $A(1, 4, 0)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 0, 6)$, $D(6, 8, 0)$.
 2. $A(-4, -1)$, $B(2, -5)$, $C(-3, 3)$.
 3. а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; б) $x^2 - 8x + 2y + 10 = 0$.
 4. а) $7x^2 - 36y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

$$A(1, 2, -3), \quad B(-1, 6, 1), \quad C(4, 8, -9), \quad D(2, 3, -2).$$

Требуется: 1) написать уравнение ребра AD ;
 2) написать уравнение грани ABC ;
 3) найти угол между прямой AD и гранью ABC ;
 4) записать уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно ребру AD .

Решение.

1) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подставляя в это уравнение координаты точек $A(1, 2, -3)$ и $D(2, 3, -2)$, получим искомое уравнение ребра AD :

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{3-2} = \frac{z+3}{-2+3}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}.$$

2) Грань ABC представляет собой плоскость, проходящую через 3 точки: $A(1, 2, -3)$, $B(-1, 6, 1)$, $C(4, 8, -9)$. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя в это соотношение координаты точек A , B и C , получим уравнение грани:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -1-1 & 6-2 & 1+3 \\ 4-1 & 8-2 & -9+3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим искомое уравнение грани ABC :

$$(x-1) \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определители второго порядка, имеем:

$$-48(x-1) - 0 \cdot (y-2) - 24(z+3) = 0 \quad \text{или} \quad 2(x-1) + (z+3) = 0, \\ 2x - 2 + z + 3 = 0, \quad 2x + z + 1 = 0.$$

2) Угол между прямой AD и плоскостью ABC находим по формуле: $\sin \varphi = \frac{|mA + nB + pC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, координаты направляющего вектора $\vec{s} = (-3; 1; 1)$ и координаты нормального вектора

$\vec{n} = (2; 0; 1)$ подставляем и получаем:

$$\sin \varphi = \frac{|(-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{5}}$$

3) Так как искомая прямая, проходит через точку B будет параллельна ребру AD , то направляющий вектор их будет равен $\vec{n} = (-3; 1; 1)$. Воспользуемся формулой по точке и направляющему

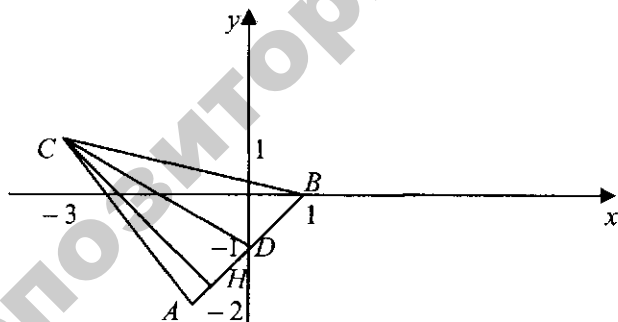
вектору $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \frac{x+1}{-3} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-1}{1}.$

Задание 2.

Дан треугольник с вершинами $A(-1, -2)$, $B(1, 0)$, $C(-3, 1)$.

- Найти: 1) уравнение стороны AB ;
2) уравнение медианы CD ;
3) уравнение высоты CH ;
4) угол между прямыми CD и CH .

Решение.



1) При составлении уравнения стороны AB воспользуемся уравнением прямой, проходящей через 2 точки – $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в данное уравнение координаты точек A и B , получим

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y+2}{0+2} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2}, \quad x+1 = y+2,$$

$y = x - 1$ — уравнение стороны AB с угловым коэффициентом $k_{AB} = 1$.

2) Точка D является серединой отрезка AB , ее координаты найдем по формулам:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1.$$

Итак, $D(0, -1)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки C и D , имеет вид:

$$\frac{x+3}{0+3} = \frac{y-1}{-1-1} \quad \text{или} \quad -\frac{2}{3}(x+3) = y-1,$$

$y = -\frac{2}{3}x - 1$ — уравнение прямой CD , угловой коэффициент

$$k_{CD} = -\frac{2}{3}.$$

3) Поскольку прямая CH перпендикулярна прямой AB , угловые коэффициенты этих прямых связаны соотношением

$$k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -1. \quad \text{Для написания уравнения прямой } CH \text{ воспользу-$$

емся уравнением:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Полагая в этом уравнении $x_0 = -3$, $y_0 = 1$, $k = k_{CH} = -1$, получим уравнение:

$y - 1 = -1(x + 3)$ или $y = -x - 2$ — уравнение высоты CH , угловой коэффициент $k_{CH} = -1$.

4) Угол между прямыми CD и CH найдется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{CD} - k_{CH}}{1 + k_{CD} \cdot k_{CH}} = \frac{-\frac{2}{3} - (-1)}{1 + (-\frac{2}{3})(-1)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}.$$

$$\angle \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \approx 12^\circ.$$

Задание 3. Определить тип линии и схематически построить ее:

$$2y^2 + x + 6y + 2 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$2(y^2 + 3y) + x + 2 = 0$$

и выделим полный квадрат:

$$2\left[\left(y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4}\right] + x + 2 = 0,$$

$$2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + x + 2 = 0, \quad \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right).$$

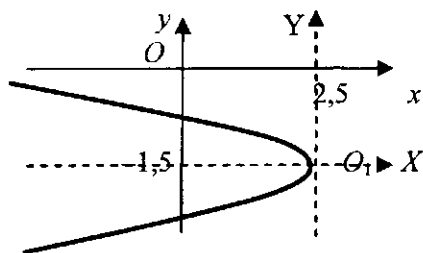
Совершим параллельный перенос по формулам:

$$X = x - \frac{5}{2}, \quad Y = y + \frac{3}{2}.$$

Координаты нового центра $O_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Уравнение примет вид:

$$Y^2 = -\frac{1}{2}X.$$

Это каноническое уравнение параболы вида $Y^2 = 2pX$, где $p = -\frac{1}{4} < 0$. Поэтому парабола направлена в отрицательную сторону оси O_1X .



Задание 4. Построить поверхности и определить их вид

(название): а) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$; б) $3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0$.

а) ► Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида, расположенного так, как показано на рис. 2.33; полуоси его «горлового» эллипса $OB = \sqrt{2}/2$, $OC = 2$;

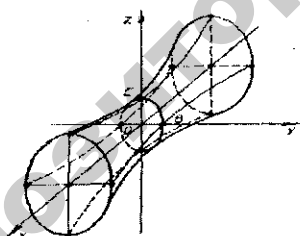


Рис. 2.33

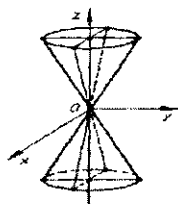


Рис. 2.34

б) приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 2.34 образом. Его сечения плоскостями $z = \text{const}$ являются эллипсами.

МОДУЛЬ 3.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) **знать** а) *понятия и определения*: функция, способы задания функции, элементарная функция, пределе последовательности, предел функции, основные приемы вычисления пределов, замечательные пределы, непрерывность функции в точке, свойства непрерывных функций, точки разрыва функций; б) *характеризовать* виды неопределенностей, точки разрыва функций.

2) **уметь** а) вычислять пределы последовательностей и функций, исследовать функцию на непрерывность, классифицировать точки разрыва функций.

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть X — некоторое множество действительных чисел.

Определение. Если каждому элементу x из множества X по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное действительное число y , то говорят, что y есть *функция* переменной величины x и пишут $y = f(x)$.

x — *независимая переменная (аргумент)*; y — *зависимая переменная*.

Определение. Множество X называется *областью определения функции* $f(x)$ и обозначается $D(f)$. Множество всех значений y функции $y = f(x)$, когда x пробегает всю область определения, называется *областью изменения* или *областью значений функции* и обозначается $E(f)$.

Например, для функции $y = \sin x$ область определения $D(f) = R$, область значений $E(f) = [-1; 1]$.

Различают следующие способы задания функции: табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

Определение. Под графиком функции понимают множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

График функции есть некоторая линия на плоскости. Например, уравнение $y = x^2$ задает функцию, графиком которой является парабола.

Основные элементарные функции

Название	Формула
степенная функция	$y = x^a$ (при постоянном $a \in R$)
показательная функция	$y = a^x$ (при постоянном $a \in R, a > 0, a \neq 1$)
логарифмическая функция	$y = \log_a x$ (при постоянном $a \in R, a > 0, a \neq 1$)
тригонометрические функции	$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$
обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$

Определение. Функция, заданная последовательной цепью нескольких функций ($y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$), называется сложной функцией.

Например, функция $y = \lg^3(2^{x^5})$ - сложная, и она может быть представлена следующей цепью основных элементарных функций: $y = z^3, z = \lg u, u = 2^v, v = x^5$.

Определение. Функции, образованные из основных элементарных функций посредством конечного числа алгебраических операций и взятия функции от функции, называются элементарными. Все остальные функции называются неэлементарными.

Функция $y = \frac{x^2 \sin x + 2^x}{\log_4 x + 5}$ является элементарной.

Примером неэлементарной функции может служить функция вида $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*) функцией, если для любого $x \in D(f)$ число $(-x) \in D(f)$ и справедливо равенство $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Например, функция $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ является четной, т. к.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = y(x). \text{ Функция } y = \frac{x}{x^2 - 4} \text{ является}$$

$$\text{нечетной, т.к. } y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x}{x^2 - 4} = -y(x).$$

А функция $y = \frac{x}{x - 4}$ не является ни четной ни нечетной, так как ее область определения $D(f) = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ не симметрична относительно начала координат.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в области D , если существует постоянное число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

Например, функция $y = \frac{2}{1 + x^2}$ ограничена для всех $x \in R$, так как в этой области $|f(x)| \leq 2$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом T , если для всех значений x и $x + T$ принадлежащих области определения функции выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

Например, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$, а функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ с периодом $T = \pi$.

Определение. Функция, определяемая уравнениями $\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t), \end{cases}$

в которых зависимость между y и x устанавливается посредством третьей переменной t , называется заданной *параметрически*, при этом t — *параметр*.

Например, уравнения $y = 2t + 1$, $x = t - 2$ определяют линейную функцию $y = 2(x + 2) + 1 = 2x + 5$.

Замечание. Так как в дальнейшем мы будем использовать понятие модуля, то напомним его определение и свойства.

Определение. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

• $|x + y| \leq |x| + |y|$ (неравенство треугольника);

• $|x - y| \geq |x| - |y|$;

• $|xy| = |x||y|$;

• $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$;

• неравенство $|x - a| < b$ равносильно неравенству $a - b < x < a + b$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение. Число A называется *пределом последовательности* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Если последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имеет своим пределом число A , то это записывается следующим образом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ или $a_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ (в точке $x = a$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in D(f)$ и удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают этот факт так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Если число A является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, то на графике это иллюстрируется следующим образом. Так как из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то это значит, что для всех x , отстоящих от a не далее чем на δ , точка M графика функции $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε , ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Очевидно, что с уменьшением ε величина δ также уменьшается (см. рис.3.1).

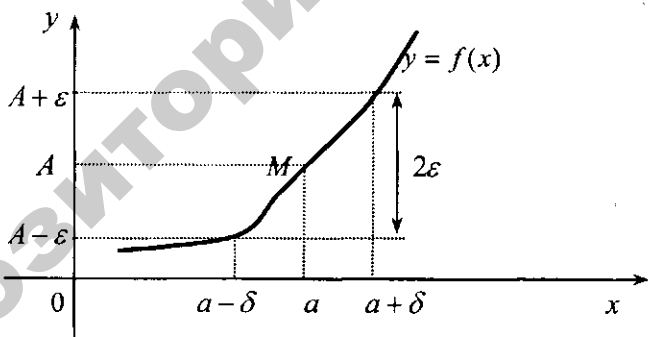


Рис.3.1

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

§ 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Определение. Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$.

Например, функция $y = \sin x$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$, а функция $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow \pm\infty$, так как их пределы равны нулю. Функция $y = \operatorname{tg} x$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и бесконечно большой при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Теорема.

Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \rightarrow a$ $\left(\frac{1}{0} = \infty\right)$.

Если функция $\beta(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ $\left(\frac{1}{\infty} = 0\right)$.

(Доказательство см. [1], гл. II, §4.).

Например, функция $y = \frac{1}{x+1}$ при $x \rightarrow -1$ является бесконечно большой, т.к. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$. А функция $y = x+1$ является бесконечно малой при $x \rightarrow -1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

§ 4. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Если пределы $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$ существуют и конечны, то

1. $\lim_{x \rightarrow a} cu(x) = c \lim_{x \rightarrow a} u(x)$, где $c = \text{const}$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) + v(x)) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) + \lim_{x \rightarrow a} v(x)$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \cdot v(x)) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} v(x)$;
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} u(x)}{\lim_{x \rightarrow a} v(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow a} v(x) \neq 0$.

Замечательные пределы.

- Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(Доказательство см. [1], гл. II, §6.).

- Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

где e — иррациональное число, $e \approx 2,718281828$ — одна из фундаментальных величин в математике. Функция $y = e^x = \exp(x)$ называется *экспонентой*; $y = \log_e x = \ln x$ называется *натуральным логарифмом*.

(Доказательство см. [1], гл. II, §7.).

Пример 3.1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + x - 3}$.

Решение.

Так как $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 4 + 2 - 3 = 3 \neq 0$, то применима теорема о пределе частного. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3.2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x - 2}$.

Решение. Так как при $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к бесконечности, то имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия таких неопределенностей делят числитель и знаменатель дроби на старшую степень x . После деления на x^3 получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 2.$$

Пример 3.3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x - 12) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$, то имеем

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель

дроби на линейные множители. Так как $x^2 + x - 12 = 0$ при $x_1 = 3$ и $x_2 = -4$, то $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$; $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 4}{x + 3} = \frac{7}{6}.$$

Пример 3.4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель

и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x + 7} + 3)$, а так же разложим знаменатель на линейные множители:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x^2 - 3x + 2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x + 7} - 3)(\sqrt{x + 7} + 3)}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x + 7} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 7 - 9}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x + 7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 1)(x - 2)(\sqrt{x + 7} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 1)(\sqrt{x + 7} + 3)} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Пример 3.5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ воспользуемся

первым замечательным пределом. Считая, что $x \neq 0$, проведем очевидные преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x \cdot 3x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} \cdot \cos 3x =$$

$$= \frac{7}{3} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

Пример 3.6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности 1^∞ воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \right)^{-2} = e^{-2},$$

поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} = \lim_{y = \frac{x}{2} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$

§ 5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке $x = a$ находят предел отношения $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$.

Определение. Если $A \neq 0$ и $A \neq \infty$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Определение. Если $A = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$* . Записывается это так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Определение. Если $A = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Основные эквивалентности при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\sin kx &\sim kx, & \operatorname{tg} kx &\sim kx, \\ \arcsin kx &\sim kx, & \operatorname{arctg} kx &\sim kx, \\ \ln(1+kx) &\sim kx, & e^{kx} - 1 &\sim kx.\end{aligned}$$

При вычислении пределов используют следующую теорему.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций в некоторой точке равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций в той же точке.

Доказательство см. [1], гл. II, §11.

Пример 3.7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x}$.

Решение. Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как при $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos 5x = 2 \sin^2 \frac{5x}{2} \sim 2 \left(\frac{5x}{2} \right)^2 = 25 \frac{x^2}{2} \text{ и } \sin 3x \sim 3x, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25 \frac{x^2}{2}}{x \cdot 3x} = \frac{25}{6}.$$

§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если предел функции в точке x_0 существует и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение. Односторонними называются пределы:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) - \text{левосторонний предел в точке } a;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) - \text{правосторонний предел в точке } a.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = x_0$, если существуют односторонние пределы в точке x_0 и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. (*)

Определение. Если односторонние пределы конечны, но нарушается хотя бы одно из равенств (*), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*.

Определение. Если хотя бы один из этих односторонних пределов не существует или равен бесконечности, то x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

Например, функция $y = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1, \\ -1, & \text{если } x < 1 \end{cases}$, имеет в точке $x = 1$ разрыв 1-го рода (рис. 3.2).

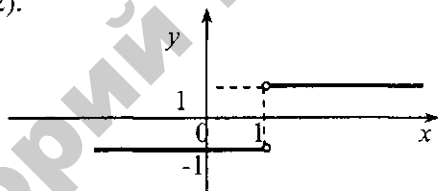


Рис. 3.2

Функция $y = \frac{1}{x-2}$ имеет в точке $x = 2$ разрыв второго рода (рис. 3.3).

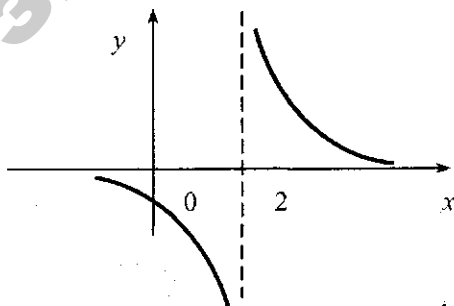


Рис. 3.3

Определение. Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, то она называется *непрерывной на этом отрезке*.

Из определения непрерывности функции и теорем о пределах следуют теоремы:

Теорема I. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то в этой точке непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$).

Теорема II. Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.

Теорема III. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Доказательство приведено, например, в [1], гл. 2, §9.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сформулируем некоторые свойства непрерывных на отрезке функций в виде следующих теорем.

Теорема 1 (о сохранении знака непрерывной функции). Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует интервал, которому принадлежит точка x_0 , где функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

Теорема 2 (о наибольшем, наименьшем и промежуточных значениях непрерывной функции). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ достигает на этом отрезке наибольшего M и наименьшего m значения, а также принимает все свои промежуточные значения, т.е. для произвольного $t < \mu < M$ существует хотя бы одно значение $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = \mu$ (рис. 3.4).

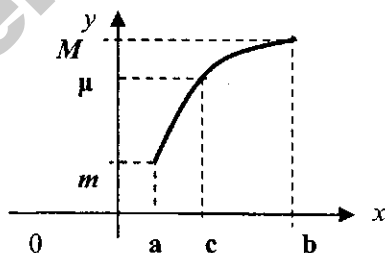


Рис. 3.4

Теорема 3 (о нулях непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения противоположных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то существует хотя бы одно значение $x_0 \in [a, b]$ такое, что $f(x_0) = 0$ (существует корень уравнения $f(x) = 0$). (рис.3.5)

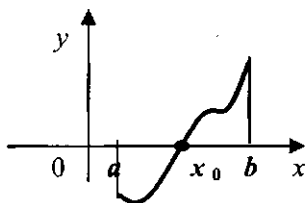


Рис.3.5

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Найти область определения функций

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$,

б) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$, в) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

2. Найти указанные пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^2}{x^2 + x + 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^3 + 5x - 1}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x + 7}{x^3 - 9}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x^2 - 9}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} x}$;

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x} \right)^x$;

к) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{2x} \right)^x$;

л) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^{-2x} - 1}$;

м) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1 + 6x)}$.

3. Исследовать непрерывность функции $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

и построить ее график.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти область определения функций $y = \sqrt{2x - 6}$.
2. Найти пределы а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 4x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + x - x^2}{4x^2 - x + 3}$;

Вариант 2

1. Найти область определения функций $y = \sqrt{3x - 12}$.
2. Найти пределы
- а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 3x - 9}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x - x^2}{3x^2 - x + 3}$;

Домашнее задание

1. Найти область определения функций а) $y = \frac{x}{x^2 + 9}$;
- б) $y = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$; в) $y = \log_2 \left(\frac{x}{x - 5} \right)$.
2. Найти пределы
- а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 6}{2x^3 + x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x + 7}{x^3 - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 5x + 7}{x^3 - 4}$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x + 15} - 5}{x^2 - 25}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x + 2} \right)^{x+1}$.

3. Исследовать непрерывность функции $y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & 1 < x < 3 \\ 2x + 4, & x \geq 3 \end{cases}$

и построить ее график.

Управляемая самостоятельная работа студентов.

1. Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

числовые последовательности, их пределы; существование предела монотонной ограниченной сверху или снизу последовательности (принцип Вейерштрасса); основные элементарные функции и их графики; число e и натуральные логарифмы.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ 3

1⁰. Пусть $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$. Тогда область определения функции

$D(f) =$

- а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(1; +\infty)$;
в) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Для какой из функций областью определения является множество всех действительных чисел?

- а) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$; б) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$;
в) $f(x) = \log_x(x+6)$; г) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

3⁰. Какие из данных функций являются четными?

- а) $y = \cos 2x$; б) $y = \operatorname{ctg} 3x$; в) $y = 2 \operatorname{tg} 3x$;
г) $y = -3 \sin x$.

4⁰. Какая из функций не является сложной функцией?

- а) $y = 2^{x^2}$; б) $y = \log_{30} x$; в) $y = \sin(x^2)$; г) $y = \cos(2x)$.

5. В указанном множестве функций найдите бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции:

- а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2^{x-1}$; в) $y = \cos 2x$;
г) $y = \sqrt{x+4} - 2$.

6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$. а) e ; б) ∞ ; в) $\frac{1}{e}$; г) $\frac{\alpha}{\beta}$.

7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$.

8*. Функция $\sin^2 3x$ при $x \rightarrow 0$ эквивалентна функции

- а) $3x$; б) $3x^2$; в) $9x^2$; г) $6x$.

9*. Функция $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ является

- а) непрерывной; б) имеет разрыв 2 рода; в) имеет разрыв 1 рода;

ИДЗ 3

Найти пределы.

Вариант 1

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{3x + 7}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$

Вариант 2

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x}{8 - 3x^2 - 2x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - x^2}{x^4 - 7x^2 - 9}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$

Вариант 3

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - 7}{1 + 2x^3 + x^4}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 6x^2 + 1}{x^3 - 5x^2 - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{8+x} - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$

Вариант 4

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 7}{2 + 7x - x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x^2 + x}{2x^2 + 3x - 7}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^2 - 16}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

Вариант 5

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x^2 - 2x^3}{5x^3 - 5x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 3x}{x^3 + 2x - 6}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$

Вариант 6

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 - 7}{3x^4 - 6x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x^2 - 5}{2x^2 - 8x + 7}$
- $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^2 - 25}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 6x}$

Вариант 7

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 6x + 1}{3x^2 + 3x - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{x^3 - 6x^2 + 7x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 - 3x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{36 - x^2}{\sqrt{x+3} - 3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$

Вариант 8

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{10 - x - 2x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 - 5}{x^2 + 6x + 7}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{1 - \sqrt{8-x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$

Вариант 9

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x - 2}{1 + 5x + x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x + 5}{2x^3 - 9x^2 - 7}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$

Вариант 10

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3x - 2x^2}{4x^2 + 4x + 3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - x^3 + 7}{x^4 - 2x^2 - 6}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{14 + x} - 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$

Вариант 11

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 8x^2 + x^3}{2x^3 + x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 - 7x - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\lg 2x}$

Вариант 12

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 - 2}{1 - 3x - x^3 + x^4}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 6}{2x^3 - 4x^2 + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 8}$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{5 - x}}{x^2 - 5x + 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos 6x}$

Вариант 13

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 9}{3 - x - x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x+7} - 3}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$

Вариант 14

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - 3x^2}{x^2 - 4}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 4x - 5}$

3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 9x + 20}$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{3 - \sqrt{2x+3}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 8x}{4x^2}$

Вариант 15

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8x - 9}{2x^3 - 5x^2 + 2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{2x \operatorname{tg} x}$$

Вариант 16

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 2x - x^3}{x^2 - 7x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 11x + 18}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x^2 - 16}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2}{1 - \cos 8x}$$

Вариант 17

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 7x^2}{x^3 + 3x + 7}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{3 - \sqrt{x+4}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x + \sin 5x}$$

Вариант 18

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x - 2}{1 + 8x - 5x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{2-x} - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{5 \operatorname{tg} 2x}$$

Вариант 19

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 4x + 4}{3 - 2x - x^4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^4}{x^6 - 2x + 5}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 5x + 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+2} - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin 2x}{\operatorname{tg} x}$$

Вариант 20

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 2x - x^2}{2x^2 + 7x + 7}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 2x - 6}{6 - 2x^2 - 3x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 7x - 18}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} - 3}{x^2 - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 3x}$$

Вариант 21

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 7}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 6x^2 - 8}{x^4 - 7x^2 + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x - 14}$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 6x + 9}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x \sin 4x}$

Вариант 22

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 8x^2 + 7}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{x^2 - x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{2x \sin 5x}$

Вариант 23

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 6}{2x^3 - 6x^2 - 9}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 3x - 4}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - \sqrt{2x-1}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{2 \sin 3x}$

Вариант 24

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 2x^2 + 7x^4}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x + 8}{8x^2 - 5x - 9}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 3x - 10}$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} 6x}{1 - \cos 2x}$

Вариант 25

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 9x - 7}{2 + 7x - 5x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 2x + 3}{8x^2 - 7x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 + 8x + 7}$

4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - 3}{x^2 - 6x + 5}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{2x \operatorname{tg} x}$

Вариант 26

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x^2 - x^3}{7 + 2x + 8x^3}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - x^2}{x^3 + 4x + 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - 2}{x^2 - 3x - 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x \sin 3x}{1 - \cos^2 x}$

Вариант 27

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x - 3}{x^2 - 8x - 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 5 + x^3}{2x^2 - 6x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 3x - 28}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi \setminus 2 - x)^2}$$

Вариант 28

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 1}{x^4 - x^2 - 8}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - x - 20}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

Вариант 29

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 7x + 1}{x^2 - 4x^3 + 7x^4}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$$

Вариант 30

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - x^4}{x + 5x^2 + 7x^3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 3x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi \setminus 2 - x) \operatorname{tg} x$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 + 3x^2 + 1}{x^3 + 4x - 3}$.

Решение. Так как при $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к бесконечности, то имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия таких неопределенностей

делят числитель и знаменатель дроби на старшую степень x . После деления на x^3 получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \frac{-6 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} = -6.$$

Задание 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 + x - 3}$.

Решение. Решение аналогично примеру а)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 + x - 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0. \end{aligned}$$

Задание 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - x - 28}{x^2 - 16}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 - x - 28) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 16) = 0$, то имеем

неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель

дроби на линейные множители. Так как $2x^2 - x - 28 = 0$ при $x_1 = 4$

и $x_2 = -\frac{7}{2}$, то $2x^2 - x - 28 = 2(x - 4)(x + \frac{7}{2})$; $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$.

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - x - 28}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(x+\frac{7}{2})}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x+\frac{7}{2})}{x+4} = \frac{2 \cdot 4 + 7}{4 + 4} = \frac{15}{8}.$$

Задание 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+20} - 5}{x^2 - 3x - 10}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(\sqrt{x+20}+5)$, а так же разложим знаменатель на линейные множители:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+20}-5}{x^2-3x-10} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+20}-5)(\sqrt{x+20}+5)}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x+20}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+20-25}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x+20}+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{(x-5)(x+2)(\sqrt{x+20}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+20}+5)} = \frac{1}{40}.\end{aligned}$$

Задание 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 17x}{\sin 5x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ воспользуемся эквивалентными преобразованиями бесконечно малых функций $\arcsin kx \sim kx$, $\sin kx \sim kx$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 17x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{17x}{5x} = \frac{17}{5}.$$

МОДУЛЬ 4.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) **знать** а) *понятия и определения*: производная, дифференцирование, правило Лопиталя; теоремы Роля, Лагранжа, Коши; монотонность функции; точки экстремума; выпуклость и вогнутость функции; точки перегиба; асимптоты; б) *характеризовать*; функцию на выполнение условий теорем Ролля, Лагранжа, Коши; поведение функции в критических точках; в) *моделировать и аналитически описывать* функциями различные физические процессы; задачи на определение скорости и ускорения материальной точки по заданной траектории и наоборот; практические задачи на определение экстремума функций.

2) **уметь** а) находить производные от основных элементарных функций, сложных функций, параметрически заданных и неявных функций, составлять уравнения нормали и касательной к кривой, вычислять пределы по правилу Лопиталя; б) моделировать задачи на движение материальной точки, связанные с определением ее скорости и ускорения; находить интервалы монотонности, выпуклости и вогнутости функций, точки экстремумов, точки перегиба, асимптоты графика функции; применять полученные результаты к построению графиков функций.

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x . Если переменная x получит приращение Δx , то функция y получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx , когда $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Для производной функции $y = f(x)$ в точке x применяют также обозначения:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется дифференцируемой в этой точке.

Геометрический смысл производной. Построим график функции $y = f(x)$ и проведем к нему касательную через точку $M(x_0, f(x_0))$ (рис.4.1). Обозначим через α угол, образованный этой касательной с осью Ox , тогда $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$,

т.е. производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 .

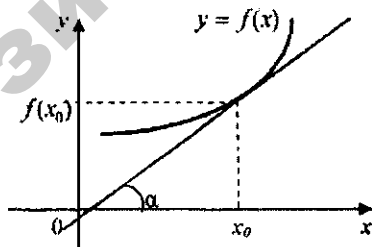


Рис.4.1

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение нормали к данной кривой в этой же точке

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

при условии, что $f'(x_0) \neq 0$.

Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение касательной: $y = f(x_0)$, а уравнение нормали: $x = x_0$.

Механический смысл производной. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$. Тогда $v = s'(t)$, т. е. производная от пути по времени есть скорость движения точки.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если функции u и v дифференцируемы, то

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$.
2. $(cu)' = cu'$, $c = \text{const}$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

6. Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции своих аргументов, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже дифференцируема и

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

(правило дифференцирования сложной функции)

Это правило легко распространить на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

§ 3. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

В приводимой ниже таблице: $c = \text{const}$; $\alpha \in R$; $a > 0, a \neq 1$; $u = u(x)$.

Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций
$c' = 0$; $x' = 1$;	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$;
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$;
$(a^x)' = a^x \ln a$;	$(a^u)' = a^u \ln a u'$;
$(e^x)' = e^x$;	$(e^u)' = e^u u'$;
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	$(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$;
$(\sin x)' = \cos x$;	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
$(\cos x)' = -\sin x$;	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

Найдем по определению производные некоторых элементарных функций.

1) $y = c$ ($c = \text{const}$).

$$\Delta y = c - c = 0 \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0, \text{ т.е. } (c)' = 0.$$

2) $y = x$.

$$\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x \Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \text{ т. е.}$$

$$x' = 1.$$

3) $y = x^2$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x, \text{ т. е.}$$

$$(x^2)' = 2x.$$

4) $y = \ln x$.

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \quad (\text{здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом и непрерывностью функции } \ln x). \text{ Следовательно,}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5) $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

Воспользуемся формулой $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Тогда

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a \cdot x}, \text{ т.е. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$6) y = e^x$$

$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1)$. Далее воспользуемся эквивалентностью $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x, \text{ т.е. } (e^x)' = e^x.$$

$$7) y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Представим функцию в виде

$$y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \cdot \ln a)' = a^x \cdot \ln a, \text{ т.е.}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Аналогично можно найти следующую производную

$$8) y = x^a, \text{ где } a - \text{любое действительное число.}$$

$$(x^a)' = (e^{\ln x^a})' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}, \text{ т.е.}$$

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}.$$

$$9) y = \sin x.$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x \quad (\text{при дока-}$$

зательстве мы воспользовались первым замечательным пределом).

Аналогично доказывается, что $(\cos x)' = -\sin x$.

10) $y = \operatorname{tg} x$.

Воспользуемся формулой для производной частного двух функций:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ т.е.}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично доказываем, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Формулы для производных обратных тригонометрических функций мы выведем в следующем параграфе.

Покажем на примерах, как применяются основные правила дифференцирования и таблица производных при нахождении производных функций.

Пример 4.1. Найти производную функции $y = 2x^4 - 4\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^5}$.

Решение. Данную функцию представляем в виде $y = 2x^4 - 4x^{\frac{2}{3}} + 2x^{-5}$

и находим $y' = 2(x^4)' - 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + 2(x^{-5})' = 2 \cdot 4 \cdot x^3 -$

$$- 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + 2 \cdot (-5)x^{-6} = 8x^3 - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{10}{x^6}.$$

Пример 4.2. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^3 7x$.

Решение. Последовательно используем формулы для производных сложных функций

$$y' = (\operatorname{tg}^3 7x)' = \left| (u^3)' = 3u^2 \cdot u' \right|, \text{ где } u = \operatorname{tg} 7x \left| = 3\operatorname{tg}^2 7x (\operatorname{tg} 7x)' = \left| (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \right|, \right.$$

$$\left. \text{ где } u = 7x \right| = 3\operatorname{tg}^2 7x \frac{1}{\cos^2 7x} \cdot (7x)' = 3\operatorname{tg}^2 7x \frac{1}{\cos^2 7x} \cdot 7 = 21 \frac{\sin^2 7x}{\cos^4 7x}.$$

Здесь при решении указывались формулы, которые применялись при вычислении производных.

Пример 4.3. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

Решение. $y' = (\ln \operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \left| \begin{array}{l} (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u', \\ \text{где } u = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \end{array} \right| = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' =$

$$= \left| \begin{array}{l} (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u', \\ \text{где } u = \sqrt{x} \end{array} \right| = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 4.4. Найти производную функции $y = (x-1)^2 \sqrt{x^2 + 3x - 1}$.

Решение. Применим формулу производной произведения

$$y' = ((x-1)^2)' \sqrt{x^2 + 3x - 1} + (x-1)^2 (\sqrt{x^2 + 3x - 1})' =$$

$$= 2(x-1) \sqrt{x^2 + 3x - 1} + (x-1)^2 \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}} (2x + 3).$$

Пример 4.5. Найти производную функции $y = \frac{\sin 5x}{x^3 + 3x}$.

Решение. Применим формулу производной частного

$$y' = \frac{(\sin 5x)' (x^3 + 3x) - \sin 5x (x^3 + 3x)'}{(x^3 + 3x)^2} = \frac{\cos 5x \cdot 5 \cdot (x^3 + 3x) - \sin 5x (3x^2 + 3)}{(x^3 + 3x)^2}$$

Пример 4.5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Определяем значение функции при $x_0 = 2$:

$$y_0 = f(2) = 2^3 = 8.$$

Находим производную данной функции и ее значение при $x_0 = 2$:

$$y' = f'(x) = (x^3)' = 3x^2, \quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Подставляя значения $x_0 = 2$, $y_0 = 8$, $f'(x_0) = 12$ в уравнения $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (уравнение касательной) и

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (\text{уравнение нормали}), \quad \text{получим}$$

соответственно:

$$y - 8 = 12(x - 2) \quad \text{или} \quad 12x - y - 16 = 0 \quad - \text{уравнение касательной};$$

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2) \quad \text{или} \quad x + 12y - 98 = 0 \quad - \text{уравнение нормали}.$$

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , причем $f'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) имеет обратную функцию $x = \varphi(y)$, причем эта функция также дифференцируема и ее производная x'_y находится по формуле

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'_x}, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}}. \quad (4.1)$$

Воспользовавшись формулой (4.1), найдем производные обратных тригонометрических функций.

Пример 4.7. Найти производную функции

$$y = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1).$$

Решение. Выразив x , получаем $x = \sin y$ и тогда

$$y'_x = (\arcsin x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

т.е. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично доказываем, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Пример 4.8. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Выразив x , получаем $x = \operatorname{tg} y$. Тогда

$$\begin{aligned} y'_x = (\operatorname{arctg} x)'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \text{ т.е. } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ

Производная неявной функции. Для нахождения производной функции y , заданной уравнением $F(x, y) = 0$, дифференцируют обе части этого уравнения, учитывая что y - функция от x . Из полученного линейного уравнения выражают y' .

Пример 4.9. Вычислить значение производной функции y , заданной уравнением $x^3 + y^3 + xy = 3$ в точке $M(1; 1)$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения

$$3x^2 + 3y^2 y' + y + xy' = 0, \quad y'(3y^2 + x) = -3x^2 - y,$$

$$y' = -\frac{3x^2 + y}{3y^2 + x}, \quad y'|_{M(1;1)} = \frac{3 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 1} = -1.$$

Логарифмическое дифференцирование. Последовательное логарифмирование и дифференцирование функций называется *логарифмическим дифференцированием*, а производная функций $y = \ln f(x)$, равная $y' = f'(x) / f(x)$, называется *логарифмической производной*.

Пример 4.10. Найти производную функции $y = (\cos 5x)^{x^3}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получим $\ln y = x^3 \ln(\cos 5x)$.

Дифференцируем обе части этого равенства и находим

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\cos 5x) + x^3 \frac{1}{\cos 5x} (-\sin 5x) 5, \quad \text{откуда выражаем } y':$$

$$y' = y(3x^2 \ln(\cos 5x) + x^3 \frac{1}{\cos 5x} (-\sin 5x) 5) =$$

$$= (\cos 5x)^{x^3} (3x^2 \ln(\cos 5x) - 5x^3 \operatorname{tg} 5x).$$

Дифференцирование параметрически заданной функции.

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} y = \varphi(t), \\ x = \psi(t), \end{cases}$$

и существуют производные $y'_t = \varphi'(t)$, $x'_t = \psi'(t) \neq 0$. Тогда существует производная

$$y' = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \quad \text{или} \quad \boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}.$$

Пример 4.11. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 1, \\ y = t^3 + t \end{cases} \quad \text{при } t = 1.$$

Решение. Последовательно находим производные:

$$x'_t = (t^2 + 2t + 1)' = 2t + 2,$$

$$y'_t = (t^3 + t)' = 3t^2 + 1.$$

Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 + 1}{2t + 2}, \quad y'_x(1) = \frac{4}{4} = 1.$

§ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$

Отсюда следует, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right) = 0,$ т.е.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x),$ где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$). Это значит, что приращение функции Δy , соответствующее приращению аргумента Δx , может быть представлено в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$

Определение. Дифференциалом dy функции y в точке x называется главная линейная часть приращения функции в этой точке, т.е.

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Обозначая $\Delta x = dx$, получим формулу

$$\boxed{dy = f'(x)dx} \text{ или } \boxed{dy = y'dx},$$

т.е. дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента.

Геометрический смысл дифференциала функции.

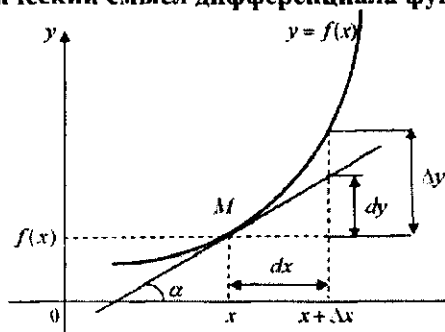


Рис. 4.2

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M(x, f(x))$, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 4.2).

Пример 4.12. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 7x$.

Решение. Находим производную $y' = 5 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x \cdot 7$.

Тогда $dy = 35 \cdot \sin^4 7x \cdot \cos 7x dx$.

Если c – постоянная, u, v – дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила нахождения дифференциалов:

1. $dc = 0$,
2. $d(cu) = cdu$,
3. $d(u + v) = du + dv$,
4. $d(uv) = u dv + v du$,
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$, $v \neq 0$,
6. Если $y = f(x)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$df(u) = f'(u) du,$$

т.е. полный дифференциал функции $y = f(x)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или функцией (свойство инвариантности формы первого дифференциала).

§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение. Производной n -ого порядка называют производную, взятую от производной $(n-1)$ -го порядка, т.е.

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Согласно этому определению производная порядка n любой функции находится последовательным ее дифференцированием n раз, т.е. для функции $y = f(x)$ имеем

$$y' = f'(x), \quad y'' = (y')' = f''(x), \quad y''' = (y'')' = f'''(x), \dots$$

Для обозначения производной n -го порядка применяются символы

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Физический смысл второй производной. Так как производная любой функции равна скорости ее изменения в данной точке, то вторая производная от пути по времени равна ускорению движения точки в данный момент времени, т.е. $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Определение. Дифференциалом n -ого порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал, взятый от дифференциала $(n-1)$ -го порядка, т.е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Откуда следует, что $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2$, т.к. dx не зависит от x . Аналогично получаем

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Пример 4.13. Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

Решение. Находим первую производную

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4x + x}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.$$

Следовательно, $dy = (x^2 + 4)^{-1/2} dx$.

Дифференцируя первую производную, получаем

$$y'' = \left((x^2 + 4)^{-1/2} \right)' = -\frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}},$$

значит $d^2y = -x(x^2 + 4)^{-3/2} dx^2$.

Пример 4.14. Определить момент времени, когда ускорение движения равно нулю, при условии, что материальная точка движется по закону $s = s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18.$$

Ускорение $a = 0$, когда $6t - 18 = 0$. Откуда искомый момент времени $t = 3$.

§ 8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСКРЫТИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$

1) дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = x_0$,
причем $\varphi'(x_0) \neq 0$,

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ (или $\pm \infty$);

3) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило применимо и в случае, когда $x_0 = \pm\infty$.

Пример 4.14. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

Решение. Так как функции $\sin 5x$ и $3x$ непрерывны и дифференцируемы в точке $x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$, то применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Иногда правило Лопиталя применяют несколько раз подряд.

Пример 4.15. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Пример 4.16. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1}$.

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2 + 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Правило Лопиталя применяется и для раскрытия неопределенностей вида

1) $\infty - \infty$; 2) $0 \cdot \infty$; 3) 0^0 ; 4) 1^∞ ; 5) ∞^0 ,

но только после предварительного приведения их к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 4.17. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Решение.
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = \frac{0}{1+1+0} = 0. \end{aligned}$$

Пример 4.18. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Пример 4.19. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} x^{tgx}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0 . Обозначим $A = \lim_{x \rightarrow 0} x^{tgx}$.

Прологарифмируем обе части полученного равенства:

$$\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0} x^{tgx}$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{tgx} = \lim_{x \rightarrow 0} tgx \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{ctgx} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = -1 \cdot 0 = 0, \text{ т.е. } \ln A = 0, \text{ откуда находим иско-} \\ &\text{мый предел } A = e^0 = 1. \end{aligned}$$

§ 9 ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ: РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

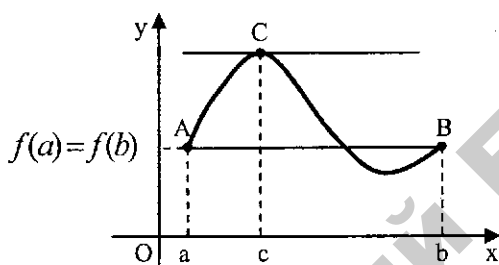


Рис.4.3

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если во всех точках непрерывной дуги AB существует касательная, то на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox (рис.4.3).

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ или } \boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)}$$

Формула в утверждении данной теоремы носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений.

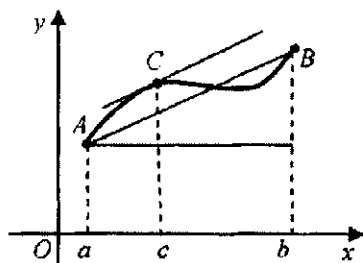


Рис.4.4

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Если во всех точках непрерывной дуги AB существует касательная, то на дуге AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка $C(c, f(c))$, в которой касательная параллельна хорде AB (рис.4.4).

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на промежутке (a, b) , то существует, по крайней мере, одна точка $c \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Эта формула носит название формулы Коши.

§ 10. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Определение. Если для всех точек интервала (a, b) при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), то функция называется *возрастающей* (убывающей) на (a, b) .

Признаки возрастания (убывания) функции.

1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и *возрастает* (убывает), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любых $x \in (a, b)$.

2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то она возрастает (убывает) на (a, b) .

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (минимума) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для любых $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки, в которых функция достигает максимума или минимума, называются *точками экстремума функции*, а значения функции в этих точках называют *экстремальными*.

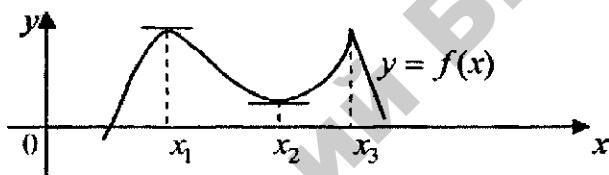


Рис.4.5

Функция, заданная кривой на рис.4.5, в точках x_1 и x_3 достигает максимума, а в точке x_2 — минимума.

Необходимый признак экстремума. В точке экстремума производная функции равна нулю или не существует.

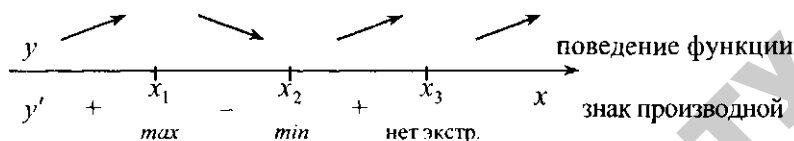
Функция $y = f(x)$ (рис.4.5) в точках x_1 и x_2 имеет производную равную нулю. Касательные к кривой в этих точках параллельны оси Ox . Но функция может достигать экстремума и в точках, в которых производная не существует (точка x_3).

Первый достаточный признак экстремума. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 . Тогда, если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$

1) меняет знак с $+$ на $-$, то в точке x_0 функция имеет максимум;

- 2) меняет знак с $-$ на $+$, то в точке x_0 функция имеет минимум;
 3) не меняет знак, то в точке x_0 нет экстремума.

Схема исследования функции на экстремум с помощью первой производной:



Пример 4.20. Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$$

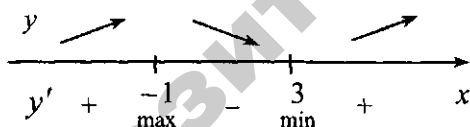
Решение. Находим критические точки данной функции

$$y' = 6x^2 - 12x - 18,$$

$$y' = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{1+3} = -1, \quad x_2 = 1 + \sqrt{1+3} = 3.$$

Исследуем знак производной при переходе через критические точки:



$$\text{Следовательно, } y_{\max} = y(-1) = 17, \quad y_{\min} = y(3) = -47.$$

Второй достаточный признак экстремума.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = 0$ и непрерывную вторую производную $f''(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 будет максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 будет минимум.

Пример 4.21. Найти точки экстремума функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. Находим первую и вторую производные данной функции

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2),$$

$$y'' = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Находим критические точки (где $y' = 0$):

$$e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0, \quad 2x - x^2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Вычисляем $y''(x_1) = y''(0) = 2 > 0$, $y''(x_2) = y''(2) = e^{-2}(-2) < 0$.

Следовательно, $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = 4e^{-2}$.

§ 11. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Всякая непрерывная функция может принимать на отрезке наибольшее и наименьшее значения в критических точках, лежащих внутри отрезка или на его концах. Схему нахождения наибольшего и наименьшего значений функции рассмотрим на следующем примере.

Пример 4.22. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9, \quad y' = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Отрезку $[-2, 2]$ принадлежит только одна критическая точка $x_1 = -1$. Вычисляем значения функции в точке $x_1 = -1$ и на концах отрезка: $y_1 = y(-1) = 11$, $y_2 = y(-2) = 4$, $y_3 = y(2) = -16$.

Сравнивая полученные значения, находим, что $\max_{[-2, 2]} y = 11$, $\min_{[-2, 2]} y = -16$.

§ 12. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение. Функция называется *выпуклой* (*вогнутой*) на интервале (a, b) , если график этой функции расположен ниже (выше)

любой проведенной к нему касательной на этом интервале (рис.4.5).

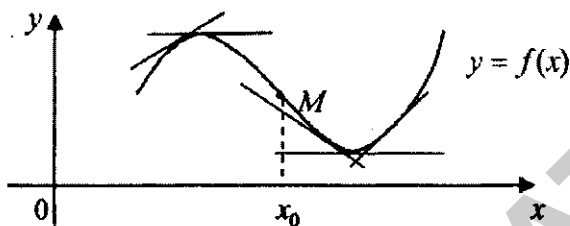


Рис.4.6

Признаки выпуклости (вогнутости) функции.

1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и выпукла (вогнута), то $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) для любых $x \in (a, b)$.

2. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то она выпукла (вогнута) на (a, b) .

Точка $M(x_0, f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба графика этой функции* (точка M (рис.4.6) является точкой перегиба). Абсцисса x_0 точки M называется *точкой перегиба функции* $y = f(x)$.

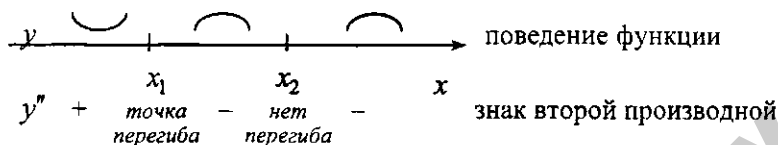
Необходимый признак существования точки перегиба.

Если функция имеет точку перегиба, то вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

Достаточный признак существования точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 вторую производную, причем $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x_0)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Схема исследования функции на выпуклость и вогнутость с помощью второй производной:



Пример 4.23. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

Решение. Имеем, $y' = 3x^2 - 12x + 12$, $y'' = 6x - 12$.

Если $y'' = 0$, то $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Эта точка делит область определения функции на интервалы $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$. Найдем вторую производную функции:



Таким образом, на интервале $(-\infty, 2)$ кривая выпукла, на интервале $(2, +\infty)$ кривая вогнута, точка $(2, 12)$ является точкой перегиба.

§ 13. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ

Определение. Асимптотой кривой называется прямая, к которой как угодно близко приближается точка кривой при ее неограниченном удалении от начала координат.

Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x)$ равен ∞ (рис.4.7).

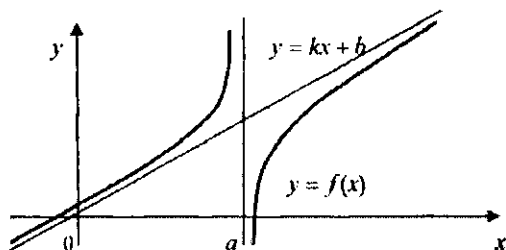


Рис. 4.7

Наклонные асимптоты. Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то прямая $y = kx + b$ есть *наклонная асимптота* кривой $y = f(x)$. Если указанные пределы при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ различны, то имеем *правую* и *левую* наклонные асимптоты. В случае $k = 0$ асимптота называется *горизонтальной*. Если хотя бы один из пределов не существует (k или b) или $= \infty$, то кривая $y = f(x)$ не имеет наклонных асимптот.

Пример 4.24. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Решение. При $x \neq 1$ функция непрерывна. Так как $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$,

а $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, то $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Уравнения наклонных асимптот ищем в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Следовательно, $y = x + 1$ — наклонная асимптота.

§ 14. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Исследование функции можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, точки пересечения с осями координат, точки разрыва функции.
2. Установить четность или нечетность функции, ее периодичность.
3. Найти интервалы монотонности, точки экстремума функции, вычислить значения экстремумов.
4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
5. Найти асимптоты функции.
6. На координатную плоскость нанести все найденные характерные точки и по результатам исследования построить эскиз графика функции.

Пример 4.14. Исследовать функцию $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$ и построить ее график.

Решение. Воспользуемся общей схемой исследования функции.

- 1) Найдем область определения функции.

Так как выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительно, то решим неравенство $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$, поэтому неравенство выполняется при любых x . Следовательно, областью определения функции является вся числовая ось $D(y) = R$.

Найдем точки пересечения кривой с осями координат.

Если $x = 0$, то $y = \ln 5 \approx 1,6$, т.е. точка $(0; \ln 5)$ - точка пересечения с осью Oy .

Если $y = 0$, то $\ln(x^2 - 4x + 5) = 0$, $x^2 - 4x + 5 = 1$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, $(x - 2)^2 = 0$, $x = 2$, т.е. $(2; 0)$ - точка пересечения с осью Ox .

Функция всюду непрерывна и не имеет точек разрыва. Значит, функция не имеет вертикальных асимптот.

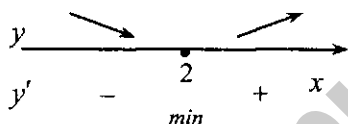
2) Установим четность или нечетность функции.

Находим $y(-x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$. Так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции. Находим первую производную:

$$y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}.$$

Так как $x^2 - 4x + 5 \neq 0$, то критические точки функции найдем из уравнения $y' = 0$, т.е. $2x - 4 = 0$, $x = 2$. Точка $x = 2$ разбивает всю числовую ось на интервалы $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$:



Поскольку при переходе через точку $x = 2$ первая производная меняет знак с «минус» на «плюс», то $x = 2$ — абсцисса точки минимума,

$$y_{\min} = y(2) = \ln(4 - 8 + 5) = \ln 1 = 0.$$

Следовательно, $A(2; 0)$ — точка минимума функции.

4) Для определения интервалов выпуклости и вогнутости кривой и точек перегиба найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{2(x^2 - 4x + 5) - (2x - 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x^2 - 4x + 5)^2}.$$

Для нахождения критических точек первой производной решаем уравнение $y'' = 0$ или $2x^2 - 8x + 6 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Эти два решения разбивают всю числовую ось на три интервала:



Поскольку при переходе через точки $x=1$ и $x=3$ вторая производная меняет знак, то точки $B(1; \ln 2)$ и $C(3; \ln 2)$ являются точками перегиба кривой ($\ln 2 \approx 0,7$).

5) Для нахождения асимптот вычисляем пределы:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\ln(x^2 - 4x + 5))'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x - 4)'}{(x^2 - 4x + 5)'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{2x - 4} = 0. \end{aligned}$$

Здесь при вычислении предела дважды использовано правило Лопиталя.

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 4x + 5) = \infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

6) Строим график функции (рис.4.8).

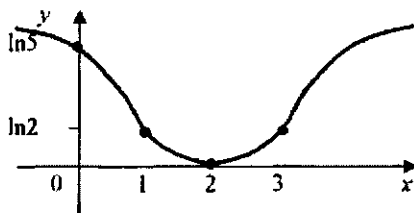


Рис. 4.8.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

1. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ функций

а) $y = x^3 - 2x + \sqrt{x} + 1$; б) $y = (x^2 + 1) \ln x$; в) $y = \frac{1 - 2x^3}{2x^3 + 1}$;

г) $y = \arcsin \sqrt{x}$; д) $y = 2^{x^3}$; е) $y = \ln(\cos e^x)$;

ж) $y = \sin 2x + \sin(x^2) + \sin^2 x$; и) $y = (5^{\operatorname{ctg} 2x} + \sin 2x)^3$.

2. Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$ в точке $x_0 = 2$.

3. На кривой $y = 4x^2 - 10x + 13$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 6x - 7$.

4. Материальная точка движется по закону $s = 4t^3 - 2t + 11$. Найти ее скорость и ускорение в момент времени $t_0 = 4$ сек.

5. Найти производные функций

а) $x^2 \sin y + y^2 = xy$; б) $y = x^{\operatorname{tg} x}$; в) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

6. Найти дифференциалы функций

а) $y = \ln(x^2 + 1)$; б) $y = 2\sqrt{e^x + 1} + 3$.

7. Найти производные второго порядка

а) $y = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$; б) $y = e^{2x} \sin x$.

8. Найти пределы с помощью правила Лопиталя.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 4x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$;

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{ctg} \pi x;$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

8. Найти точки экстремума и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x^2}{x-2}$ на отрезке $[-1; 1]$.

10. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 4}$.

11. Построить график функции $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти производные функций:

а) $y = 2x^5 - \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x} + \arccos 5x$;

б) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos 2x$;

в) $y = \frac{\ln x}{x}$;

г) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

2. Найти пределы по правилу Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 3x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}$.

3. Найти точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Вариант 2.

1. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x} + \sin 2x$;

б) $y = x^2 \cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$;

г) $y = \sqrt{\ln(e^x + 1)}$.

2. Найти пределы по правилу Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2x - 1}{x^2}$.

3. Найти точки перегиба функции $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 2x + 1$.

Домашнее задание

1. Найти производные функций:

а) $y = x^3 - \frac{1}{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + \arctg 3x$;

б) $y = (x^3 + 1) \cdot \ln x$;

в) $y = \frac{e^x}{x^2}$;

г) $y = \ln(\cos x) + 1$;

д) $y = \sqrt{\sin(e^x)}$;

е) $x^2 \cdot y = \sin(x + y)$;

ж) $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\begin{cases} x = t \sin t + \cos t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

2. Найти пределы по правилу Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\arctg 4x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi \cdot x}{2}}{\ln(1-x)}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x - \sin x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x^2}}$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 5]$

4. Провести полное исследование и построить график функции:

а) $y = x^4 - 6x^2 + 5$;

б)* $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

Управляемая самостоятельная работа студентов.

Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

производные и дифференциалы высших порядков; доказательство теоремы Коши; доказательство правила Лопиталя. численные методы решения уравнений: метод хорд, касательных (Ньютона), комбинированный метод; длина дуги и её производная; кривизна, формулы для её вычисления в различных системах координат; радиус и круг кривизны; центр кривизны и его нахождение; эволюта и эвольвента (развертка), их свойства.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 4

1⁰. Производной функции $y = f'(x)$ по аргументу x называется а) отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx; б) предел отношения приращения аргумента Δx к приращению функции Δy при $\Delta x \rightarrow 0$; в) отношение приращения аргумента Δx к приращению функции Δy; г) предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.	
2⁰. Какая формула несправедлива? а) $(v - u)' = v' - u'$; б) $\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - vu'}{u^2}$; в) $(vu)' = v'u - u'v$.	
3. Найдите производную функции $y = ctg(\ln x)$ а) $\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln x + ctgx \cdot \frac{1}{x}$; б) $-\frac{1}{x \cdot \sin^2(\ln x)}$; в) $\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}$; г) $-\frac{1}{x} \cdot ctg(\ln x)$.	
4. Среди приведенных функций укажите те, производная которых равна $8x$ а) $y = (2x - 4)^4$; б) $y = 8x + 5$; в) $y = 4x^2 + 10$; г) $y = 4(x - 5)(x + 10)$.	
5. Точка движется прямолинейно по закону $S = 4t + t^3$. Найти скорость движения точки в момент $t = 2$ сек.: а) 12; б) 16; в) 10; г) 5.	

6. Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид:

а) $y = \frac{1}{f'(x_0)} + f(x_0) \cdot (x - x_0)$; б) $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$;

в) $y - x_0 = f'(x_0) \cdot (x - f'(x_0))$; г) $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x - 14}$.

8*. Сколько точек перегиба имеет функция $y = x^4 + 4x$?

а) ни одной; б) одну; в) две; г) три.

9*. Укажите точки экстремума непрерывной на всей числовой прямой функции $y(x)$, если $y' = (x+1)^2(x-2)$:

а) $x = 2$ - точка max; б) $x = 2$ - точка min;

в) $x = -1$ - точка max; г) $x = -1$ - точка min.

10. Записать уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y = \frac{x+6}{x-3}$.

ИДЗ 4

Задание №1.

1. Найти производные функций в №№ 1–8

2. Найти пределы по правилу Лопиталя в №№ 10, 11.

3. Провести полное исследование и построить график функции. Найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Вариант 1

1. $y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} - 2 + 3\sqrt{x} + \arccos x$. 2.

$y = (2x^3 - 6x + 7) \cdot \ln x$.

3. $y = \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2}$ 4. $y = \cos(3x - x^2)$ 5. $y = \lg^2(7x + 6)$.

6. $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$. 7. $y^2 = 6xy - 7x$. 8. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 4), \\ y = \arctg 2t \end{cases}$.
9. Закон движения материальной точки $s(t) = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$.
Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$. 12. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 3$.

Вариант 2

1. $y = \frac{3}{x} + 3\sqrt{x^2 - 4x^3} - 2\sin x - \arctg x$. 2. $y = (5x - x^2) \cdot \sin x$.
3. $y = \frac{4 - 2x + 3x^2}{\operatorname{tg} x}$. 4. $y = \ln(x^2 - 2x + 5)$. 5. $y = \cos^3(e^x - 8)$.
6. $y = x^{\ln 2x}$. 7. $2x^2 - 3xy^2 = 5y$. 8. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$.
9. Закон движения материальной точки $s(t) = 5t^3/3 - 3t^2/2 + 6$.
Найти ускорение ее движения в момент времени $t=3$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. 12. $y = \frac{x^2}{x-1}$, $\alpha = 1,5$, $\beta = 4$.

Вариант 3

1. $y = 3x^4 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{2}{x^3} - 8\ln x + 2\arcsin x$. 2. $y = (7 - x + 3x^2) \cdot \operatorname{tg} x$.
3. $y = \frac{\sin x}{3x-1}$. 4. $y = \arcsin(2x-6)$. 5. $y = \operatorname{ctg}^2(4^x - 1)$.
6. $y = (x^3 + 3)^{\sin 5x}$. 7. $y \operatorname{tg} x - x^2 + y^2 = 9$. 8. $\begin{cases} x = e^{2t} + t, \\ y = e^{4t} - t \end{cases}$.
9. По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых
 $s_1(t) = 5t^2 - t + 6$ и $s_2(t) = 4t^2 + 18$.

С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x}, \quad 12. y = \frac{x^2 - 3}{x + 2},$$

$$\alpha = -1,5,$$

$$\beta = 2.$$

Вариант 4

$$1. y = 7\sqrt{x} - \frac{4}{x^5} + 2^x - 3x^4 + 5 + \operatorname{arccctg} x, \quad 2. y = (x^4 - 5x^2 + 4) \cdot e^x.$$

$$3. y = \frac{\ln x}{6x + 2x^4}, \quad 4. y = \operatorname{tg}(3x + x^2), \quad 5. y = \arccos^4(7 - x^2).$$

$$6. y = (\sin x)^{\cos x}, \quad 7. y^2 = 8x^2 - 4xy, \quad 8. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^2 t. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = t^3/3 - 2t^2 - 11t + 275$.
В какой момент времени скорость ее движения будет равна 10 м/с?

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{4 + 3x^2}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}, \quad 12. y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2,5.$$

Вариант 5

$$1. y = 5x^2 - \frac{3}{x} + 8\sqrt{x^4} - 4 \cos x + 2 \operatorname{arctg} x, \quad 2.$$

$$y = (7x + 5x^2 - x^3) \cdot \cos x.$$

$$3. y = \frac{2x - 6}{-\log_4 x}, \quad 4. y = e^{3x-7}, \quad 5. y = \sin^3(\operatorname{tg} x).$$

$$6. y = x^{\operatorname{ctg} x}, \quad 7. 3x^3 - \sin y = 5xy, \quad 8. \begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 2t^3 + 3t^2. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 4 \cos(t \setminus 4 + \pi \setminus 4) + 6$.
Найти скорость ее движения в момент времени $t = \pi$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{ctgx}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}. \quad 12. y = \frac{x^2 + 9}{x + 4}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 4.$$

Вариант 6

$$1. y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[3]{x^4} - e^x + 8 \arcsin x. \quad 2. y = (x^4 - 6x + 8) \cdot \sin x. \\ 3. y = \frac{2x^3 - 7x + 8}{\operatorname{tg} x}. \quad 4. y = \arccos 5x. \quad 5. y = \ln^5(\cos x).$$

$$6. y = (\cos 5x)^{\arccos x}. \quad 7. xy - \operatorname{ctgy} = 6x. \quad 8. \begin{cases} x = 2\sqrt{t} + t - 1, \\ y = t^2 - 2t + 1. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$.

Найти ускорение ее движения в момент времени $t = 5$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}. \quad 12. y = \frac{x^2 + 4}{x}, \\ \alpha = 1, \\ \beta = 3.$$

Вариант 7

$$1. y = 3x^5 - \frac{2}{x} + 4\sqrt[3]{x^5} - 2 \cos x - 6 \arccos x. \quad 2. y = (7x^2 - 3x + 5) \cdot \lg x. \\ 3. y = \frac{\cos x}{4x^2 - 3x - 5}. \quad 4. y = \operatorname{ctg}(4x - 3). \quad 5. y = \lg^2(e^x + 7).$$

$$6. y = x^{\arcsin x}. \quad 7. xy^2 - 2x^2y = \cos y. \quad 8. \begin{cases} x = t^4 + 4, \\ y = \ln t - 4. \end{cases}$$

9. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $s(t) = 3t^2 - 8$ и $s(t) = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}. \quad 12. y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}, \quad \alpha = -3, \quad \beta = 0.$$

Вариант 8

1. $y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 3x^5 + 2\lg x - 3 \operatorname{arccctg} x$. 2. $y = (3x^5 - 4x^2 + 2x) \cdot 2^x$.

3. $y = \frac{\lg x}{4 - 3x - x^2}$. 4. $y = \sin(5 - 7x)$. 5. $y = \arccos^3(4 - x)$.

6. $y = (\sin x)^{\lg x}$. 7. $x^2 y^3 + x = 5y$. 8. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = t^2 - 6t + 5$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 8 м/с?

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x^2}$. 12. $y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Вариант 9

1. $y = 3 - 2\operatorname{ctg} x + 5x^6 - \frac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x^3} - \arccos x$. 2. $y = (3x^4 - 2x^3 + 7) \cdot \lg x$.

3. $y = \frac{2 - 3x + 2x^2}{4^x}$. 4. $y = \operatorname{arctg}(2 + 3x)$. 5. $y = \sin^2(\ln x)$.

6. $y = (\cos x)^{\ln x}$. 7. $xy^2 + 6x - y = 9$. 8. $\begin{cases} x = 1 - 2t + e^{2t}, \\ y = 2 + t + e^{-t}. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 4 \sin(t/4 + \pi/6) - 8$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = \pi/3$.

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{x^2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. 12. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Вариант 10

1. $y = 7 + 3x^4 - \frac{4}{x^2} + 2\lg x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} x$. 2. $y = (4 - 2x - x^2) \cdot \cos x$.

3. $y = \frac{e^x}{3x - 8 + 3x^2}$. 4. $y = \operatorname{tg}(3x^2 - 6x - 9)$. 5. $y = \arcsin^2(e^x - 8)$.

$$6. y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}, \quad 7. x^4 + x^2 y = 4y^2, \quad 8. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 2t^4 - 6t^3 + 3t - 7$.
Найти ускорение ее движения в момент времени $t = 2$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln(2x+1)}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{4x - \sin 4x}, \quad 12. y = \frac{x^2 - 15}{x + 4},$$

$$\alpha = -3,5,$$

$$\beta = 0.$$

Вариант 11

$$1. y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^4} - 3 + \sin x - \arccos x, \quad 2. y = (5x + 4x^2 - x^3) \cdot \ln x.$$

$$3. y = \frac{\sin x}{2 - x + 3x^2}, \quad 4. y = \operatorname{arctg}(5x - 7), \quad 5. y = \cos^4(2x^2 - 6x).$$

$$6. y = (\cos x)^{\sin x}, \quad 7. \operatorname{tgy} = 4y - 5xy^2, \quad 8. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

9. По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых

$s_1(t) = 7t^3 - 5t + 1$ и $s_2(t) = 3t^3 - 5t + 5$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{3x^2 + x}, \quad 12. y = \frac{x^2 + 9}{x}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 4.$$

Вариант 12

$$1. y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{3}{x^4} - 2 + \operatorname{arctg} x, \quad 2. y = (4 - 5x - x^2) \cdot \sin x.$$

$$3. y = \frac{\operatorname{tg} x}{4 - 2x}, \quad 4. y = \cos(7x + 4x^3), \quad 5. y = \operatorname{tg}^2(3 + e^x).$$

$$6. y = (3 - 2x)^{\lg x}, \quad 7. xy = e^y + 4x^2, \quad 8. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} x, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = t^3/3 - t^2/2 + 7t - 2$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 9 м/с?

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$. 11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\pi - 4x}{\cos 2x}$. 12. $y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$, $\alpha = -6$, $\beta = -3$.

Вариант 13

1. $y = \frac{6}{x^2} - 3x + 3\sqrt{x} - \arcsin x + 1$. 2. $y = (7x - 8x^2 + x^3) \cdot e^x$.

3. $y = \frac{1 + 5x - x^2}{\ln x}$. 4. $y = \sin(3x + 5x^2)$. 5. $y = \operatorname{tg}^3(\arccos x)$.

6. $y' = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. 7. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$. 8. $\begin{cases} x = t^2 - 4t + 4, \\ y = t^4 - 8t^2 + 2. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 2t^3 - 7t^2 + 8t - 3$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 3$.

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x - 2)}{x^2 - 2x + 2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x - \sin x}$. 12. $y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$, $\alpha = 4$, $\beta = 8$.

Вариант 14

1. $y = 4x^5 - \frac{5}{x} + \sqrt{x^3} - 3 - \arccos x$. 2. $y = (1 + 2x + 3x^2) \cdot 3^x$.

3. $y = \frac{6 - 3x + 2x^2}{\cos x}$. 4. $y = \ln(7 - 2x - x^2)$. 5. $y = \sin^5(\operatorname{ctg} x)$.

6. $y = (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. 7. $\ln y - 2x^2 + xy = 9$. 8. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 6t^4 - 4t^2 + 8$. Найти ускорение ее движения в момент времени $t = 4$.

10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{\sqrt{x + 6} - 3}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. 12. $y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$, $\alpha = -2$, $\beta = 3$.

Вариант 15

$$1. y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{x^5} - 4x^7 - 3 + 2 \ln x - \operatorname{arctg} x.$$

$$2. y = (3 - 2x - x^2) \cdot \log_3 x.$$

$$3. y = \frac{4 - 3x}{e^x}, \quad 4. y = \cos(2x^2 - 6x + 5), \quad 5. y = \arcsin^2(4x - 7).$$

$$6. y = (x^3 + 7)^{\operatorname{ctg} 2x}, \quad 7. 4 \sin(x + y) = x - 3y, \quad 8. \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 4t^2 + 3t - 2$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 19 м/с?

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x - 2)}{x^2 - 4}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}, \quad 12. y = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad \alpha = 0,5, \quad \beta = 3.$$

Вариант 16

$$1. y = \frac{2}{x^3} - 3x^7 + 2\sqrt{x^5} - 6 \lg x + 3 \arcsin x, \quad 2. y = (x^3 - 5x - 7) \cdot \sin x.$$

$$3. y = \frac{5^x}{2x + x^2 - 3}, \quad 4. y = \cos(\ln x), \quad 5. y = \operatorname{ctg}^7(1 - 2x + x^2).$$

$$6. y = (x + 4)^{\cos 2x}, \quad 7. xy - 6x^2 = \cos y, \quad 8. \begin{cases} x = e^{2t} - 2t + 1, \\ y = e^t + t - 1. \end{cases}$$

9. По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых

$s_1(t) = 2t^2 + 6t - 5$ и $s_2(t) = t^2 + 3t - 1$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}, \quad 12. y = \frac{x^2 + 25}{x},$$

$$\alpha = -7$$

$$\beta = -4.$$

Вариант 17

1. $y = 8x - \frac{3}{x^2} + 4\sqrt[3]{x^3} - 5 + \cos x - \operatorname{arccotg} x$. 2. $y = (5x^2 + 3x - 9) \cdot \operatorname{tg} x$.

3. $y = \frac{\sin x}{2 + 3x - x^2}$. 4. $y = \ln(3 - 4x^2)$. 5. $y = \arccos^4(e^x)$.

6. $y = (\cos x)^{\ln x}$. 7. $y^3 - 3xy + 5x^3 = 9$. 8. $\begin{cases} x = t^3 - 3t + 8, \\ y = 2 - t^2. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 5t^3 - 6t^2 + 3t - 7$.

Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$.

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{2x + 7} - 3}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 4x}$. 12. $y = \frac{x^2 + 24}{x + 1}$,

$\alpha = 2$,

$\beta = 5$.

Вариант 18

1. $y = 5x^2 - \frac{4}{x} + \sqrt[3]{x^8} + 8 - \operatorname{tg} x + \arccos x$. 2. $y = (4 - 2x + 6x^3) \cdot \ln x$.

3. $y = \frac{\cos x}{x^2 - 8x + 1}$. 4. $y = \operatorname{ctg}(5 + x + 3x^2)$. 5. $y = \ln^3(\sin x)$.

6. $y = (\operatorname{tg} 4x)^{\arcsin x}$. 7. $3xy = 7x^2 - \operatorname{ctg} y$. 8. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 4t^3/3 + t^2/2 + 8t - 1$.

Найти ускорение ее движения в момент времени $t = 4$.

10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{e^x - 1}$. 12. $y = \frac{x^2 + 32}{x - 2}$, $\alpha = 3$, $\beta = 10$.

Вариант 19

1. $y = \sqrt[4]{x^3} - 6x^7 + \frac{2}{x^{10}} + e^x - 6 \arcsin x$. 2. $y = (3 + 5x - 2x^4) \cdot 8^x$.
 3. $y = \frac{4 - 7x}{\operatorname{tg} x}$. 4. $y = \sin(\operatorname{tg} x)$. 5. $y = \arccos^2(2 + x^3)$.
 6. $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$. 7. $e^y - xy + 5x^2 = 4$. 8. $\begin{cases} x = \ln t + 1, \\ y = 3t^2 - 1. \end{cases}$

9. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $s_1(t) = 3t^2 - 6t - 4$ и $s_2(t) = 2t^2 - 4t - 7$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$. 12. $y = \frac{x^2 + 27}{x + 3}$, $\alpha = 0$, $\beta = 6$.

Вариант 20

1. $y = \frac{5}{x^4} - 2\sqrt[5]{x^7} + 3x^6 - \operatorname{ctg} x + 2 \arccos x$. 2. $y = (3x^2 - x - 1) \cdot \cos x$.
 3. $y = \frac{\cos x}{x^2 - 3x - 5}$. 4. $y = \lg(3x - x^4)$. 5. $y = \sin^4(e^x - 7)$.
 6. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. 7. $\sin y - xy^2 + 5x^2 - 8 = 0$. 8. $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 2t^2 + 4t - 5$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 20 м/с?

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x} + 2 - 2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 2x}$. 12. $y = \frac{x^2 - 7}{x - 4}$, $\alpha = -1$, $\beta = 3$.

Вариант 21

1. $y = 7x^2 - \frac{6}{x} + 3\sqrt[4]{x^3} - 2 + \arcsin x$. 2. $y = (2x^2 - 4x + 7) \cdot \sin x$.
 3. $y = \frac{4x - 3x^2}{e^x}$. 4. $y = \ln(5 - 3x - x^2)$. 5. $y = \cos^5(\operatorname{arctg} x)$.

$$6. y = (\operatorname{ctg} x)^{\ln(3-x)} . \quad 7. x^2 y - 7x + e^y = 7 . \quad 8. \begin{cases} x = 3 \sin 5t, \\ y = 2 \operatorname{tg} 5t. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = -3 \cos(t/4 + \pi/12) + 10$.
Найти скорость ее движения в момент времени $t = \pi/3$.

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{tg}(x-3)}{x^2 - 4x + 3} . \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - x}{x^2} . \quad 12. y = \frac{x^2 + 1}{x - 1},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 4.$$

Вариант 22

$$1. y = 2\sqrt{x^3} - 6x^8 + \frac{7}{x^3} + \operatorname{arctg} x - 7 . \quad 2. y = (5 - 7x + 3x^3) \cdot \operatorname{tg} x .$$

$$3. y = \frac{4 - x + 5x^2}{8^x} . \quad 4. y = \sin(3 - 4x^2) . \quad 5. y = \arcsin^3(e^x) .$$

$$6. y = (\sin 2x)^{\cos(4-x)} . \quad 7. \cos y - 3xy + 8x^2 = 9 . \quad 8. \begin{cases} x = e^{-2t} + t, \\ y = e^{4t} - t. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 8t^3 - 5t^2 + 2t + 7$.
Найти ускорение ее движения в момент времени $t = 2$.

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 - 1} . \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{3x} - 5x - 2}{x^2} . \quad 12. y = \frac{x^2 + 5}{x + 2},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 2.$$

Вариант 23

$$1. y = \lg x - 3x^8 + 4 - \frac{3}{x^5} + \sqrt{x^5} - \operatorname{arctg} x . \quad 2. y = (-4 - 6x - x^2) \cdot e^x .$$

$$3. y = \frac{7 + 2x - x^2}{\operatorname{tg} x} . \quad 4. y = \sin(\ln x) . \quad 5. y = \arccos^2(1 - 2x + 2x^2) .$$

$$6. y = (\sin 3x)^{\cos x} . \quad 7. y^2 = x^2 - x \ln y + 5x . \quad 8. \begin{cases} x = t^2 + 4t + 3, \\ y = t^3 - 12t. \end{cases}$$

9. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $s_1(t) = 3t^2 + 2t - 7$ и $s_2(t) = 2t^2 - 4$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{2x^2 - 6x + 4}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{1 - \cos x}$. 12. $y = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$, $\alpha = -2$, $\beta = 0$.

Вариант 24

1. $y = 5 + 2x^3 - \frac{3}{x} + 6\sqrt{x^5} - \arccos x$. 2. $y = (4x^3 + 6x - 7) \cdot \ln x$.

3. $y = \frac{4 - 5x + 2x^2}{\sin x}$. 4. $y = \cos(4 - 5x - x^3)$. 5. $y = tg^5(\arcsin x)$.

6. $y = (x^2 + 1)^x$. 7. $xy^2 - 5x^3 + 7y = 8$. 8. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 5 \sin^2 t. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 4t^2 - 7t - 3$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 17 м/с ?

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x+3} - 2}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3tg 4x - 12tg x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$. 12. $y = \frac{x^2}{x+2}$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Вариант 25

1. $y = 6x^2 - 5 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x} + 2 \ln x + \arcsin x$.

2. $y = (2x^4 - 3x^2 + 4) \cdot \cos x$.

3. $y = \frac{3 - 2x + 5x^2}{\lg x}$. 4. $y = \text{arcctg}(x^2 - 9x + 8)$. 5. $y = \sin^8(e^x + 4)$.

6. $y = (\cos 6x)^{\arcsin x}$. 7. $\sin y - 7xy + x^3 = 0$. 8. $\begin{cases} x = 4t - 2t^2, \\ y = t^3 - 3t + 2. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = t^3 - 2t^2 + 5t + 9$. Найти скорость ее движения в момент времени $t=4$.

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2}, \quad 12. y = \frac{x^2 - 3}{x - 2},$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 2.$$

Вариант 26

$$1. y = \frac{7}{x^2} - 6x^4 + 5 + 3\sqrt{x^5} - e^x + \operatorname{arccotg} x. \quad 2. y = (7 - 3x - x^2) \cdot \log_5 x.$$

$$3. y = \frac{\sin x}{2x^2 - 6x + 3}, \quad 4. y = \arccos(5x - 6), \quad 5. y = \cos^2(\ln x).$$

$$6. y = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}. \quad 7. 2xy - 7y^3 - 4x^2 = 17. \quad 8. \begin{cases} x = 2t^3 + 6t + 3, \\ y = \ln t + t. \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 5t^2 - 2t + 8$. Найти ускорение ее движения в момент времени $t=6$.

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\sqrt{x+2} - 1)}{x^2 - 4}, \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 2x}, \quad 12. y = \frac{x^2 + 4}{x},$$

$$\alpha = 1,$$

$$\beta = 3.$$

Вариант 27

$$1. y = \frac{6}{x^4} - 2x^5 + \sqrt[4]{x^3} - 8 + \lg x - \arccos x. \quad 2. y = (4x - 7x^2 + x^3) \cdot \ln x$$

$$3. y = \frac{\cos x}{7x - 2x^2}, \quad 4. y = \operatorname{tg}(4 - 5x + x^2), \quad 5. y = \arcsin^2(3 - e^x).$$

$$6. y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}, \quad 7. xy^2 = 2x - \ln y - 4, \quad 8. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 + \cos t). \end{cases}$$

9. По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых

$s_1(t) = 6t^2 - 2t + 5$ и $s_2(t) = 6t^2 - 3$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{2^x + 1}.$$

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 2.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 2x}.$$

$$12. y = \frac{x^2 - 11}{x - 6},$$

Вариант 28

$$1. y = \sqrt{x^3} - \frac{7}{x^4} + 7x^5 - 9 + \sin x - \arctg x. \quad 2. y = (-3 + 4x - x^2) \cdot 2^x.$$

$$3. y = \frac{\operatorname{tg} x}{2x^2 - 3x - 7}. \quad 4. y = \ln(4 - 3x + 2x^2). \quad 5. y = \arccos^3(\operatorname{tg} x).$$

$$6. y = (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}. \quad 7. x^2 y^4 - 8x + y = 4. \quad 8. \begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

9. Закон движения материальной точки $s(t) = 8t^2 - 3t + 8$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 13 м/с?

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x+6}-3}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - x}{\cos x - 1 - x}. \quad 12. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

Вариант 29

$$1. y = 8x - 6\sqrt[3]{x^7} + 3 - \frac{8}{x^6} + 2\operatorname{tg} x - \arcsin x. \quad 2. y = (5 + 7x - 2x^3) \cdot \operatorname{tg} x.$$

$$3. y = \frac{e^x}{3 - 2x + 5x^2}. \quad 4. y = \cos(5 - 6x - 8x^2). \quad 5. y = \ln^3(\arccos x).$$

$$6. y = (4 - x^2)^{\sin x}. \quad 7. x^3 y + xy^3 = 8. \quad 8. \begin{cases} x = 3t^3 - t + 3, \\ y = te^{3t}. \end{cases}$$

9. По оси Ох движутся две материальные точки, законы движения которых

$s(t) = 4t^3 / 3 - 7t + 16$ и $s(t) = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^{2x} - 1}{x - e^{-2x} + 1}. \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}. \quad 12. y = \frac{3 - x^2}{x + 2}, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 0.$$

Вариант 30

1. $y = \frac{9}{x^3} - 4\sqrt{x} + 5x^{11} - 7 - 6^x + \arccos x$. 2. $y = (7 - 8x + 3x^2) \cdot e^x$.

3. $y = \frac{6 - 5x + x^2}{\sin x}$. 4. $y = \operatorname{ctg}(7 - x^2)$. 5. $y = \lg^4(\cos x)$.

6. $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. 7. $\sin y = xy^2 + 5x^2 - 6$. 8. $\begin{cases} x = \sqrt{4 - t^2}, \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

9. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s(t) = t^3/3 - t^2/2 - 30t + 18$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{\sin^2 x}$. 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{\ln(x^3 - 7)}$. 12. $y = \frac{5 - x^2}{x + 3}$,

$\alpha = -2$,

$\beta = 1$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Найти производные функций

1. $y = x^3 - 3\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^4} - \operatorname{arccctg} x$; 2. $y = (x^2 - 2x + 1)e^x$;

3. $y = \frac{8x - 3}{x^2 - 5x + 4}$; 4. $y = \sin \ln(1 + \sqrt{x})$; 5. $y = \sin^3 2x$;

6. $y = (x^2 + 1)^{\lg x}$; 7. $x \cos y + y^2 = xy$; 8. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

Решение. 1.

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^3 - 2\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^4} - \operatorname{arccctg} x \right)' = (x^3)' - \left(2x^{\frac{5}{2}} \right)' + (x^{-4})' - (\operatorname{arccctg} x)' = \\ &= 3x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-5} - \left(-\frac{1}{x^2 + 1} \right) = 3x^2 - 5\sqrt{x^3} - \frac{4}{x^5} + \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

$$2. y' = ((x^2 - 2x + 1)e^x)' = (x^2 - 2x + 1)'e^x + (x^2 - 2x + 1)(e^x)' = \\ = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 1)e^x = (2x - 2 + x^2 - 2x + 1)e^x = (x^2 + 1)e^x.$$

$$3. y' = \left(\frac{8x - 3}{x^2 - 5x + 4} \right)' = \frac{(8x - 3)'(x^2 - 5x + 4) - (8x - 3)(x^2 - 5x + 4)'}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \\ = \frac{8(x^2 - 5x + 4) - (8x - 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \\ = \frac{8x^2 - 40x + 32 - 16x^2 + 46x - 15}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{-8x^2 + 6x + 17}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

$$4. y' = (\sin \ln(1 + \sqrt{x}))' = \cos \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot (\ln(1 + \sqrt{x}))' = \\ = \cos \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot (1 + \sqrt{x})' = \\ = \cos \ln(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \ln(1 + \sqrt{x})}{2(1 + \sqrt{x})}.$$

$$5. y' = (\sin^3 2x)' = 3 \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' = 3 \sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = \\ = 6 \sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

6. Прологарифмируем данную функцию $\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\lg x}$,

$$\ln y = \lg x \cdot \ln(x^2 + 1), \text{ тогда } \frac{1}{y} y' = (\lg x)' \ln(x^2 + 1) + \lg x (\ln(x^2 + 1))' = \\ = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(x^2 + 1) + \lg x \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x. \text{ Отсюда выразим } y':$$

$$y' = y \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos^2 x} + \frac{2x}{x^2 + 1} \lg x \right) = (x^2 + 1)^{\lg x} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\cos^2 x} + \frac{2x}{x^2 + 1} \lg x \right);$$

7. Дифференцируем обе части уравнения по x :

$$\cos y + x(-\sin y)y' + 2y \cdot y' = y + xy' \Rightarrow -x \sin y \cdot y' + 2y \cdot y' - xy' = y - \cos y$$

$$y' = \frac{y - \cos y}{2y - x \sin y - x}.$$

$$8. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

Последовательно находим производные: $x' = (\arccos t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$, \quad y' = (\sqrt{1-t^2})' = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}. \text{ Тогда } y'_x = \frac{y'}{x'} = t.$$

Задание 2. Определить момент времени, когда ускорение движения равно нулю, при условии, что материальная точка движется по закону $s = s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

Решение. Находим первую и вторую производные:

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18.$$

Ускорение $a = 0$, когда $6t - 18 = 0$. Откуда искомый момент времени $t = 3$.

Задание 3. Найти пределы по правилу Лопиталя

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1}; \quad 11. \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}.$$

Решение. 10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(1-x))'}{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-x} (-1)}{\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{1-x}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{1-x} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\cos^2 \frac{\pi x}{2} \right)'}{(1-x)'} =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \left(-\sin \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} = -2 \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} = 0$$

Задание 4. Провести полное исследование $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ и построить график функции. Найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0; 1,5]$.

Решение. Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1) Найдём область определения функции. Так как при $x = 2$ функция терпит разрыв, то область определения $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Найдём точки пересечения графика с осями координат. Если $x = 0$, то $y = \frac{5}{2} = 2,5$, т.е. $A(0; 2,5)$ — точка пресечения с осью Oy . Если

$$y = 0, \text{ то } x^2 + x - 5 = 0, \text{ и } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \approx 1,8,$$

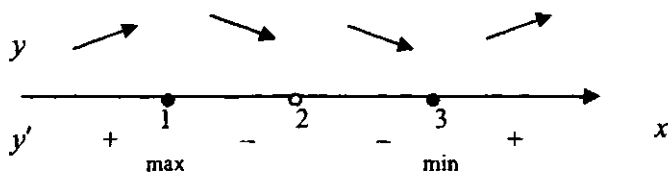
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \approx -2,8, \text{ т.е. } B(-2,8; 0) \text{ и } C(1,8; 0) \text{ — точки пересечения с осью } Ox.$$

2) Исследуем функцию на чётность и нечётность. Так как область определения функции несимметрична относительно начала координат, то функция не является ни четной, ни нечётной.

3) Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции. Находим первую производную:

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x - 5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

Критические точки функции найдём из следующих условий: $y' = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. y' не существует при $x_3 = 2$ (при этом $x = 2 \notin D(y)$). Исследуем знак y' при переходе через критические точки:



Таким образом, на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а на интервалах $(1; 2)$ и $(2; 3)$ функция убывает.

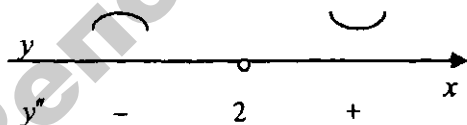
$$y_{\max}(1) = \frac{1+1-5}{1-2} = 3, \quad y_{\min}(3) = \frac{3^2+3-5}{3-2} = 7.$$

Следовательно, $D(1; 3)$ – точка максимума, а $E(3; 7)$ – точка минимума функции.

5) Определим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого найдем вторую производную.

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

$y'' \neq 0$ ни при каком значении x . Однако, при $x=2$ y'' не существует. Поэтому исследуем знак y'' при переходе через точку $x=2$:



Видим, что на интервале $(-\infty; 2)$ кривая выпукла, на интервале $(2; +\infty)$ кривая вогнута. Но, так как $x=2 \notin D(y)$, то точек перегиба нет.

5) При $x \neq 2$ функция непрерывна. Так как $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = -\infty$, а $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = +\infty$, то $x = 2$ - вертикальная асимптота.

Уравнения наклонных асимптот ищем в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 3$$

Следовательно, $y = x + 3$ - наклонная асимптота.

3) Строим график функции

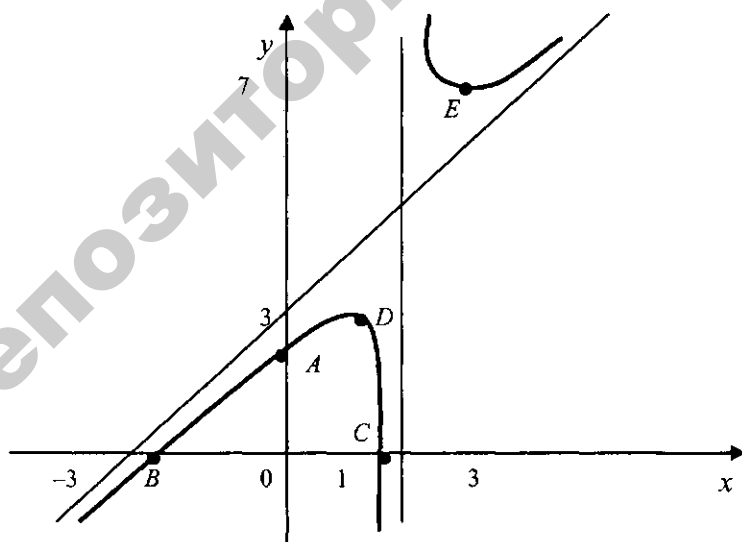


Рис. 4.9

Отрезку $[-1; 1,5]$ принадлежит одна критическая точка $x = 1$. Найдем значение функции на концах отрезка и в точке $x = 1$:

$$y(-1) = \frac{(-1)^2 + (-1) - 5}{-1 - 2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3},$$

$$y(1,5) = \frac{1,5^2 + 1,5 - 5}{1,5 - 2} = \frac{-1,25}{-0,5} = 2,5, \quad y(1) = \frac{1^2 + 1 - 5}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Сравнивая эти значения, заключаем, что $\min_{[-1,5]} y = \frac{5}{3}$, $\max_{[-1,5]} y = 3$.

МОДУЛЬ 5.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) **знать** а) *понятия и определения*: функция нескольких переменных, предел и непрерывность функции нескольких переменных, частные производные, дифференциал функции нескольких переменных, касательная плоскость и нормаль к поверхности, точки экстремума функций двух переменных; б) *характеризовать* поведение функции двух переменных; в) *моделировать и прогнозировать* процессы, описываемые функциями нескольких переменных;

2) **уметь** а) *находить* частные производные, дифференциал функции нескольких переменных; б) *составлять* уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности; в) *исследовать* функцию двух переменных на экстремум.

Многие явления в природе и технике зависят не от одного, а от нескольких факторов. Например, объем V прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер x, y, z , т. е. объем $V = x y z$ можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z . Этот раздел посвящен изучению общих свойств функций нескольких переменных.

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Изучение свойств функций нескольких переменных во многих случаях имеет большое сходство с изучением свойств функций двух переменных.

Пусть x, y – две независимые друг от друга переменные. Графически пару независимых переменных (x, y) можно представить как

точку $M(x, y)$ на плоскости xOy . Пусть D – некоторое множество точек $M(x, y)$.

Определение. Если каждой точке $M(x, y)$ из множества D по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное значение переменной (действительное число) z , то говорят, что z есть *функция двух переменных x и y* и пишут

$$z = f(x, y) \text{ или } z = f(M)$$

где $M = M(x, y)$ – точка плоскости.

Геометрическим изображением функции двух переменных является некоторая поверхность в трехмерном пространстве.

Пример 5.1. График функции двух переменных $z = e^{-(x^2+y^2)/8} (\sin x^2 + \cos y^2)$ приведен на рис. 5.1, график функции двух переменных $z = \sin x + 2 \sin y$ – на рис. 5.2.

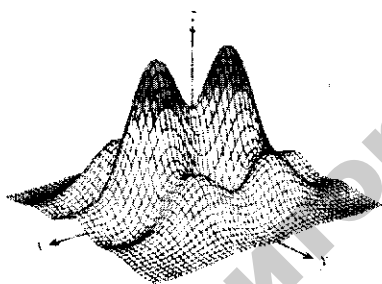


Рис. 5.1

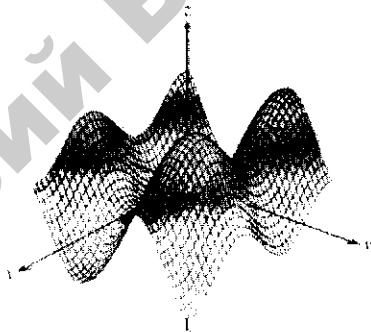


Рис. 5.2

Определение. Областью определения функции $z = f(x, y)$ называется множество D точек $M(x, y)$, в которых функция $z = f(x, y)$ определена и может быть вычислена. Все значения, которые принимает функция $z = f(x, y)$ (в области ее определения), образуют *множество значений функции*.

Пример 5.2. Областью определения функции $z = \sqrt{y - x^2}$ является множество $y - x^2 \geq 0$. Перепишем неравенство $y - x^2 \geq 0$ в виде $y \geq x^2$ и построим графическое изображение области опреде-

ления этой функции (см. рис. 5.3). Множеством значений функции $z = \sqrt{y - x^2}$ является множество $z \geq 0$.

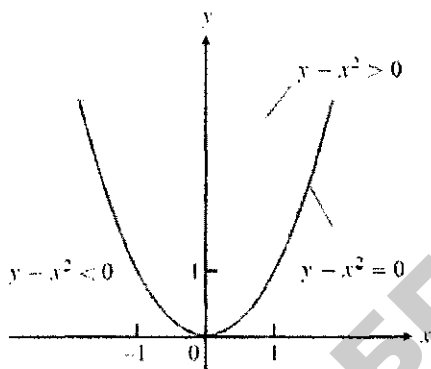


Рис. 5.3

Аналогично функции двух переменных можно определить функцию n переменных для произвольного n .

Всякая упорядоченная совокупность действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется точкой n -мерного арифметического пространства R^n . Пусть D — некоторое множество точек пространства R^n .

Определение. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из области $D \subset R^n$ по некоторому закону f ставится в соответствие вполне определенное число u , то говорят, что u есть функция n переменных и пишут

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ или } u = f(M),$$

где $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — точка n -мерного арифметического пространства.

Функцию трех и большего числа переменных нельзя изобразить графически в трехмерном пространстве.

§ 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. При этом пишут

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M).$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если функция $z = f(x, y)$ определена в этой точке и существует

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Аналогичные определения имеют место и для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в случае произвольного числа n переменных.

Если в какой-либо точке условие непрерывности не выполняется, то эта точка называется *точкой разрыва* функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

1. Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Не существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.
3. Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

§ 3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Дадим независимой переменной x приращение Δx , оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда функция z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$

которое называется *частным приращением z по x* .

Аналогично, если независимой переменной y дадим приращение Δy , оставляя при этом неизменной переменную x , то функция z получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

называемое *частным приращением z по y* .

Определение. Частной производной по x от функции z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x, y).$$

Таким образом, по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

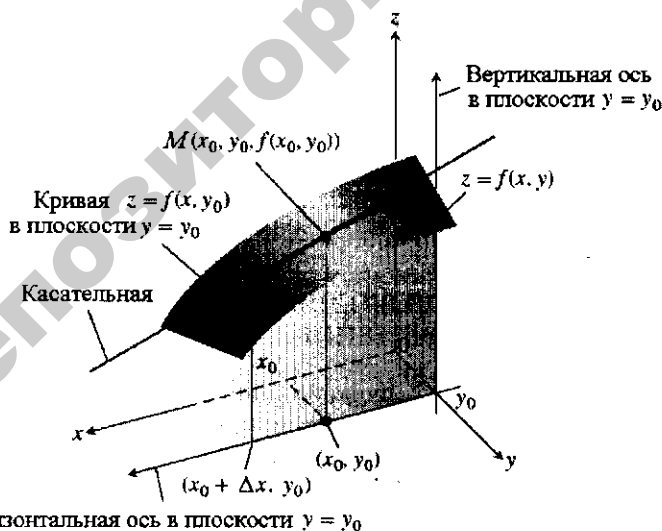


Рис. 5.4

Аналогично определяется частная производная от функции $z = f(x, y)$ по переменной y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_y(x, y).$$

С геометрической точки зрения функция $z = f(x, y)$ задает в пространстве некоторую поверхность. Фиксируя определенное значение y_0 , получает пересечение этой поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$, т.е. кривую $z = f(x, y_0)$. Частная производная

$\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является производной функции $z = f(x, y_0)$ при $x = x_0$. Таким образом, с геометрической точки зрения частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $z = f(x, y_0)$ по отношению к оси Ox .

Аналогично, частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $z = f(x_0, y)$ (полученной пересечением поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $x = x_0$) по отношению к оси Oy . Графические интерпретации определений частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ приведены на рис. 5.4 и рис. 5.5 соответственно.



Рис. 5.5

В общем случае *частной производной первого порядка функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_k* называется предел

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Так как при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, считаются постоянными, то для частных производных сохраняются все правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

Пример 5.3. Найти частные производные функции $z = x^2 y + \frac{x}{y}$.

Решение. Полагая $y = \text{const}$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}.$$

Полагая $x = \text{const}$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x=c} = x^2 \cdot 1 + x \left(-\frac{1}{y^2} \right) = x^2 - \frac{x}{y^2}.$$

Пример 5.4. Найти значения частных производных функции $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$ в точке $M(1, -1, 0)$.

Решение. Полагая $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{y,z=c} = \frac{1}{x^2 + y^2} (2x + 0) + 1 \cdot yz = \frac{2x}{x^2 + y^2} + yz \Big|_M = \frac{2}{1+1} + 0 = 1.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{x,z=c} = \frac{1}{x^2 + y^2} (0 + 2y) + 1 \cdot xz = \frac{2y}{x^2 + y^2} + xz \Big|_M = \frac{-2}{1+1} + 0 = -1.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}_{x,y=c} = 0 + 1 \cdot xy = xy \Big|_M = -1.$$

Вычисление частных производных сложных функций

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, причем эти переменные, в свою очередь, являются функциями переменных u и v : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тогда функция $z = f(x(u, v), y(u, v))$ является *сложной функцией* двух переменных u и v . Частные производные этой сложной функции находят по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференцирование неявных функций

Пусть функция двух переменных задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z . Такое уравнение называется *неявным*.

Частные производные неявной функции двух переменных можно находить по формулам

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad (F'_z \neq 0)}.$$

§ 4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y).$$

Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных x и y . Будем называть $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ *частными производными первого порядка*.

Определение. *Частными производными второго порядка* называются частные производные от частных производных первого порядка.

Для функции $z = f(x, y)$ двух переменных можно найти четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y). \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{смешанные} \\ \text{частные} \\ \text{производные} \end{array}$$

Теорема 5.1. Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в некоторой точке $M(x, y)$, то они равны, т. е.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Частными производными n -го порядка называются частные производные от частных производных $(n-1)$ -го порядка.

Их обозначают $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т. д.

Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

Пример 5.5. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)$.

Решение. Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y \cos(xy + 1); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x \cos(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y^2 + y \cos(xy + 1)) = 6xy^2 - y^2 \sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2 + y \cos(xy + 1)) = 6x^2 y + \cos(xy + 1) - yx \sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 y + x \cos(xy + 1)) = 6x^2 y + \cos(xy + 1) - yx \sin(xy + 1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 y + x \cos(xy + 1)) = 2x^3 - x^2 \sin(xy + 1).$$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx , а аргументу y приращение Δy . Тогда z получит приращение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, которое называется *полным приращением функции z* .

Предположим, что $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ имеет непрерывные частные производные.

Определение. Дифференциалом первого порядка функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz этой функции, линейная относительно Δx и Δy , обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (5.1)$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то формулу (5.1) можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (5.2)$$

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала первого порядка и обозначается

$$d^2 z = d(dz).$$

Если все частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то имеет место формула:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (5.3)$$

Аналогично определяется дифференциал n -го порядка:

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Пример 5.6. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = x^2y + \frac{x}{y}$.

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2xy + \frac{1}{y} \right)_{y=c} = 2y + 0 = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2xy + \frac{1}{y} \right)_{x=c} = 2x - \frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 - \frac{x}{y^2} \right)_{x=c} = 0 - x(-2y^{-3}) = \frac{2x}{y^3}.$$

Следовательно, дифференциалы первого и второго порядков запишутся в виде:

$$dz = \left(2xy + \frac{1}{y} \right) dx + \left(x^2 - \frac{x}{y^2} \right) dy,$$

$$d^2z = 2y dx^2 + 2 \left(2x - \frac{1}{y^2} \right) dx dy + \frac{2x}{y^3} dy^2.$$

Полный дифференциал первого порядка обладает *свойством инвариантности*: полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ сохраняет один и тот же вид независимо от того, являются ли аргументы независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) плоскости, касательной к поверхности в точке (x_0, y_0) , при переходе к точке $(x_0 + dx, y_0 + dy)$.

§ 6. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Определение. Касательной прямой к поверхности называется прямая, касательная к какой-либо кривой, принадлежащей поверхности.

Определение. Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Так как плоскость однозначно определяется двумя пересекающимися прямыми, то для построения касательной плоскости к поверхности в данной точке M_0 достаточно через эту точку провести две линии, принадлежащие поверхности, и к каждой из них провести касательные в точке M_0 (см. рис. 5.6).

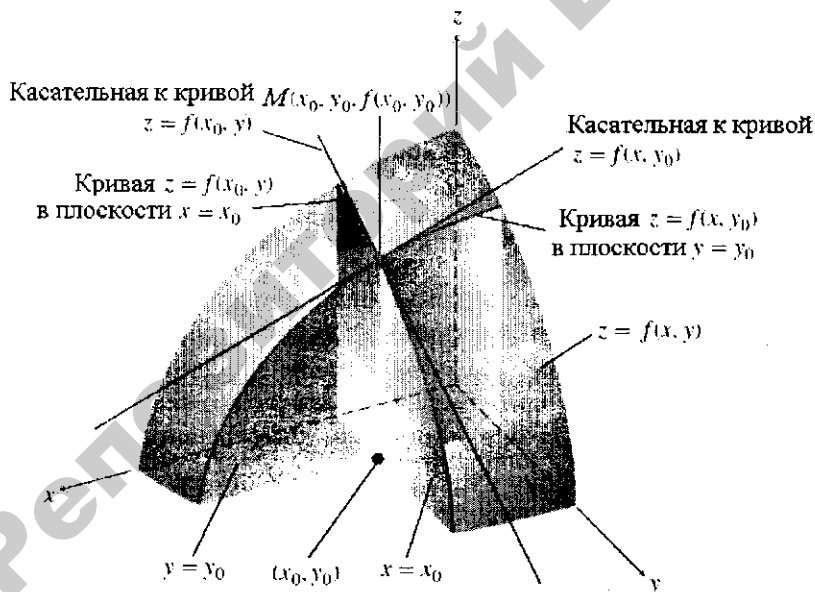


Рис. 5.6

Определение. Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости, проведенной в точке M_0 .

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0. \quad (5.4)$$

Уравнения нормали, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, запишутся следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \quad (5.5)$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (5.6)$$

а уравнения нормали запишутся так:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (5.7)$$

Пример 5.7. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z - 10 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ (см. рис. 5.7).

Решение. Подставим x_0 и y_0 в уравнение поверхности и найдем значение z_0 :

$$1^2 + 2^2 + z_0 - 10 = 0,$$

откуда находим $z_0 = 5$. Следовательно, $M_0(1, 2, 5)$ — точка касания.

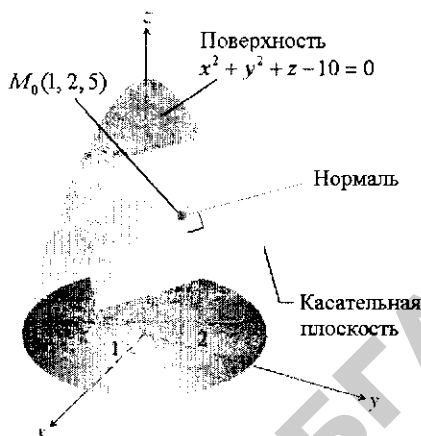


Рис. 5.7

Запишем уравнение поверхности в виде явной функции двух переменных: $z = -x^2 - y^2 + 10$. Найдём частные производные в точке $M_0(1, 2, 5)$:

$$f'_x = -2x, \quad f'_x(M_0) = -2 \cdot 1 = -2,$$

$$f'_y = -2y, \quad f'_y(M_0) = -2 \cdot 2 = -4.$$

Подставляя найденные значения частных производных в уравнение (5.6), получим искомое уравнение касательной плоскости:

$$z - 5 = -2(x - 1) - 4(y - 2) \Leftrightarrow 2x + 4y + z - 15 = 0,$$

а из уравнений (5.7) находим уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-5}{-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Пример 5.8. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 + 3xy + xz + 3yz + 1 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Решение. Подставляя x_0 и y_0 в уравнение поверхности, находим значение z_0 :

$$4 + 2(-1)^2 + 3 \cdot 2(-1) + 2z_0 + 3(-1)z_0 + 1 = 0,$$

откуда находим $z_0 = 1$. Следовательно, $M_0(2, -1, 1)$ – точка касания.

По условию задачи поверхность задана неявно. Обозначим $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + xz + 3yz + 1$ и найдем частные производные в точке $M_0(2, -1, 1)$:

$$F'_x = 2x + 3y + z,$$

$$F'_x(M_0) = 2 \cdot 2 + 3(-1) + 1 = 2,$$

$$F'_y = 4y + 3x + 3z,$$

$$F'_y(M_0) = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5,$$

$$F'_z = x + 3y,$$

$$F'_z(M_0) = 2 + 3 \cdot (-1) = -1.$$

Подставляя найденные значения частных производных в уравнение (5.4), получим искомое уравнение касательной плоскости

$$2(x - 2) + 5(y + 1) - 1(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - z + 2 = 0,$$

а из уравнений (5.5) найдем уравнения нормали:

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z - 1}{-1}.$$

§ 7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

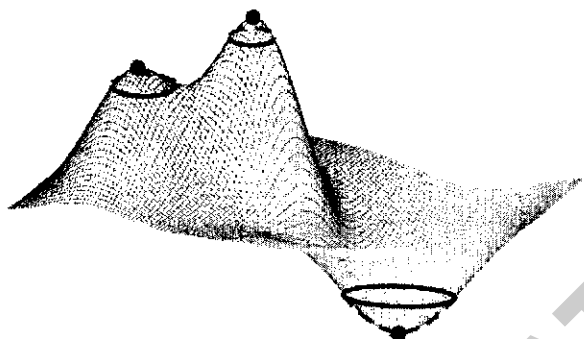


Рис. 5.8

Определение. Функция $z = f(x, y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

На рис. 5.8 приведен пример функции, имеющей два максимума и один минимум.

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными*.

Теорема 5.2 (необходимые условия экстремума). Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю,

$$\text{т. е. } \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{M_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{M_0} = 0.$$

Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в точках, где функция непрерывна, но частные производные не существуют.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

Теорема 5.3 (достаточные условия экстремума). Пусть $M_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x, y)$ и в ее окрестности существуют непрерывные частные производные второго порядка.

Обозначим $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{M_0} = A$, $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{M_0} = B$, $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{M_0} = C$ и

составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Тогда:

1. если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;
2. если $\Delta > 0$, то в точке M_0 есть экстремум, причем максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;
3. если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 5.9. Исследовать на экстремум функцию $z = y^2 - 2y^4 - x^2$ (см. рис. 5.9).

Решение. Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 8y^3.$$

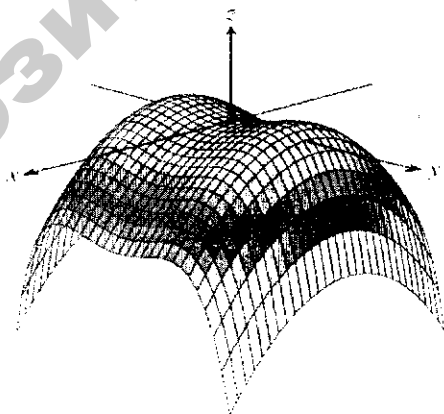


Рис. 5.9

Стационарные точки найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} -2x = 0, \\ 2y - 8y^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 2y(1 - 4y^2) = 0, \end{cases}$$

$$2y(1 - 4y^2) = 0 \Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 1/2, y_3 = -1/2.$$

Нашли три стационарные точки: $M_1(0; 0)$, $M_2(0; 1/2)$ и $M_3(0; -1/2)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 - 24y^2.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0; 0)$ имеем: $A = -2$, $B = 0$, $C = 2$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = -4 < 0$.

Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(0; 1/2)$ имеем: $A = -2$, $B = 0$, $C = -4$.

В этом случае $\Delta = 8 - 0 = 8 > 0$.

Так как $\Delta > 0$, то в этой точке есть экстремум, а так как $A < 0$, то это максимум:

$$z_{\max} = z(0; 1/2) = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

В точке $M_3(0; -1/2)$ получаем такие же коэффициенты $A = -2$, $B = 0$, $C = -4$, как и в случае точки $M_2(0; 1/2)$. Следовательно, в этой точке тоже есть экстремум и это аксимум:

$$z_{\max} = z(0; -1/2) = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

Пример 5.10. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Стационарные точки найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 1.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2(1; 1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0; 0)$ имеем: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$.

Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1; 1)$ имеем: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$.

В этом случае $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$.

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум

$$z_{\min} = z(1; 1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

§ 8. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

Если функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна внутри некоторой замкнутой области $\overline{D}$, то внутри или на границе области $\overline{D}$ существуют такие точки, в которых функция $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения (глобальный экстремум).

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области, нужно:

1. Найти стационарные точки функции $z = f(x, y)$ в области $\overline{D}$ и вычислить значения функции $z = f(x, y)$ в этих точках;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границе области $\bar{D}$;

3. Сравнить все найденные значения функции, выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Пример 5.11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - 2y^4 - x^2$ в замкнутой области $\bar{D}$, ограниченной прямыми $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$ (см. рис. 5.9).

Решение. Критические точки $M_1(0; 0)$, $M_2(0; 1/2)$ и $M_3(0; -1/2)$ этой функции были найдены в примере 5.9. Все эти точки находятся в области $\bar{D}$. Функция $z = y^2 - 2y^4 - x^2$ в этих точках принимает значения $z(0; 0) = 0$, $z(0; 1/2) = z(0; -1/2) = \frac{1}{8}$.

Область $\bar{D}$ представляет собой квадрат с вершинами в точках $(-1; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$ и $(1; 1)$.

При $x = 1$ функция принимает вид $z = y^2 - 2y^4 - 1$. Исследуем эту функцию при $y \in [-1, 1]$. Найдем производную: $z'_y = 2y - 8y^3$. Производная обращается в нуль при $y_1 = 0$, $y_2 = 1/2$, $y_3 = -1/2$. Все найденные точки находятся на отрезке $[-1, 1]$. Находим значения функции $z = y^2 - 2y^4 - 1$ в этих точках и на границах отрезка: $z(-1/2) = z(1/2) = -\frac{7}{8}$, $z(0) = -1$, $z(-1) = z(1) = -2$.

При $y = 1$ функция принимает вид $z = -1 - x^2$. Исследуем эту функцию при $x \in [-1, 1]$. Найдем производную: $z'_x = -2x$. Производная обращается в нуль при $x = 0$. Эта точка находится на отрезке $[-1, 1]$. Находим значения функции $z = -1 - x^2$ в точке 0 и на границах отрезка: $z(0) = -1$, $z(-1) = z(1) = -2$.

В силу четности функции $z = y^2 - 2y^4 - x^2$ относительно обоих аргументов исследование случаев $x = -1$ и $y = -1$ можно не проводить.

Сравнивая полученные результаты, устанавливаем, что наибольшее значение, равное $1/8$, функция принимает в точках $(0; 1/2)$ и $(0, -1/2)$, а наименьшее, равное -2 , она принимает в точках $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$, $(-1; -1)$.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.

1. Указать область определения функций:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^{-1}}$;

б) $z = \frac{1}{x + y}$.

2. Найти частные производные

а) $z = x^2 \sin y + xy^2 + x^3 + 3$;

б) $u = 2xy^2 - x^2yz + yz^2 + 4xy$.

3. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = x \ln y + x^2 y + y^2$.

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 3x^2 + 2y^2 - xy + 4y - 9$ в точке $M_0(2, 1, 7)$.

5. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2z - 2x^2y + 2xz + x + 1 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

6. Найти экстремум заданной функции $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1.

1. Вычислить частные производные первого и второго порядка функции $z = x^3 y^2 + 3x^2 y - 6x + 2y + 3$.
2. Найти полный дифференциал функции $z = x \cos y + 2x^2 y$.
3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 1$ в точке $M_0(1, 3, 4)$.

Вариант 2.

1. Вычислить частные производные первого и второго порядка функции $z = 5x^2 y^4 + 2xy^2 + 3x - 4y + 5$.
2. Найти полный дифференциал функции $z = y \ln x - 3xy^3$.
3. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 2y^2 - 4xy + 2y + 4$ в точке $M_0(3, 1, 5)$.

Домашнее задание

1. Указать область определения функции $z = \sqrt{y^2 - x + 1}$.
2. Вычислить частные производные первого и второго порядка функций
а) $z = 2x^3 y + 5x^2 y^2 - 3x^2 y = 6x - 2y$; б) $z = \cos(x^2 - y)$.
3. Найти полный дифференциал первого и второго порядка функции $z = e^{x-y}$.
4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - y^2 + xy + 2x + 4$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = 1, y_0 = -1$.
5. Найти экстремум функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Управляемая самостоятельная работа студентов.

Самостоятельно изучить следующие вопросы с подготовкой рефератов по ним:

условный экстремум; метод множителей Лагранжа; производная по направлению, формула для её вычисления; градиент функции нескольких переменных, его свойства, связь с производной по направлению; понятие о методе наискорейшего спуска.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ

КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 5

1 ⁰ Графику какой функции принадлежит точка $M(-1, 2, 0)$?	
а) $4xy - 2z + x^2 = 0$;	
б) $z + x - 3y = 5$;	
в) $z = x^2 - 2yx - 5$;	
г) $z = x^2 - 3yx - 7$.	
2 ⁰ Для функции $z = 4xy + 5y^2 + 1$ найти $\frac{\partial z}{\partial x}$.	
3 ⁰ . Если для функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ выполняются условия $f'_x = f'_y = 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является:	
а) точкой экстремума;	б) точкой перегиба;
в) стационарной точкой;	г) точкой разрыва.
4. Полный дифференциал функции $z = xy + y^2x + 1$ равен:	
а) $dz = (y + 2y)dx + (x + xy)dy$;	
б) $dz = (y + y^2 + 1)dx + (x + 2xy + 1)dy$;	в) $dz = (y + y^2)dx + (x + 2xy)dy$;
г) $dz = (y + y^2)dx + (x + 2xy)dy$.	
5. Найти стационарную точку функции $z = x^2 + y^2 - 9$.	
а) $A(1, 1)$;	б) $A(1, -9)$;
в) $A(-1, -9)$;	г) $A(0, 0)$.
6. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$ и в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой	
а) максимума;	б) минимума;
в) перегиба;	г) выпуклости.
7*. Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в точке $O(1, 0)$ для функции	
$z = x^2 \sin y + x^4 + y$.	
а) 0;	б) 1;
в) 14;	г) 2.

8*. Уравнение касательной плоскости в точке $M(1,2)$ к поверхности $z = f(x, y)$ имеет вид:

а) $z - f(1, 2) = f'_x(1, 2)(x - 1) + f'_y(1, 2)(y - 2)$;

б) $z - f(1, 2) = f'_x(1, 2)(x - 1) + f'_y(1, 2)(y - 2)$;

в) $z - f(1, 2) = f(1, 2)(x - 1) + f(1, 2)(y - 2)$;

г) $z = f'_x(1, 2)(x - 1) - f'_y(1, 2)(y - 2)$.

ИДЗ 5

Задание 1. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = f(x, y)$.

Задание 2. Найти экстремум заданной функции $z = f(x, y)$.

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Вариант 1

1. $z = \cos x + x \sin y$. 2. $z = 1 + 12x - 8x^2 - 12xy + 12y - 9y^2$.

3. $2xyz + xy^2 + y^2z - x = 0$, $x_0 = 4, y_0 = -2$.

Вариант 2

1. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$. 2. $z = 3x - 9y - x^2 - xy - y^2 - 17$.

3. $2xy^2 - xyz + yz + 4xy = 0$, $x_0 = 2, y_0 = -3$.

Вариант 3

1. $z = y \ln x + xy^2$. 2. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$.

3. $x^2z + xy^2 + 3xz + y - 4 = 0$, $x_0 = -4, y_0 = 0$.

Вариант 4

1. $z = x^2y + y^2 \ln x$. 2. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$.

3. $x^2y^2 + xyz - y^2z - 2x = 0$, $x_0 = 1, y_0 = 2$.

Вариант 5

1. $z = y \cos x + y^2 + xy$. 2. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

3. $4xy^2z - x^3y - x^2z + 4y = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Вариант 6

1. $z = x^2 e^{2y} + xy^2 + 2y$. 2. $z = x^2 + y^2 + 3xy - 4x - y + 1$.

3. $3xy^2 - xz + 2yz + y + 1 = 0$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$.

Вариант 7

1. $z = y \ln x + x^2 + y^2$. 2. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

3. $4xy^2z - x^3y - x^2z + 4y = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Вариант 8

1. $z = x \arctg y$. 2. $z = x^2 - xy + 3y^2 + 9x - 6y + 20$.

3. $3x^2y + 2xz - yz + x + 1 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.

Вариант 9

1. $z = y^2 \sin x + x^2$. 2. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

3. $2x^2 - x^2z + 2yz + 2y + 4 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Вариант 10

1. $z = y \cdot e^x + x \cdot e^y$. 2. $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 3$.

3. $x^2z - 2xy^2 + 2yz + y + 1 = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Вариант 11

1. $z = x^2 \sin y + y^2 \sin x$. 2. $z = 12x + 12y + 1 - 8x^2 - 9y^2 - 12xy$.

3. $xy^2 + 2xyz + y^2z - x = 0$, $x_0 = 4$, $y_0 = -2$.

Вариант 12

1. $z = x^2 \cdot e^y + y^2$. 2. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 3$.

3. $x^2yz - y^2z + 2y - x - 1 = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.

Вариант 13

1. $z = x^3 \ln y + xy^3 - y$. 2. $z = 1 + 2x + 3y + x^2 + 3xy - 2y^2$.

3. $xyz + x^2y^2 - y^2z - 2x = 0$, $x_0 = 1, y_0 = 2$.

Вариант 14

1. $z = x^2 \ln y + y \ln x + y^2$. 2. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 5$.

3. $yz - x^2 + 2xz + 1 = 0$, $x_0 = 3, y_0 = -2$.

Вариант 15

1. $z = y^2 \cdot e^x + x \cdot e^{2y} + x^2$. 2. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.

3. $xyz + x^2 + y^2z - y^2 + 1 = 0$, $x_0 = -1, y_0 = 2$.

Вариант 16

1. $z = x^2 \cdot e^y + y \cdot e^{2x} + y^2$. 2. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

3. $3xy^2 + 2yz - xz + y + 1 = 0$, $x_0 = -2, y_0 = 1$.

Вариант 17

1. $z = x^2 - y^2 + xy^2 + \ln x$. 2. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

3. $2x^2y - y^2z + 2xz + 2x + 4 = 0$, $x_0 = 1, y_0 = -1$.

Вариант 18

1. $z = x^3 \ln y + xy^3$. 2. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + x - y + 5$.

3. $y^2z - 2x^2y + 2xz + x + 1 = 0$, $x_0 = -1, y_0 = 2$.

Вариант 19

1. $z = x \sin y + x^2 + y^2$. 2. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 7x + 4y + 5$.

3. $2x^2y - xyz + xz + 4xy = 0$, $x_0 = -3, y_0 = 2$.

Вариант 20

1. $z = x^3 \ln y - y^2$. 2. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1$.

3. $xy^2z - x^2z + 2x - y - 1 = 0$, $x_0 = -2, y_0 = 1$.

Вариант 21

1. $z = x^3 + y^2 + \frac{x^2}{y}$. 2. $z = 9x + 3y - x^2 - xy - y^2 - 5$.

3. $xy^2 + 2xyz + y^2z - x = 0$, $x_0 = 4$, $y_0 = -2$.

Вариант 22

1. $z = \cos x \cdot \sin y + x^3 + y^3$. 2. $z = 1 + 2x + 3y + x^2 + 3xy - 2y^2$.

3. $3xz + x^2z + xy^2 + y - 4 = 0$, $x_0 = -4$, $y_0 = 0$.

Вариант 23

1. $z = x^2 \cdot e^x + e^y + 2xy$. 2. $z = x + 10y - x^2 + xy - 2y^2 - 6$.

3. $xyz + xy^2 + y^2z - 2x = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Вариант 24

1. $z = x^2 \ln y + \ln x + y^2$. 2. $z = x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 6y + 1$.

3. $xyz - x^2z + y^2 + x + 3 = 0$, $x_0 = -2$, $y_0 = 3$.

Вариант 25

1. $z = e^x \sin x - e^y \cos x$. 2. $z = 9x - 6y + x^2 - xy + y^2 + 12$.

3. $x^3y - 4xy^2z + x^2z - 4y = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

Вариант 26

1. $z = \ln x \cdot \ln y + x^2y$. 2. $z = 4x - 6y - x^2 + 3xy - 4y^2 + 1$.

3. $2xy^2 + 2yz - x^2z + 2y + 4 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Вариант 27

1. $z = x^2 + y^3 + \frac{x^3}{y}$. 2. $z = 7x + 4y + 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 2$.

3. $xy^2 + y^2z + 2xyz - x = 0$, $x_0 = 4$, $y_0 = -2$.

Вариант 28

1. $z = \ln x \cdot \ln y + xy^2$. 2. $z = x + 4y - x^2 - 3xy - y^2 + 4$.

3. $2xy^2 + 2yz - x^2z + 2y + 4 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Вариант 29

1. $z = x \sin y + y^2 \sin x$. 2. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$.

3. $x^2z - xyz - y^2 - x - 3 = 0$, $x_0 = -2$, $y_0 = 3$.

Вариант 30

1. $z = x^3 \sin y + y \ln x$. 2. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

3. $2xy^2 - xyz + yz + 4xy = 0$, $x_0 = 2$, $y_0 = -3$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $z = y^2 \ln(y + x)$.

Решение. Дифференциал первого порядка имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{y+x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \ln(y+x) + \frac{y^2}{y+x}, \text{ тогда}$$

$$dz = \frac{y^2}{y+x} dx + \left(2y \ln(y+x) + \frac{y^2}{y+x} \right) dy.$$

Дифференциал второго порядка имеет вид

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(y+x) - y^2}{(y+x)^2} = \frac{y^2 + 2xy}{(y+x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \ln(y+x) + \frac{2y}{x+y} + \frac{2y(y+x) - y^2}{(y+x)^2} =$$

$$= 2 \ln(y+x) + \frac{2y}{x+y} + \frac{y^2 + 2xy}{(y+x)^2}$$

$$d^2z = -\frac{y^2}{(y+x)^2} dx^2 + 2\frac{y^2+2xy}{(y+x)^2} dx dy + \left(2\ln(y+x) + \frac{2y}{y+x} + \frac{y^2+2xy}{(y+x)^2}\right) dy^2.$$

Задание 2. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy - y^2 + 4x + 7y + 5$.

Решение.

Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y + 7.$$

Составим систему для нахождения стационарных (критических) точек функции

$$\begin{cases} 2x + y + 4 = 0, \\ x - 2y + 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 4, \\ x - 2(-2x - 4) + 7 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 4, \\ 5x = -15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = -3. \end{cases}$$

Таким образом, найдена единственная критическая точка $M_0(-3; 2)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Применяем достаточное условие экстремума функции двух переменных: $A = 2$, $B = 1$, $C = -2$.

Тогда $\Delta = AC - B^2 = -4 - 1 = -5 < 0$.

Поскольку $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет.

Задание 3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3xy^2 - xy + 4xz - y + 8 = 0$ в точке $M_0(2; 0; z_0)$.

Решение. Находим координату z_0 точки M_0 :

$$3 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot z_0 - 0 + 8 = 0 \Rightarrow 8z_0 = -8 \Rightarrow z_0 = -1.$$

Следовательно, $I_0(2; 0; -1)$.

Обозначим $F(x, y, z) = 3xy^2 - xy + 4xz - y + 8$. Тогда

$$F'_x = 3y^2 - y + 4z, \quad F'_x(M_0) = -4,$$

$$F'_y = 6xy - x - 1, \quad F'_y(M_0) = -3,$$

$$F'_z = 4x, \quad F'_z(M_0) = 8.$$

Запишем уравнение касательной плоскости:

$$-4(x-2) - 3y + 8(z+1) = 0.$$

После упрощения получаем $4x + 3y - 8z - 16 = 0$.

Уравнение нормали имеет вид $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{8}$.

ОТВЕТЫ НА ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА

ПО МОДУЛЮ №1

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	0	а	г	в	в	б	в	в	в

ПО МОДУЛЮ №2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	а, в	а	-4,1	б	г	б	а	3	б

№	11	12	13	14	15
ВАРИАНТ ОТВЕТА	а	б	в	г	в

ПО МОДУЛЮ №3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	в	а	б	в	$\frac{\alpha}{\beta}$	∞	в	в

ПО МОДУЛЮ №4

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ВАРИАНТ ОТВЕТА	г	в	б	в	б	б	4/9	а	б	$x=3$

ПО МОДУЛЮ №5

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ВАРИАНТ ОТВЕТА	в	4у	в	г	(0,0)	б	г	б

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. – Т. 1.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1985.
3. Гусак А. А. Высшая математика. – Мн.: Тетра Системс, 2000. – Т. 1.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Мн.: Выш. шк., 1986. – Ч. 1.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Марченко А. И., Унукович В. Т. Общий курс высшей математики. – Орша, 1996.
6. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Высшая школа, 1976.
7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие / Под. ред. А. П. Рябушко. – Мн.: Высшая школа, 2000.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.
9. Высшая математика для инженеров. В 2 т. Т.1: учебное пособие для вузов/ С.А. Минюк, В.И. Булгаков, А.В. Метельский, З.М. Наркун; Под общ. ред. Н.А. Микулика–Мн.:ООО «Элайда», 2004.
10. Курс вишэйшай матэматыкі: Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый зменнай: Падручнік / В.М. Русак, Л.І. Шлома, В. К. Ахраменка, А.П. Крачкоўскі. – Мн.: Выш. шк., 1994.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (1 СЕМЕСТР).....	4
МОДУЛЬ 1.	
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ.....	7
§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.....	7
§ 2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.....	10
§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n -ГО ПОРЯДКА.....	14
§ 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	15
§5. ВЕКТОРЫ.....	19
§6. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ.....	21
§ 7. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА И ТОЧКИ.....	22
§ 8. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ.....	24
§9. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.....	26
§10. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.....	28
§11. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ.....	32
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.....	34
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.....	36
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 1.....	38
ИДЗ 1.....	39
МОДУЛЬ 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	52
§ 1. ПЛОСКОСТЬ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	52
§ 2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	59
§ 3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	65
§ 4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	72
§ 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	82
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ.....	88
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА.....	93

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 2	98
ИДЗ 2	100
МОДУЛЬ 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ	112
§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ	112
§ 2. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ	115
§ 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ	117
§ 4. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ	118
§ 5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ	121
§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ	122
§ 7. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ	124
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	126
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	127
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ 3	129
ИДЗ 3	130
МОДУЛЬ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	138
§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ	138
§ 2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	140
§ 3. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ	141
§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ	146
§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ	147
§ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ, ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	149
§ 7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	151
§ 8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РАСКРЫТИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ	152
§ 9 ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ: РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА, КОШИ	155
§ 10. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ	156
§ 11. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ	159
§ 12. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА	159
§ 13. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ	161

§ 14. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА	163
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	165
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	168
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 4	170
ИДЗ 4	171
МОДУЛЬ 5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	192
§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	192
§ 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	195
§ 3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	195
§ 4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	200
§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	202
§ 6. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ	204
§ 7. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ	207
§ 8. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ	211
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ	214
САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	215
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА ПО МОДУЛЮ № 5	217
ИДЗ 5	218
ОТВЕТЫ НА ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА	225
ЛИТЕРАТУРА	226