ний показателей риска категориями: «высокий», «средний» и «низкий». По результатам анализа чувствительности сделан вывод, что наиболее опасным (чувствительным) для организации является увеличение затрат на сырье и материалы и снижение объема реализации колбасных изделий.

Оценка риска по методу анализа сценариев включает в себя следующие этапы: отбор факторов риска, составление пессимистического, оптимистического и наиболее вероятного сценариев развития событий, расчет ожидаемого сценария, расчет чистой приведенной стоимости по оптимистическому, пессимистическому, наиболее вероятному и ожидаемому сценариям, анализ полученных данных.

О ЧИСЛЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ И ВЫСОТЫ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОМПЛЕКСНОМ КОРНЕ МНОГОЧЛЕНА

О.В. Рыкова, *ассистент*, **В.И. Берник**, *д.ф-м.н., профессор*

В работе мы покажем, как с помощью методов метрической теории диофантовых приближений, восходящих к В.Г. Спринджуку [1]. В статье решается задача, сформулированная названии статьи. Опишем метод, позволяющий нам получать оценки для числа точек с алгебраическими координатами, лежащих в заданных областях комплексного пространства. Сначала рассмотрим случай, когда алгебраические точки находятся на плоскости.

Пусть

$$P(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in Z, 0 \le j \le n \qquad (1)$$

$$H = H(P) = \max_{0\le i\le n} |a_i|,\ \deg P = n.$$

Пусть μA — это мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbf{R}^2$, а $|I|$ — длина интервала $I \subset \mathbf{R}$. Будем считать $c, c(n), c_1, c_2, \ldots$ положительными постоянными, зависящими только от n. Далее считаем , что $Q > Q_0(n)$ достаточно большое число. Далее через $<<$ обозначаем символ Виноградова.

Для некоторых произвольных положительных констант μ_1 и μ_2 рассмотрим прямоугольник

$$\Pi_1 = I_1 \times I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

В теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел исследуются множества действительных, комплексных и р-адических чисел, удовлетворяющие неравенствам

$$|P(x)| < H^{-w_1}, |P(z)| < H^{-w_2}, |P(\omega)|_p < H^{-w_3} \qquad (1)$$

при $w_i > 0$, $1 \le i \le 3$, $x \in \mathbf{R}$, $z \in \mathbf{C}$, $\omega \in \mathbf{Q}_p$, которые имеют решение для бесконечного числа полиномов $P(t)$ из некоторого множества $\{P(t)\}$, например,

$$\mathbf{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbf{Z}[t] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}, \qquad (2)$$

где $n \ge 2$, $Q \ge 1$ – натуральные числа. Множества x, z, ω, удовлетворяющие неравенствам (1), устроены, как правило, сложно. Поэтому в них вписывают или их включают в более простые: интервалы, круги, цилиндры. Естественное стремление при этом, чтобы размеры вписанных и включающих множеств были близкими друг к другу.

Условимся в обозначениях. Будем считать, что x из конечного интервала $I = [a, b]$. Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будем обозначать корни $P(x)$, которые упорядочены так, что $|x-\alpha_1| \le |x-\alpha_2| \le \ldots \le |x-\alpha_n|$. Далее считаем $Q > Q_0(n)$ достаточно большим и

$c_1 = c(n), c_2, \ldots$ положительными величинами, которые могут зависеть от n, но не зависят от H и Q. При $v \geq 0$ и фиксированном корне α_1 введем множество

$$\mathbf{P}_n(Q,v) = \{P(t) \in \mathbf{P}_n(Q) : |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\}. \quad (3)$$

Обозначим через $\# M$ число элементов конечного множества M. Если полином $P(t)$ имеет кратные корни и $\alpha_1 = \alpha_2$, то полагаем $v = \infty$. Определим

$$S(\alpha_i) = \left\{z \in \mathbf{C} : |z - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |z - \alpha_j|\right\}.$$

Если $x \in \mathbf{R} \cap S(\alpha_1)$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [1,2]. *Из первого неравенства* (1) *следуют неравенства*

$$|x - \alpha_1| \leq n|P(x)||P'(x)|^{-1}, \quad |x - \alpha_1| \leq 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (4)$$

$$|x - \alpha_1| < \min_{2 \leq j \leq n}\left(2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}|\alpha_1 - \alpha_2|\ldots|\alpha_1 - \alpha_j|\right)^{1/j}. \quad (5)$$

Неравенства (4) и (5) показывают, что множество решений первого неравенства (1) содержится внутри интервалов вида (4) и (5). Интересно, что одно из таких неравенств оказывается точным в том смысле, что при некотором i можно поменять знак неравенства, умножив при этом правую часть на подходящую величину c_1.

Как правило, пользуются вторым неравенством в (4). Если $v \neq \infty$, то нетрудно показать, что величина производной $|P'(\alpha_1)|$ для $P(t) \in \mathbf{P}_n(Q)$ заключена в промежутке

$$c_2 Q^{-n+1} < |P'(\alpha_1)| < c_3 Q. \quad (6)$$

Если значение $|P'(\alpha_1)|$ близко к своей нижней границе, то оценка (4) оказывается грубой и не позволяет получать содержательные результаты. Естественный выход из такой ситуации предложил Р. Бейкер [3]. Он доказал, что в классе $\mathbf{P}_n(Q,v)$ число многочленов уменьшается с ростом v.

Лемма 2. При $0 \leq v \leq 1$ *имеем*

$$\# \mathbf{P}_n(Q,v) < c_4 Q^{n+1-v}, \quad (7)$$

а при $v > 1$ *справедлива оценка*

$$\# \mathbf{P}_n(Q,v) < c_5 Q^n.$$

Лемма 2 позволила Бейкеру получить при больших $w_1 > n$ точное значение размерности Хаусдорфа множества $x \in \mathbf{R}$, для которых первое неравенство (1) имеет бесконечное множество решений в полиномах $P(x)$. Задача об оценке $\# \mathbf{P}_n(Q,v)$ при $v > 1$ важна в теории диофантовых приближений и ее приложений [4,5].

Теорема 1. При $w_1 > 2$ *и* $0 \leq v \leq 3/2$ *справедливо неравенство* (7).

Мы предложим единый метод, который позволяет получить доказательство теоремы в различных диапазонах изменения v. Возможно, он позволит получить (7) и при $v > 3/2$.

Будем считать, что $\alpha_1 \in \mathbf{R}$. Если $\alpha_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, то можно доказать более сильный результат. Доказательство разобьем на три этапа.

Утверждение 1. При $0 \leq v \leq 1/2$ *имеем* (7).

В работах [1,6] приведены два метода, сводящие произвольные полиномы к полиномам со старшим коэффициентом $|a_n| > c_6 H$. При таком условии нетрудно доказать, что все корни $P(x)$ ограничены, т.е. $|\alpha_j| < c_7$, $1 \leq j \leq n$. Ясно, что можно считать $Q/2 \leq H(P) \leq Q$. Поделим интервал I на равные части J_i, $\mu J_i = d_1 Q^{-1+v}$. Будем говорить, что полином $P(x)$ принадлежит интервалу J_i, если существует такая точка $x \in J_i$, в которой выполняется неравенство $|P(x_1)| < Q^{-w_1}$. Если полином $P(x)$ принадлежит нескольким интервалам, то считаем, что $P(x)$ принадлежит самому левому из них. Если $x \in S(\alpha_1)$, то по лемме 1

$$|x-\alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1} < c_8 Q^{-3+0,5} = c_8 Q^{-2,5}.$$

Так как для любых $x \in J_i$ выполняется неравенство $|x - x_1| < d_1 Q^{-1+v}$, то

$$|x-\alpha_1| \le |x - x_1| + |x - \alpha_1| < c_9 d_1 Q^{-1+v}. \qquad \textbf{(8)}$$

Разложим полином $P(x)$ в ряд Тейлора на отрезке J_i в окрестности **корня α_1**.

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j.$$

Из оценок $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$, $\left|\frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)\right| < c_{10} Q$, $2 \le j \le n$, и (8) получаем

$$|P(x)| < d_1 c_{11}. \qquad (9)$$

Предположим, что выполняется неравенство, противоположное (7), т.е.

$$\# \mathbf{P}_n(Q, v) \ge c_4 Q^{n+1-v}. \qquad (10)$$

Тогда существует интервал J_i, которому принадлежит более $(b-a)^{-1} d_1 c_4 Q^n$ полиномов $P(x)$. Выберем α_1, чтобы выполнялось неравенство $(b-a)^{-1} d_1 c_4 > 2^{n+2}$. Тогда на интервале J_i окажется не менее $2^{n+2} Q^n$ полиномов $P(x)$, для которых верно (9). Поскольку количество значений коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ не превосходит $(2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^n$, то среди многочленов $P(x)$ по принципу Дирихле найдутся два многочлена $P_2(x) \ne P_1(x)$, у которых эти n коэффициентов совпадают. Тогда для некоторого целого $b \ne 0$ при $d_1 < \frac{1}{2} c_{11}^{-1}$

$$1 \le |b| = |P_2(x) - P_1(x)| < 2 d_1 c_{11} < 1,$$

что противоречиво. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. При $1/2 < v < 1$ имеем (7).

Идея доказательства утверждения 2 близка к предыдущему случаю, но технически сложнее. Поделим I на интервалы J_i длины $c_{12} Q^{-2+v}$. Тогда из (10) следует, что существуют интервалы, которым принадлежит $c_{13} Q^{n+1-v-2+v} = c_{15} Q^{n-1}$ полиномов $P(x)$.

Ясно, что при некотором $\eta \ge 0$ из (10) следует, что существует не менее $c_{14} Q^{2-v-\eta}$ интервалов J_i, каждому из которых принадлежит не менее $c_{15} Q^{n-1}$ *полиномов* $P(x)$. Разложим $P(x)$ и $P'(x)$ на интервале J_i и оценим их сверху

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x-\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j,$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)!} P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^{j-1}.$$

Имеем

$$|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}, \; |x-\alpha_1| < 2^{n-1} Q^{-2+v}, \; |P^{(j)}(\alpha_1)| < c_{16} Q,$$

откуда

$$|P(x)| < c_{17} Q^{-1}, \; |P'(x)| < c_{18} Q^{1-v}. \qquad (11)$$

Применим принцип ящиков Дирихле. При подходящем c_4 коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2$ не менее, чем у $c_{19} Q^{\eta}$ многочленов $P(x)$ будут совпадать. Получим $c_{20} Q^{\eta}$ многочленов первой степени $R_j(x)$

$$|a_i x + b_i| = |R_j(x)| = |P_j(x) - P_1(x)|, \; j = 2, \ldots, t, \; t > c Q^{\eta}. \qquad (12)$$

Из оценок (11) следует, что

$$|a_i x + b_i| < c_{21} Q^{-1},\ |a_i| < c_{22} Q^{1-\nu},\ 1 \le i \le t. \tag{13}$$

Более того, из оценки (12) для t можно улучшить в (13) оценки для $|a_i|$ и $|b_i|$ до оценок

$$\max(|a_i|, |b_i|) < c_{23} Q^{1-\nu-\eta},\ i = 1, \ldots, c_{24}. \tag{14}$$

При этом можно считать, что $(a_i, b_i) = 1$. Оценки (13) могут выполняться только на интервале T_0 с центром в точке $-\frac{b_i}{a_i}$ длины $c_{25} Q^{-1} |a_i|^{-1} < c_{26} Q^{-2+\nu+\eta}$. Если два многочлена $a_1 x + b_1$ и $a_2 x + b_2$, $(a_1, b_1) = 1$, $(a_2, b_2) = 1$, $a_1 \ne a_2$, удовлетворяют (13) и (14), то необходимо выполняется неравенство

$$\left|\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right| \ge \frac{1}{|a_1||a_2|} > c_{27} Q^{-2+2\nu+2\eta},$$

что при $c_{26} < c_{27}$ противоречиво. Поэтому остается предположить, что $a_i x + b_i = a_1 x + b_1$. Это приводит к тому, что на интервале T_1 длины $c_{28} Q^{-2+2\nu+2\eta}$ могут находиться не более $c_{29} \frac{Q^{-2+2\nu+2\eta}}{Q^{-2+\nu}} = c_{29} Q^{\eta}$ интервалов J_i. Так число интервалов J_i на интервале I не менее $c_{30} Q^{2-\nu-\eta}$, то должно выполняться неравенство

$$c_{28}^{-1} Q^{2-2\nu-2\eta} \cdot c_{29} Q^{\eta} > c_{30} Q^{2-\nu-\eta},$$

которое приводит к неравенству $2 - 2\nu - 2\eta \ge 2 - \nu - \eta$ и неравенству $\nu \le 0$, вопреки неравенству $1/2 \le \nu \le 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение 2

Утверждение 3. При $1 \le \nu \le 3/2$ имеем (7).

Возьмем интервалы J_i длины $Q^{-3+\nu}$. Из (10) можно получить, что существует такое $\eta \ge 0$, что найдутся $c_{31} Q^{3-\nu-\eta}$ интервалов J_i, каждому из которых принадлежит не менее $c_{32} Q^{n-2+\eta}$ полиномов $P(x)$. Разложим в ряд Тейлора $P(x)$ и $P'(x)$ на J_i и оценим их сверху. Из

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j,$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{(j-1)!} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^{j-1}$$

и оценок $|x - \alpha_1|$, $|P^{(j)}(\alpha_1)|$ сверху имеем

$$|P(x)| < c_{33} Q^{-2},\ |P'(x)| < c_{34} Q^{1-\nu}.$$

Дважды воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Из того, что интервалу J_i принадлежит не менее $c_{32} Q^{n-1+\eta}$ многочленов $P(x)$, следует что, у менее $c_{35} Q^{\eta}$ многочленов $P(x)$ коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_3$ совпадают. Образуем многочлены не более второй степени $R_j(x) = P_j(x) - P_1(x)$, $j = 2, \ldots, c_{36} Q^{\eta}$. Неравенства (15) приводят к неравенствам

$$|b_{2j} x^2 + b_{1j} x + b_{0j}| = |R_j(x)| < c_{37} Q^{-2},\ |2b_{2j} x + b_{1j}| < c_{38} Q^{1-\nu}. \tag{16}$$

В (16) коэффициенты $2b_{2j}$ принимают значения в промежутке $[-2Q, 2Q]$. Поделим этот промежуток на равные части длины $c_{39} Q^{1-\eta}$. Если при этом окажется $c_{35} Q^{\eta} - 1 > 4Q \cdot c_{39}^{-1} Q^{\eta-1} = c_{40} Q^{1-\eta}$, то найдется промежуток длины $c_{41} Q^{\eta}$, в котором содержится не менее двух значений коэффициентов многочленов $2b_{2j} x + b_{1j}$. Их разность даст полином $2c_{2j} x + c_{1j}$ с условиями

$$|S_j(x)| = |c_{2j} x^2 + c_{1j} x + c_{0j}| < c_{42} Q^{-2},\ |2c_{2j} x + c_{1j}| < c_{43} Q^{1-\nu},\ |c_{2j}| < c_{44} Q^{1-\eta}. \tag{17}$$

Второе **неравенство (17) приводит к неравенству** $|c_{1j}| < c_{45}^{1-\eta}$, **а первое – к неравенст-ву** $|c_{0j}| < c_{46}^{1-\eta}$. Окончательно можно записать

$$|S_j(x)| < c_{47}Q^{-2}, \ |S_j'(x)| < c_{47}Q^{1-v}, \ H(S_j) < c_{47}Q^{1-\eta}. \quad (18)$$

Сейчас, как и при доказательстве утверждения 2 мы можем показать, что система неравенств (18) противоречива.

Рассмотрим теперь обобщение задачи на поле комплексных чисел. В этом случае мы придем к системе неравенств (16) с многочленом не второй, а третьей степени. Системы неравенств (17) и (18) получаются аналогично. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 2. Обозначим через $B_{*}(\gamma, Q)$ количество неприводимых полиномов из класса $P(Q)$, для которых хотя бы в одном комплексном корне α_i, $|\mathrm{Im}\alpha_i| > \delta$ справедливо неравенство $|P'(\alpha_j)| < Q^{1-\gamma}$. Тогда при $0 < \gamma < 1$ справедливо неравенство $\# B_n(\gamma, Q) < cQ^{n+1-2\gamma}$.

1. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 184 с.
2. Берник В.И., Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. 1980. Т. 44, №1. Стр. 24 -- 45.
3. Baker R.C., Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension // Mathematika. 1976. 2 (23). P. 184–197.
4. Берник В.И., Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arithmetica. 1983. Т. 42, № 3. Стр. 219 – 253.
5. Пташник Б.И. некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с.
6. Wirsing E., Approximation mit algebraischen Zahlen beschrдnkten Grades // (German) J. Reine Angew. Math. 1960. N. 206. P. 67–77.

ПРОБЛЕМАТИКА ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

С.Н. Беликов, *аспирант*

Механизм ценообразования можно назвать коренным инструментарием формирования и регулирования потенциальной эффективности. Необходимо чтобы сельское хозяйство преобразовалось в прибыльную отрасль. Государство может установливать компенсационную адресную поддержку определенных групп населения на случай роста розничных цен на продовольствие, а также задействовать ряд других рычагов — повышение заработной платы, усиление самозанятости населения, расширение возможности зарабатываемости средств и другие. Также важно совершенствование финансово-кредитного обслуживания. Необходимо, чтобы функции банковского кредита были стимулирующими, в соответствии с чем эффективное и высокоокупаемое конкурентное производство должно претендовать на льготные и дополнительные кредиты под регрессивные проценты; упрощение системы кредитования, расширение возможности и доступности кредитов для различных категорий товаропроизводителей; восстановление роли и функций долгосрочного кредита под высокоокупаемые проекты и обоснованные бизнес-планы; предоставление кредитов под расчеты натуральной сельскохозяйственной продукцией; расширение практики ипотечного кредитования предприятий; создание совместных и смешанных предприятий и производств с привлечением банковских инвестиций, капиталом и с условием участия в прибылях; создание кооперативных финансовых структур путем объединения свободных средств предприятий в целях взаимного льготного кредитования, а также формирование обществ взаимного кредита по продуктовому или отраслевому признаку.

Наряду с решением вопроса о приоритетном оказании государственной поддержки сельскохозяйственным организациям, учитывая большой размер долгов, считается, что пе-