МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики

ФИЗИКА

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 3

Минск
БГАТУ
2011

УДК 53(07)
ББК 22.3я7
Ф 50

Рекомендовано научно-методическим советом
агроэнергетического факультета БГАТУ.
Протокол № 3 от 14 декабря 2010 г.

Составители:
кандидат физико-математических наук *В. А. Чернявский*,
доктор физико-математических наук, доцент *В. Р. Соболь*,
кандидат физико-математических наук, доцент *В. П. Дымонт*,
кандидат технических наук, доцент *П. Н. Логвинович*,
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Т. Неманова*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Е. П. Чеченина*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Г. М. Чобот*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
доцент Командно-инженерного института МЧС Республики Беларусь
А. В. Ильюшонок;
кандидат физико-математических наук, доцент Государственного
научно-производственного объединения «Научно-практический центр
НАН Беларуси по материаловедению» *Б. В. Корзун*

Физика : учебно-методический комплекс. В 3 ч. Ч. 3 /
Ф50 В. А. Чернявский [и др.]. — Минск : БГАТУ, 2011. — 456 с.
ISBN 978-985-519-437-9.

Издание представляет собой третью часть учебно-методического комплекса по дисциплине «Физика». Содержит три модуля: модуль 7 «Электромагнитные волны. Волновая оптика»; модуль 8 «Квантовая природа электромагнитного излучения. Элементы атомной физики и квантовой механики»; модуль 9 «Элементы квантовой статистики и зонной теории твердых тел. Элементы физики атомного ядра». Каждый модуль представляет собой логически завершенную единицу и состоит из следующих разделов: комплексная цель; базовые проблемы модуля; учебно-информационная модель; основной научно-теоретический материал; дополнительный научно-теоретический материал; материалы к лекциям; материалы для управляемой самостоятельной работы студентов; материалы к практическим занятиям; образец контрольного задания для проверки результатов обучения.

Предназначено для студентов агротехнических специальностей.

УДК 53(07)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-519-437-9

© БГАТУ, 2011

Репозиторий БГАТУ

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОДУЛЬ 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ 10

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ 12

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ 14

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 16

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ 16

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ 16

4.1.2. ПОНЯТИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ 20

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 21

4.2.1. ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ 21

4.2.1.1. Уравнение плоской волны 24

4.2.1.2. Волновое уравнение 27

4.2.1.3. Решение волнового уравнения 28

4.2.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ 29

4.2.2.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн 31

4.2.2.2. Плоская электромагнитная волна 34

4.2.2.3. Объемная плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга 34

4.2.2.4. Энергия электромагнитной волны 36

4.2.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА 38

4.2.3.1. Условия наблюдения интерференции для монохроматических волн 38

4.2.3.2. Оптическая длина пути 40

4.2.3.3. Условия интерференционных максимумов и минимумов 41

4.2.3.4. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников 42

4.2.3.5. Способы получения интерференционной картины 44

4.2.4. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА 47

4.2.4.1. Принцип Гюйгенса–Френеля 47

4.2.4.2. Зоны Френеля. Дифракция Френеля на простейших препятствиях 50

4.2.4.3. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка 57

4.2.4.4. Дифракция рентгеновских лучей 65

4.2.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА 68

4.2.5.1. Естественный и поляризованный свет 68

4.2.5.2. Поляризация при преломлении и отражении света 71

4.2.5.3. Двойное лучепреломление 73

4.2.5.4. Искусственная оптическая анизотропия 78

4.2.5.5. Вращение плоскости поляризации 80

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ 84

4.3.1. КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТОВЫХ ВОЛН 84

4.3.2. ПРИНЦИП ГОЛОГРАФИИ 86

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ 91

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ 91

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ 95

5.2.1. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН 95

5.2.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ 96

5.2.3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТА 101

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ 106

5.3.1. УПРУГИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ 106

5.3.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА 113

5.3.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА 123

5.3.4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА 135

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ 141

Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 8а. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ 144

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ 145

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ 146

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 147

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ 148

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ 147

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 150

4.2.1. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ 150

4.2.1.1. Тепловое излучение и его основные характеристики. Абсолютно черное тело и законы его теплового излучения 150

4.2.1.2. Квантовая гипотеза. Формула Планка и ее связь с законами Стефана–Больцмана и Вина 159

4.2.1.3. Элементы квантовой оптики. Энергия, масса, импульс фотона. Давление света с точки зрения квантовой теории 162

4.2.1.4. Эффект Комптона. Корпускулярно-волновой дуализм света (излучения) 165

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ 170

4.3.1. ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ И ЕГО ЗАКОНЫ 170

4.3.1.1. Законы внешнего фотоэффекта 170

4.3.1.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта 171

4.3.1.3. Световая и вольтамперная характеристики фотоэффекта. Определение постоянной Планка с помощью внешнего фотоэффекта 173

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ 176

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИИ 176

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ 179

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ 185

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ 194

МОДУЛЬ 8б. ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ 196

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ 198

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ 200

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 201

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ 201

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ 201

4.1.2. ПОНЯТИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ 204

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 205

4.2.1. ТЕОРИЯ БОРА ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА 205

4.2.1.1. Спектр атома водорода. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома 205

4.2.1.2. Постулаты Бора. Опыты Франка и Герца 212

4.2.1.3. Атом водорода и водородоподобные системы по теории Бора 216

4.2.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ 221

4.2.2.1. Гипотеза де Бройля. Опыты, подтверждающие волновую природу микрочастиц 221

4.2.2.2. Волновая функция микрочастицы 227

4.2.2.3. Уравнение Шредингера 230

4.2.2.4. Соотношение неопределенностей 233

4.2.2.5. Частица в прямоугольной потенциальной яме 237

4.2.2.6. Квантовомеханическое описание атома водорода. Волновая функция электрона. Квантовые числа 245

4.2.2.7. Орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона в атоме водорода 255

4.2.2.8. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона 262

4.2.2.9. Многоэлектронные атомы. Периодическая система элементов 269

4.2.2.10. Понятие явлений магнитного резонанса 273

4.2.3. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ 274

4.2.3.1. Излучение и поглощение света 274

4.2.3.2. Квантовые генераторы 280

Репозиторий БГАТУ

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ 285
4.3.1. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ 285
4.3.2. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР 289
4.3.3. ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНОЙ СИСТЕМЫ 293

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ 299

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ 299
5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ 306
5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ 314
5.3.1. АТОМ ВОДОРОДА ПО БОРУ 314
5.3.2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА. ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ 321

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ 336

МОДУЛЬ 9. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ И ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ 338

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ 340

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ 342

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 343

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ 343
4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ 343
4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 347
4.2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ СТАТИСТИК 347
4.2.2. КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ РАБОТА ВЫХОДА ИЗ МЕТАЛЛА. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ ВНУТРИ МЕТАЛЛА, ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА. ПОНЯТИЕ О ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ 359
4.2.3. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ КОНТАКТНЫЕ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ НА КОНЦАХ ЦЕПИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЗВЕНЬЕВ, ПРИВЕДЕННЫХ В КОНТАКТ МЕТАЛЛОВ. ЗАКОНЫ ВОЛЬТА 368
4.2.4. СОБСТВЕННАЯ И ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ 380
4.2.5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ 395
4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ 430
4.3.1. ФОТОПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ 430

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ 432

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ 432
5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ 435
5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ 438

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ 454

ЛИТЕРАТУРА 455

Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 7

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ

В результате изучения модуля студент должен:

1) **знать** (описывать и формулировать) ***понятия и определения***: электромагнитной волны, ее фазовой скорости, связи компонент напряженностей электрического и магнитного полей, а также величин напряженностей в электромагнитной волне, уравнения плоской гармонической и сферической электромагнитных волн, потока энергии, плотности потока энергии и интенсивности электромагнитной волны; принципа Гюйгенса, абсолютного показателя преломления и его связи с фазовыми скоростями волны в разных средах, шкалы электромагнитных волн; когерентности световых волн и классических способов получения когерентных волн, явления интерференции волн, оптической разности хода и разности фаз двух волн и связи между этими величинами, условия максимума и минимума при интерференции волн, интерференции в тонких пленках и ее частных случаев (полос равного наклона и полос равной толщины, колец Ньютона), применения интерференции световых волн; дифракции световых волн, принципа Гюйгенса–Френеля, метода зон Френеля, дифракционной картины при дифракции Френеля на круглом отверстии и круглом диске, а также дифракции Фраунгофера на одной щели; дифракционной решетки и ее характеристики (разрешающей способности и дисперсии), условия главного максимума для дифракционной решетки, дифракции рентгеновских волн на кристаллах, условия Вульфа–Брэггов; поляризации световых волн, типов поляризации, методов получения линейно поляризованного света (отражение и преломление волн на границе двух сред, закон Брюстера и двойное лучепреломление в анизотропных кристаллах), анализа линейно поляризованного света, закона Малюса;

2) **уметь:**

— ***доказывать (получать) и характеризовать*** волновое уравнение, связь между оптической разностью хода и разностью фаз двух волн, условия максимума и минимума при наложении двух когерентных волн, координаты максимумов и минимумов в интерференционной картине, полученной от двух когерентных источни-

Репозиторий БГАТУ

ков, условия максимума и минимума при интерференции в тонких пленках, формулы радиусов светлых и темных колец Ньютона; выражение для радиусов зон Френеля, условия максимума и минимума для дифракции Фраунгофера на щели, условие главного максимума для дифракционной решетки, формулу Вульфа–Брэггов для дифракции на пространственной решетке; закон Малюса с помощью векторной диаграммы;

— ***применять*** полученные теоретические знания для решения задач и выполнения лабораторных работ по волновой оптике;

3) **формировать** социально-личностные качества студента: организованность, исполнительность, умение работать самостоятельно, умение работать в малых группах.

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ

Волновое движение

Гармонические волны. Волновая поверхность, фронт волны, длина волны, волновое число, фазовая скорость волны. Электромагнитные волны. Свойства электромагнитных волн. Волновое уравнение и его решение. Фазовая скорость электромагнитных волн. Плотность энергии, переносимая волной. Интенсивность электромагнитной волны. Волновая природа света. Шкала электромагнитных волн. Когерентные световые волны.

Явление интерференции света

Условия наблюдения интерференции света. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Способы получения интерференционной картины. Интерференция света в тонких пленках. Полосы равного наклона и равной толщины. Практическое применение явления интерференции света.

Дополнительный материал. Временная и пространственная когерентности световых волн.

Явление дифракции света

Условия наблюдения дифракции света. Принцип Гюйгенса–Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля на круглом отверстии и круглом диске. Дифракция Фраунгофера на одной щели. Влияние ширины щели на дифракционную картину. Дифракционная решетка. Вывод условия главных максимумов для одномерной дифракционной решетки. Образование спектров при освещении дифракционной решетки белым светом. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах. Формула Вульфа–Брэггов. Понятие о рентгеноструктурном анализе и рентгеновской спектроскопии.

Репозиторий БГАТУ

Явление поляризации света

Естественный и поляризованный свет, основные виды поляризации: линейная, эллиптическая, круговая. Поляризация света при отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектриков. Закон Брюстера. Двойное лучепреломление в анизотропных кристаллах. Обыкновенный и необыкновенный лучи, оптическая ось кристалла, главное сечение кристалла. Получение линейно поляризованного света с помощью анизотропных кристаллов (призма Николя, поляроид). Поляризатор и анализатор. Анализ линейно поляризованного света. Вывод закона Малюса в идеальном случае. Вращение плоскости поляризации.

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ

Номер и тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов
Занятие 1. Упругие и электромагнитные волны	Знакомство с новым материалом	Лекция	1
Занятие 2. Волновая природа света	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 3. Явление интерференции	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 4. Интерференция света в тонких пленках. Применение явления интерференции	Углубление и систематизация	Управляемая самостоятельная работа студентов	1
Занятие 5. Упругие и электромагнитные волны	Углубление, обобщение	Практическое занятие	2
Занятие 6. Интерференция света	Углубление, обобщение	Практическое занятие	2
Занятие 7. Интерференция в тонких пленках. Кольца Ньютона	Обобщение, систематизация, предварительный контроль	Лабораторное занятие	2
Занятие 8. Явление дифракции света	Знакомство с новым материалом	Лекция	2

Репозиторий БГАТУ

Занятие 9. Явление дифракции	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 10. Явление дифракции света	Углубление, обобщение	Практическое занятие	2
Занятие 11. Явление дифракции	Обобщение, систематизация, предваритель-ный контроль	Лабораторное занятие	2
Занятие 12. Поляри-зация света	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 13. Поляри-зация света	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 14. Поляри-зация света	Углубление, обобщение. Рубежный контроль	Практическое занятие	2

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ

Волновое движение

1. ***Волна*** — возмущение (изменение) состояния среды или поля, распространяющееся с конечной скоростью.

2. ***Гармоническая волна*** — волна называется *гармонической*, если изменение состояния среды или поля происходят *по закону синуса или косинуса* (по гармоническому закону).

3. ***Фронт волны*** — геометрическое место точек, до которых доходят колебания (возмущение) к моменту времени t.

4. ***Фаза волны*** — состояние волны в данной точке пространства в данный момент времени.

5. ***Волновая поверхность*** — геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

6. ***Волновое число*** — $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot \nu}{\lambda \cdot \nu} = \frac{\omega}{u}$.

7. ***Длина волны*** — расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π.

8. ***Уравнение волны*** — выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы (упругие волны) или величины магнитного и электрического векторов (электромагнитные волны) как функцию координат x, y, z и времени t: $\xi = \xi(x, y, z, t)$.

9. ***Волновое уравнение*** — в трехмерном случае волновое уравнение для однородной изотропной среды без затухания: $\nabla^2 \xi = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$;

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Репозиторий БГАТУ

10. ***Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль направления x*** — электромагнитная волна, которая описывается уравнениями: $E_y = E_m \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_1)$; $H_z = H_m \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha_2)$.

Необходимые условия: 1-е — начальные фазы должны быть равны ($\alpha_1 = \alpha_2$); 2-е — амплитуды колебаний магнитного и электрического векторов должны быть связаны соотношением: $E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}$.

11. ***Плотность энергии*** — количество энергии в единице объема: $w = \dfrac{\Delta W}{\Delta V}$.

12. ***Поток энергии*** — количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии через эту поверхность: $d\Phi = \dfrac{dW}{dt}$.

13. ***Плотность потока энергии*** — величина, численно равная потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия: $j = \dfrac{d\Phi}{dS} = \dfrac{dW}{dS \cdot dt}$.

Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

14. ***Вектор плотности потока энергии*** (***вектор Умова–Пойнтинга***) — $\vec{j} = w \cdot \vec{u}$, где $\vec{u}$ — вектор, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны.

15. ***Интенсивность электромагнитной волны*** — среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной: $I = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E_m^2$.

16. ***Монохроматические волны*** — волны, которые имеют одинаковые частоты.

Явление интерференции

17. ***Интерференционный член*** — дополнительный член ($2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\delta$) в выражении для квадрата амплитуды результирующего колебания в данной точке при сложении монохроматических колебаний ($A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\delta$, где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ — разность фаз).

18. ***Оптическая длина пути*** — произведение геометрической длины пути светового луча на абсолютный показатель преломления среды, в которой этот путь пройден.

19. ***Оптическая разность хода*** (**Δ**) — разность оптических длин путей, проходимых световыми волнами.

20. ***Время когерентности*** (**$t_{ког}$**) — время, за которое случайное изменение фазы достигает значения ~π.

21. ***Длина когерентности*** (**$l_{ког} = ct_{ког}$**) — расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения ~π.

22. ***Условие наблюдения интерференционных максимумов*** — $\Delta = \pm m\lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

23. ***Условие наблюдения интерференционных минимумов*** — $\Delta = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\lambda_0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Явление дифракции

24. ***Принцип Гюйгенса–Френеля*** — это принцип Гюйгенса, дополненный идеей об интерференции вторичных волн.

25. ***Дифракция Френеля*** — дифракция в сходящихся лучах.

26. ***Зоны Френеля*** — метод расчета задач с высокой симметрией.

27. ***Радиусы зон Френеля*** — $r_m = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}\lambda m}$, $m = 1, 2, \ldots$.

28. ***Дифракция Фраунгофера*** — дифракция в параллельных лучах.

29. ***Дифракционная решетка*** — оптический прибор; совокупность большого количества параллельных щелей одинаковой ширины в непрозрачном экране, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, или отражающих зеркальных полосок (штрихов), равноотстоящих друг от друга, на которых происходит дифракция света.

30. ***Условие наблюдения главных максимумов дифракционной решетки (формула дифракционной решетки)*** — $d\sin\varphi = \pm m\lambda$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

31. ***Формула Вульфа–Брэггов*** — $2d\sin\Theta = m\lambda$.

Репозиторий БГАТУ

Явление поляризации

32. ***Естественный свет*** — свет со всевозможными одинаково вероятными направлениями колебаний светового вектора $\vec{E}$.

33. ***Поляризованный свет*** — свет, направления колебания светового вектора в котором каким-либо образом упорядочены.

34. ***Линейно поляризованный свет***: колебания светового вектора происходят в одной плоскости, проходящей через луч (направление распространения света).

35. ***Поляризатор*** — устройство, которое пропускает световую волну с колебаниями светового вектора, происходящими только в одной определенной плоскости, и полностью гасит волну с колебаниями светового вектора в перпендикулярной плоскости.

36. ***Плоскость поляризатора*** — плоскость, в которой пропускаются колебания светового вектора.

37. ***Анализатор*** — поляризатор, используемый для изучения поляризованного света.

38. ***Закон Малюса*** — $I = I_0 \cos^2 \varphi$.

39. ***Закон Брюстера*** — $\mathrm{tg}\varphi_Б = \frac{n_2}{n_1}$.

40. ***Оптическая анизотропия*** — зависимость оптических свойств кристалла от выбранного направления в кристалле.

41. ***Двойное лучепреломление***: в некоторых анизотропных кристаллах падающий на кристалл луч в общем случае распространяется с разными скоростями по двум разным направлениям.

42. ***Обыкновенный луч*** — один из лучей в двулучепреломляющем кристалле, который подчиняется обычному закону преломления.

43. ***Необыкновенный луч*** — один из лучей в двулучепреломляющем кристалле, который не подчиняется обычному закону преломления.

44. ***Дихроизм*** — зависимость коэффициента поглощения света в кристалле от ориентации плоскости, в которой происходят колебания светового вектора.

45. ***Вращение плоскости поляризации*** — способность некоторых кристаллов при прохождении сквозь них плоскополяризованного света поворачивать плоскость поляризации света на некоторый угол.

4.1.2. ПОНЯТИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Гармонические колебания.
2. Амплитуда, фаза, начальная фаза, частота колебаний.
3. Циклическая частота колебаний.
4. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты.
5. Биения.
6. Уравнения Максвелла.
7. Энергия электрического и магнитного полей.
8. Принцип Гюйгенса.
9. Закон отражения света.
10. Закон преломления света.
11. Правила построения изображения в тонкой линзе.

Репозиторий ГГАТУ

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.2.1. ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассмотрим новый вид движения, который называется *волновым движением*. Важнейшее отличие волнового движения от любого другого упорядоченного движения состоит в том, что при малых возмущениях (отклонениях от состояния равновесия) *распространение волн не связано с переносом вещества*.

Рассмотрим упругую среду — это может быть твердое тело, жидкость или газ. Между частицами среды существует взаимодействие. Если мы сместим из положения равновесия какую-либо частицу среды, то в результате этого взаимодействия сместятся из положения равновесия и соседние частицы.

Рассмотрим это на примере цепочки одинаковых частиц, упруго связанных друг с другом (рис. 1.1). Пусть в какой-то момент времени $t = 0$ частица 1 начала смещаться из положения равновесия вверх. Она будет увлекать за собой соседние частицы. Через какое-то время, обозначим его $\frac{1}{4}T$, частица 1 достигнет крайнего верхнего положения, а частица 2 начнет смещаться из положения равновесия вверх. Пройдет еще период времени $\frac{1}{4}T$, частица 1 достигнет положения равновесия и будет двигаться вниз; частица 2 достигнет крайнего верхнего положения; начнет движение вверх частица 3. Что произойдет в момент времени $\frac{3}{4}T$, понятно из рисунка. В момент времени, равный T, первая частица будет находиться в таком же состоянии движения, как и в начальный момент времени, и начнет свое движение частица под номером 5. Процесс колебаний распространился на расстояние λ, или, другими словами, волна прошла путь $\lambda = u \cdot T$, где u — скорость волны.

В данном случае направление колебаний частиц перпендикулярно направлению распространения волны — такие волны называются *поперечными*.

Можно провести подобные рассуждения и для случая смещения частиц вправо-влево.

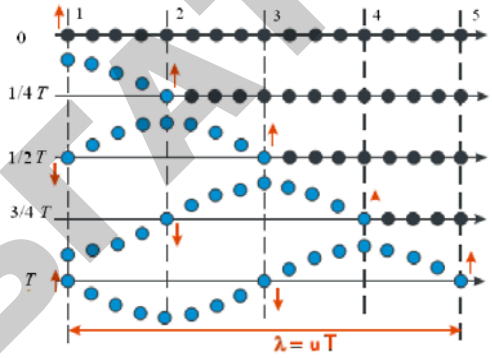

Рис. 1.1. Пример распространения волны в упругой среде, состоящей из одномерной цепочки частиц

Волна, направление колебаний частиц среды в которой совпадает с направлением распространения волны, называется *продольной*.

При распространении продольной волны в среде создаются чередующиеся сгущения и разрежения частиц (рис. 1.2).

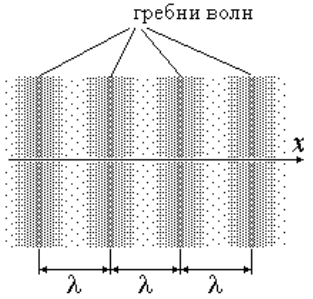

Рис. 1.2. Схематическое изображение плоской продольной волны

Введем понятие фронта волны. ***Фронт волны*** — *это поверхность, которая отделяет часть пространства, уже вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания еще не возникли.* Волновой фронт в каждый момент времени только один и все время перемещается.

Репозиторий БГАТУ

Как построить волновой фронт? Это можно сделать с помощью принципа Гюйгенса.

Принцип Гюйгенса устанавливает способ построения фронта волны в момент времени $t + \Delta t$ по известному положению фронта в момент времени t.

Каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн дает положение фронта волны в следующий момент.

Из рис. 1.1 видно, что отклонение точки от положения равновесия зависит от времени и от положения точки. Функцию $F(x, y, z, t)$ координат и времени называют фазой волны. ***Фаза волны*** *— состояние волны в данной точке пространства в данный момент времени.*

Рассматривая распространение волны в пространстве, следует ввести понятие волновой поверхности.

Волновой поверхностью *называется геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.*

Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченного волновым процессом. Волновые поверхности остаются неподвижными, и их существует бесконечное множество. Волновые поверхности могут быть любой формы.

В простейших случаях они имеют форму или плоскости или сферы.

Соответственно волна в этих случаях называется или *плоской*, или *сферической*.

В плоской волне волновые поверхности представляют собой множество параллельных друг другу плоскостей. Например, гребни волн на рис. 1.2.

В сферической волне волновые поверхности представляют собой множество концентрических сфер (рис. 1.3).

Кроме плоских и сферических волн можно выделить также волны *цилиндрические*, у которых волновые поверхности — концентрические источнику цилиндры. Такие волны возбуждаются нитевидными или щелевыми источниками.

При дальнейшем рассмотрении мы будем предполагать, что во всех случаях выполняется принцип суперпозиции волн. Это вытекающее из опыта утверждение можно сформулировать следующим образом:

Если в среде распространяются одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности.

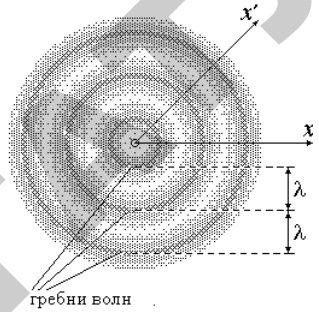

Рис. 1.3. Схематическое изображение сферической волны

Волны просто накладываются одна на другую, не возмущая друг друга.

4.2.1.1. Уравнение плоской волны

Уравнением волны *называется выражение, которое дает смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат x, y, z и времени t:* $\xi = \xi(x, y, z, t)$.

Найдем вид функции ξ в случае плоской волны, полагая, что колебания являются гармоническими. Волновые поверхности будут перпендикулярны к оси x, и поскольку все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение ξ будет зависеть только от x и t: $\xi = \xi(x, t)$.

Пусть колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, имеют вид: $\xi(0,t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ (рис. 1.4).

Найдем вид колебания точки в плоскости, соответствующей произвольному значению x.

Чтобы пройти путь от плоскости $x = 0$ до плоскости $x = x$, волне потребуется время: $t = \frac{x}{u}$, где u — фазовая скорость распространения волны.

Колебания частиц, лежащих в плоскости x, будут отставать по времени на τ от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ и будут иметь вид:

$$\xi(x,t) = a \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \alpha\right]. \qquad (1.1)$$

Репозиторий БГТУ

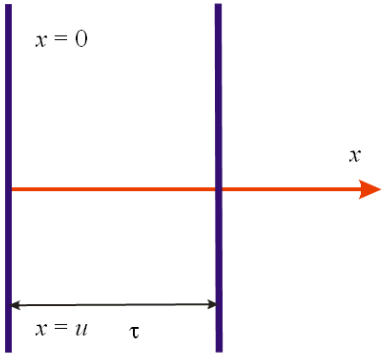

Рис. 1.4. К выводу уравнения плоской волны

Это и есть уравнение плоской волны, которая распространяется в направлении оси x. Уравнению плоской волны можно придать симметричный относительно x и t вид.

Для этого введем величину, которая называется *волновым числом*:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot \nu}{\lambda \cdot \nu} = \frac{\omega}{u}. \qquad (1.2)$$

Тогда уравнение плоской волны можно записать в виде:

$$\xi(x,t) = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (1.3)$$

Проанализируем полученное уравнение плоской волны (1.1).

Положим начальную фазу равной нулю — $\alpha = 0$:

$$\xi(x,t) = a \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right].$$

Эта волна периодична во времени и в пространстве. Период тригонометрической функции равен 2π.

Из периодичности во времени $\omega \cdot \Delta t = 2\pi$ следует $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$. Этот промежуток времени называют *периодом колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot \nu} = \frac{1}{\nu}. \qquad (1.4)$$

Из периодичности в пространстве $\frac{\omega \cdot \Delta x}{u} = 2\pi$ следует $\Delta x = \frac{2\pi \cdot u}{\omega} = u \cdot T$.

Расстояние между ближайшими точками среды, колеблющимися с разностью фаз 2π, называют *длиной волны*:

$$\lambda = u \cdot T \qquad (1.5)$$

Таким образом, в отличие от гармонических колебаний гармоническая волна характеризуется не только периодом колебаний, но и длиной волны.

С учетом формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ уравнение плоской волны $\xi(x,t) = a \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha)$ можно записать в экспоненциальной (комплексной) форме:

$$\xi = a \cdot e^{i(\omega t - kx + \alpha)}, \qquad (1.6)$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть выражения. Такая форма представления волны существенно облегчает математические действия.

До сих пор мы говорили о волне, которая распространяется в среде, не поглощающей энергию волны. Если энергия волны поглощается средой, то, как показывает опыт, в однородной среде интенсивность, а следовательно, и амплитуда волны с удалением от источника колебаний уменьшаются по экспоненциальному закону:

$$\xi = a_0 \cdot e^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx + \alpha), \qquad (1.7)$$

где a_0 — амплитуда в точках плоскости $x = 0$.

Если рассматривать волны на расстояниях от источника колебаний, значительно превышающих его размеры, то источник можно считать *точечным*. В изотропной и однородной среде волна, порождаемая точечным источником, будет сферической. Амплитуда колебаний в этом случае, даже если энергия волны не поглощается средой, не остается постоянной — она убывает пропорционально расстоянию от источника r.

Уравнение сферической волны, распространяющейся в среде без затухания:

$$\xi(x,t) = \frac{a}{r} \cdot \cos(\omega t - kx + \alpha). \qquad (1.8)$$

Репозиторий БГАТУ

4.2.1.2. Волновое уравнение

Аналогично основному уравнению динамики, которое описывает *все* возможные движения материальной точки, для волновых процессов существуют уравнения, являющиеся обобщенным выражением волн, независимо от их конкретного вида.

Это дифференциальные уравнения в частных производных, связывающие изменения функций, которые характеризуют волну во времени и пространстве.

Найдем эту связь для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x $\xi = f\left(t - \frac{u}{x}\right)$ (начальная фаза равна нулю).

Обозначим фазу волны $\varphi = t - \frac{u}{x}$ и продифференцируем:

а) по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi'_\varphi \cdot 1 . \qquad (1.9)$$

б) по координате:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi'_\varphi \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) = -\frac{\xi'_\varphi}{u} . \qquad (1.10)$$

Сопоставив, получим: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}$.

Полученное нами уравнение справедливо лишь для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x. Для волн, распространяющихся в отрицательном направлении оси x, справа должен стоять знак «+».

Можно получить уравнение, справедливое для волны любого направления.

Продифференцируем формулы (1.9) и (1.10) еще раз по времени и координате соответственно:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\xi'_\varphi\right) = \frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi''_\varphi ;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\xi'_\varphi\right) = -\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{u} \cdot \xi''_\varphi \cdot \left(-\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^2} \cdot \xi''_\varphi .$$

Сопоставив, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} . \qquad (1.11)$$

Это одномерное волновое уравнение 2-го порядка в частных производных. Уравнение справедливо для *однородных изотропных* сред, *затухание* в которых пренебрежимо мало.

В трехмерном случае волновое уравнение для однородной изотропной среды без затухания:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} , \qquad (1.12)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Если затухание волны существенно, одномерное волновое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial \xi}{\partial t} + \gamma^2 \cdot \xi = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} , \qquad (1.13)$$

где γ — коэффициент затухания волны.

4.2.1.3. Решение волнового уравнения

Утверждение: функция вида $\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ удовлетворяет волновому уравнению (частное решение). Решением волнового уравнения является уравнение любой волны (плоской, сферической и т. д.).

Рассмотрим одно важное частное решение.

Частное решение проверяется путем подстановки.

Введем новую переменную $\varphi = kx - \omega t$ и вычислим вторую производную по времени:
первая производная:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = i\xi_0 e^{i\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -i\omega\xi_0 e^{i\varphi} = -i\omega\xi ;$$

вторая производная:

Репозиторий БГАТУ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi \,. \qquad (1.14)$$

Вот чем замечательна комплексная экспонента: можно было бы записать действительные синусы и косинусы, но дифференцировать экспоненты гораздо легче, чем синусы и косинусы.

Вычислим вторую производную по координате:
первая производная:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = i\xi_0 e^{i\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = ik\xi_0 e^{i\varphi} = ik\xi \,;$$

вторая производная:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi \qquad (1.15)$$

Подставив формулы (1.14) и (1.15) в волновое уравнение (1.11), получим: $-k^2 \xi = -\frac{1}{u^2}\omega^2 \xi$.

Можно сделать вывод, что функция $\xi(x,t) = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ удовлетворяет волновому уравнению при условии $\frac{\omega^2}{u^2} = k^2$.

4.2.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Существование электромагнитных волн было предсказано Максвеллом в 1862–1864 гг. (Джеймс Клерк Максвелл, английский физик, 1831–1879) как прямое следствие уравнений электромагнитного поля.

Вспомним, как записываются уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E}\vec{dl} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{dS} \,;\ \oint_S \vec{D}\vec{dS} = \int_V \rho dV \,;\ \oint_L \vec{H}\vec{dl} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)\vec{dS} \,;\ \oint_S \vec{B}\vec{dS} = 0 \,.$$

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить соотношениями, в которые входят величины, характеризующие индивидуальные свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями.* Вообще говоря, эти уравнения достаточно сложны и не обладают той общностью и фундаментальностью, которые присущи уравнениям Максвелла. Материальные уравнения наиболее просты в случае достаточно слабых и сравнительно медленно меняющихся в пространстве и во времени электромагнитных полей. Если при этом среда изотропна и не содержит сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, то материальные уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \,;\ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \,;\ \vec{j} = \sigma \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}} \right),$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ — удельная проводимость среды.

Экспериментальное доказательство существования электромагнитных волн было проведено Герцем в 1888 г. (Генрих Рудольф Герц, немецкий физик, 1857–1894).

При изучении возникновения и распространения электромагнитных волн большую роль сыграл *вибратор* (или диполь) *Герца* (рис. 1.5).

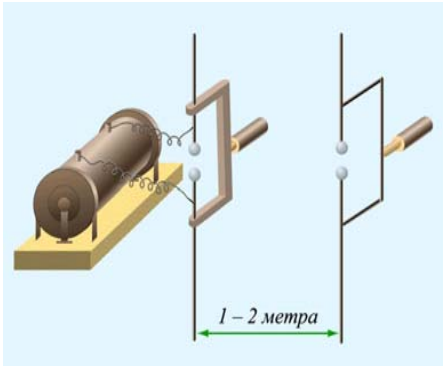

Рис. 1.5. Вибратор Герца

Вибратор Герца представляет собой два проводящих стержня с шариками на концах, стержни подключаются к индукционной катушке — источнику высокого напряжения. Когда напряжение между стержнями становится достаточно большим, происходит пробой воздушного промежутка (между шариками проскакивает искра).

Репозиторий БГАТУ

Ранее мы с вами рассматривали колебания в ***LC*** контуре. Вибратор Герца можно рассматривать как «открытый» колебательный контур. Емкостью в таком контуре является емкость между стержнями, преимущественно между их концами, на которых и накапливаются заряды при колебаниях. Сами стержни обладают индуктивностью. Контур называется открытым, поскольку электрическое поле находится в окружающем стержни пространстве, а не локализовано в ограниченном пластинами конденсатора объеме, как в «обычном» конденсаторе.

В окружающем вибратор пространстве возникает переменное электрическое поле. В результате появляется изменяющееся во времени вихревое магнитное поле, оно вновь рождает также вихревое электрическое поле и т. д. (рис. 1.6). Процесс возмущения распространяется в пространстве, т. е. возникает электромагнитная волна.

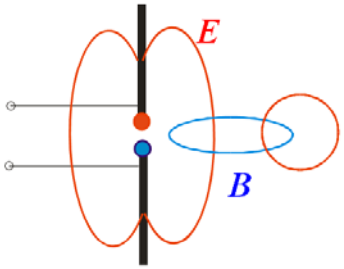

Рис. 1.6. Схема, поясняющая возникновения электромагнитной волны

4.2.2.1. Волновое уравнение для электромагнитных волн

В случае если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, можно записать уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

В системе единиц СИ *уравнения Максвелла* в дифференциальной форме имеют вид:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \qquad (1.16)$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho; \qquad (1.17)$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \qquad (1.18)$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \qquad (1.19)$$

Рассмотрим непроводящую, изотропную и однородную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ.

Пусть в этой среде отсутствуют свободные заряды и токи проводимости, т. е. $\rho = 0$ и $j = 0$.

Тогда, если в рассматриваемой области нет ферромагнетиков, имеем: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$.

Система уравнений Максвелла примет вид:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \qquad (1.20)$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0; \qquad (1.21)$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \qquad (1.22)$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0. \qquad (1.23)$$

Продифференцируем уравнение (1.22) по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Применяя операцию rot к уравнению (1.20) и подставляя результат, полученный из уравнения (1.22), находим:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\mathrm{rot}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Из векторного анализа вспомним правило: *BAC–CAB*:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}),$$

тогда имеем:

Репозиторий ВГАТУ

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = \left[\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla},\vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla},\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{E}) - \nabla^2\vec{E},$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

И так как $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{E}) = 0$ из-за условия $\mathrm{div}\vec{E} = 0$, получаем: $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{E}) = -\nabla^2\vec{E}$.

Имеем: $\nabla^2\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$; учитывая, что $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, уравнение можно переписать в виде:

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.24)$$

Аналогичное уравнение можно написать и для $\vec{H}$:

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.25)$$

Как мы знаем, уравнения такого вида называются *волновыми уравнениями.*

Всякая функция, удовлетворяющая такому уравнению, описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени, дает фазовую скорость этой волны.

Эти уравнения показывают, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mu\cdot\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (1.26)$$

В вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) фазовая скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света в пустоте.

Резюме:

Из уравнений Максвелла следует вывод о существовании принципиально нового физического явления: электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, т. е. отдельно от электрических зарядов и токов. Изменение состояния электромагнитного

поля носит волновой характер. Изменяющиеся поля такого рода называют электромагнитными волнами.

4.2.2.2. Плоская электромагнитная волна

Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в нейтральной непроводящей среде с постоянными проницаемостями: $\rho = 0$; $j = 0$; $\varepsilon = \mathrm{const}$; $\mu = \mathrm{const}$.

Направим ось x перпендикулярно к волновым поверхностям. Тогда E и H, а значит, и их компоненты по координатным осям не будут зависеть от координат y и z. Исходя из уравнений Максвелла, можно показать, что электромагнитные волны поперечны. Это означает, что векторы E и H взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к направлению распространения волны.

Положим, что $E_x = H_y = 0$, тогда можно показать, что справедливы следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}; \qquad (1.27)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \qquad (1.28)$$

Это и есть волновые уравнения для *плоской* электромагнитной волны.

Простейшими решениями этих уравнений являются функции:

$$E_y = E_m\cdot\cos(\omega t - kx + \alpha_1);\ H_z = H_m\cdot\cos(\omega t - kx + \alpha_2).$$

Чтобы эти функции удовлетворяли волновым уравнениям необходимо выполнение двух условий.

1-е — начальные фазы должны быть равны ($\alpha_1 = \alpha_2$).

2-е — амплитуды колебаний магнитного и электрического векторов должны быть связаны соотношением:

$$E_m\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_m\sqrt{\mu\mu_0}. \qquad (1.29)$$

4.2.2.3. Объемная плотность энергии электромагнитного поля. Вектор Умова–Пойнтинга

При волновом процессе от точки к точке в среде передаются *колебания* и их *энергия*, а не поток вещества. Среда, в которой рас-

Репозиторий ВГАТУ

пространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия переносится от источника колебаний в различные точки среды волной.

Если мы выделим в среде элементарный объем ΔV, то при распространении волны, он будет обладать дополнительной энергией ΔW.

Разделив эту энергию на объем, в котором она содержится, получим *плотность энергии*:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}. \qquad (1.30)$$

Введем понятие — *поток энергии*.

Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется ***потоком энергии*** *через эту поверхность.*

$$d\Phi = \frac{dW}{dt}. \qquad (1.31)$$

Поток энергии в разных точках среды может иметь разные значения. Для характеристики течения энергии в разных точках пространства вводится *векторная* величина $\vec{j}$, называемая *плотностью потока энергии*. Эта величина численно равна потоку энергии через единичную площадку, помещенную в данной точке перпендикулярно к направлению, в котором переносится энергия. Направление вектора плотности потока энергии совпадает с направлением переноса энергии.

Пусть через площадку *dS*, перпендикулярную к направлению распространения волны, переносится за время *dt* энергия *dW* (рис. 1.7).

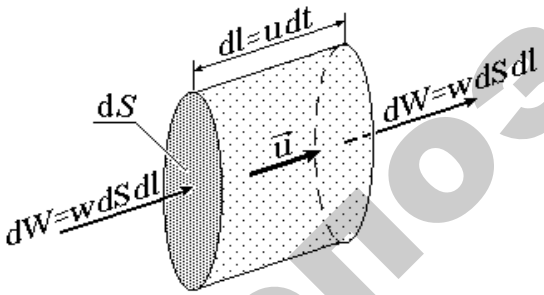

Рис. 1.7. К выводу плотности потока энергии

Тогда плотность потока энергии равна:

$$j = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dS \cdot dt}. \qquad (1.32)$$

Через площадку *dS* за время *dt* будет перенесена энергия *dW*, заключенная в объеме цилиндра с основанием *dS* и высотой $dl = u \cdot dt$ (*u* — фазовая скорость волны).

Если размеры цилиндра малы настолько, что плотность энергии во всех точках можно считать одинаковой, то $dW = w \cdot dS \cdot u \cdot dt$.

Подставив выражение $dW = w \cdot dS \cdot u \cdot dt$ в формулу (1.32), получим: $j = w \cdot u$.

Введя вектор *u*, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением распространения волны, можем написать:

$$\vec{j} = w \cdot \vec{u}. \qquad (1.33)$$

Этот *вектор плотности потока энергии* называется *вектором Умова–Пойнтинга*.

Н. А. Умов — русский физик, ввел этот вектор для звуковых волн в 1874 г., Д. Пойнтинг — английский физик (1852–1914), ввел этот вектор для электромагнитных волн.

4.2.2.4. Энергия электромагнитной волны

Из предыдущего курса мы с вами знаем, что энергия электрического поля в некоторой среде равна: $W_э = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot V$; если поле однородно, то плотность энергии равна: $w_э = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2}$. И, соответственно, энергия магнитного поля: $W_м = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot H^2}{2} \cdot V$, и плотность энергии магнитного поля: $w_м = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot H^2}{2}$.

Общее выражение для плотностей энергии электрического и магнитного полей:

Репозиторий БГАТУ

$$w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} + \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot H^2}{2}. \qquad (1.34)$$

В данной точке пространства векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются в одинаковой фазе (это справедливо только для непроводящей среды). Поэтому соотношение (1.29) между амплитудными значениями E_m и H_m справедливо и для их мгновенных значений:

$$E \cdot \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H \cdot \sqrt{\mu \cdot \mu_0}. \qquad (1.35)$$

Отсюда следует, что плотности энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинаковы, поэтому можно написать: $w = 2 \cdot w_э = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$.

Воспользовавшись соотношениями (1.35) и (1.26), запишем:

$$w = \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0} E \cdot H = \frac{1}{u} EH. \qquad (1.36)$$

Таким образом, в случае электромагнитной волны модуль *вектора плотности потока энергии:*

$$j = w \cdot u = EH. \qquad (1.37)$$

В векторном виде: $\vec{j} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Плотность потока энергии, как и плотность энергии, различна в разных точках пространства. В *данной точке* пространства плотность потока энергии изменяется со временем по закону квадрата косинуса.

Плотность энергии равна: $w = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_m^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx)$.

Плотность потока энергии равна:

$$j = \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}} \cdot E_m^2 \cdot \cos^2(\omega t - kx). \qquad (1.38)$$

Говоря об интенсивности волны в данной точке пространства, мы будем иметь в виду *среднее по времени* значение плотности потока энергии, переносимой волной:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2. \qquad (1.39)$$

Таким образом, интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды электрического вектора: $I \sim E_m^2$.

4.2.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Вы наверняка видели, как переливаются всеми цветами радуги мыльные пузыри или какие радужные пленки образуются на поверхности воды при попадании в нее бензина. Оказывается, в этих случаях мы наблюдаем явление интерференции света. В чем же оно заключается?

Определение: *при наложении двух или более световых волн происходит устойчивое перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности — это явление и называется* ***интерференцией***.

Однако интерференция возможна лишь при выполнении некоторых условий, накладываемых на световые волны.

4.2.3.1. Условия наблюдения интерференции для монохроматических волн

Рассмотрим две волны *одинаковой частоты* (***монохроматические***), которые накладываются друг на друга. Пусть они имеют одинаковые направления в некоторой точке пространства. Тогда в этой точке пространства будут возбуждаться колебания:

$$E_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \alpha_1); \qquad (1.40)$$

$$E_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \alpha_2). \qquad (1.41)$$

В соответствии с принципом суперпозиции результирующий вектор можно найти с помощью векторной диаграммы.

Подробное описание того, как с помощью векторной диаграммы найти результирующее колебание, приведено в книге И. В. Савельева «Курс общей физики», 1982 г., т. 1, с. 198–199.

Квадрат амплитуды результирующего колебания в данной точке определяется выражением:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\delta, \qquad (1.42)$$

Репозиторий БГАТУ

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$ — разность фаз.

Итак, суммарная *интенсивность* складывается из члена, возникающего от действия только первого источника A_1^2, плюс интенсивность второго источника A_2^2, и еще дополнительного члена $2\,A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\delta$. Этот дополнительный член назовем *интерференционным членом*.

Введем понятие *когерентности* световых волн (в дальнейшем рассмотрим этот вопрос более подробно).

Когерентностью *называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов.*

Для монохроматических волн определение когерентности запишем следующим образом:

Если разность фаз (δ) *колебаний, возбуждаемых* ***монохроматическими*** *волнами, остается постоянной во времени, то волны называются* ***когерентными***.

В случае некогерентных волн δ непрерывно изменяется, принимая любые значения, и поэтому среднее по времени значение *интерференционного члена* равно нулю.

Это значит, что интенсивность, наблюдаемая при наложении некогерентных волн, равна сумме интенсивностей отдельных волн: $I = I_1 + I_2$.

В случае когерентных волн (δ = const во времени, *но имеет разные значения для разных точек пространства*):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\delta\,. \qquad (1.43)$$

В тех точках пространства, для которых $\cos\delta > 0$, суммарная интенсивность будет превышать $I_1 + I_2$.

В точках, для которых $\cos\delta < 0$, суммарная интенсивность будет меньше $I_1 + I_2$.

Таким образом, при наложении *когерентных* световых волн происходит перераспределение светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности, т. е. *интерференция*.

Интерференция особенно отчетливо проявляется в том случае, когда интенсивность обеих интерферирующих волн одинакова. Тогда в максимумах $I = 4I_1$, в минимумах $I = 0$.

4.2.3.2. Оптическая длина пути

Реальные световые волны не являются строго *монохроматическими*. В силу *фундаментальных* физических причин излучение всегда имеет статистический характер. Атомы светового источника излучают независимо друг от друга в случайные моменты времени, и излучение каждого атома (волновой цуг) длится очень короткое время ($<10^{-8}$ с). Результирующее излучение источника в каждый момент времени состоит из вкладов огромного числа атомов. Через время порядка 10^{-8} с вся совокупность излучающих атомов обновляется. Фаза результирующей волны претерпевает случайные изменения.

Можно сказать, что реальная световая волна представляет собой последовательность волновых цугов (обрывки синусоиды) с *беспорядочно меняющейся фазой*.

Волны от двух *независимых источников некогерентны* и не могут дать интерференционной картины.

Когерентные световые волны можно получить, разделив (например, с помощью отражений или преломлений) волну, излучаемую одним источником, на две части.

Если заставить эти волны пройти разные *оптические пути*, а потом наложить друг на друга, будет наблюдаться интерференция.

Определение: *оптической длиной пути называется произведение геометрической длины пути светового луча на абсолютный показатель преломления среды, в которой этот путь пройден*.

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке O (рис. 1.8). До точки P первая волна проходит в среде с показателем преломления n_1 геометрический путь s_1. Вторая волна проходит в среде с показателем преломления n_2 геометрический путь s_2.

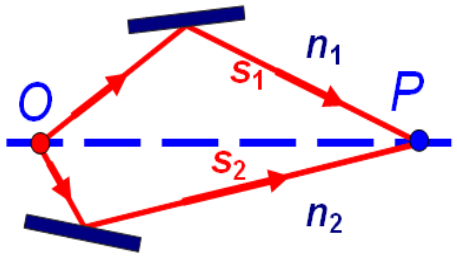

Рис. 1.8. К определению оптической длины пути

Репозиторий БГТУ

Если в точке O фаза колебания равна ωt , то первая волна возбудит в точке P колебание $A_1 \cos\omega\left(t - \frac{s_1}{u_1}\right)$. А вторая волна — колебание $A_2 \cos\omega\left(t - \frac{s_2}{u_2}\right)$. u_1, u_2 — фазовые скорости волны в первой и во второй средах соответственно.

По определению абсолютного показателя преломления $u_1 = \frac{c}{n_1}$, $u_2 = \frac{c}{n_2}$. Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке P, будет равна:

$$\delta = \omega\left(\frac{s_2}{u_2} - \frac{s_1}{u_1}\right) = \frac{\omega}{c}\left(n_2 s_2 - n_1 s_1\right). \qquad (1.44)$$

Величина $n_1 s_1 = L_1$ называется *оптической длиной пути* в среде с показателем преломления n_1.

Заменив $\frac{\omega}{c}$ через $\frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (λ_0 — длина волны в вакууме), выражению для разности фаз можно придать вид:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta, \qquad (1.45)$$

где $\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1$ есть величина, которая равна разности оптических длин проходимых волнами путей и называется *оптической разностью хода*.

4.2.3.3. Условия интерференционных максимумов и минимумов

Итак, разность фаз световых волн, приходящих в какую-то точку пространства, равна: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta$.

Если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме:

$$\Delta = \pm m\lambda_0,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1.46)$$

то разность фаз оказывается кратной 2π и колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, будут происходить с одинаковой фазой, т. е. они будут усиливать друг друга, будет наблюдаться *интерференционный максимум*. Если:

$$\Delta = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1.47)$$

то $\delta = \pm(2m + 1)\pi$, т. е. колебания находятся в противофазе (сдвинуты на π), и колебания, возбуждаемые в точке P обеими волнами, будут ослаблять (гасить) друг друга.

Это условие *интерференционного минимума*.

4.2.3.4. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников

Пусть точечные источники волн S_1 и S_2 расположены на расстоянии d друг от друга (рис. 1.9). Колебания в точках S_1 и S_2 совершаются в одной фазе. Результат интерференции волн будем наблюдать на экране, отдаленном от источников на расстояние L, большее по сравнению с расстоянием d.

Определим разность хода Δ, с которой приходят волны в точку экрана P, отстоящую от его середины на расстояние y.

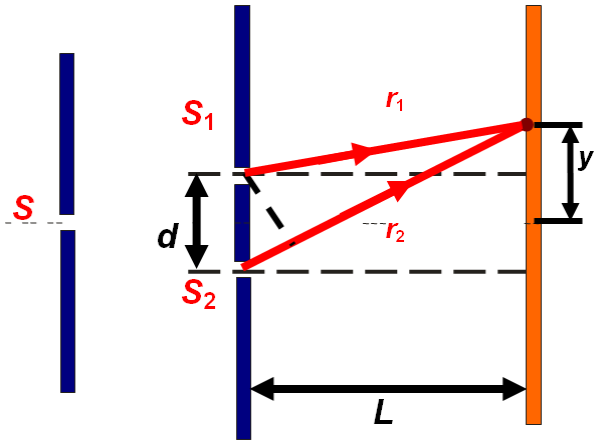

Рис. 1.9. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников

Репозиторий БГАТУ

Из рисунка видно, что $r_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2$, $r_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2$, следовательно: $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2yd$.

Мы полагаем, что $d << L$ и $y << L$. При этих условиях можно считать $r_1 + r_2 \approx 2L$.

Тогда $r_2 - r_1 = \frac{yd}{L}$; умножив эту разность на показатель преломления среды n, получим *оптическую разность хода* $\Delta = n\frac{yd}{L}$.

При каких значениях y будут наблюдаться *максимумы* интенсивности?

Условие наблюдения максимумов: $\Delta = \pm m\lambda_0$. Следовательно: $\Delta = n\frac{yd}{L} = \pm m\lambda_0$ и

$$y_{\max} = \pm m\frac{L}{d}\cdot\frac{\lambda_0}{n} = \pm m\frac{L}{d}\lambda,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1.48)$$

где $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ — длина волны в среде, заполняющей пространство между источниками и экраном.

Для координат *минимумов* интенсивности получим:

$$y_{\min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda. \qquad (1.49)$$

Назовем расстояние между двумя соседними *максимумами* интенсивности — *расстоянием между интерференционными полосами*.

Расстояние между соседними *минимумами* интенсивности — *шириной интерференционной полосы*.

Из формул (1.46) и (1.47) для координат максимумов и минимумов видно, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковую величину. Она равна:

$$\Delta y = \frac{L}{d}\lambda. \qquad (1.50)$$

Согласно этой формуле расстояние между полосами при d, сравнимом с L, было бы того же порядка, что и λ, т. е. несколько микрон. В этом случае отдельные полосы были бы неразличимы. Вот почему для наблюдения интерференционной картины необходимо выполнение условия $d << L$.

4.2.3.5. Способы получения интерференционной картины

Расщепление первоначальной волны от источника на две и последующее их сведение на экране — общий признак всех двулучевых интерференционных схем. Такое расщепление может быть выполнено многими методами, и именно этим различные интерференционные схемы отличаются друг от друга.

Опыт Юнга (1802 г.)

Исторически первым интерференционным опытом, получившим объяснение на основе волновой теории света, явился опыт Юнга. В опыте Юнга свет от источника, в качестве которого служила узкая щель S, падал на экран с двумя близко расположенными щелями S_1 и S_2 (рис. 1.10). Проходя через каждую из щелей, световой пучок уширялся вследствие дифракции, поэтому на белом экране световые пучки, прошедшие через щели S_1 и S_2, перекрывались.

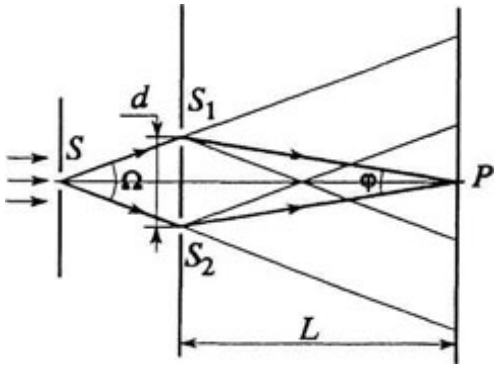

Рис. 1.10. Схема опыта Юнга

В области перекрытия световых пучков наблюдалась интерференционная картина в виде чередующихся светлых и темных полос.

Репозиторий БГАТУ

Юнг был первым, кто понял, что нельзя наблюдать интерференцию при сложении волн от двух независимых источников. Поэтому в его опыте щели S_1 и S_2, которые можно рассматривать в соответствии с принципом Гюйгенса как источники вторичных волн, освещались светом одного источника S.

Расщепление первоначальной волны от источника на две и последующее их сведение на экране могут быть выполнены и другими методами.

Бизеркало Френеля (1816 г.)

Свет от источника S отражается от двух зеркал, расположенных под достаточно малым углом α (рис. 1.11). Волны, падающие на экран, могут рассматриваться как волны от двух мнимых изображений источника S в обоих зеркалах. При изменении положения точки наблюдения P на экране изменяется разность хода Δ, в результате чего возникает система интерференционных полос, ширина которых зависит от угла схождения лучей φ.

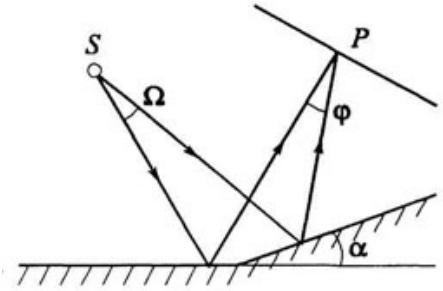

Рис. 1.11. Бизеркало Френеля

Зеркало Ллойда

В этой схеме (рис. 1.12) прямой пучок от источника интерферирует с пучком, отраженным от зеркала (мнимое изображение S').

Схема редко применяется в оптике, но довольно часто используется в радиоастрономии при исследовании источников космического радиоизлучения. В этом случае в качестве зеркала используется поверхность моря или озера.

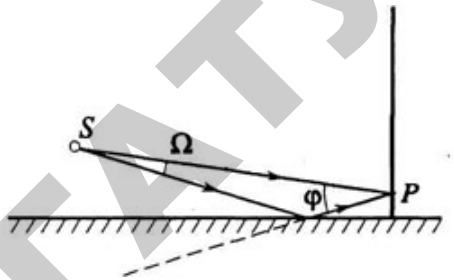

Рис. 1.12. Зеркало Ллойда

Интерферометр Майкельсона

Этот прибор сыграл громадную роль в истории науки. На рис. 1.13 изображена упрощенная схема интерферометра Майкельсона. Свет расщепляется на полупрозрачной пластинке П и распространяется далее по двум различным путям. Разность хода между лучами в точке наблюдения P: $\Delta = 2(L_2 - L_1)$, где L_1 и L_2 — длины «плеч» интерферометра. При строгой перпендикулярности зеркал M_1 и M_2 интерферометр может быть отъюстирован так, что лучи, приходящие в точку наблюдения, оказываются параллельными.

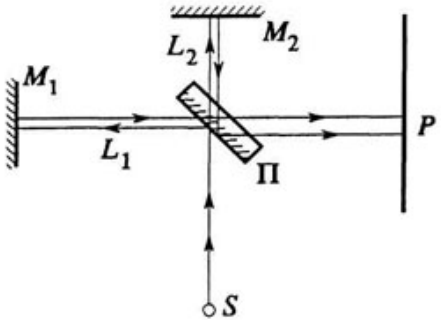

Рис. 1.13. Схема интерферометра Майкельсона

В этом случае угол схождения лучей $\varphi = 0$ и, следовательно, все интерференционное поле на экране имеет одинаковую интенсивность (ширина интерференционных полос стала очень большой), зависящую от разности хода Δ. Отметим, что реально условие $\varphi = 0$

Репозиторий БГАТУ

выполняется лишь в пределах небольшой площадки экрана, на которой наблюдается интерференция. При больших размерах экрана на нем должны наблюдаться интерференционные кольца.

4.2.4. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Под дифракцией света понимают всякое отклонение от его прямолинейного распространения, если оно не может быть истолковано как результат отражения или преломления. Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Если бы законы геометрической оптики строго выполнялись, то за экраном (непрозрачным телом) находилась бы область тени, резко отграниченная от области, куда свет попадает. Дифракция же приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью получается довольно сложная картина распределения интенсивности света. Эти проявления дифракции тем сильнее выражены, чем меньше размеры экранов и отверстий в них или чем больше длина волны света.

4.2.4.1. Принцип Гюйгенса–Френеля

Задача теории дифракции заключается в том, чтобы при заданных расположении и форме тел и расположении источников света вычислить распределение света, т. е. электромагнитное поле во всем пространстве. Точное решение этой задачи возможно путем решения уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями, зависящими от оптических свойств материала на поверхности тел. Строгое решение таких задач, ввиду их сложности, возможно лишь в простейших идеализированных случаях. Однако во многих случаях оказывается достаточным приближенный метод решения задачи о распределении интенсивности света, основанный на принципе Гюйгенса–Френеля.

Кратко принцип Гюйгенса–Френеля можно сформулировать следующим образом: принцип Гюйгенса–Френеля — это принцип Гюйгенса, дополненный идеей об интерференции вторичных волн. В формулировке Френеля, обобщенной Рэлеем, этот принцип звучит следующим образом. Окружим все источники света S_1, S_2, … произвольной замкнутой поверхностью F (рис. 1.14). Каждую точку такой поверхности можно рассматривать как источник вторичных волн, распространяющихся по всем направлениям. Эти волны когерентны, поскольку все они возбуждаются одними и теми же первичными источниками. Световое поле, возникающее в результате интерференции вторичных волн, в пространстве вне поверхности F совпадает с полем реальных источников света. Таким образом, действительные источники света можно как бы заменить окружающей их светящейся поверхностью F с непрерывно распределенными по ней когерентными вторичными источниками.

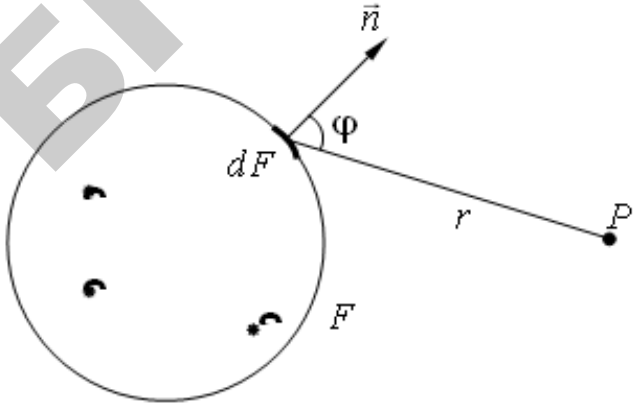

Рис. 1.14. Принцип Гюйгенса–Френеля

Будем считать, что источники испускают монохроматический свет частотой ω. По предположению Френеля каждый элемент dF поверхности F испускает волну, возбуждающую в точке наблюдения P колебания светового вектора вида:

$$dE = K(\varphi)\frac{a_0 dF}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0). \qquad (1.51)$$

В этом выражении $\omega t + \alpha_0$ — фаза колебаний вторичного источника, образованного элементом поверхности dF; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; r — расстояние от элемента dF до точки наблюдения P; a_0 — амплитуда световых колебаний в том месте, где находится выбранный элемент поверхности dF. Коэффициент $K(\varphi)$ зависит от угла φ между нормалью $\vec{n}$ к элементу dF и направле-

Репозиторий БГАТУ

нием от dF к точке наблюдения. По гипотезе Френеля $K(\varphi)$ максимальна при $\varphi = 0$ и обращается в нуль при $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$. Многие практически важные задачи дифракции можно решить при этих предположениях относительно функции $K(\varphi)$, не уточняя ее конкретной зависимости от угла φ.

Результирующее колебание светового вектора в точке наблюдения P представляет собой результат суперпозиции колебаний, приходящих от всех элементов поверхности F:

$$E = \int_F K(\varphi)\frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr + \alpha_0)\,dF. \qquad (1.52)$$

Эта формула является аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля.

В том случае, когда между источниками света и точкой наблюдения имеются непрозрачные экраны с отверстиями, действие этих экранов может быть учтено следующим образом. Выберем поверхность F так, чтобы она всюду совпадала с поверхностью экранов, а отверстия в них перекрывала произвольным образом, выбранным в зависимости от рассматриваемой задачи. На поверхности непрозрачных экранов амплитуды вторичных источников полагаются равными нулю, а на части поверхности F, проходящей через отверстия в экранах, амплитуды колебаний вторичных источников считаются такими же, как и при отсутствии экранов. Последнее утверждение оказывается справедливым, если размеры отверстий много больше длины световой волны. Вычисление E в точках за экранами производится по формуле (1.52), где интегрировать следует по участкам поверхности F, не перекрытым экранами.

В обоснование принципа Гюйгенса–Френеля в рамках классической электромагнитной теории света можно привести следующие соображения. Пусть на пути плоской монохроматической световой волны поставлен тонкий непрозрачный экран. В точках P за экраном интенсивность света равна нулю. Это обусловлено тем, что падающая на экран световая волна возбуждает колебания электронов вещества экрана, которые сами становятся источниками вторичных волн той же частоты. Поле за экраном является результатом суперпозиции первичной волны и всех вторичных волн. Амплитуды и фазы вторичных волн таковы, что при суперпозиции этих волн с первичной волной в любой точке за экраном амплитуда результирующего колебания равна нулю. Это означает, что если первичная волна создает в точке P колебание $E = E_0\cos(\omega t + \alpha)$, то результирующее колебание, возбуждаемое в той же точке вторичными волнами, имеет вид $E' = -E_0\cos(\omega t + \alpha) = E_0\cos(\omega t + \alpha - \pi)$. Следовательно, действие источников, распределенных по поверхности, совпадает (с точностью до фазы) с действием реального источника света.

4.2.4.2. Зоны Френеля. Дифракция Френеля на простейших препятствиях

Вычисление светового вектора по формуле (1.52) является в общем случае очень сложной задачей. Однако, как показал Френель, в случаях с высокой симметрией нахождение амплитуды светового колебания в точке наблюдения может быть осуществлено простым алгебраическим суммированием (метод зон Френеля). Чтобы понять суть этого метода, определим амплитуду световых колебаний в точке наблюдения P при распространении сферической монохроматической волны от точечного источника света S (рис. 1.15). В качестве поверхности F, по которой распределены вторичные источники света, замещающие реальный источник S, возьмем волновую поверхность первичной волны, находящуюся на расстоянии a от источника S. Разобьем поверхность F на кольцевые зоны (зоны Френеля) так, чтобы расстояния от внешних границ соседних зон до точки P отличались на $\frac{\lambda}{2}$. Из рис. 1.15. видно, что расстояние от внешней границы m-й зоны до точки наблюдения P равно:

$$b_m = b + m\frac{\lambda}{2},$$

где b — расстояние от точки P до ближайшей точки поверхности F.

Математический расчет показывает, что площади всех зон Френеля примерно равны, следовательно, число вторичных источников в них одинаково.

Найдем параметры m-й зоны Френеля: ее внешний радиус r_m и площадь ΔS_m. Из рис. 1.16 видно, что

Репозиторий БГАТУ

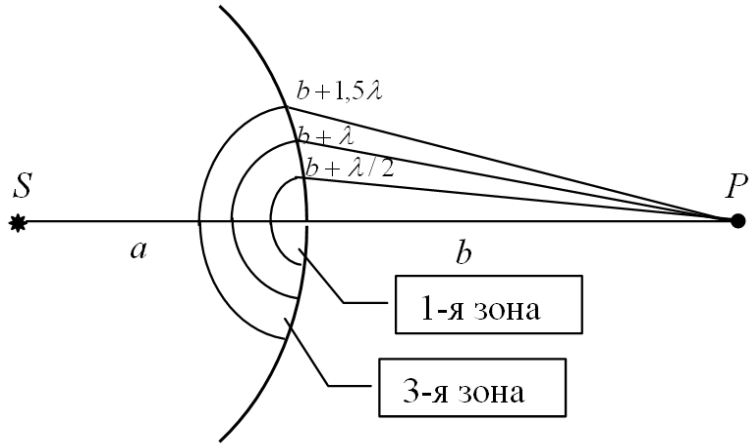

Рис. 1.15. Схема построения зон Френеля

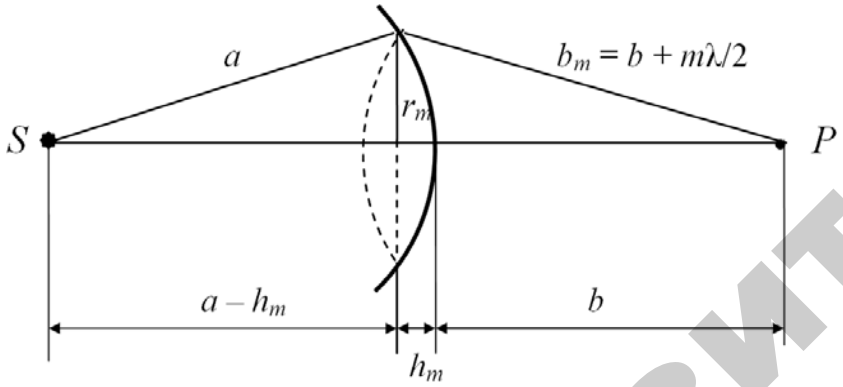

Рис. 1.16. Расчет радиуса зоны Френеля

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2, \qquad (1.53)$$

где a — радиус волновой поверхности; r_m — радиус m-й зоны. Проведя несложные математические преобразования, получим выражение для h_m, которое имеет вид:

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\lambda/2)^2}{2(a+b)}. \qquad (1.54)$$

Ограничимся рассмотрением небольших значений m, а также учтем, что слагаемым, содержащим λ^2, можно пренебречь ввиду его малости. Тогда выражение (1.54) примет вид:

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}. \qquad (1.55)$$

Площадь m-й зоны Френеля ΔS_m определяется разностью площадей сферических сегментов, внешние границы которых задаются m-й и $(m-1)$-й зонами.

$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1} = 2\pi a h_m - 2\pi a h_{m-1}. \qquad (1.56)$$

Подставляя равенство (1.55) в формулу (1.56), получим:

$$\Delta S_m = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Таким образом, мы получили, что при небольших значениях m площади зон Френеля остаются неизменными, так как ΔS не зависит от m.

Из выражения (1.53) можно найти радиусы зон Френеля. При небольших значениях m $h_m << a$ (a — радиус сферической волновой поверхности). Поэтому радиусы зон Френеля (расстояния от прямой SP до внешних границ зон) равны:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}, \; m = 1, 2, \ldots. \qquad (1.57)$$

Если положить для примера $a = b = 1$ м, $\lambda = 0{,}5$ мкм, то для радиуса первой (центральной) зоны Френеля получим $r_1 = 0{,}5$ мм. Расстояния от вторичных источников до точки наблюдения растут с увеличением номера зоны. Угол φ между нормалью к элементам зон и направлением на точку P также увеличивается с увеличением m. Все это приводит к тому, что амплитуда A_m колебаний, возбуждаемых источниками m-й зоны в точке наблюдения, монотонно убывает с ростом m. Следовательно, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность:

Репозиторий БГАТУ

$$A_1 > A_2 > A_3 \ldots .$$

Легко сообразить, что колебания, возбуждаемые в точке наблюдения соседними зонами Френеля, осуществляются в противофазе. Действительно, для каждого источника какой-либо зоны найдется источник в соседней зоне, находящийся на $\frac{\lambda}{2}$ дальше от точки наблюдения, поэтому колебания от этих источников приходят в точку наблюдения в противофазе. Вследствие этого амплитуда световых колебаний в точке P может быть представлена в виде:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots .$$

Перепишем это выражение в виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \ldots .$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно приближенно считать, что выражения в скобках обращаются в ноль. Тогда

$$A = \frac{A_1}{2}. \qquad (1.58)$$

Таким образом, амплитуда колебаний, возбуждаемых в точке наблюдения всей вспомогательной поверхностью, равна половине амплитуды колебаний, возбуждаемых источниками лишь одной центральной зоны Френеля. Если на пути волны поставить экран с круглым отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда колебаний в точке P будет равна A_1, т. е. в два раза превзойдет амплитуду колебаний в отсутствие экрана. При этом интенсивность света в точке наблюдения окажется в четыре раза больше.

Проанализируем теперь характер дифракционной картины, возникающей при падении сферической световой волны на преграду с круглым отверстием радиусом r_0. Точечный монохроматический источник света S расположим напротив середины отверстия (рис. 1.17). В качестве поверхности F снова выберем волновую поверхность первичной волны, касающуюся края отверстия в преграде. Точку наблюдения P выберем на экране так, чтобы прямая SP проходила через центр отверстия в преграде. При небольшом радиусе отверстия примерно можно считать, что a равно расстоянию

от источника до преграды, а b равно расстоянию от преграды до экрана. При выполнении условия

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}, \qquad (1.59)$$

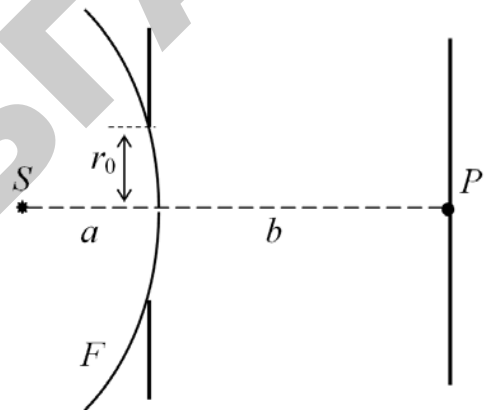

Рис. 1.17. Дифракция Френеля на круглом отверстии

где m —— целое число, отверстие оставляет открытыми m первых зон Френеля для точки наблюдения P. Если m = 1, открыта центральная зона Френеля, и интенсивность света в точке P имеет максимальное значение, в четыре раза превосходящее интенсивность в отсутствие преграды. Если увеличить r_0 так, чтобы было m = 2, амплитуда световых колебаний в P станет равной:

$$A = A_1 - A_2 \approx 0,$$

поскольку амплитуды колебаний от соседних зон отличаются незначительно. Интенсивность света напротив середины отверстия практически обращается в нуль! Этот же результат справедлив и при любом (небольшом) четном числе открытых зон Френеля. Если же число открытых зон нечетно, действие одной из зон оказывается нескомпенсированным, и в точке P наблюдается светлое пятно.

Расчет интенсивности света в точках экрана, находящихся на некотором расстоянии от точки P, оказывается значительно сложнее. Для каждой такой точки можно построить свою систему

Репозиторий БГАТУ

зон Френеля, однако в этом случае отверстие открывает участки этих зон с разной площадью. В силу этого сложно просуммировать вклады от вторичных источников в амплитуду колебаний в точке наблюдения. Анализ показывает, что при удалении от P периодически будут встречаться места с большей и меньшей интенсивностями. Поскольку картина распределения интенсивности симметрична, вокруг точки P будет наблюдаться система более светлых и менее светлых колец. Число этих колец и их положение зависят от числа открытых отверстием зон Френеля для точки P. Пока в отверстие укладывается лишь центральная зона или ее часть, интенсивность в точке P максимальна и монотонно убывает при отдалении от нее. Когда открыты две зоны Френеля, в центре дифракционной картины — темное пятно, а вокруг него — светлое кольцо с максимальной интенсивностью.

С увеличением числа открытых зон увеличивается и число максимумов и минимумов интенсивности в радиальном направлении. Когда в отверстие укладывается большое число зон Френеля, интенсивность вблизи точки P оказывается практически одинаковой, и лишь у границы геометрической тени наблюдается чередование весьма узких светлых и темных колец.

Пусть теперь на пути волны от точечного источника S расположен круглый непрозрачный диск (рис. 1.18). Если диск перекрывает m первых зон Френеля для точки P, являющейся центром дифракционной картины, амплитуда световых колебаний в точке P будет равна:

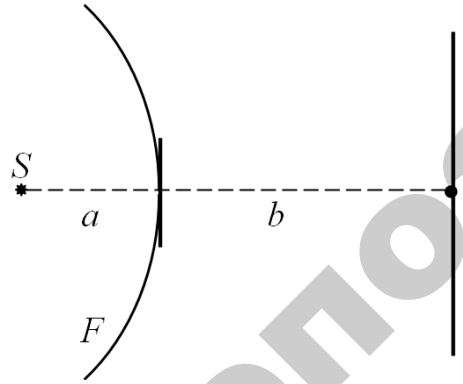

Рис. 1.18. Дифракция Френеля на круглом непрозрачном диске

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - A_{m+4} + \ldots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \ldots \approx \frac{A_{m+1}}{2}.$$

Следовательно, интенсивность света в центре геометрической тени не равна нулю! Если радиус диска мал и он перекрывает небольшое число зон Френеля, $A_{m+1} \approx A_1$, поэтому интенсивность света в точке P будет почти такая же, как и в отсутствие диска. Этот результат теории Френеля, предсказанный Пуассоном и показавшийся абсурдным сторонникам корпускулярной теории света, был экспериментально подтвержден Араго. После этого волновая теория света получила всеобщее признание, а световое пятнышко в центре геометрической тени за диском стали называть пятном Пуассона.

Анализ показывает, что если диск очень мал и перекрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, то он совсем не отбрасывает тени. Распределение интенсивности света на экране практически такое же, как и в отсутствие преграды. Если диск перекрывает много зон Френеля, то $A_{m+1} << A_1$, и поэтому интенсивность пятна Пуассона ничтожно мала. Вблизи границы геометрической тени от диска наблюдается система светлых и темных колец.

Как уже отмечалось, когда круглое отверстие открывает для точки наблюдения P лишь центральную зону Френеля, интенсивность света в этой точке в четыре раза больше, чем при полностью открытой волновой поверхности. Интенсивность света в точке P можно во много раз увеличить, если изготовить экран, который кроме первой зоны Френеля открывает зоны с нечетными номерами (3-ю, 5-ю и т. д.). Вторичные волны от этих зон будут приходить в точку наблюдения в одинаковой фазе и в результате интерференции усилят друг друга. Такой экран называется зонной пластинкой. Зонная пластинка, содержащая n открытых зон, создает в точке наблюдения интенсивность, приблизительно в n^2 раз большую, чем отверстие размером в одну зону Френеля.

В рассмотренных задачах распределение интенсивности в дифракционной картине определялось числом зон Френеля, перекрытых экраном или открытых отверстием в экране, а не абсолютными размерами экранов или отверстий. Радиусы зон Френеля определяются формулой (1.53). Для первой зоны $r_1 = \sqrt{\lambda \frac{ab}{a+b}} = \sqrt{\lambda f}$, где

Репозиторий БГАТУ

$f = \frac{ab}{a+b}$. Отношение радиуса r_1 первой зоны Френеля к линейному размеру D экрана или отверстия:

$$p = \frac{r_1}{D} = \frac{\sqrt{\lambda f}}{D}$$

полностью определяет условия наблюдения, при которых дифракционные явления становятся существенными и распределение интенсивности заметно отличается от предсказаний геометрической оптики. Когда $p << 1$, число зон Френеля, перекрываемых экраном или открываемых отверстием, велико, дифракционные эффекты незначительны и распределение интенсивности приближенно описывается в рамках геометрической оптики. При $p \approx 1$ (заметная часть одной зоны или небольшое число зон) наблюдается сложное распределение интенсивности. Это случай дифракции Френеля. При $p >> 1$ отверстие открывает малую часть первой зоны Френеля. Это случай дифракции Фраунгофера.

В заключение отметим, что в случае протяженного источника света от каждого его элемента создается своя дифракционная картина. Вследствие некогерентности света, испускаемого этими элементами, происходит просто сложение интенсивностей в каждой точке, и результат дифракции определяется наложением таких нескольких смещенных друг относительно друга дифракционных картин.

4.2.4.3. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка

Наибольший практический интерес представляют дифракционные явления, наблюдаемые при падении на препятствие параллельного пучка света (плоской световой волны). В результате дифракции пучок утрачивает параллельность, часть света распространяется в направлениях, отличных от первоначального. Распределение его интенсивности на очень большом (в пределе — бесконечно большом) расстоянии от экрана соответствует случаю дифракции Фраунгофера.

Практически дифракцию Фраунгофера наблюдают не в бесконечности, а в фокальной плоскости собирающей линзы. Схема опыта показана на рис. 1.19. Падающий на экран параллельный пучок лучей получают, помещая точечный источник света S в фокусе линзы L_1. Распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера можно найти с помощью принципа Гюйгенса–Френеля. Интенсивность в определенной точке P фокальной плоскости линзы L обусловлена интерференцией вторичных волн, исходящих от всех элементарных участков отверстия экрана, причем эти волны распространяются в одном и том же направлении, соответствующем точке P. Наиболее важен случай, когда отверстие в экране имеет незначительную ширину и бесконечную длину (щель). Практически достаточно, чтобы длина щели была много больше ее ширины. В этом случае свет дифрагирует в направлении, перпендикулярном щели.

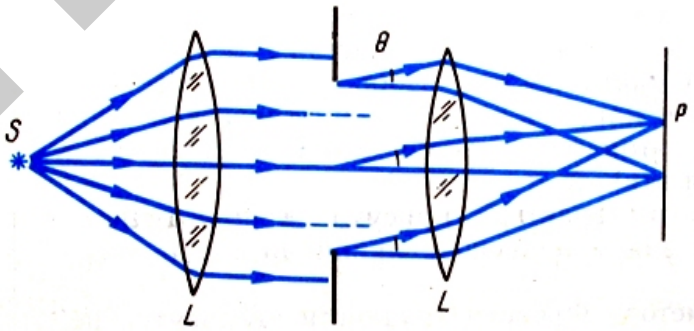

Рис. 1.19. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера

Пусть плоская световая волна падает по нормали к щели (рис. 1.20). Для нахождения распределения интенсивности света на экране разобьем поверхность щели на совокупность очень узких полосок шириной dx, параллельных щели. Каждую из таких полосок согласно принципу Гюйгенса–Френеля будем рассматривать как источник плоской вторичной волны. Вторичные волны (параллельные лучи), посылаемые полосками в направлении, определяемом углом Θ, соберутся линзой в точке P экрана, расположенного в ее фокальной плоскости. Начальные фазы всех этих волн одинаковы, поскольку плоскость щели совпадает с волновой поверхностью падающей волны. Амплитуды вторичных волн также одинаковы, так как полоски имеют одни и те же размеры и наблюдаются под одинаковым углом Θ. Обозначим через E_0 амплитуду колебаний в точке экрана,

Репозиторий ВГАТУ

в которой соберутся лучи, идущие без отклонения. От всех полосок колебания в эту точку приходят в одинаковой фазе, поскольку линза не вносит дополнительной разности хода для параллельных лучей. Число полосок $N = \frac{a}{dx}$, где a — ширина щели. Тогда амплитуда dE_0 колебаний, приходящих от одной щели:

$$dE_0 = \frac{E_0}{a} dx.$$

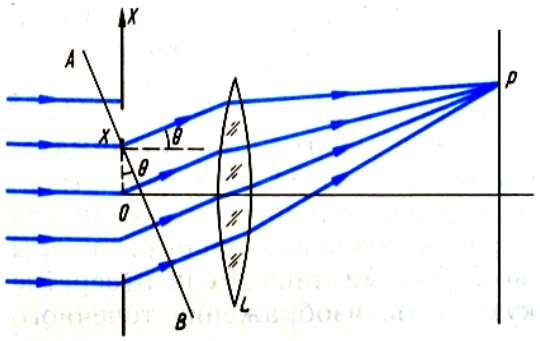

Рис. 1.20. К выводу распределения интенсивности света на экране при дифракции Фраунгофера на одной щели

В точке наблюдения P линза собирает плоские волны, поэтому множитель $\frac{1}{r}$ в формуле (1.51) для dE будет отсутствовать. Пренебрегая зависимостью коэффициента наклона $K(\Theta)$ в (1.51) от угла Θ при малых углах дифракции, будем считать амплитуду колебаний, приходящих от каждой полоски в точку P, равной dE_0. Представим колебания, приходящие в эту точку от полоски, находящейся в середине щели, в виде $dE_0 \cos\omega t = \frac{E_0}{a}\cos\omega t\, dx$. Тогда колебания от полоски, находящейся возле точки с координатой x, приходят в точку наблюдения с фазой:

$$\omega\left(t - \frac{\Delta}{c}\right) = \omega\left(t - \frac{x\sin\Theta}{c}\right) = \omega t - kx\sin\Theta,$$

где Δ — разность путей для волн, идущих от центральной и рассматриваемой полосок; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Следовательно, колебания от такой полоски в точке P имеют вид:

$$dE = \frac{E_0}{a}\cos\left(\omega t - kx\sin\Theta\right)dx.$$

Результирующее световое колебание в точке P определяется как сумма колебаний от всех полосок, т. е. выразится интегралом по ширине щели:

$$E_p = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dE = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{E_0}{a}\cos\left(\omega t - kx\sin\Theta\right)dx = E_0 \frac{\sin\left(\frac{ak\sin\Theta}{2}\right)}{\frac{ak\sin\Theta}{2}}\cos\omega t.$$

Амплитуда этих колебаний:

$$A_p = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta},$$

а интенсивность света в точке наблюдения:

$$I_p = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta\right)^2}, \qquad (1.60)$$

где I_0 — интенсивность света, идущего от щели в направлении первичного пучка.

Как следует из (1.60), интенсивность света обращается в ноль для углов дифракции, определяемых соотношением:

$$a\sin\Theta = m\lambda,\ m = \pm1, \pm2, \ldots . \qquad (1.61)$$

При значениях Θ, лежащих между соседними минимумами, интенсивность достигает максимальных значений. Наибольший максимум имеет место при $\Theta = 0$. Зависимость интенсивности

Репозиторий ВГАТУ

дифрагировавшего света от величины $u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\Theta$ приведена на рис. 1.21. Как следует из формулы (1.60), при сужении щели расстояние между соседними минимумами увеличивается, а интенсивность максимумов уменьшается (дифракционная картина расширяется, а ее яркость уменьшается). Когда a приближается к λ, освещенность экрана монотонно убывает при смещении от центра щели.

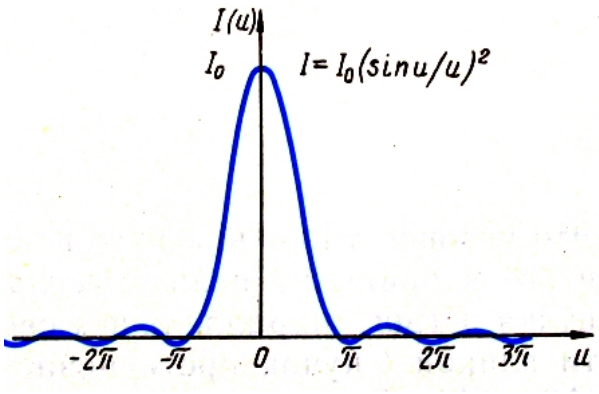

Рис. 1.21. Зависимость интенсивности света при дифракции Фраунгофера на одной щели

Чрезвычайно важное практическое значение имеет случай дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке. Рассмотрим простейшую идеализированную дифракционную решетку, состоящую из равноотстоящих параллельных щелей одинаковой ширины a, прорезанных в непрозрачном тонком экране. Расстояния между соседними щелями одинаковы и равны b (рис. 1.22). Величина $d = a + b$ называется *периодом дифракционной решетки*. Пусть на решетку по нормали падает плоская монохроматическая волна. Дифракционная картина наблюдается по методу Фраунгофера. В точке наблюдения осуществляется многолучевая интерференция пучков света, исходящих от щелей решетки. Из рис. 1.22 видно, что разность хода соответствующих вторичных волн, приходящих в точку наблюдения от соседних щелей, будет равна $d\sin\varphi$, а разность фаз $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\varphi$. Когда разность хода равна целому числу длин волн:

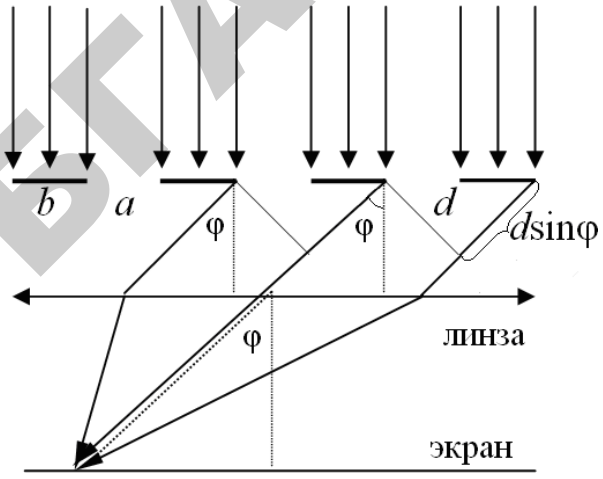

Рис. 1.22. К выводу распределения интенсивности света на экране при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке

$$d\sin\varphi = m\lambda,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \qquad (1.62)$$

в точке наблюдения будет дифракционный максимум. Суммируя вклады колебаний, приходящих от щелей, с учетом разности фаз можно показать, что интенсивность света в точке наблюдения:

$$I = I_1\left[\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^2, \qquad (1.63)$$

где I_1 — интенсивность света от одной щели в точке наблюдения, взятой в первичном направлении лучей; N — число щелей решетки. При $\varphi = 0$ имеем $\delta = 0$. В этом случае выражение (1.63) принимает неопределенный вид 0/0. Раскрыв неопределенность по правилу Лопиталя, получим $I = N^2 I_1$. Следовательно, в на-

Репозиторий БГАТУ

правлении φ = 0 наблюдается дифракционный максимум, интенсивность света в котором в N^2 раз превосходит интенсивность света, приходящего от одной щели. Такой же результат получается всегда при $\frac{\delta}{2} = m\pi$, т. е. при выполнении условия (1.62). В направлениях, определяемых этим условием, наблюдаются максимумы, интенсивность которых в N^2 раз превосходит интенсивность света от одной щели в этом направлении. Эти максимумы называются главными дифракционными максимумами. Целое число m в равенстве (1.62), определяющее направление на главный дифракционный максимум, называется *порядком главного максимума или порядком спектра*. Используя формулу (1.62), легко найти наибольший порядок спектра, который можно наблюдать с помощью решетки с периодом d. Поскольку $\sin\varphi \le 1$, из условия (1.62) следует, что $m \le \frac{d}{\lambda}$. Поскольку m — целое число, m_{max} равно целой части $\frac{d}{\lambda}$. Общее число наблюдаемых главных максимумов равно $2m_{max} + 1$.

Анализ формулы (1.63) показывает, что помимо главных дифракционных максимумов, положение которых определяется условием (1.62), в дифракционной картине имеются второстепенные максимумы, интенсивность которых значительно меньше. Если число щелей решетки равно N, между двумя соседними главными дифракционными максимумами находятся $N - 2$ второстепенных максимумов, разделенных минимумами интенсивности, число которых, очевидно, равно $N - 1$. Распределение интенсивности света в точках экрана схематично показано на рис. 1.23.

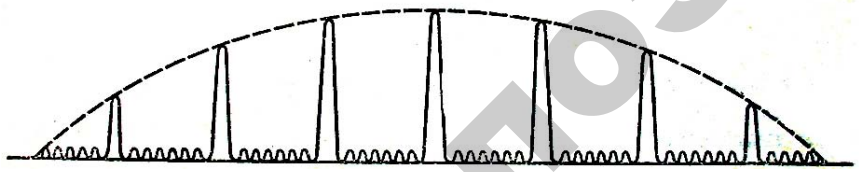

Рис. 1.23. Распределение интенсивности света на экране при дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке

Когда волна падает на решетку наклонно под углом φ_0 (рис. 1.24), разность хода между пучками дифрагировавшего на соседних щелях света становится равной $AD - BC = d(\sin\varphi - \sin\varphi_0)$. Вследствие этого положение главных дифракционных максимумов будет определяться условием:

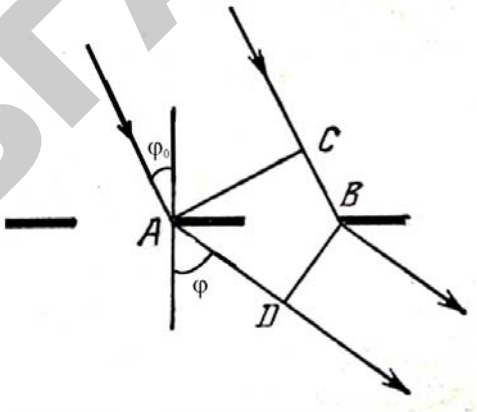

Рис. 1.24. Наклонное падение света на дифракционную решетку

$$d(\sin\varphi - \sin\varphi_0) = m\lambda. \qquad (1,64)$$

В современной спектральной аппаратуре используются отражательные дифракционные решетки. Такая решетка представляет собой плоскую металлическую поверхность, на которой специальной делительной машиной нарезано много (до сотен тысяч) параллельных равноотстоящих штрихов. Дифракционная картина наблюдается в отраженном свете. Положения главных дифракционных максимумов определяются исключительно периодом решетки, и формулы (1.62) и (1.64) остаются справедливыми и в случае отражательных решеток. Однако форма штриха решетки влияет на распределение интенсивности дифрагировавшего света. При определенной форме штриха решетка может сконцентрировать практически весь дифрагировавший свет в одном (не нулевом!) главном дифракционном максимуме.

Положение главных дифракционных максимумов, даваемых дифракционной решеткой, зависит от длины волны. Если на решетку направить немонохроматический свет, каждая его моно-

Репозиторий БГАТУ

хроматическая составляющая даст на экране свою совокупность дифракционных максимумов. Поэтому решетка в каждом порядке (кроме нулевого) разложит падающий свет в спектр, в котором отдельные монохроматические компоненты окажутся пространственно разделенными. Если падающий свет белый, то спектр каждого ненулевого порядка примет вид цветной полосы, в которой встречаются все цвета радуги. Центральный максимум (m = 0 для любых длин волн) будет неокрашенным. Из формулы (1.62) видно, что в спектре наименее отклоненными окажутся фиолетовые максимумы, а наиболее отклоненными — красные. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. Свойство решетки разлагать свет в спектр применяется для исследования спектрального состава света — определения длин волн и интенсивностей его монохроматических составляющих.

В зависимости от области спектра дифракционные решетки имеют от 4 (для инфракрасной) до 3600 штрихов на 1 мм ширины решетки. Вследствие высокой стоимости оригинальных гравированных решеток, получаемых с помощью высокоточных делительных машин, широкое распространение получили реплики, т. е. отпечатки с гравированной матрицы на специальных пластмассах, покрытых тонким металлическим слоем.

4.2.4.4. Дифракция рентгеновских лучей

Пример дифракционной решетки показывает, что для наблюдения четкого распределения интенсивности при дифракции света на периодической структуре период этой структуры должен превосходить длину световой волны. Кристаллы являют собой пример трехмерных периодических структур, однако они не пригодны для наблюдения дифракции видимого света, поскольку длины волн видимого света значительно превосходят межатомные расстояния, определяющие периоды структуры по разным направлениям. Для видимого света кристалл представляет собой практически однородную среду. На кристаллической структуре можно наблюдать дифракцию рентгеновских лучей, представляющих собой электромагнитное излучение с длинами волн ~$(10–10^{-3})$ нм. Рентгеновское излучение возникает, в частности, при торможении электронов в веществе антикатода рентгеновской трубки.

При падении волны рентгеновского излучения на кристалл узлы его кристаллической решетки становятся источниками вторичных волн. Узлы решетки, расположенные в одной плоскости, образуют волну, отраженную под углом к атомной плоскости, равным углу падения. По другим направлениям вторичные волны гасят друг друга в результате интерференции. Интенсивность отраженной волны зависит от количества атомов в атомной плоскости: с увеличением их количества ее интенсивность увеличивается.

Через узлы кристаллической решетки можно провести много атомных плоскостей, и каждая из них будет отражать волну в таком направлении, чтобы угол отражения был равен углу падения. Это условие не зависит от длины волны излучения. Однако отражение в данном направлении происходит не от одной плоскости, а от всех других атомных плоскостей, параллельных ей. Все отраженные волны когерентны между собой, поскольку порождаются одной и той же первичной падающей волной. Они усилят друг друга, если оптическая разность хода волн, отраженных соседними плоскостями, будет равна целому числу длин волн. Как легко увидеть из рис. 1.25, для монохроматической волны это произойдет при выполнении условия:

$$2d\sin\Theta = m\lambda, \qquad (1.65)$$

где m = 1, 2, 3, …, Θ — угол скольжения. Формулу (1.65) называют формулой Вульфа–Брэггов.

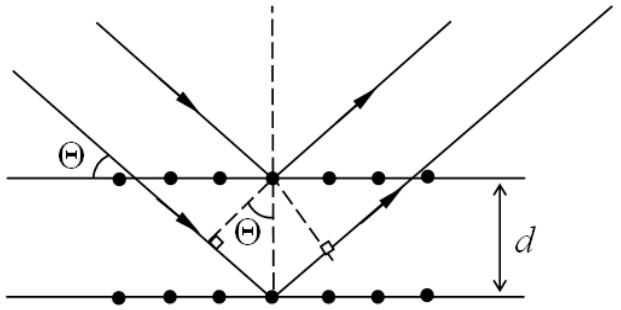

Рис. 1.25. К выводу условия Вульфа–Брэггов

Если на систему параллельных плоскостей падает немонохроматическая волна, отразится лишь та ее составляющая, длина волны

Репозиторий БГАТУ

которой удовлетворяет условию (1.65). Если в падающей волне такая составляющая отсутствует, отраженная волна не возникает.

Известны три способа наблюдения дифракции рентгеновских волн на кристаллах. При наблюдении по способу Лауэ монокристалл облучается рентгеновским излучением с непрерывным спектром. Каждая из систем параллельных атомных плоскостей отражает в соответствующем направлении, удовлетворяющем условию (1.65), определенную длину волны. Интенсивность отраженного луча будет заметной лишь в том случае, когда атомы в отражающих плоскостях расположены достаточно плотно. Поэтому практически будет наблюдаться отражение лишь от небольшого числа систем параллельных плоскостей. Если на пути лучей, отраженных различными системами параллельных плоскостей, поставить фотопластинку, то на ней получается система пятен — лауэграмма. Зная геометрию опыта, можно установить соответствие между лауэграммой, структурой кристалла и длинами волн.

При наблюдении по способу Брэгга кристалл облучается монохроматическим рентгеновским излучением. Исследуется отражение от определенной системы параллельных атомных плоскостей при вращении монокристалла. В соответствии с формулой (1.65) отражение происходит лишь при некоторых углах скольжения. Зная λ и измерив Θ, по формуле (1.65) можно вычислить расстояние между атомными плоскостями, от которых происходит отражение.

Монокристаллы достаточно больших размеров получить сложно. Проще получить порошок, который состоит из маленьких кристаллов, ориентированных беспорядочным образом. При наблюдении дифракции рентгеновских лучей по методу Дебая–Шерера поликристаллический порошок облучается монохроматическим рентгеновским излучением. Среди составляющих порошок монокристаллов всегда найдутся такие, ориентация которых относительно падающего пучка удовлетворяет условию Вульфа–Брэггов (1.65). Если за образцом установить фотопластинку, перпендикулярную падающему пучку, то вследствие аксиальной (осевой) симметрии опыта отраженные лучи оставят на ней след в виде системы колец. Это является следствием того, что отражение происходит от разных систем атомных плоскостей и имеются отражения разных порядков, т. е. при различных m в формуле (1.65). Зная геометрию опыта, длину волны и расположение колец, можно сделать выводы

о структуре кристаллов (рентгеноструктурный анализ), а при известной структуре можно вычислить длину волны (рентгеновская спектроскопия). Рентгеноструктурный анализ остается и до нашего времени одним из самых эффективных методов исследования структуры вещества.

4.2.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

4.2.5.1. Естественный и поляризованный свет

Как уже отмечалось, свет является поперечной электромагнитной волной: световой вектор (как и вектор магнитной индукции) колеблется таким образом, что остается перпендикулярным лучу. Однако характер этих колебаний может быть разным.

Естественный свет — свет со всевозможными одинаково вероятными направлениями колебаний светового вектора (рис. 1.26).

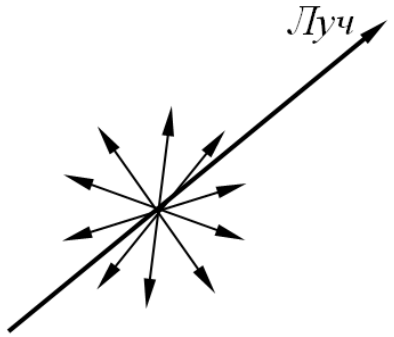

Рис. 1.26. Схематичное изображение естественного света

Поляризованный свет — свет, направления колебаний светового вектора в котором каким-либо образом упорядочены.

Одним из примеров поляризованного света является линейно поляризованный свет. *Линейно поляризованный свет* — это свет, в котором колебания светового вектора совершаются вдоль одного определенного направления. Если выделить луч линейно поляризованного света, то колебания светового вектора во всех точках луча совершаются в одной плоскости, содержащей этот луч (рис. 1.27). Эту плоскость называют *плоскостью поляризации*.

Репозиторий БГАТУ

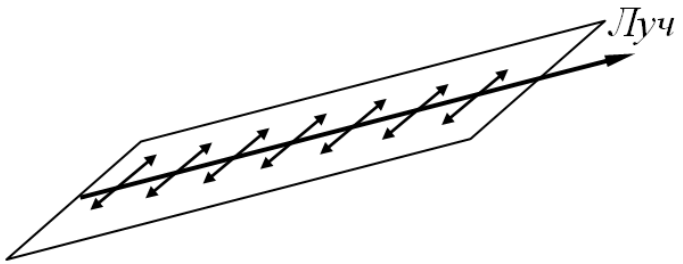

Рис. 1.27. Схематичное изображение линейно поляризованного света

В световой волне, поляризованной по кругу (циркулярно поляризованный свет), в любой точке луча световой вектор вращается так, что его конец описывает окружность. В эллиптически поляризованной волне конец светового вектора описывает эллипс. Такую волну можно получить при наложении двух плоских волн, бегущих в одном направлении и поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, если колебания в них сдвинуты по фазе.

Линейно поляризованный свет можно получить с помощью специальных устройств, которые называются поляризаторами. Идеальный поляризатор пропускает колебания светового вектора только одного определенного направления и полностью гасит колебания светового вектора в перпендикулярном направлении. Плоскость, колебания светового вектора в которой пропускаются поляризатором, называется *плоскостью поляризатора*.

Примером поляризатора является кристалл турмалина, вырезанный параллельно так называемой оптической оси. Если пучок естественного света (излучаемый любым не лазерным источником) направить по нормали на поверхность кристалла, параллельную его оптической оси, то на выходе из кристалла свет окажется плоскополяризованным.

Естественный свет можно представить как суперпозицию двух плоских некогерентных волн одинаковой интенсивности, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При прохождении через поляризатор одна из этих волн полностью гасится поляризатором, а вторая проходит без изменений. Следовательно, интенсивность естественного света $I_{ест}$ после прохождения через идеальный поляризатор уменьшается в два раза:

$$I = \frac{1}{2} I_{ест},$$

где I — интенсивность света на выходе из поляризатора.

Пусть на поляризатор падает линейно поляризованный свет, плоскость поляризации которого составляет угол φ с плоскостью поляризатора (рис. 1.28а).

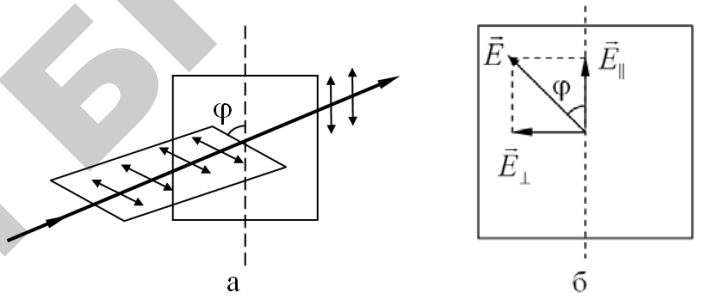

Рис. 1.28. Прохождение линейно поляризованного света через поляризатор и анализатор: *а* — схематичное изображение света, падающего на поляризатор и прошедшего через него; *б* — к выводу интенсивности света, прошедшего через анализатор

Световой вектор в точках падающего луча можно представить в виде $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$, где вектор $\vec{E}_{\parallel}$ лежит в плоскости поляризатора, а $\vec{E}_{\perp}$ перпендикулярен ему (рис. 1.28б). Поляризатор пропускает лишь колебания вектора $\vec{E}_{\parallel}$. Очевидно, амплитуда этих колебаний связана с амплитудой падающего света соотношением $E_{\parallel 0} = E_0 \cos\varphi$. Переходя к интенсивностям, получаем *закон Малюса*: если на поляризатор падает линейно поляризованный свет интенсивности I_0, то интенсивность прошедшего света:

$$I = I_0 \cos^2\varphi, \qquad (1.66)$$

где φ — угол между плоскостью поляризатора и плоскостью поляризации падающего света.

В световой волне колебания светового вектора одного направления могут преобладать над колебаниями других направлений. Такой свет называют частично поляризованным. Частично поля-

Репозиторий БГАТУ

ризованную световую волну можно рассматривать как результат наложения двух плоскополяризованных волн разной интенсивности с взаимно перпендикулярными направлениями колебаний. Если направить частично поляризованный свет на поляризатор и вращать поляризатор вокруг луча, то интенсивность прошедшего света будет меняться от I_{max} до I_{min}. Величина $p = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ называется *степенью поляризации света*. Для плоскополяризованного света $p = 1$, для естественного света $p = 0$. Поляризатор, используемый для определения степени поляризации света, называют *анализатором*.

4.2.5.2. Поляризация при преломлении и отражении света

В случае падения светового пучка на границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления n_1 и n_2 часть света отражается, а часть, преломляясь, распространяется во второй среде. Используя анализатор, можно исследовать поляризацию отраженного и преломленного лучей. Такое исследование впервые было проведено Малюсом. Оказалось, что в общем случае отраженный и преломленный лучи частично поляризованы. Однако при угле падения $\varphi_Б$, называемом углом Брюстера и определяемом соотношением:

$$\mathrm{tg}\varphi_Б = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (1.67)$$

отраженный свет является полностью плоскополяризованным. Этот результат называют *законом Брюстера*. Плоскость поляризации отраженного луча перпендикулярна плоскости падения. На рис. 1.29 точки изображают колебания светового вектора в направлении, перпендикулярном плоскости падения, а стрелки — в плоскости падения. При падении света на границу раздела сред под углом Брюстера преломленный луч остается частично поляризованным, причем степень его поляризации оказывается максимальной.

Физический смысл закона Брюстера заключается в следующем. Преломленная волна возбуждает в среде с показателем преломления n_2 колебания электронов, которые становятся источниками вторичных волн, образующих отраженную световую волну. Направление колебаний электронов совпадает с направ-

лением колебаний светового вектора в точках преломленного луча, т. е. будет перпендикулярно этому лучу. Колебания электрона можно представить как результат наложения двух колебаний, одно из которых лежит в плоскости падения (колебание α), а другое перпендикулярно ей (колебание β). Другими словами, мы изображаем колебание электрона в молекуле вещества как суперпозицию колебаний двух элементарных излучателей, оси которых направлены соответственно вдоль и ортогонально плоскости падения. На рис. 1.30 колебание α изображено стрелкой, а колебание β — точкой. Интенсивность излучения элементарного излучателя максимальна в направлении, перпендикулярном оси колебаний, а световой вектор излучаемой в этом направлении волны параллелен направлению колебаний излучателя. В направлении оси колебаний излучатель не излучает.

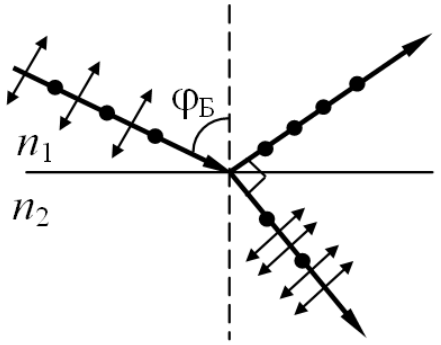

Рис. 1.29. Колебания светового вектора в падающем и преломленном лучах

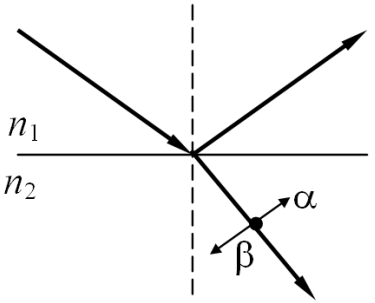

Рис. 1.30. Физический смысл закона Брюстера

Репозиторий БГАТУ

Когда луч падает на границу раздела под углом Брюстера, угол между преломленным и отраженным лучами равен 90°. Следовательно, излучатели типа α не излучают в направлении отраженного луча. В этом направлении распространяется свет, посылаемый только излучателями типа β, колебания которых перпендикулярны плоскости падения. В силу этого колебания светового вектора в отраженной волне перпендикулярны плоскости падения. Опыт показывает, что закон Брюстера не выполняется вполне строго. Одна из причин этого — неизотропность молекул вещества.

То, что свет, отраженный от границы диэлектриков, по крайней мере частично поляризован, дает возможность погасить отраженный свет (блики), нанося на границу раздела поляроидную пленку, поглощающую свет, колебания вектора $\vec{E}$ у которого направлены вдоль границы. Это применяется в различных антибликовых устройствах: дневные очки (с поляризационными стеклами) для водителей и рыболовов, покрытие приборной панели автомобилей, экраны для компьютерных мониторов.

Степень поляризации преломленного света можно существенно повысить, пропустив его через набор тонких прозрачных пластин (стопа Столетова) при условии падения на каждую из них под углом Брюстера. Для стекла степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном $\varphi_Б$, соответствует 10–15 %. Для практически полной поляризации (p = 0,99) достаточно пропустить свет через стопу из 15 пластин. Такая стопа может служить поляризатором.

4.2.5.3. Двойное лучепреломление

В случае падения монохроматического света на границу анизотропной среды (анизотропная среда — среда, макроскопические свойства которой не одинаковы в различных направлениях) от границы в общем случае распространяются две волны, движущиеся в этой среде в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется двойным лучепреломлением. Оно было открыто Бартолином в 1670 г. в кристаллах исландского шпата ($CaCO_3$), встречающегося в природе в виде довольно больших оптически чистых кристаллов.

Если узкий параллельный пучок естественного света направить перпендикулярно на кристалл исландского шпата, то из

кристалла выходят два луча, имеющие направления, параллельные первоначальному (рис. 1.31). Один из них является продолжением первичного, а второй смещен в сторону, т. е. для него угол преломления в кристалле отличен от нуля при равном нулю угле падения (закон преломления не выполняется). По этой причине пучок, подчиняющийся закону преломления, называют обыкновенным (о), а второй пучок, не подчиняющийся закону преломления, — необыкновенным (е). Если падающий пучок узок, а кристалл имеет достаточную толщину, то выходящие пучки пространственно разделены и образуют на экране два пятна. С помощью анализатора легко убедиться, что выходящие из кристалла пучки света линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

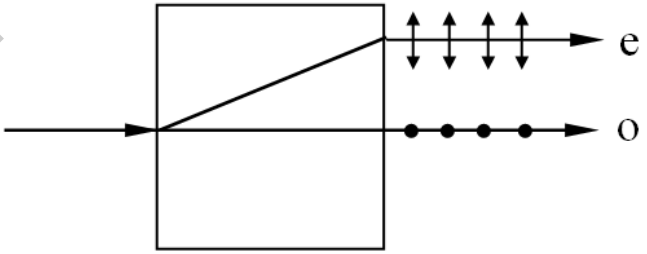

Рис. 1.31. Явление двойного лучепреломления

У кристалла исландского шпата существует направление (параллельное оси симметрии кристалла), вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается: падающий пучок света не раздваивается, а состояние его поляризации не изменяется. Обладающее таким свойством направление называется оптической осью кристалла. Подчеркнем, что речь идет именно о направлении, а не об одной прямой. Пучок не испытывает двойного лучепреломления при распространении вдоль любой прямой, параллельной этому направлению. Кристаллы, имеющие лишь одно направление, вдоль которого двойное лучепреломление отсутствует, называют одноосными (исландский шпат, кварц, турмалин). Существуют кристаллы, имеющие два таких направления (слюда, гипс). Такие кристаллы называют двуосными.

Гюйгенс дал объяснение двойного лучепреломления на основе гипотезы о том, что падающая волна порождает в кристалле вто-

Репозиторий БГАТУ

ричные волны двух типов. Одни из этих волн (обыкновенные) распространяются в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью v_o. Вектор $\vec{E}$ этих волн перпендикулярен оптической оси кристалла. Скорость v_e других волн (необыкновенных) отличается от v_o и зависит от угла между вектором $\vec{E}$ и оптической осью. В силу этого волновая поверхность обыкновенных волн представляет собой сферу, а необыкновенных — эллипсоид вращения. Различие скоростей этих волн объясняется анизотропией кристаллов.

Одинаковым по величине смещениям оптического электрона атома вдоль оптической оси и в перпендикулярном направлении соответствуют разные квазиупругие возвращающие силы. Поэтому будут различаться собственные частоты ω|| и ω⊥ колебаний электрона в этих взаимно перпендикулярных направлениях. Поляризуемость атома определяется разностью квадратов частоты света ω и частоты собственных колебаний электрона. Следовательно, различным направлениям колебаний в световой волне определенной частоты соответствуют различные значения поляризуемости, диэлектрической проницаемости ε|| и ε⊥, показателя преломления и, как следствие, скорости.

Кристаллы, для которых показатель преломления n_o обыкновенного луча меньше показателя преломления n_e необыкновенного луча в направлении, перпендикулярном оптической оси кристалла ($n_o < n_e$), называются *положительными*. У *отрицательных кристаллов* $n_o > n_e$. Значения показателей преломления при λ = 5893 Å (Å — ангстрем) для исландского шпата n_o = 1,658 и n_e = 1,486, для кварца n_o = 1,543 и n_e = 1,552. Существуют кристаллы с еще более резко выраженным различием в показателях преломления. Так, для натронной селитры ($NaNO_3$) n_o = 1,585 и n_e = 1,337. К сожалению, недостаточная устойчивость селитры к влаге и механическим повреждениям затрудняет ее применение в оптических приборах.

Явление двойного лучепреломления лежит в основе действия так называемых поляризационных призм — приборов для получения поляризованного света. Первая поляризационная призма (призма Николя) (рис. 1.32) была изобретена Николем в 1828 г.

Она изготавливается из специально вырезанного кристалла исландского шпата. Кристалл разрезается по плоскости *AB*, затем отшлифованные половинки склеиваются в прежнем положении

канадским бальзамом, образующим между ними тонкий прозрачный слой с показателем преломления n = 1,549, имеющим промежуточное значение между n_o и n_e для исландского шпата. Для обыкновенного луча канадский бальзам представляет собой оптически менее плотную среду, чем исландский шпат, для необыкновенного — оптически более плотную. Обыкновенные лучи, падающие на торец *AB* призмы параллельно ее длинным ребрам, испытывают на границе с канадским бальзамом полное внутреннее отражение. Необыкновенный луч не испытывает полного отражения и выходит из призмы параллельно своему направлению входа в нее.

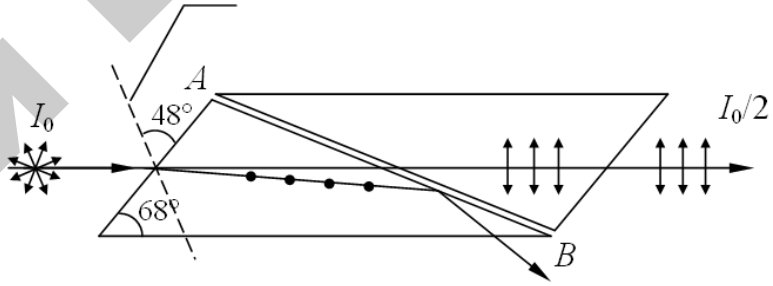

Рис. 1.32. Схема призмы Николя

Существует много модификаций поляризационных призм. Для работы в ультрафиолетовой области спектра канадский бальзам непригоден из-за сильного поглощения, поэтому используют призму Фуко с тонкой воздушной прослойкой. Иногда необходимо из падающего луча света получить одновременно два луча, поляризованных в перпендикулярных направлениях. Для этой цели используется, в частности, призма Волластона (рис. 1.33). Две прямоугольные призмы склеены по гипотенузам так, что их оптические оси (показанные линиями и точками) взаимно перпендикулярны. Обыкновенный и необыкновенный лучи, возникающие в первой призме при падении света по нормали на грань *AC*, идут по прежнему направлению с разными скоростями $v_o = \frac{c}{n_o}$ и $v_e = \frac{c}{n_e}$. Необыкновенный луч, в котором колебания светового вектора проис-

Репозиторий БГАТУ

ходят в плоскости рисунка, при переходе во вторую призму будет распространяться как обыкновенный, так как колебания в нем перпендикулярны оптической оси второй призмы. Его преломление на границе призм AB происходит, как при переходе между изотропными средами с показателями преломления $n_1 = n_e$ и $n_2 = n_o$. У обыкновенного луча первой призмы преломление соответствует случаю $n_1 = n_o$ и $n_2 = n_e$. При $n_o > n_e$ (исландский шпат) первый луч отклонится в сторону ребра D, второй — в противоположную сторону. Этим обеспечивается угловое разведение выходящих из призмы пучков света, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях.

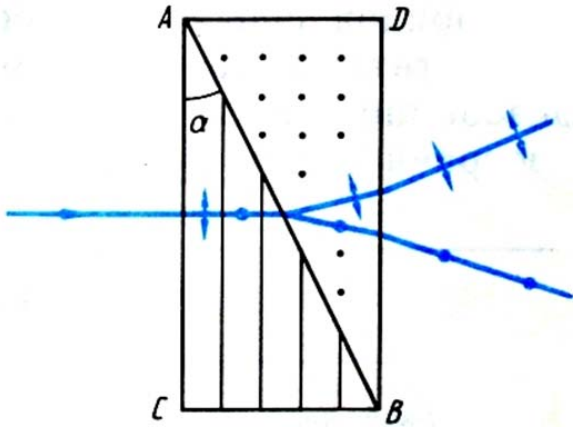

Рис. 1.33. Призма Волластона

Для получения поляризованного света используют также устройства, действие которых основано на явлении дихроизма. Это явление заключается в зависимости поглощения света от направления световых колебаний. Сильным дихроизмом обладают кристаллы турмалина, в которых обыкновенные лучи поглощаются значительно сильнее необыкновенных. При толщине пластинки турмалина в 1 мм выходящий из нее свет будет практически полностью поляризован. Для некоторых участков спектра необыкновенные лучи в турмалине также испытывают сильное поглощение. Это ограничивает применение турмалина в качестве поляризатора.

На явлении дихроизма основано и действие поляроидов. Поляроид представляет собой пленку целлулоида или другого прозрачного материала, в которую определенным образом вкраплены микроскопические кристаллики сильно дихроичного вещества, чаще всего герапатита или других родственных ему соединений. Можно получить пленки большой площади, обеспечивающие высокую степень поляризации проходящего света.

4.2.5.4. Искусственная оптическая анизотропия

Многие оптически изотропные вещества состоят из анизотропных молекул или других структурных элементов, ориентированных в пространстве хаотическим образом. В результате какого-либо внешнего воздействия, создающего в пространстве физически выделенное направление, вещество может стать макроскопически анизотропным.

Брюстером в 1815 г. было открыто двойное лучепреломление при механических деформациях. При одностороннем растяжении или сжатии прозрачного изотропного тела, например, стекла, направление деформации становится выделенным и играет роль оптической оси. Опыт показывает, что разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей пропорциональна механическому напряжению, возникающему в теле, причем эта разность может иметь разный знак в зависимости от вещества. Кроме того, n_o и n_e зависят от длины волны света, вследствие чего при наблюдении в белом свете деформированное тело между скрещенными поляризаторами оказывается пестро раскрашенным. Распределение окраски служит хорошим качественным признаком распределения напряжений в теле. Это находит применение при исследовании распределений механических напряжений в сложных конструкциях.

Чрезвычайно большое значение в науке и технике имеет возникновение оптической анизотропии во внешнем электрическом поле. Это явление, которое можно наблюдать в жидкостях и газах, было открыто Керром в 1875 году. Схема наблюдения эффекта Керра приведена на рис. 1.34. Заполненный исследуемым веществом конденсатор помещают между скрещенными поляризаторами P_1 и P_2, поэтому в отсутствие напряжения на конденсаторе свет через систему не проходит. При подаче на конденсатор напряжения между его обкладками возникает электрическое поле, вследствие чего ве-

Репозиторий БГАТУ

щество становится оптически анизотропным с оптической осью, направленной вдоль поля. Выходящий из конденсатора свет оказывается эллиптически поляризованным и частично проходит через анализатор P_2. С помощью компенсатора K можно измерить разность фаз, возникающую между обыкновенным и необыкновенным лучами, и тем самым определить разность показателей преломления $n_e - n_o$ исследуемого вещества в электрическом поле. Опыт показывает, что:

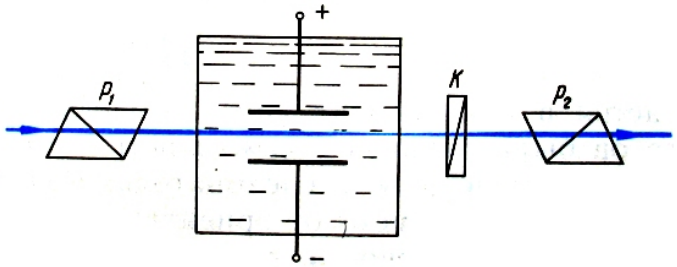

Рис. 1.34. Схема наблюдения эффекта Керра

$$n_e - n_o = KE^2,$$

где K — коэффициент пропорциональности; E — модуль напряженности электрического поля.

Разность фаз, приобретаемая лучами на пути l:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l\left(n_e - n_o\right) = 2\pi B l E^2,$$

где $B = \frac{K}{\lambda}$ — постоянная Керра, характеризующая вещество. Ее значения для разных веществ находятся в широких пределах. Наибольшим значением постоянной Керра обладает нитробензол, что широко используется в технических приложениях эффекта Керра. Если, например, конденсатор имеет длину l = 5 см и расстояние между его обкладками d = 1 мм, то при напряжении на конденсаторе U = 1500 В разность фаз необыкновенного и обыкновенного лучей примет значение $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У других жидкостей и газов B значительно меньше, чем у нитробензола. Для большинства веществ постоянная Керра положительна, хотя для некоторых веществ (спирт, этиловый эфир) $B < 0$.

С молекулярной точки зрения причиной оптической анизотропии вещества в электрическом поле является анизотропия самих молекул. Такие анизотропные молекулы в поле световой волны обнаруживают большую или меньшую поляризуемость в зависимости от их ориентации к световому вектору волны. Однако в обычных условиях молекулы среды расположены хаотически, так что при распространении в среде волны с любым направлением светового вектора она будет встречать примерно равные количества одинаково ориентированных молекул. В результате среда макроскопически ведет себя как изотропная. Наложение достаточно сильного электрического поля вызывает преимущественную ориентацию молекул, некоторое направление в среде оказывается направлением с большей поляризуемостью, чем у других, и среда становится анизотропной.

Большое прикладное значение эффекта Керра обусловлено его малой инерционностью (~10^{-10} с). Ячейка Керра, т. е. конденсатор с жидкостью, помещенный между скрещенными поляризаторами, может служить в качестве быстродействующего затвора и модулятора света. Керровские затворы и модуляторы света применяются для управления работой лазеров, скоростной фотосъемки, оптической локации.

Эффект, аналогичный эффекту Керра, наблюдается и в магнитном поле. В сильном магнитном поле среда ведет себя как одноосный кристалл с оптической осью, параллельной индукции $\vec{B}$ внешнего магнитного поля. Разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей определяется выражением:

$$n_e - n_o = DB^2,$$

где B — индукция магнитного поля; D — коэффициент пропорциональности.

4.2.5.5. Вращение плоскости поляризации

Изучая явление двойного лучепреломления в кварце, Араго в 1811 году обнаружил, что пластинка кварца, вырезанная перпен-

Репозиторий БГАТУ

дикулярно оптической оси, поворачивает плоскость поляризации падающего на нее плоскополяризованного света на некоторый угол. Впоследствии было установлено, что способностью поворачивать плоскость поляризации света обладают многие вещества. Их называют оптически активными веществами. В качестве примера можно привести скипидар, камфару, никотин, раствор сахара, киноварь и т. д.

Направление поворота плоскости поляризации принято определять относительно наблюдателя, который смотрит навстречу световому лучу. Вращение называется правым (положительным), если плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелке (вправо), и левым (отрицательным), если она поворачивается против часовой стрелки.

Опыты показали, что величина угла поворота ψ плоскости поляризации пропорциональна длине пути луча l в оптически активной среде:

$$\psi = \psi_0 l,$$

где ψ_0 — коэффициент пропорциональности, зависящий от рода вещества, его агрегатного состояния, температуры и длины волны света. Для растворов:

$$\psi = [\psi_0] l d,$$

где d — концентрация растворенного оптически активного вещества; $[\psi_0]$ — удельная вращательная способность.

Кварц и другие оптически активные вещества существуют в двух модификациях: правовращающей и левовращающей, причем при одинаковой толщине слоя вещества величина угла поворота плоскости поляризации одинакова для обеих модификаций. Френель показал, что поворот плоскости поляризации есть проявление особого кругового двойного лучепреломления, вследствие которого две волны, которые распространяются в оптически активной среде с разными скоростями, поляризованы не линейно, как при обычном двойном лучепреломлении, а по кругу. Согласно гипотезе Френеля волны с правой и левой круговыми поляризациями распространяются в оптически активной среде с разными фазовыми скоростями. Линейно поляризованную световую волну со световым вектором $\vec{E}$ можно представить себе как результат наложения двух волн, одна из которых поляризована по правому

кругу со световым вектором $\vec{E}_{пр}$, а вторая — по левому кругу с вектором $\vec{E}_{л}$. Если скорости распространения этих волн $v_{пр}$ и $v_{л}$ равны, то число оборотов векторов $\vec{E}_{пр}$ и $\vec{E}_{л}$ при прохождении слоя вещества будет одинаковым, и результирующее колебание светового вектора будет совершаться вдоль прежнего направления. При $v_{пр} \neq v_{л}$ число оборотов векторов $\vec{E}_{пр}$ и $\vec{E}_{л}$ будет различным при прохождении слоя вещества. В итоге они повернутся на разные углы $\varphi_{пр}$ и $\varphi_{л}$ (рис. 1.35), что приведет к повороту результирующего вектора $\vec{E}$ на некоторый угол ψ.

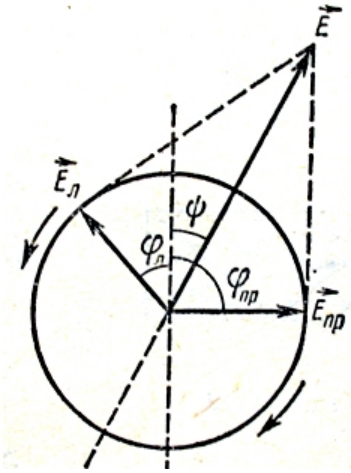

Рис. 1.35. Круговое двойное лучепреломление

Приборы, предназначенные для определения угла поворота плоскости поляризации, называются поляриметрами. Поляриметр, используемый для определения концентрации сахара в растворе по углу поворота плоскости поляризации, называется сахариметром. Методы, основанные на явлении оптической активности, дают возможность обнаружить различие в коэффициентах преломления с точностью $\Delta n \sim 10^{-11}$.

Фарадеем было обнаружено вращение плоскости поляризации при распространении света в оптически неактивной среде, возни-

Репозиторий БГАТУ

кающее под действием магнитного поля. Это явление получило название эффекта Фарадея.

Схема опыта для наблюдения этого эффекта представлена на рис. 1.36. Исследуемое вещество помещается внутрь соленоида, находящегося между скрещенными поляризаторами. Если по катушке не течет ток, свет через систему не проходит. Если катушку подсоединить к источнику тока, то в ней возникает магнитное поле, и свет проходит через поляризаторы. Анализ прошедшего света показывает, что он остается плоскополяризованным, однако плоскость его поляризации повернута по отношению к плоскости поляризации падающего на вещество света. Угол поворота плоскости поляризации пропорционален длине пути l в веществе и индукции магнитного поля B:

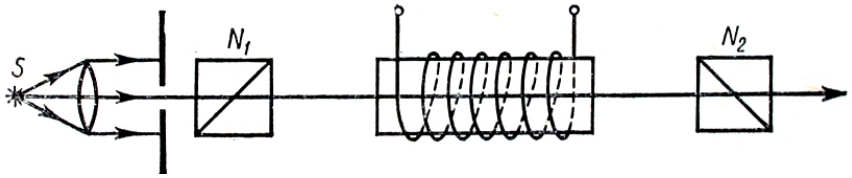

Рис. 1.36. Схема наблюдения эффекта Фарадея

$$\psi = RlB,$$

где коэффициент R называется постоянной Верде. Эффект Фарадея является следствием прецессии электронных орбит в атомах вещества в магнитном поле, приводящей к тому, что волны с правой и левой круговыми поляризациями распространяются с разными скоростями.

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

4.3.1. КОГЕРЕНТНОСТЬ СВЕТОВЫХ ВОЛН

Строго говоря, две плоские отраженные волны, распространяющиеся в одном направлении, смогут интерферировать, если будут соблюдены условия *временной* и *пространственной* когерентности.

Вспомним, что когерентностью называется согласованное протекание нескольких колебательных или волновых процессов. Степень согласованности может быть различной. Соответственно, можно ввести понятие *степени когерентности* двух волн.

Различают временную и пространственную когерентности.

Понятие когерентности является относительным: две волны могут вести себя как когерентные при наблюдении с одним прибором (с малой инерционностью) и как некогерентные при наблюдении с другим прибором (с большой инерционностью).

Временная когерентность

Для характеристики когерентных свойств волн вводится *время когерентности* $t_{ког}$, которое определяет такое время, за которое случайное изменение фазы достигает значения ~π. За время $t_{ког}$ колебание как бы забывает свою первоначальную фазу и становится некогерентным по отношению к самому себе.

Воспользовавшись понятием когерентности, можно сказать, что когда $t_{прибора} >> t_{ког}$, то прибор не зафиксирует интерференцию. Если же $t_{прибора} << t_{ког}$, то прибор (глаз, фотопластинка и пр.) обнаружит четкую интерференционную картину.

Соответственно, *длиной когерентности* называется расстояние $l_{ког} = ct_{ког}$, на которое перемещается волна за время $t_{ког}$ Длина когерентности есть то расстояние, на котором случайное изменение фазы достигает значения ~π. Для получения интерференционной картины путем деления естественной волны на две части необходимо, чтобы оптическая разность хода была меньше, чем длина когерентности. Это требование ограничивает число видимых интерференционных полос. С увеличением номера полосы m разность хода растет, поэтому четкость полос делается все хуже и хуже.

Репозиторий БГАТУ

При интерференции немонохроматических волн время когерентности и длина когерентности определяются выражениями: $t_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$ и $l_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Пространственная когерентность

Пусть источник имеет угловые размеры φ (рис. 1.37). Если $\varphi < \frac{\lambda}{d}$, то можно наблюдать интерференцию. Отсюда следует, что наибольшее расстояние между щелями, при котором можно наблюдать интерференцию от источника с угловым размером φ, определяется из условия $d < \frac{\lambda}{\varphi}$.

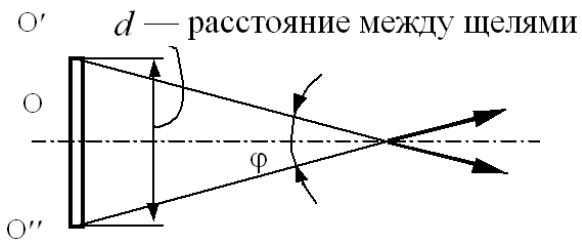

Рис. 1.37. К понятию пространственной когерентности

Будем называть длиной пространственной когерентности или радиусом когерентности некое расстояние $\rho_{\text{ког}}$, при смещении на которое вдоль некой волновой поверхности случайное изменение фазы достигает значения ~π:

$$\rho_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{\varphi}.$$

Для Солнца, например, φ ~ 0,01 рад; λ ~ 0,5 мкм ⇒ $\rho_{\text{ког}}$ = 0,05 мкм.

По мере удаления от источника степень пространственной когерентности возрастает.

Вследствие ограничений, накладываемых временной и пространственной когерентностями, интерференция при освещении тонкой

пластинки наблюдается только в том случае, если толщина пластинки не превышает нескольких сотых долей миллиметра. При освещении светом с большой степенью когерентности интерференция наблюдается и при отражении от более толстых пластинок и пленок.

Пример. Оптическая разность хода не должна превышать длину когерентности $\Delta < \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$

Для плоскопараллельной пластины должно выполняться условие: $2b\sqrt{n_2^2 - \sin^2\Theta_1} - \frac{\lambda_0}{2} < \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}$ или $b < \frac{\lambda_0\left(\lambda_0/\Delta\lambda_0 + 1/2\right)}{2\sqrt{n_2^2 - \sin^2\Theta_1}}$.

В полученном соотношении можно пренебречь $\frac{1}{2}$ по сравнению с $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}$

Выражение $\sqrt{n_2^2 - \sin^2\Theta_1}$ имеет величину порядка единицы. В итоге получим: $b < \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda_0}$, т. е. удвоенная толщина пластинки должна быть меньше длины когерентности.

Оценим это значение. Положим λ_0 = 5000 Å и Δλ = 20 Å. Предельное значение толщины — $\frac{5000^2}{2 \cdot 20} \approx 6 \cdot 10^5\ \text{Å} = 0,06\ \text{мм}$.

4.3.2. ПРИНЦИП ГОЛОГРАФИИ

Голографией называется метод записи и последующего восстановления структуры световых волн, основанный на явлениях интерференции и дифракции когерентных световых пучков. В то время как обычная фотография дает лишь плоское изображение, голография позволяет полностью восстанавливать рассеянные предметами световые волны, создавая иллюзию реальности наблюдаемых предметов.

Идея голографии была предложена Габором в 1947 г. Однако практически осуществить его идею удалось лишь в 1962 г. Лейту и Упатниексу. Это обусловлено тем, что голографии требуются источники света с высокой степенью временной и пространственной когерентности. Такие источники — лазеры — были созданы в 1960 г.

При освещении предмета от него распространяется рассеянная волна. Отделившись от предмета, волна несет всю информацию

Репозиторий БГАТУ

о форме и других параметрах предмета. Если любым путем создать такую же волну, она вызовет такой же эффект, как и исходная волна, рассеянная предметом. В этом и заключается идея голографии.

Пусть предмет *А* (рис. 1.38) освещается пучком параллельных лучей от лазера. Рассеянные предметом лучи попадают на фотопластинку *Г*. По степени почернения пластинки после проявления можно судить об амплитуде волны в тех местах пластинки, которых эта волна достигла. Поэтому экспонированная и проявленная пластинка сохраняет информацию об амплитуде волны. Однако на пластинке не содержится информация о фазе волны, необходимая для восстановления этой волны. Габор показал, что информацию о фазе волны можно получить и записать на той же фотопластинке *Г*, если осветить ее вторым пучком от того же лазера и заставить этот пучок интерферировать с пучком от предмета. Практически это достигается расширением пучка света от лазера и разделением получившегося пучка на два. Один из них, называемый предметным, направляется на предмет и рассеивается им, другой — опорный — отражается плоским зеркалом *S*. Оба получившихся пучка дают на фотопластинке интерференционную картину, которая фотографируется. Полученная фотография называется голограммой. Голограмма представляет собой сложную и запутанную интерференционную картину. На ней видны и крупные дифракционные кольца, возникающие в результате дифракции света на случайных пылинках в воздухе.

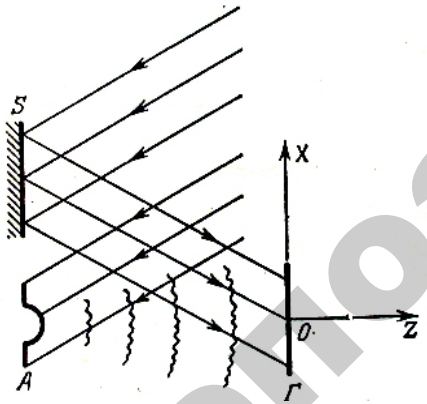

Рис. 1.38. Схема получения голограммы

Интерференционная картина на голограмме содержит всю информацию о распределении амплитуд и фаз в предметной волне. Освещение голограммы восстанавливающей волной, идентичной с опорной, вызывает появление дифрагировавших волн, одна из которых представляет собой копию волны, рассеянной предметом. Попадая в глаз, она создает такое же ощущение, как и при непосредственном рассматривании предмета.

Рассмотрим простейший случай голографической записи плоской монохроматической волны (рис. 1.39а). Пусть такая волна 1 падает на фотопластинку под углом Θ' к нормали. Пусть на ту же фотопластинку одновременно падает по нормали плоская волна 2 (опорная) той же длины волны. Эти волны создадут на пластинке систему интерференционных полос, ориентированных перпендикулярно плоскости чертежа. Как легко видеть, расстояние между соседними интерференционными полосами $d = \dfrac{\lambda}{\sin\Theta'}$. Совокупность этих полос образует дифракционную решетку. Структура зарегистрированной на голограмме интерференционной картины содержит информацию о распределении фаз колебаний в волне 1 (предметной волне).

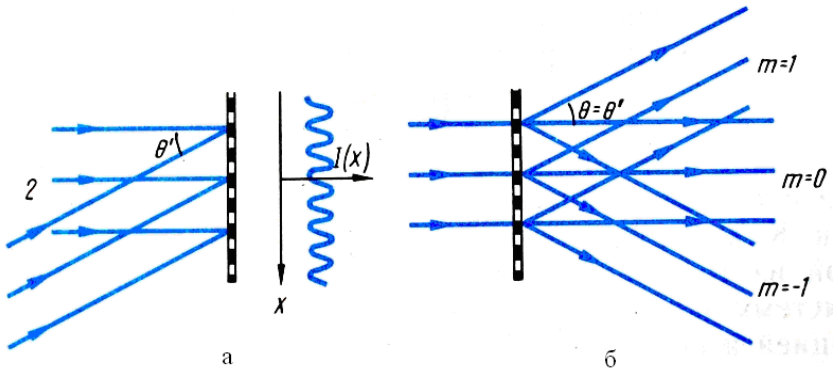

Рис. 1.39. Схема голографической записи плоской монохроматической волны: *а* — создание голограммы; *б* — восстановление предметной волны

Восстановить записанную на голограмму предметную волну 1 можно следующим образом. Направим на голограмму восстанав-

Репозиторий БГАТУ

ливающую волну, идентичную с опорной волной 2, использовавшейся при записи (рис. 1.39б). В результате ее дифракции на дифракционной решетке, образованной интерференционными полосами при получении голограммы, возникают три плоские волны: одна из них соответствует главному дифракционному максимуму с $m = 0$ и распространяется в направлении падающей волны, две же другие соответствуют главным дифракционным максимумам с $m = \pm 1$. Наибольший интерес в голографии представляет волна с $m = 1$. Ее направление определяется условием $d\sin\Theta = \lambda$. Поскольку $d = \frac{\lambda}{\sin\Theta'}$, то $\Theta = \Theta'$, т. е. направление распространения точно такое же, как и у предметной волны 1. Попадая в глаз, восстановленная волна вызовет такое же ощущение, как и волна 1.

Рассеянную предметом волну можно рассматривать как результат наложения плоских монохроматических волн. Каждая из них при интерференции с опорной волной, получаемой из того же лазерного пучка, создает на фотопластинке свою систему интерференционных полос с характерными для нее ориентацией и периодом. После проявления фотопластинки на ней образуется совокупность дифракционных решеток. Каждая из этих решеток на этапе восстановления рассеянной предметом волны формирует соответствующую ей элементарную плоскую волну. Это волна с $m = 1$. Все восстановленные элементарные волны находятся в таких же амплитудных и фазовых соотношениях, как и волны при записи голограммы. Их совокупность воссоздает рассеянную предметом световую волну и вызывает те же зрительные образы. Следовательно, в том месте, где находился предмет при записи голограммы, на этапе восстановления возникает мнимое изображение предмета.

Важнейшим свойством голограммы является то, что восстановить предметную волну можно с помощью даже небольшого участка голограммы. Это видно из того, что направления на главные дифракционные максимумы дифракционной решетки не зависят от числа ее штрихов. От него зависит разрешающая способность решетки. Вследствие этого четкость изображения, даваемого частью голограммы, будет хуже.

Здесь кратко изложен лишь принцип голографии. В настоящее время создана целая наука о голографии, результаты которой находят широкое применение. Разработаны методы, позволяющие наблюдать изображения предметов в белом свете. Голограммы можно использовать в качестве комплексных оптических элементов, играющих роль линз, дифракционных решеток, интерференционных фильтров. Метод голографии дает возможность записывать на малом участке голограммы большой объем информации. Разрабатываются ЭВМ с голографической памятью, голографическое телевидение и многое другое. Все это позволяет считать голографию весьма перспективным направлением в физике.

Репозиторий БГАТУ

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ

План лекции 1 «Упругие и электромагнитные волны»

1. Волновое движение. Волновое уравнение и его решение.
2. Свойства электромагнитных волн. Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны.
3. Объемная плотность энергии электромагнитного поля. Плотность потока энергии (вектор Умова–Пойнтинга). Интенсивность монохроматической бегущей электромагнитной волны.

Контрольные вопросы

1. В чем отличие волнового движения от любого другого упорядоченного движения?
2. Какая волна называется продольной?
3. Какая волна называется поперечной?
4. Что называется волновой поверхностью?
5. Перечислите простейшие формы волновых поверхностей.
6. Что называется волновым числом?
7. Дайте определение длины волны.
8. Какая волна называется монохроматической?
9. Запишите уравнение плоской монохроматической волны, которая распространяется вдоль оси x.
10. Запишите уравнение сферической монохроматической волны.
11. Запишите одномерное волновое уравнение для однородной изотропной среды, затухание в которой пренебрежимо мало.
12. Представьте уравнение плоской волны в экспоненциальной (комплексной) форме.

План лекции 2 «Волновая природа света»

1. Волновая природа света. Связь между оптическими, электрическими и магнитными характеристиками среды.
2. Когерентность световых волн.
3. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода.

Контрольные вопросы

1. Что называется абсолютным показателем преломления среды?
2. Как связан абсолютный показатель преломления среды с электрическими и магнитными характеристиками среды?
3. Какие волны называются когерентными?
4. Что называется оптической длиной пути?
5. От чего зависит оптическая длина пути?
6. Что такое время когерентности?
7. Что такое длина когерентности?
8. Что называется оптической разностью хода?

План лекции 3 «Явление интерференции»

1. Физические основы явления интерференции.
2. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников.
3. Интерференция в тонких пленках.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление интерференции света?
2. Сформулируйте принцип Гюйгенса.
3. Сформулируйте принцип суперпозиции волн.
4. Запишите условие наблюдения интерференционного максимума.
5. Запишите условие наблюдения интерференционного минимума.
6. Чему равна ширина интерференционной полосы при интерференции от двух когерентных источников?
7. Как изменится интерференционная картина, если на пути одного из интерферирующих лучей поместить прозрачную пластинку с показателем преломления $n > 1$?

Репозиторий БГАТУ

План лекции 4 «Явление дифракции света»

1. Явление дифракции света.
2. Принцип Гюйгенса–Френеля.
3. Метод зон Френеля.
4. Дифракция на круглом отверстии.
5. Дифракция на непрозрачном диске.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление дифракции света?
2. Чем дополнил Френель принцип Гюйгенса?
3. Как строятся зоны Френеля?
4. Чему равен радиус зон Френеля?
5. Запишите условие наблюдения светлого пятна в центре дифракционной картины при дифракции на круглом отверстии.
6. Что называется пятном Пуассона?

План лекции 5 «Явление дифракции»

1. Дифракция Фраунгофера на одной щели.
2. Дифракционная решетка. Вывод условия главных максимумов для одномерной дифракционной решетки.
3. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллах. Формула Вульфа–Брэггов. Понятие о рентгеноструктурном анализе и рентгеновской спектроскопии.

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте схему наблюдения дифракционной картины в случае дифракции Фраунгофера.
2. Запишите условие наблюдения дифракционных минимумов при дифракции Фраунгофера на узкой щели шириной a.
3. Дайте определение, что такое дифракционная решетка.
4. Для чего служит дифракционная решетка?
5. Почему дифракционная решетка разлагает сложный свет в спектр?
6. Запишите формулу Вульфа–Брэггов для определения положений дифракционных максимумов при дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

План лекции 6 «Поляризация света»

1. Естественный и поляризованный свет, основные виды поляризации: линейная, эллиптическая, круговая.
2. Поляризация света при отражении и преломлении на границе раздела двух диэлектриков. Закон Брюстера.
3. Двойное лучепреломление в анизотропных кристаллах. Обыкновенный и необыкновенный лучи, оптическая ось кристалла, главное сечение кристалла.

Контрольные вопросы

1. Какое явление называется двойным лучепреломлением?
2. Какой луч называется обыкновенным? Как он поляризован?
3. Какой луч называется необыкновенным? Как он поляризован?
4. Что называется оптической осью кристалла?
5. Что называется главным сечением кристалла?

План лекции 7 «Поляризация света»

1. Получение линейно поляризованного света с помощью анизотропных кристаллов (призма Николя, поляроид).
2. Анализ линейно поляризованного света. Поляризатор и анализатор. Вывод закона Малюса в идеальном случае. Закон Малюса с учетом потерь в поляризаторе и анализаторе.
3. Вращение плоскости поляризации света.

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте схему призмы Николя. Объясните, для чего нужна призма Николя.
2. Что такое дихроизм?
3. Что называется поляризатором? Что называется анализатором? В чем их отличие?
4. Запишите закон Малюса для плоскополяризованного света.
5. Запишите закон Малюса для естественного света.
6. Нарисуйте схему установки для анализа поляризованного света.

Репозиторий БГАТУ

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.2.1. ШКАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В оптике под светом понимают не только *видимый свет*, но и примыкающие к нему широкие диапазоны спектра электромагнитного излучения — *инфракрасный* ИК и *ультрафиолетовый* УФ. Оптический диапазон — это только небольшой участок известного на сегодня спектра электромагнитного излучения.

На рис. 1.40 приведена так называемая шкала электромагнитных волн. Границы диапазонов проведены условно.

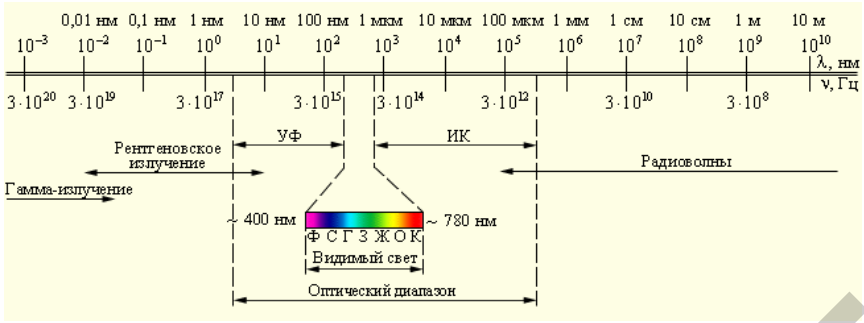

Рис. 1.40. Шкала электромагнитных волн

Радиоволны — мы умеем генерировать искусственно при помощи радиотехнических устройств, в основе которых лежит так называемый колебательный контур, представляющий собой соединение емкости и индуктивности.

Волны всех других диапазонов (кроме радио-) могут быть получены только путем использования *естественных генераторов*, каковыми являются *молекулы*, *атомы*, *ядра атомов* и *отдельные элементарные частицы*.

ИК-диапазон — волны излучаются преимущественно за счет колебаний атомов в молекулах.

Видимый свет — излучается не молекулами, а отдельными возбужденными атомами. Это, можно сказать, *атомарный* свет.

Рентгеновские лучи излучаются или за счет взаимодействия быстрых электронов с атомами и ядрами атомов (в рентгеновских трубках, например), или за счет излучения ядер атомов, когда последние предварительно возбуждены.

Гамма-лучи — излучаются возбужденными ядрами атомов, а также при взаимодействии и превращениях элементарных частиц.

5.2.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

Наиболее типичным и распространенным примером интерференции света в природе является интерференция в тонких пленках (мыльные пузыри, радужная пленка нефти на воде и т. д.).

Пусть на прозрачную тонкую пластинку толщиной d падает плоская световая волна под углом α (рис. 1.41).

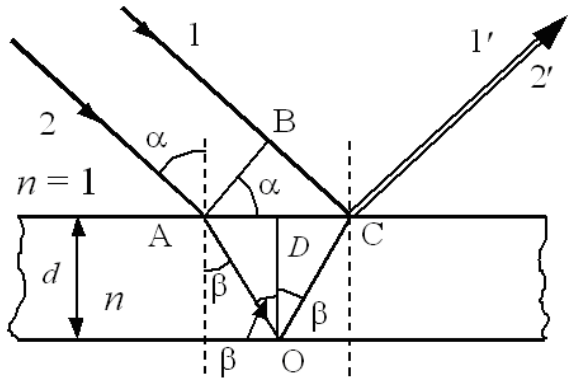

Рис. 1.41. К выводу оптической разности хода при интерференции света в плоскопараллельной пластине

Разность хода, приобретенная лучами 1 и 2 до того, как они сойдутся в точке С, будет равна: $\Delta = nS_2 - S_1$, где $S_1 = BC$; $S_2 = AO + OC$.

Но $AO = OC = \dfrac{d}{\cos\beta}$, поэтому $S_2 = \dfrac{2d}{\cos\beta}$.

В свою очередь $BC = AC \cdot \sin\alpha$, а $AC = 2AD = 2d \cdot \operatorname{tg}\beta$, поэтому $S_1 = 2d \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\alpha$.

Репозиторий БГАТУ

Воспользовавшись приведенными равенствами и соотношением $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ (закон преломления света), получим, что:

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos\beta} - 2d\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\sin\beta\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2dn}{\cos\beta}\left(1-\sin^2\beta\right) = \frac{2dn}{\cos\beta}\cos^2\beta = 2dn\cos\beta =$$
$$= 2dn\sqrt{1-\sin^2\beta} = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}.$$

Для получения окончательной разности хода необходимо учесть, что световые волны, как и всякие другие волны, отражаясь от оптически *более плотной* среды (луч 1 в точке *C*) получают дополнительную разность фаз, равную π, т. е. возникает добавочная разность хода равная $\frac{\lambda}{2}$. При отражении от среды, оптически менее плотной, (точка *O*) скачка фазы не происходит.

Таким образом, при падении на пластинку плоской волны образуются две отраженные волны, разность хода которых определяется формулой:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

Если предположить, что лучи 1 и 2 когерентны, в результате падения на плоскопараллельную пленку пучка лучей в отраженном и проходящем свете на экране получаются чередующиеся темные и светлые полосы в случае монохроматического света и цветные полосы в случае белого света.

Полосы равного наклона

На практике интерференцию от плоскопараллельной пластинки наблюдают, поставив на пути отраженных пучков линзу, которая собирает лучи в одной из точек экрана, расположенного в фокальной плоскости линзы (рис. 1.42).

Освещенность в точках экрана зависит от разности хода лучей, приходящих в эти точки.

При $\Delta = m\lambda_0$ получаются максимумы интенсивности.

При $\Delta = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda_0$ — минимумы интенсивности.

Если мы осветим пластинку рассеянным монохроматическим светом, то получим следующую картину. В рассеянном свете имеются лучи самых разнообразных направлений.

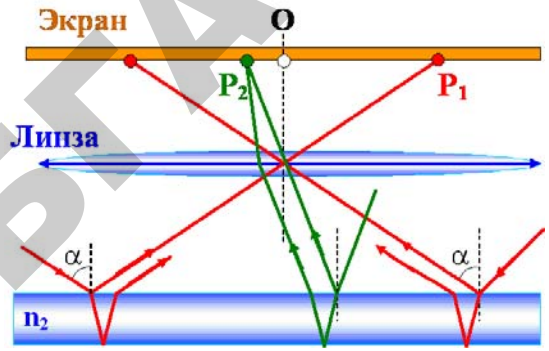

Рис. 1.42. Полосы равного наклона

Лучи, параллельные плоскости рисунка и падающие на пластинку под углом 1, после отражения от обеих поверхностей пластинки соберутся линзой в точке P_1 и создадут в этой точке освещенность, определяемую значением оптической разности хода. Лучи, идущие в других плоскостях, но падающие на пластинку под тем же углом, соберутся линзой в других точках, отстоящих от центра экрана на такое же расстояние, как и точка P_1.

Освещенность во всех этих точках будет одинакова. Таким образом, лучи, падающие на пластинку под одинаковым углом, создадут на экране одинаково освещенные точки, расположенные по окружности с центром в *O*.

Лучи, падающие под другим углом, создадут на экране совокупность одинаково освещенных точек (значение освещенности зависит от угла падения лучей, т. к. он влияет на величину оптической разности хода Δ), расположенных по окружности другого радиуса.

В результате на экране будет наблюдаться система чередующихся светлых и темных полос с общим центром в точке *O*.

Каждая полоса образована лучами, падающими на пластинку под одинаковым углом. *Поэтому получающиеся в этих условиях интерференционные полосы носят название* ***полос равного наклона***.

Репозиторий БГАТУ

Положение максимумов интенсивности зависит от длины волны света. Поэтому в белом свете получается совокупность смещенных друг относительно друга полос, образованных лучами разных цветов, и интерференционная картина приобретает радужную окраску.

Возможность наблюдения интерференционной картины в белом свете определяется способностью глаза различать оттенки света близких длин волн. Лучи, отличающиеся по длине волны более чем на 20 Å, средний глаз уже может различить по цвету (поэтому мы с вами и брали $\Delta\lambda_0 = 20$ Å).

Интерференция в пленках переменной толщины

Этот тип интерференции можно наблюдать, если:

1) взять пластинку в виде клина с углом при вершине φ (рис. 1.43);

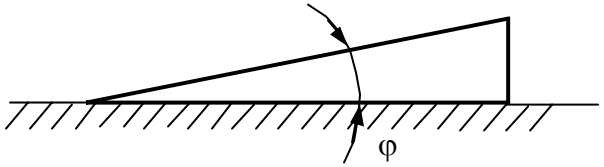

Рис. 1.43. Интерференция в клине (пленке переменной толщины)

2) положить одну плоскопараллельную стеклянную пластинку на другую, а под один из концов верхней пластины положить небольшой предмет так, чтобы между пластинками образовался воздушный клин.

При малом угле φ разность хода лучей можно с достаточной степенью точности вычислить по формуле: $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda}{2}$, беря в качестве d толщину пластинки в месте падения на нее лучей. Поскольку разность хода для лучей, отразившихся от различных участков клина, теперь неодинакова, освещенность экрана будет неравномерной, на экране появятся светлые и темные полосы. Каждая из таких полос возникает в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной, вследствие чего их называют *полосами равной толщины*.

Если луч падает на воздушный клин нормально ($\sin\alpha = 0$) и $n_{\text{возд}} = 1$, $\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$. В вершине клина $d = 0$, поэтому $\Delta = \frac{\lambda}{2}$. Значит, здесь будет наблюдаться темная полоса (минимум).

Первая светлая полоса (максимум) будет при $\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}$ ($m = 1$) или $\Delta = \lambda$, но $\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}$. Приравниваем и получаем:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = \lambda \Rightarrow 2d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4}.$$

Следовательно, толщина воздушного клина в этом месте (в месте максимума) будет равна $\frac{\lambda}{4}$. Вторая светлая полоса будет находиться там, где толщина воздушного клина равна $\frac{3\lambda}{4}$.

Полосы равной толщины могут быть прямыми линиями, концентрическими окружностями или иметь любую другую форму в зависимости от расположения точек, соответствующих d = const. Угол клина должен быть очень мал, иначе полосы равной толщины будут накладываться друг на друга и их нельзя будет различить.

Сопоставим два рассмотренных случая интерференции при отражении от тонких пленок. Полосы равного наклона получаются при освещении пластинки постоянной толщины (d = const) рассеянным светом, в котором содержатся лучи различных направлений (α изменяется в широких пределах). Локализованы полосы равного наклона в бесконечности. Полосы равной толщины наблюдаются при освещении пластинки непостоянной толщины (d = var) параллельным пучком света (α = const). Локализованы полосы равной толщины вблизи пластинки.

В реальных условиях, например, при наблюдении радужных цветов на мыльной или масляной пленке, изменяется как угол падения лучей, так и толщина пленки. В этом случае наблюдаются полосы смешанного типа.

Дополнение. Для клина: чем больше угол клина φ, тем быстрее изменяется разность хода лучей вдоль клина и тем чаще будут расположены интерференционные полосы.

Репозиторий БГАТУ

При использовании белого света интерференционные полосы несколько расширяются, приобретая радужную окраску. Это объясняется зависимостью разности хода от длины волны λ: в каждой светлой полосе максимумы для различных длин волн располагаются раздельно (то же самое происходит для различных длин волн в каждой темной полосе).

В реальных условиях у пленки со случайным распределением толщины интерференционные полосы могут иметь самую разнообразную криволинейную форму. При освещении этой пленки белым светом возникает весьма причудливая по форме и расцветке интерференционная картина. Такую картину дают мыльные пузыри, нефтяные пятна на поверхности воды, крылья мелких насекомых, жировые налеты на стеклах и другие тонкие пленки толщиной порядка 10^{-7} см.

5.2.3. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СВЕТА

Интерферометры

Интерферометрами *называют оптические приборы, действие которых основано на явлении интерференции света.*

Интерферометры предназначены для точных измерений длин, углов, характеристик оптических поверхностей, показателей преломления сред или их изменений, спектрального состава исследуемого излучения и т. п. Наблюдение интерференционных полос при этом становится не целью исследования, а средством проведения измерений. В зависимости от характера решаемой задачи к оптической схеме интерферометра и его конструкции предъявляются различные требования.

Для измерения показателей преломления газов и жидкостей предназначен интерферометр Релея, в котором, как и в опыте Юнга, использован метод деления волнового фронта. Источник в виде узкой щели S расположен в фокальной плоскости линзы L_1 (рис. 1.44).

Выходящий из источника параллельный пучок идет через диафрагму с двумя щелями S_1 и S_2, параллельными щели S. Пучки света от S_1 и S_2 проходят через кюветы K_1 и K_2 и образуют интерференционные полосы в фокальной плоскости линзы L_2. Введение кювет, содержащих исследуемые газы или жидкости, требует значительного расстояния между S_1 и S_2, вследствие чего интерференционные полосы располагаются тесно, и для их наблюдения

требуется большое увеличение. Для этой цели удобен цилиндрический окуляр в виде тонкой стеклянной палочки, ось которой параллельна полосам. Кюветы занимают только верхнюю половину пространства между линзами L_1 и L_2, а внизу свет идет вне кювет. Благодаря этому возникает вторая система интерференционных полос с таким же расстоянием между полосами, которая может служить шкалой для отсчета. Верхняя система полос сдвинута относительно нижней, так как при прохождении света через кюветы появляется добавочная разность хода $\Delta = (n_1 - n_2)l$, где n_1 и n_2 — коэффициенты преломления веществ, заполняющих кюветы; l — длина кюветы. По этому смещению определяют $n_2 - n_1$. В один из пучков ставится компенсатор, с помощью которого можно добиваться, чтобы плавно изменялась оптическая разность хода, противоположная по знаку той, которая обусловлена прохождением света через кюветы. Совпадение двух систем полос используется для установления полной компенсации разности хода. Визуально можно установить совпадение с точностью до 1/40 порядка, что при l = 0,1 м, λ = 550 нм позволяет обнаружить изменение $n_2 - n_1$ около 10^{-7}.

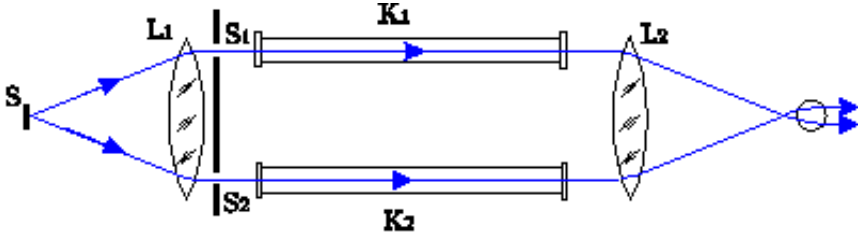

Рис. 1.44. Схема интерферометра Релея (вид сверху)

Получение диэлектрических зеркал

Рассмотрим идею получения диэлектрических зеркал. Пусть на поверхность стекла (или кварца), показатель преломления которого равен n_0, нанесен слой прозрачного диэлектрика с показателем преломления $n > n_0$. Толщина слоя l выбрана так, чтобы его оптическая толщина nl была равна $\frac{\lambda_0}{4}$, т. е. четверти длины волны в вакууме.

Репозиторий БГАТУ

При этом отражательная способность поверхности возрастает. В самом деле, волны, отраженные (при нормальном падении) передней и задней границами слоя, находятся в фазе, так как отставание фазы второй волны на π, накопившееся при ее распространении внутри пленки туда и обратно, компенсируется изменением фазы первой волны на π при ее отражении от оптически более плотной среды. Покрытия из TiO_2 (n = 2,45) или сернистого цинка (n = 2,3) дают коэффициент отражения $R \approx 0{,}3$. Но добиться более высоких коэффициентов отражения таким способом практически невозможно. Эффект можно значительно усилить, используя последовательность чередующихся диэлектрических слоев с высоким n_1 и низким n_2 показателями преломления (рис. 1.45).

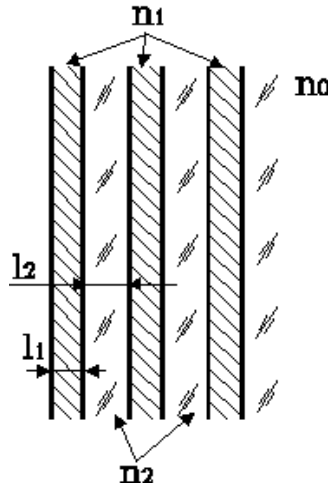

Рис. 1.45. Схема многослойного диэлектрического покрытия

$$\left(n_1 > n_0,\ n_1 > n_2, n_1 \cdot l_1 = n_2 \cdot l_2 = \frac{\lambda_0}{4} \right)$$

Если оптическая толщина всех слоев одинакова и равна $\frac{\lambda}{4}$ $\left(n_1 l_1 = n_2 l_2 = \frac{\lambda_0}{4} \right)$, то отраженные их границами волны находятся, как

легко заметить, в одинаковой фазе и в результате интерференции усиливают друг друга. Такие многослойные диэлектрические покрытия дают высокую отражательную способность только в ограниченной области длин волн вблизи значения λ_0, для которого оптическая толщина слоев равна $\frac{\lambda_0}{4}$. Обычно наносят от 5 до 15 слоев сульфида цинка (n_1 = 2,3) и криолита (n_2 = 1,35). С семью слоями легко добиться R = 0,9 в спектральной области шириной порядка 50 нм. Для получения коэффициента отражения R = 0,99 (такие зеркала используются в лазерных резонаторах) надо нанести 11–13 слоев.

Просветление оптики

Нанесением на поверхность стекла диэлектрических покрытий можно решить и противоположную задачу уменьшения коэффициента отражения (*просветление оптики*). Это очень важно для сложных оптических систем с большим числом преломляющих поверхностей, где даже при малом коэффициенте отражения ($R \approx 0{,}04$) в итоге накапливаются значительные потери света. Очевидно, что нанесенный на стекло слой диэлектрика оптической толщины $n \cdot l = \frac{\lambda_0}{4}$ при $n < n_0$ приведет к уменьшению R, так как отраженные от его передней и задней границ волны находятся в противофазе. При $n = \sqrt{n_0}$ весь падающий по нормали свет с длиной волны λ_0 проходит через границу. Использование более сложных трехслойных покрытий позволяет получить сравнительно высокое пропускание в широкой области спектра.

Вопросы для самоконтроля

1. Как происходит интерференция в тонких пленках?
2. Что такое полосы равного наклона? Как они возникают?
3. Чему равна оптическая разность хода при интерференции в плоскопараллельной пластинке?
4. Что такое полосы равной толщины?

Репозиторий БГАТУ

5. В чем заключается и на чем основано просветление оптики?

6. В чем состоит идея получения диэлектрических зеркал?

7. Можно ли использовать диэлектрические зеркала для получения изображения при освещении белым светом?

8. На чем основан принцип работы двулучевого интерферометра?

9. Что представляет собой интерферометр Майкельсона?

10. Какие измерения можно выполнять с помощью интерферометра Релея?

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

5.3.1. УПРУГИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение незатухающих колебаний источника имеет вид $\xi = 3\cos 500\xi\pi t$. Скорость распространения колебаний $c = 320$ м/с.

Найти: а) смещение ξ_1 точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 6{,}4$ м от источника колебаний, спустя время $t_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ с после начала колебаний; б) на какое расстояние продвинется фронт волны к моменту времени $t_2 = 0{,}2$ с?

Решение. Источник колебаний порождает волну. Предположим, что волна плоская и распространяется без затухания. Запишем уравнение плоской волны без затухания: $\xi = A \cdot \cos(\omega \cdot t - kx + \alpha)$, из условия задачи: $A = 3$, начальная фаза $\alpha = 0$, $\omega = 500 \cdot \pi$. Следовательно, волна, возбуждаемая источником, будет описываться уравнением: $\xi = 3 \cdot \cos(500\pi \cdot t - kx)$. Найдем волновое число k. По определению $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot \nu}{\lambda \cdot \nu} = \frac{\omega}{c}$, где c — фазовая скорость волны. Тогда уравнение волны можно записать следующим образом: $\xi = 3 \cdot \cos\left(500\pi \cdot t - \frac{500\pi}{320} \cdot x\right)$. Найдем, на какое расстояние продвинется фронт волны к моменту времени $t_2 = 0{,}2$ с:

$$S = c \cdot t_2 = 320 \cdot 0{,}2 = 64 \text{ (м)}.$$

Найдем смещение точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 6{,}4$ м от источника колебаний, спустя время $t_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ с после начала колебаний.

Подставим значения x_1 и t_1 в уравнение волны:

$$\xi(x_1, t_1) = 3 \cdot \cos\left(500\pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-2} - \frac{500\pi}{320} \cdot 6{,}4\right) = 3 \cdot \cos 4{,}5\pi = 0\,.$$

Пример 2. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$ и магнитной проницаемостью μ, близкой

Репозиторий БГАТУ

к единице, распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m = 0{,}6$ В/м.

Найти: а) амплитуду напряженности магнитного поля — H_m (А/м); б) фазовую скорость распространения волны — v(м/с).

Решение. Фазовая скорость распространения электромагнитной волны в однородной среде равна $v = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$, где c — скорость света в вакууме. Так как $\mu \approx 1$, то:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{2{,}98 \cdot 10^8}{\sqrt{6}} = \frac{2{,}98 \cdot 10^8}{2{,}45} = 1{,}22 \cdot 10^8 \ (\text{м/с}) \cdot$$

Найдем амплитуду напряженности магнитного поля. В гармонической электромагнитной волне амплитудные значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны между собой соотношением: $E_m \sqrt{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} = H_m \sqrt{\mu \cdot \mu_0}$, где ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Получим:

$$H_m = E_m \sqrt{\frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}{\mu \cdot \mu_0}} = 0{,}6 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}} = 0{,}6 \cdot \sqrt{4{,}2296 \cdot 10^{-5}} = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \ (\text{А/м}) \cdot$$

Аудиторные задачи

1. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля равна 1 мА/м. Определить амплитуду напряженности электрического поля.

2. В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля равна 5 мА/м. Определить интенсивность волны.

3. Показать, что плоская монохроматическая волна $E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ удовлетворяет волновому уравнению $\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2} \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$, где v — фазовая скорость электромагнитных волн.

Задачи для индивидуальных заданий

В квадратных скобках даны номера задач по книге «Ветрова, В. Т. Сборник задач по физике : с индивидуал. заданиями : учебн. пособие для вузов. — Минск : Выш. шк., 1991. — 386 с. : ил.». Там же приведены ответы ко всем задачам.

I уровень

Задача 1 [17.1]. Колебания частотой ν и амплитудой A распространяются в однородной среде. Длина волны равна λ, фазовая скорость — c, максимальная скорость частиц воздуха — v_{max}. Найти неизвестные величины согласно номеру задания.

Номер задания	ν, Гц	A, мм	λ, м	c, м/с	v_{max}, м/с
1	?	0,3	0,825	?	0,754
2	?	0,5	1,1	330	?
3	450	?	0,75	?	0,68
4	5000	0,46	?	350	?
5	3500	?	0,4	?	3,3
6	2200	?	?	836	4,15
7	?	0,28	0,08	320	?
8	80	0,25	5,0	?	?
9	?	0,42	0,12	?	7,92
10	140	0,56	?	910	?
11	1100	?	0,64	?	3,456
12	?	0,32	0,525	420	?
13	?	0,26	0,5	600	?
14	?	0,15	0,84	?	0,707
15	630	?	?	756	1,425
16	4800	0,2	?	720	?
17	?	0,4	0,26	520	?
18	86	?	4,2	?	0,433
19	100	1,15	?	330	?
20	?	0,6	1,2	?	1,131
21	750	0,7	?	825	?
22	5000	?	0,125	?	3,14
23	?	0,45	3,2	?	0,34
24	?	?	0,9	405	0,99
25	500	0,25	0,7	?	?
26	?	0,8	1,6	?	1,257
27	4000	?	?	480	2,01
28	90	0,6	?	378	?

Репозиторий БГАТУ

Задача 2 [17.2]. Уравнение незатухающих колебаний источника имеет вид $\xi = f(t)$. Найти смещение ξ_1 точки, находящейся на расстоянии x_1 от источника колебаний, спустя время t_1 после начала колебаний, если скорость распространения колебаний равна c. На какое расстояние продвинется фронт волны к моменту времени t_2? Решить согласно номеру задания в таблице, выполнить дополнительное задание.

Номер задания	$\xi = f(t)$, см	x_1, м	t_1, с	t_2, с	c, м/с	Построить график
1	$\xi = 3\cos 500\pi t$	6,4	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,2	320	$\xi = f(t)$ при x = const
2			$1{,}2 \cdot 10^{-2}$	0,4		
3			$1{,}3 \cdot 10^{-2}$	0,6		
4			$1{,}4 \cdot 10^{-2}$	0,8		
5	$\xi = 3\cos 500\pi t$	5,2	10^{-2}	1,0	320	$\xi = f(x)$ при t = const
6		5,6		1,2		
7		6,0		1,4		
8		6,4		1,6		
9	$\xi = 4\sin 600\pi t$	0,75	10^{-2}	2,0	300	$\xi = f(t)$ при x = const
10			$1{,}02 \cdot 10^{-2}$	3,0		
11			$1{,}04 \cdot 10^{-2}$	4,0		
12			$1{,}06 \cdot 10^{-2}$	5,0		
13	$\xi = 4\sin 600\pi t$	0,6	10^{-2}	0,5	300	$\xi = f(x)$ при t = const
14		0,8		1,0		
15		1,0		1,5		
16		1,2		2,0		
17	$\xi = 5\cos 66\pi t$	9,9	0,10	0,2	330	$\xi = f(t)$ при x = const
18			0,11	0,4		
19			0,12	0,6		
20			0,13	0,8		
21	$\xi = 5\cos 66\pi t$	2	0,1	1,0	330	$\xi = f(x)$ при t = const
22		4		1,2		
23		6		1,4		
24		8		1,6		
25	$\xi = 2\sin 160\pi t$	1,28	$1{,}25 \cdot 10^{-2}$	2,0	320	$\xi = f(t)$ при x = const
26			$1{,}5 \cdot 10^{-2}$	3,0		
27			$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	4,0		
28			$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	5,0		

II уровень

Задача 3 [17.6]. В однородной изотропной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ε и относительной магнитной проницаемостью μ, близкой к единице, распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна E_m, амплитуда напряженности магнитного поля — H_m. Фазовая скорость распространения волны — v. Найти неизвестные величины согласно номеру задания.

Номер задания	ε	E_m, В/м	$H_m \cdot 10^3$, А/м	$v \cdot 10^{-8}$, м/с
1	?	?	8,56	1,86
2	2,6	?	2,14	?
3	?	2,5	?	2,12
4	6	0,6	?	?
5	2,0	?	1,88	?
6	6,0	1,0	?	?
7	?	?	7,96	3,0
8	?	0,4	?	2,12
9	1,0	1,5	?	?
10	?	0,1	?	1,224
11	?	?	4,28	1,86
12	2,0	?	3,0	?
13	?	2,0	?	2,12
14	2,6	?	0,856	?
15	6,0	0,5	?	?
16	?	?	26,0	1,224
17	2,0	?	7,51	?
18	2,6	0,8	?	?
19	?	?	1,327	3,0
20	?	3,0	?	2,12
21	6,0	0,2	?	?
22	?	1,5	?	1,224
23	1,0	?	5,31	?
24	?	?	1,06	3,0
25	2,0	?	2,25	?
26	6,0	1,2	?	?
27	?	?	4,28	1,86
28	?	4,0	?	3,0

Репозиторий БГАТУ

Задача 4 [17.9]. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, в которой напряженность электрического поля меняется по закону $E = E_m\cos(\omega t - kx)$, напряженность магнитного поля — по закону $H = H_m\cos(\omega t - kx)$. Найти мгновенное значение величины вектора Умова–Пойнтинга в точке x_1 в момент времени t_1, ее среднее значение за период и максимальное значение.

Номер задания	$E = E_m\cos(\omega t - kx)$, В/м	x_1, м	t_1, с
1	$E = 2 \cdot \cos(2{,}5 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot t - 0{,}83 \cdot \pi \cdot x)$	1,205	$4{,}667 \cdot 10^{-9}$
2			$5 \cdot 10^{-9}$
3			$5{,}32 \cdot 10^{-9}$
4			$8 \cdot 10^{-9}$
5	$E = 12 \cdot \cos(5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot t - 1{,}667 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot x)$	60	$2{,}334 \cdot 10^{-7}$
6			$2{,}5 \cdot 10^{-7}$
7			$2{,}66 \cdot 10^{-7}$
8			$4 \cdot 10^{-7}$
9	$E = 8 \cdot \cos(1{,}25 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot t - 4{,}167 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot x)$	24	$9{,}33 \cdot 10^{-8}$
10			10^{-7}
11			$1{,}064 \cdot 10^{-7}$
12			$1{,}6 \cdot 10^{-7}$
13	$E = 20 \cdot \cos(6{,}25 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot t - 2{,}083 \cdot \pi \cdot x)$	0,48	$3{,}2 \cdot 10^{-9}$
14			$2{,}128 \cdot 10^{-9}$
15			$2 \cdot 10^{-9}$
16			$1{,}867 \cdot 10^{-9}$
17	$E = 6 \cdot \cos(3{,}125 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot t - 9{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot x)$	10,42	$4 \cdot 10^{-10}$
18			$6{,}4 \cdot 10^{-10}$
19			$4{,}256 \cdot 10^{-10}$
20			$3{,}734 \cdot 10^{-10}$
21	$E = 15 \cdot \cos(8{,}33 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot t - 0{,}278 \cdot \pi \cdot x)$	3,6	$1{,}4 \cdot 10^{-8}$
22			$1{,}5 \cdot 10^{-8}$
23			$2{,}4 \cdot 10^{-8}$
24			$1{,}6 \cdot 10^{-8}$
25	$E = 30 \cdot \cos(1{,}67 \cdot 10^8 \cdot \pi \cdot t - 0{,}556 \cdot \pi \cdot x)$	1,8	$8 \cdot 10^{-9}$
26			$7 \cdot 10^{-9}$
27			$7{,}5 \cdot 10^{-9}$
28			$1{,}2 \cdot 10^{-8}$

III уровень

Задача 5 [17.10]. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, максимальная величина электрического вектора которой равна E_m. На пути волны перпендикулярно к направлению распространения расположена плоская поверхность площадью S. За время τ, значительно превышающее период колебаний электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне, данная поверхность поглощает энергию, равную W. Найти неизвестную величину, согласно номеру задания в таблице.

Номер задания	E_m, В/м	S, м^2	τ, мин	W, Дж
1	?	30	5	2,985
2	1,2	?	25	5,732
3	0,1	40	?	0,955
4	3,0	6	40	?
5	?	24	4	30,57
6	1,4	?	15	11,7
7	3,0	3	?	21,5
8	0,6	15	50	?
9	?	4	1	2,866
10	0,8	?	14	7,133
11	4,0	26	?	132,4
12	0,1	20	20	?
13	?	8	30	0,764
14	1,8	?	8	6,19
15	5,0	36	?	143,3
16	2,0	25	45	?
17	?	12	2	47,77
18	1,6	?	40	65,22
19	3,5	32	?	156,0
20	0,5	5	12	?
21	?	14	60	1070
22	0,3	?	3	0,86
23	1,5	22	?	47,29
24	4,5	10	35	?
25	?	16	55	17,5
26	2,5	?	10	29,86
27	0,4	35	?	8,92
28	5,0	2	16	?

Репозиторий БГАТУ

5.3.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Примеры решения задач

Пример 1. В некоторую точку пространства приходят когерентные лучи с геометрической разностью хода l = 1,2 мкм, длина волны λ_0 которых в вакууме 600 нм. Определить, что происходит в этой точке вследствие интерференции, когда лучи проходят в воздухе, воде, скипидаре.

Решение. Оптическая разность хода в перечисленных средах равна соответственно:

$$\Delta_1 = ln_1 \ (n_1 = 1);$$

$$\Delta_2 = ln_2 \ (n_2 = 1{,}33);$$

$$\Delta_3 = ln_3 \ (n_3 = 1{,}5),$$

где n_1, n_2, n_3 — абсолютные показатели преломления воздуха, воды, скипидара соответственно. Условием интерференционного максимума является равенство оптической разности хода целому числу длин волн: $m = \dfrac{\Delta}{\lambda_0}$. Таким образом:

$$\frac{\Delta_1}{\lambda_0} = \frac{ln_1}{\lambda_0} = 2; \ \frac{\Delta_2}{\lambda_0} = \frac{ln_2}{\lambda_0} = 2{,}66; \ \frac{\Delta_3}{\lambda_0} = \frac{ln_3}{\lambda_0} = 3.$$

В первом и в третьем случае наблюдается усиление света, во втором (близко к нечетному числу $\dfrac{\lambda_0}{2}$) — ослабление света.

Пример 2. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зеленый (λ_1 = 500 нм) светофильтр заменить красным (λ_2 = 750 нм)?

Решение. Условие интерференционного максимума:

$$y_{\max} = m\frac{L}{d}\lambda, \qquad (1.68)$$

где m = 0, 1, 2, 3, … .

Условие интерференционного минимума:

$$y_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda, \qquad (1.69)$$

где m = 0, 1, 2, 3, … .

Расстояние между соседними максимумами интенсивности называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами интенсивности — шириной интерференционной полосы.

Из условий (1.68) и (1.69) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение: $\Delta y = \dfrac{L}{d}\lambda$. Тогда расстояние между интерференционными полосами при зеленом светофильтре $\Delta y_1 = \dfrac{L}{d}\lambda_1$, а при красном — $\Delta y_2 = \dfrac{L}{d}\lambda_2$, где L — расстояние от экрана до источника света. Поскольку величины L и d не меняются, то $\dfrac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}5$.

Пример 3. Для устранения отражения света от поверхности линзы на нее наносится тонкая пленка вещества с показателем преломления 1,25, меньшим, чем у стекла (просветление оптики). При какой наименьшей толщине пленки отражение света с длиной волны 0,72 мкм не будет наблюдаться, если угол падения лучей — 60°?

Решение. Оптическая разность хода лучей, отраженных от нижней и верхней поверхностей пленки (рис. 1.46):

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}, \qquad (1.70)$$

где d — толщина пленки; n — показатель преломления пленки; i — угол падения лучей. В выражении учтено, что отражение лучей на обеих поверхностях происходит от оптически более плотной среды, и поэтому сдвига по фазе между лучами нет. Условие интерференционного минимума:

$$\Delta = \pm\left(2m - 1\right)\frac{\lambda_0}{2}, \ m = 1, 2, \ldots, \qquad (1.71)$$

где λ_0 — длина волны света. Подставляя формулу (1.70) в условие (1.71) и учитывая, что выражение (1.70) положительно, получаем:

Репозиторий БГАТУ

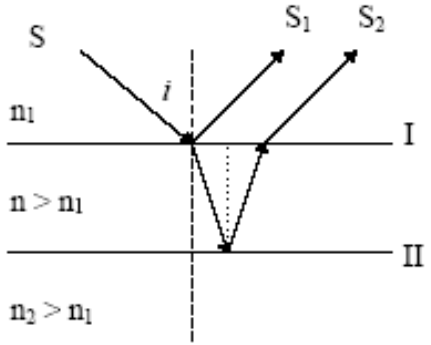

Рис. 1.46. Отражение лучей от верхней и нижней поверхностей тонкой пленки

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2 i}=\left(2m-1\right)\frac{\lambda}{2}. \qquad (1.72)$$

Из формулы (1.72) найдем возможные значения толщины пленки: $d=\dfrac{\left(2m-1\right)\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$.

Наименьшая толщина пленки наблюдается при $m = 1$:

$$d_{\min}=\frac{\lambda}{4\sqrt{n^2-\sin^2 i}}.$$

$$d_{\min}=\frac{0{,}72\cdot10^{-6}}{4\sqrt{\left(1{,}25\right)^2-\sin^2 60^\circ}}=0{,}2\cdot10^{-6}=0{,}2\,(\text{мкм}).$$

Аудиторные задачи

1. На мыльную пленку (n = 1,3) падает нормально пучок лучей белого света. Какова наименьшая толщина пленки, если в отраженном свете она кажется зеленой (λ = 0,55 мкм)?

2. Определить показатель преломления $n_{пл}$ и минимальную толщину пленки $d_{пл}$, которую необходимо нанести на поверхность пластинки из стекла марки ТФ1 (n = 1,6522), чтобы отражающая способность в направлении нормали была равна нулю для света с длиной волны λ = 0,5461 мкм. ($n_{пл}$ = 1,285, $t_{пл}$ = 106,2 нм)

3. В интерференционной картине, наблюдаемой в опыте Юнга, расстояние между ±1 интерференционными максимумами $2b$ = 1 мм. Плоскость наблюдения установлена на расстоянии L = 6 м, а длина волны используемого монохроматического излучения λ = 0,6 мкм. Определить расстояние a между источниками. (7,2 мм)

4. На пути луча света поставлена стеклянная пластинка толщиной 1 мм так, что угол падения луча равен 30°. Насколько изменится оптическая длина пути луча?

5. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину слоя воздуха там, где в отраженном свете (λ = 0,6 мкм) видно первое светлое кольцо Ньютона.

6. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой налита жидкость. Радиус 8-го темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете (λ = 700 нм) равен 2 мм. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы R = 1 м. Найти показатель преломления жидкости.

7. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 0,6 мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы R = 4 м. Определить показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца r = 1,8 мм.

Задачи для индивидуальных заданий

В квадратных скобках даны номера задач по книге «Ветрова, В. Т. Сборник задач по физике : с индивидуал. заданиями : учебн. пособие для вузов. — Минск : Выш. шк., 1991. — 386 с. : ил.». Там же приведены ответы ко всем задачам.

Репозиторий БГАТУ

I уровень

Задача 1 [18.2]. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если свет одного цвета заменить светом другого цвета?

Номер задания	Первоначальный цвет	λ_1, мкм	Последующий цвет	λ_2, мкм
1	Красный	0,70	Синий	0,48
2			Желтый	0,58
3			Зеленый	0,55
4			Фиолетовый	0,40
5	Желтый	0,59	Зеленый	0,55
6			Зелено-голубой	0,51
7			Красный	0,70
8			Фиолетовый	0,41
9	Фиолетовый	0,40	Зелено-голубой	0,51
10			Красный	0,64
11			Красный	0,69
12			Зеленый	0,54
13	Зелено-голубой	0,51	Желтый	0,59
14			Фиолетовый	0,41
15			Красный	0,64
16			Красный	0,72
17	Синий	0,48	Оранжевый	0,62
18	Зеленый	0,55		
19	Фиолетовый	0,40		
20	Красный	0,70		
21	Зеленый	0,55	Синий	0,46
22	Желтый	0,59		
23	Красный	0,70		
24	Фиолетовый	0,40		
25	Фиолетовый	0,42	Зеленый	0,54
26	Синий	0,48		
27	Желтый	0,58		
28	Красный	0,72		

Задача 2 [18.3]. В опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей помещалась тонкая прозрачная пластинка толщиной d и с коэффициентом преломления n, вследствие чего интерференционная картина смещалась на m полос. Длина волны падающего света — λ, свет падает на пластинку нормально. Найти неизвестную величину согласно номеру задания, выполнить дополнительное задание.

Номер задания	d, мкм	n	m	λ, мкм	Построить градуировочный график
1	?	1,5	2	0,60	$m = f(d)$
2	?		5		
3	?		8		
4	?		10		
5	10	?	6	0,50	$m = f(n)$
6		?	10		
7		?	4		
8		?	8		
9	15	1,3	?	0,55	$m = f(\lambda)$
10			?	0,45	
11			?	0,65	
12			?	0,35	
13	?	1,4	5	0,55	$d = f(\lambda)$
14	?			0,40	
15	?			0,65	
16	?			0,35	
17	?	1,3	10	0,45	$d = f(n)$
18	?	1,4			
19	?	1,5			
20	?	1,6			
21	7,5	1,36	8	?	$n = f(\lambda)$
22		1,75		?	
23		1,62		?	
24		1,48		?	
25	11	?	4	0,55	$n = f(m)$
26		?	9,6		
27		?	7		
28		?	8,4		

Репозиторий БГАТУ

Задача 3 [18.4]. Пучок параллельных лучей с длиной волны λ падает в воздухе под углом α на тонкую пленку с показателем преломления n_1, находящуюся на материале, показатель преломления которого — n_2. Наименьшая толщина пленки, при которой отраженные лучи будут максимально ослаблены интерференцией, равна d_1, максимально усилены — d_2. Найти неизвестные величины согласно номеру задания в таблице.

Номер задания	λ, мкм	α, град	n_1	n_2	d_1, мкм	d_2, мкм
1	?	45	1,10	1,30	?	0,6865
2	0,35	?	1,25	1,50	0,0971	?
3	0,66	60	?	1,10	?	0,1347
4	0,41	30	1,40	1,65	?	?
5	?	60	1,45	1,14	?	0,1397
6	0,44	?	1,30	1,15	0,2017	?
7	0,55	30	?	1,46	?	0,2521
8	0,38	45	1,20	1,40	?	?
9	?	45	1,15	1,45	?	0,2371
10	0,48	?	1,35	1,20	0,1914	?
11	0,40	60	?	1,65	?	0,2219
12	0,63	30	1,50	1,25	?	?
13	?	30	1,40	1,25	?	0,1109
14	0,54	?	1,20	1,35	0,1392	?
15	0,36	60	?	1,55	?	0,1856
16	0,46	45	1,55	1,15	?	?
17	?	60	1,60	1,30	?	0,0892
18	0,39	?	1,10	1,40	0,1437	?
19	0,43	45	?	1,60	?	0,1698
20	0,50	30	1,30	1,10	?	?
21	?	45	1,55	1,25	?	0,1160
22	0,37	?	1,15	1,35	0,1020	?
23	0,56	60	?	1,55	?	0,2546
24	0,42	30	1,35	1,15	?	?
25	?	30	1,45	1,60	?	0,1286
26	0,45	?	1,50	1,20	0,1591	?
27	0,60	45	?	1,50	?	0,2840
28	0,34	60	1,25	1,45	?	?

II уровень

Задача 4 [18.6]. В тонкой клинообразной пластинке с углом между гранями α, находящейся в воздухе, наблюдаются в отраженном свете при нормальном падении лучей с длиной волны λ интерференционные полосы, расстояние между которыми равно Δx. Показатель преломления материала пластинки — n. Найти неизвестную величину согласно номеру задания в таблице, выполнить дополнительное задание.

Номер задания	Светофильтр	λ, мкм	α, мин	n	Δx, мм	Построить график
1	Фиолетовый	0,41	1	1,5	?	$\Delta x = f(\alpha)$
2			2		?	
3			3		?	
4			4		?	
5	Красный	0,70	0,5	1,45	?	$\Delta x = f(n)$
6				1,55	?	
7				1,65	?	
8				1,75	?	
9	?	?	1	1,6	0,752	$\Delta x = f(\lambda)$
10	?	?			0,505	
11	?	?			0,44	
12	?	?			0,634	
13	Желтый	0,59	?	1,7	0,398	$\Delta x = f(\alpha)$
14			?		0,239	
15			?		0,298	
16			?		0,596	
17	Красный	0,70	2	1,3	?	$\Delta x = f(\lambda)$
18	Красный	0,64			?	
19	Зеленый	0,51			?	
20	Фиолетовый	0,42			?	
21	Синий	0,47	0,5	?	1,154	$\Delta x = f(n)$
22				?	1,01	
23				?	1,243	
24				?	1,077	
25	Красный	0,72	1	1,4	?	$\Delta x = f(\lambda)$
26	Желтый	0,58			?	
27	Зеленый	0,55			?	
28	Синий	0,48			?	

Репозиторий БГАТУ

III уровень

Задача 5 [18.7]. Между двумя прозрачными пластинками с показателем преломления n_1, находящимися в жидкой или газообразной среде с показателем преломления n_2, попала нить диаметром d так, что образовался клин. Расстояние от нити до вершины клина — L. При нормальном падении на пластинку лучей с длиной волны λ в отраженном свете наблюдается m интерференционных минимумов и максимумов на l длины пластинки. Найти неизвестную величину согласно номеру задания в таблице.

Номер задания	n_1	n_2	d, мкм	L, см	λ, мкм	m	l, см
1	1,5	?	2	10	0,3472	5	3,1
2	1,75	1,0	?	12	0,4091	11	5,4
3	1,6	1,00077	16	?	0,4982	9	3,5
4	1,42	1,63	10	15	?	12	3,0
5	1,58	1,02	12	30	0,5814	?	5,7
6	1,65	1,16	2,5	17	0,4199	13	?
7	1,5	?	7	11	0,3733	6	1,6
8	1,47	1,2	?	15	0,6240	4	5,2
9	1,34	1,05	8	?	0,4536	10	5,4
10	1,62	1,0	15	22	?	8	3,1
11	1,49	1,1	3	14	0,4007	?	1,7
12	1,7	1,00038	5	16	0,6044	6	?
13	1,36	?	13	23	0,4845	7	2,5
14	1,55	1,54	?	8	0,5133	3	1,0
15	1,43	1,33	9	?	0,4309	5	0,9
16	1,8	1,12	10	18	?	8	3,9
17	1,45	1,0	17	21	0,5667	?	1,4
18	1,72	1,2	20	24	0,3500	4	?
19	1,38	?	4	9	0,5123	6	2,6
20	1,68	1,4	?	12	0,4480	10	3,2
21	1,76	1,08	4	?	0,6336	3	3,3
22	1,5	1,6	18	25	?	7	1,4
23	1,35	1,004	6	10	0,4016	?	1,0
24	1,44	1,1	11	19	0,5459	7	?
25	1,73	?	19	20	0,5146	6	1,3
26	1,48	1,005	?	11	0,4568	3	1,5
27	1,55	1,4	14	?	0,3733	7	0,8
28	1,64	1,18	5	13	?	9	5,3

Задача 6 [18.8]. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между линзой с показателем преломления n_1 и пластинкой с показателем преломления n_3 заполнено газом или жидкостью с показателем преломления n_2. При наблюдении в проходящем (отраженном) свете с длиной волны λ радиус m-го светлого (темного) кольца равен r_m. Радиус кривизны линзы — R. Найти неизвестную величину согласно номеру задания в таблице; определить, светлое или темное пятно будет в центре интерференционной картины.

Номер задания	Условия наблюдения	n_1	n_2	n_3	λ, мкм	Кольцо	m	r_m, мм	R, м
1	В отраженном свете	1,5	1,0	1,8	0,70	Темное	2	?	0,5
2							3	?	
3							4	?	
4							5	?	
5	В проходящем свете	1,5	1,0	1,8	0,55	Темное	?	1,11	0,5
6							?	0,83	
7							?	0,64	
8							?	0,98	
9	В отраженном свете	1,8	1,63	1,5	?	Светлое	3	0,81	0,6
10					?			0,74	
11					?			0,88	
12					?			0,66	
13	В проходящем свете	1,5	1,63	1,5	0,4240	Светлое	6	1,06	?
14					0,5477			0,84	?
15					0,6405			2,06	?
16					0,7332			2,42	?
17	В отраженном свете	1,5	1,63	1,7	0,50	Светлое	5	0,88	?
18								1,24	?
19								2,77	?
20								3,92	?
21	В проходящем свете	1,5	1,63	1,7	0,64	Темное	2	?	8,0
22							4	?	
23							6	?	
24							8	?	
25	В отраженном свете	1,7	1,0	1,5	0,45	Светлое	?	0,80	0,4
26			1,05				?	0,66	
27			1,1				?	0,95	
28			1,15				?	0,84	

Репозиторий БГАТУ

5.3.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Примеры решения задач

Пример 1. На непрозрачный экран с круглым отверстием, радиус которого r = 1 мм, падает нормально параллельный пучок света с длиной волны λ = 0,5 мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние от отверстия до экрана (R_0 = ?), при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Решение. Изобразил рисунок к данной задаче (рис. 1.47).

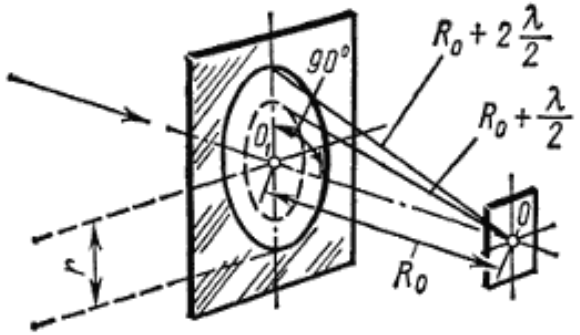

Рис. 1.47. Падение света на непрозрачный экран с круглым отверстием

Расстояние, позволяющее увидеть темное пятно в центре дифракционной картины, определяется числом зон Френеля, которые можно построить на отверстии для данной точки наблюдения. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должно поместиться две зоны Френеля. Согласно рис. 1.47 расстояние от центра экрана O до края отверстия на $2\frac{\lambda}{2}$ больше, чем расстояние от центра экрана до центра отверстия $OO_1 = R_O$.

По теореме Пифагора:

$$r^2 = \left(R_O + 2\frac{\lambda}{2}\right)^2 - R_O^2 = 2R_O\lambda + \lambda^2 .$$

Если учесть, что $\lambda << R_O$ и что членом, содержащим λ^2, можно пренебречь, то это равенство можно переписать в виде:

$$r^2 = 2R_O\lambda, \text{ откуда } R_O = \frac{r^2}{2\lambda}.$$

Переведем величины, данные в условии задачи, в систему СИ.

$$r = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \ \lambda = 0{,}5 \text{ мкм} = 0{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Подставим числовые значения в последнее полученное выражение:

$$R_O = \frac{\left(10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ (м)}.$$

Пример 2. На узкую длинную щель шириной b = 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ = 0,6 мкм). Определить ширину центрального максимума в дифракционной картине, которая проектируется при помощи линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L = 1 м.

Решение. Изобразим рисунок к данной задаче (рис. 1.48).

Центральный максимум занимает область между ближайшим правым и левым минимумами, поэтому ширину центрального максимума примем равной расстоянию между этими двумя минимумами (рис. 1.48).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ, определяемыми условием:

$$b\sin\varphi = \pm k\lambda, \qquad (1.73)$$

где b — ширина щели; λ — длина волны; k — порядок минимума, k = 1, 2, 3, ... (в нашем случае k = 1). Расстояние между двумя минимумами на экране можно определить непосредственно по рис. 1.48:

$$\ell = 2L\text{tg}\varphi.$$

Репозиторий БГАТУ

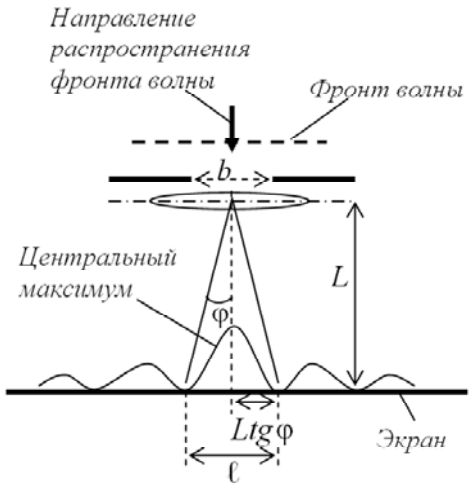

Рис. 1.48. Дифракция на узкой длинной щели

Учтем, что при малых углах tgφ ≈ sinφ, и перепишем эту формулу в виде:

$$\ell = 2L\sin\varphi. \qquad (1.74)$$

Выразим sinφ из формулы (1.73) и подставим его в равенство (1.74):

$$\ell = 2L\frac{k\lambda}{b}. \qquad (1.75)$$

Переведем величины, данные в условии задачи, в систему СИ.

$b = 1$ мм $= 10^{-3}$ м, $\lambda = 0{,}6$ мкм $= 0{,}6 \cdot 10^{-6}$ м.

Подставим значения величин в формулу (1.75) и вычислим ширину центрального дифракционного максимума:

$$\ell = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\,(\text{м}) = 1{,}2\ (\text{см}).$$

Пример 3. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок лучей с длиной волны λ = 0,5 мкм. Помещенная вблизи решетки линза проектирует дифракционную

картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние между двумя максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, $l = 20{,}2$ см. Определить: а) постоянную дифракционной решетки d; б) число штрихов n на 1 см; в) количество максимумов N, которое дает при этом дифракционная решетка; г) максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму φ^*_{max}.

Решение. Изобразим рисунок к задаче (рис. 1.49).

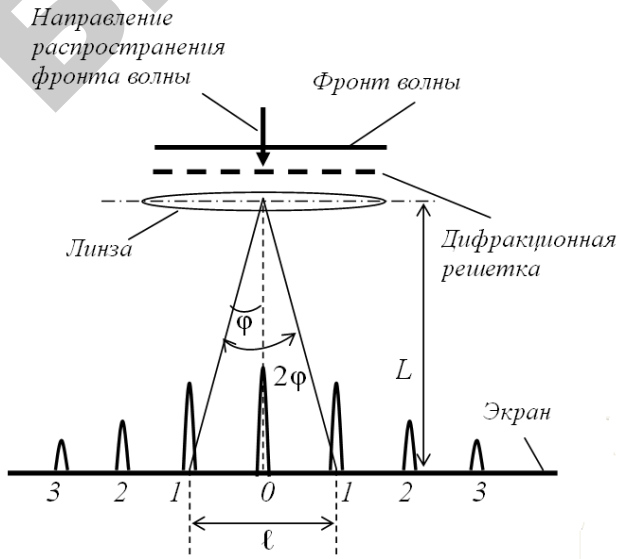

Рис. 1.49. Прохождение света через дифракционную решетку

а) Постоянная дифракционной решетки d, длина волны λ и угол отклонения лучей φ, соответствующий k-му дифракционному максимуму, связаны соотношением:

$$d\sin\varphi = \pm k\lambda, \qquad (1.76)$$

где k — порядок спектра или в случае монохроматического света — порядок максимума. В данном случае $k = 1$.

Так как $\frac{\ell}{2} << L$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\ell}{2L} \approx \sin\varphi$.

Репозиторий БГАТУ

С учетом этого соотношение (1.76) примет вид: $d\frac{\ell}{2L} = k\lambda = \lambda$.

Отсюда выразим период решетки:

$$d = \frac{2L\lambda}{\ell}.$$

Переведем величины, данные в условии задачи, в систему СИ.

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м, $l = 20{,}2$ см $= 20{,}2 \cdot 10^{-2}$ м.

Сделаем расчет:

$$d = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{2{,}02 \cdot 10^{-2}} = 4{,}95 \cdot 10^{-6}\,(\text{м}) = 4{,}95\,(\text{мкм}).$$

б) Число штрихов на 1 см:

$$n = \frac{1}{d} = \frac{1}{4{,}95 \cdot 10^{-4}} = 2020\ (\text{см}^{-1}).$$

в) Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{max}, исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей дифракционной решеткой не может превышать 90°.

Из формулы (1.76) найдем:

$$k_{max} = \frac{d \sin\varphi_{max}}{\lambda} = \frac{4{,}95 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 90^{\circ}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 9{,}9.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin\varphi_{max}$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{max} = 9$.

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой, подсчитаем следующим образом. Слева и справа от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{max}, т. е. всего $2k_{max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов:

$$N = 2k_{max} + 1.$$

Подставляя значение k_{max}, определим общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой:

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

г) Максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму, найдем из формулы (1.76):

$$\sin\varphi^{*}_{max} = \frac{k_{max}\lambda}{d}.$$

Подставляя данное в условии задачи значение длины волны λ, полученные в процессе решения задачи значения периода решетки d и наибольшего числа максимумов, наблюдаемых в одну сторону k_{max}, определим угол дифракции, под которым виден последний дифракционный максимум:

$$\varphi^{*}_{max} = \arcsin\left(\frac{k_{max}\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{9 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{4{,}95 \cdot 10^{-6}}\right) = 65{,}4^{\circ}.$$

Аудиторные задачи

1. Длина волны света от монохроматического источника равна 0,5 мкм. Расстояние от источника света до сферической волновой поверхности равно 1 м. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1 м. Чему равен радиус внешней границы 4-й зоны Френеля? (1,0 мм)

2. Свет от монохроматического источника с длиной волны $\lambda = 0{,}8$ мкм падает нормально на диафрагму с отверстием радиуса $r = 0{,}4$ мм. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии, если центр экрана находится на расстоянии 0,05 м от отверстия? (4)

3. На диафрагму с круглым отверстием радиуса $r = 0{,}8$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}8$ мкм. На каком расстоянии от диафрагмы на экране в центре дифракционной картины будет наблюдаться последний минимум? (0,4 м)

4. На щель шириной $b = 5{,}4 \cdot 10^{-6}$ м падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Дифракционный максимум какого порядка будет наблюдаться под углом 30°? (4)

5. При нормальном падении на дифракционную решетку плоской монохроматической волны длиной $\lambda = 0{,}4$ мкм макси-

Репозиторий БГАТУ

мум 3-го порядка виден под углом 30°. Определить ширину щели решетки (в мкм), если она в 4 раза меньше периода решетки. (0,6 мкм)

6. Две плоских монохроматических волны падают нормально на дифракционную решетку. Максимум какого порядка для волны λ_1 будет совпадать с 4-м максимумом для волны длиной $\lambda_2 = 1{,}5\lambda_1$? (6)

7. Какое общее количество главных максимумов можно наблюдать при нормальном падении плоской монохроматической волны на дифракционную решетку, если наибольший порядок видимого максимума равен 5? (11)

8. На грань кристалла падает параллельный пучок рентгеновских лучей длиной волны $\lambda = 0{,}05$ нм. Угол падения $\gamma = 60°$. Какое расстояние (в нм) между атомными плоскостями в кристалле, если при этих условиях наблюдается интерференционный максимум порядка $m = 2$? (0,1 нм)

Задачи для индивидуальных заданий

В квадратных скобках даны номера задач по книге «Ветрова, В. Т. Сборник задач по физике : с индивидуал. заданиями : учебн. пособие для вузов. — Минск : Выш. шк., 1991. — 386 с. : ил.». Там же приведены ответы ко всем задачам.

Задача 1 [19.2]. Свет от монохроматического источника с длиной волны λ падает нормально на диафрагму с круглым отверстием радиуса r. За диафрагмой на расстоянии L от нее находится экран. Каким будет центр дифракционной картины на экране: темным или светлым? Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии диафрагмы при наблюдении из центра дифракционной картины, равно m. Найти неизвестную величину согласно номеру задания в таблице.

Номер задания	λ, мкм	r, мм	L, м	m
1	0,500	0,4	0,08	?
2	0,577	1,5	?	3
3	0,408	?	0,20	6
4	?	0,9	1,80	1
5	0,416	0,8	0,22	?
6	0,641	1,0	?	2
7	0,533	?	0,54	5
8	?	0,5	0,16	4
9	0,457	1,1	0,53	?
10	0,643	0,6	?	7
11	0,485	?	1,32	1
12	?	1,4	1,45	2
13	0,706	1,2	0,34	?
14	0,544	0,7	?	5
15	0,440	?	1,94	3
16	?	0,9	0,23	6
17	0,676	0,5	0,37	?
18	0,402	1,3	?	3
19	0,538	?	0,52	7
20	?	0,8	0,47	4
21	0,521	1,0	0,96	?
22	0,457	0,4	?	5
23	0,417	?	1,20	2
24	?	1,2	3,00	1
25	0,571	0,6	0,21	?
26	0,620	1,4	?	2
27	0,483	?	0,70	5
28	?	0,9	0,39	4

Репозиторий БГАТУ

Задача 2 [19.4]. Круглое отверстие радиусом r в диафрагме освещается монохроматическим светом с длиной волны λ. Дифракционная картина рассматривается в точке, находящейся на расстоянии L от источника света. Сколько раз в центре дифракционной картины будет наблюдаться полное затемнение при перемещении диафрагмы с расстояния a_1 до расстояния a_2 от источника света?

Номер задания	r, мм	λ, мкм	L, м	a_1, м	a_2, м
1	1,5	0,55	2,5	0,4	0,5
2					1,0
3					1,5
4					2,0
5	0,8	0,40	1,4	0,2	1,0
6				0,3	
7				0,4	
8				0,5	
9	0,8	0,45	1,0	0,3	0,8
10	0,9				
11	1,0				
12	1,1				
13	1,3	0,40	3,0	1,0	1,8
14		0,50			
15		0,60			
16		0,70			
17	1,0	0,64	1,5	0,3	0,8
18					1,0
19					1,2
20					1,4
21	1,2	0,40	2,8	0,6	2,0
22				1,0	
23				1,2	
24				1,6	
25	0,9	0,43	1,0	0,1	0,7
26		0,52			
27		0,66			
28		0,72			

Задача 3 [19.6]. На щель падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Ширина щели в z раз больше длины волны. Под какими углами будут наблюдаться дифракционные минимумы и максимумы освещенности m-го порядка?

Номер задания	Что наблюдается	z	m
1	Минимум	6	1
2			2
3			3
4			4
5	Максимум	6	1
6			2
7			3
8			4
9	Минимум	9	1
10			3
11			5
12			7
13	Максимум	9	1
14			3
15			5
16			7
17	Минимум	5	1
18			2
19			3
20			4
21	Максимум	5	1
22			2
23			3
24			4
25	Минимум	10	3
26			4
27			6
28			7

Репозиторий БГАТУ

Задача 4 [19.8]. На дифракционную решетку, имеющую n штрихов на 1 мм длины, нормально падает пучок света. На экране, отстоящем на расстояние L от линзы, наблюдается дифракционный спектр, расстояние между двумя заданными линиями в котором равно Δx. Найти неизвестную величину.

Номер задания	Первая линия			Вторая линия			n, мм$^{-1}$	L, м	Δx, см
	Цвет	Порядок	λ, мкм	Цвет	Порядок	λ, мкм			
1	Красный	Слева 1	0,68	Красный	Справа 1	0,68	400	0,5	?
2	Красный	Слева 2	0,68	Красный	Справа 2	0,68			?
3	Зеленый	Слева 1	0,55	Зеленый	Справа 1	0,55			?
4	Зеленый	Слева 2	0,55	Зеленый	Справа 2	0,55			?
5	Красный	Слева 1	0,68	Красный	Слева 2	0,68	500	0,8	?
6	Синий		0,46	Синий		0,46			?
7	Оранжевый		0,60	Оранжевый		0,60			?
8	Зеленый		0,55	Зеленый		0,55			?
9	Фиолетовый	Справа 2	0,40	Красный	Справа 1	0,68	600	?	8,02
10				Красный		0,64		?	5,25
11				Оранжевый		0,60		?	3,22
12				Зеленый		0,55		?	11,85
13	Синий	Слева 1	0,46	Синий	Справа 1	0,46	?	0,6	28,36
14	Зеленый		0,51	Зеленый		0,51	?		4,59
15	Зеленый		0,55	Зеленый		0,55	?		13,28
16	Оранжевый		0,60	Оранжевый		0,60	?		10,84
17	Синий	Слева 1	0,46	Синий	Справа 1	0,46	300	0,4	?
18	Синий	Слева 2	0,46	Синий	Справа 2	0,46			?
19	Оранжевый	Слева 1	0,60	Оранжевый	Справа 1	0,60			?
20	Оранжевый	Слева 2	0,60	Оранжевый	Справа 2	0,60			?
21	Фиолетовый	Слева 1	0,40	Фиолетовый	Справа 1	0,40	700	?	58,33
22	Фиолетовый	Слева 2	0,40	Фиолетовый	Справа 2	0,40		?	54,07
23	Красный	Слева 1	0,64	Красный	Справа 1	0,64		?	25,05
24	Красный	Слева 2	0,64	Красный	Справа 2	0,64		?	60,53
25	Красный	Слева 1	0,68	Красный	Справа 1	0,68	?	0,7	24,15
26	Синий	Слева 2	0,46	Синий	Справа 2	0,46	?		11,63
27	Оранжевый	Слева 2	0,60	Оранжевый	Справа 2	0,60	?		30,97
28	Фиолетовый	Слева 3	0,40	Фиолетовый	Справа 3	0,40	?		8,42

Задача 5 [19.10]. На грань кристалла падает параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны λ. Расстояние между атомными плоскостями равно d. Когда лучи падают под углом Θ к поверхности кристалла, наблюдается интерференционный максимум порядка m. Найти неизвестную величину согласно номеру задания в таблице.

Номер задания	λ, нм	d, нм	Θ	m
1	0,075	0,28	?	1
2			?	2
3			?	3
4			?	4
5	0,062	?	5°56′	1
6		?	7°25′	
7		?	5°05′	
8		?	11°56′	
9	?	0,30	19°28′	2
10	?		13°30′	
11	?		15°28′	
12	?		7°40′	
13	0,045	0,44	8°50′	?
14	0,060		7°50′	?
15	0,025		1°38′	?
16	0,037		4°49′	?
17	0,050	0,25	?	2
18		0,30	?	
19		0,35	?	
20		0,40	?	
21	0,080	?	10°29′	1
22		?	5°06′	
23		?	12°09′	
24		?	6°58′	
25	?	0,21	59°	3
26	?		68°13′	
27	?		16°36′	
28	?		25°23′	

Репозиторий БГАТУ

5.3.4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Примеры решения задач

Пример 1. В сосуде с жидкостью (*а*), которая имеет коэффициент преломления n_1, находится стеклянная пластина (*б*) с коэффициентом преломления n_1 = 1,5. Естественный луч света (1) падает на полированную грань стеклянной пластины. Отраженный от пластины луч (2) повернут на угол φ = 97° по отношению к падающему лучу (1). Чему равен коэффициент преломления жидкости, если отраженный луч (2) максимально поляризован?

Решение. Изобразим рисунок к задаче (рис. 1.50).

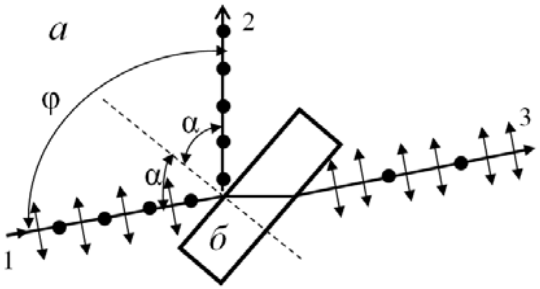

Рис. 1.50. Поляризация света при падении луча на стеклянную пластину

Чтобы определить коэффициент преломления материала, из которого сделана пластина, относительно жидкости, воспользуемся законом Брюстера.

Согласно этому закону луч света, отраженный от границы раздела двух диэлектриков, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному коэффициенту преломления:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

По условию задачи отраженный луч (2) повернут на угол φ относительно падающего луча (1), следовательно, угол падения $\alpha = \frac{\varphi}{2}$, так как в соответствии с законом отражения света угол падения равен углу отражения. Тогда: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{n_2}{n_1}$, откуда найдем интересующий нас коэффициент преломления жидкости: $n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}\varphi/2}$.

Подставим численные значения:

$$n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg}\frac{97^\circ}{2}} = \frac{1,5}{\operatorname{tg}48,5^\circ} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

Ответ: n_1 = 1,33. Судя по величине показателя преломления, такой жидкостью может быть вода.

Пример 2. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через два николя N_1 и N_2, расположенных так, что угол между их плоскостями пропускания α = 60°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николь (N_1) — $\frac{I_1}{I_0}$? Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя — $\frac{I_2}{I_0}$?

Коэффициент поглощения света в каждом из николей k = 0,05. Потерями на отражение света пренебречь.

Решение. Изобразим рисунок к задаче (рис. 1.51).

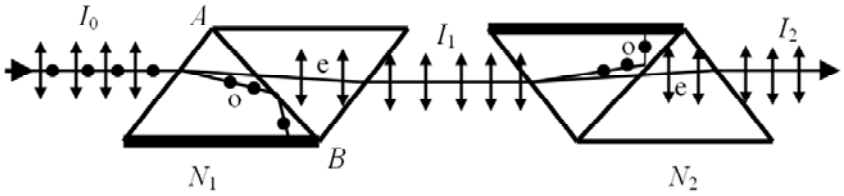

Рис. 1.51. Прохождение света через две призмы Николя

Естественный свет, попадая на грань призмы Николя, расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба луча одинаковы по интенсивности и полно-

Репозиторий БГАТУ

стью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного луча лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного луча перпендикулярна к плоскости чертежа. Обыкновенный луч (о) вследствие полного внутреннего отражения от границы *AB* попадает на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный луч (е) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму: $I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k)$, где I_0 — интенсивность естественного света, падающего на первый николь; I_1 — интенсивность света, вышедшего из первого николя.

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность естественного света I_0 на интенсивность поляризованного света I_1:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{(1-k)}. \qquad (1.77)$$

Подставим числовые значения: $\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{(1-0,05)} = 2,1.$

Таким образом, интенсивность света при прохождении первого николя уменьшается в 2,1 раза.

Плоскополяризованный луч света с интенсивностью I_1, падает на второй николь (N_2) и также расщепляется на обыкновенный (о) и необыкновенный (е) лучи различной интенсивности. Обыкновенный луч полностью поглощается призмой, а интенсивность необыкновенного луча I_2, вышедшего из призмы N_2, определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе): $I_2 = I_1 \cos^2\alpha$, где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью пропускания николя N_2.

Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим: $I_2 = I_1(1-k)\cos^2\alpha$.

Уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность естественного света I_0 на интенсивность света I_2, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\alpha}.$$

С учетом выражения (1.77) получим:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}.$$

Подставим числовые данные, произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2\cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раз.

Аудиторные задачи

1. Пучок естественного света падает из воздуха на стекло с абсолютным показателем преломления $n = \sqrt{3}$. Отраженный от стекла пучок света полностью поляризован. Чему равен угол между падающим и отраженным лучами? (120°)
2. Угол поворота плоскости поляризации желтого света при прохождении его через трубку с раствором сахара равен 20°. Определить массовую концентрацию сахара в растворе (в г/см^3), если длина трубки равна 15 см. Удельное вращение сахара равно 66,5° на 1 дециметр при концентрации 1 г/см^3. (0,2 г/см^3)
3. Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через идеальные поляризатор и анализатор, угол между плоскостями пропускания которых $\alpha = 60°$. Чему равно отношение интенсивности естественного света к интенсивности I_A вышедшего из анализатора света? (8)
4. Во сколько раз ослабляется свет, проходя через два николя, плоскости поляризации которых составляют угол 60°, если в каждом из николей в отдельности теряется 10 % падающего на него светового потока? (10)
5. Анализатор в два раза уменьшает интенсивность света, приходящего к нему от поляризатора. Определить угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. Потерями света в анализаторе можно пренебречь. (45°)

Задачи для индивидуальных заданий

В квадратных скобках даны номера задач по книге «Ветрова, В. Т. Сборник задач по физике : с индивидуал. заданиями : учебн. пособие для вузов. — Минск : Выш. шк., 1991. — 386 с. : ил.». Там же приведены ответы ко всем задачам.

Репозиторий БГАТУ

Задача 1 [20.1]. Предельный угол падения при полном внутреннем отражении для некоторого вещества равен $i_{пр}$, показатель преломления вещества — n. Угол падения, при котором отраженный луч оказывается максимально поляризованным, равен $i_Б$. Найти неизвестные величины согласно номеру задания в таблице, выполнить дополнительное задание.

Номер задания	n	$i_{пр}$	$i_Б$	Построить график зависимости
1	1,4	?	?	$i_Б = f(n)$
2	1,5	?	?	
3	1,6	?	?	
4	1,7	?	?	
5	?	53°08′	?	$i_{пр} = f(n)$
6	?	33°45′	?	
7	?	47°48′	?	
8	?	37°03′	?	
9	?	?	58°38′	$i_Б = f(n)$
10	?	?	52°01′	
11	?	?	52°51′	
12	?	?	55°46′	
13	1,35	?	?	$i_{пр} = f(n)$
14	1,45	?	?	
15	1,55	?	?	
16	1,65	?	?	
17	?	44°46′	?	$i_Б = f(n)$
18	?	39°17′	?	
19	?	50°17′	?	
20	?	35°33′	?	
21	?	?	60°24′	$i_{пр} = f(n)$
22	?	?	56°50′	
23	?	?	53°52′	
24	?	?	59°14′	
25	1,80	?	?	$i_Б = f(n)$
26	1,44	?	?	
27	1,75	?	?	
28	1,62	?	?	

Задача 2 [20.4]. Естественный свет проходит через два идеальных николя, плоскости поляризации которых расположены под углом Θ. После прохождения через второй николь свет падает на зеркало с коэффициентом отражения k таким образом, что при отражении плоскость поляризации не меняется. Отразившись, свет проходит опять оба николя. Интенсивность света после обратного прохождения через оба николя стала в m раз меньше интенсивности падающего естественного света. Найти неизвестную величину.

Номер задания	Θ, град.	k	m
1	20	0,75	?
2	30		?
3	40		?
4	50		?
5	35	?	9,87
6		?	7,41
7		?	14,81
8		?	6,35
9	?	0,6	30,8
10	?		9,68
11	?		4,94
12	?		7,4
13	45	0,1	?
14		0,2	?
15		0,3	?
16		0,4	?
17	25	?	7,41
18		?	5,93
19		?	4,56
20		?	3,95
21	?	0,7	3,28
22	?		89,57
23	?		3,67
24	?		8,3
25	15	0,5	?
26	30		?
27	45		?
28	60		?

Репозиторий БГАТУ

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

I уровень

1. Какая волна называется продольной?
2. Как связаны амплитудные значения колебаний магнитного и электрического векторов в плоской электромагнитной волне?
3. Что такое абсолютный показатель преломления среды? Как связан абсолютный показатель преломления среды с электромагнитными характеристиками среды?
4. Запишите условие, определяющее максимальный наблюдаемый порядок интерференции.
5. В чем заключается явление дифракции света?
6. Запишите формулу Вульфа–Брэггов для дифракции рентгеновских лучей на кристаллах.
7. В чем заключается явление двойного лучепреломления? Чем отличаются обыкновенный и необыкновенный лучи?
8. Сформулируйте закон Брюстера

Задачи

1. Уравнение незатухающих колебаний источника имеет вид $\xi = 3\cos 500\pi t$. Скорость распространения колебаний $c = 320$ м/с. Найти: а) смещение ξ_1 точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 6{,}4$ м от источника колебаний, спустя время $t_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ с после начала колебаний; б) расстояние, на которое продвинется фронт волны к моменту времени $t_2 = 0{,}2$ с?
2. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами в опыте Юнга, если свет одного цвета заменить светом другого цвета? Красный ($\lambda_1 = 0{,}70$ мкм) заменили на синий ($\lambda_2 = 0{,}48$ мкм).
3. Естественный свет проходит через два идеальных николя, плоскости поляризации которых расположены под углом $\Theta = 20$ градусов. После прохождения через второй николь свет падает на зеркало с коэффициентом отражения $k = 0{,}75$ таким образом, что при отражении плоскость поляризации не меняется. Отразившись, свет проходит опять оба николя. Во сколько раз интенсивность света после обратного прохождения через оба николя стала меньше интенсивности падающего естественного света?

II уровень

Вывод связи между разностью фаз и оптической разностью хода двух интерферирующих волн.

Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 8а

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ

Студент должен:

1) **знать** (описывать и формулировать): основные характеристики и особенности теплового излучения, основные законы теплового излучения абсолютно черного тела, кривые зависимости спектральной излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны или частоты для разных температур, квантовую гипотезу и формулу Планка, формулировку законов внешнего фотоэффекта, уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, формулы для энергии, массы и импульса фотона, формулу Комптона для изменения длины волны рентгеновского излучения;

2) **уметь:** решать задачи на законы излучения абсолютно черного тела, на формулу Эйнштейна для фотоэффекта, на формулы для энергии, массы и импульса фотона, на формулу Комптона; сопоставлять и проверять теоретические выводы через эксперимент, самостоятельно обрабатывать полученные экспериментальные результаты; использовать полученные знания при изучении других разделов физики, а также иных дисциплин и сознательно применять их в производственной практике.

Репозиторий БГАТУ

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ

Тепловое излучение, его равновесность. Характеристики теплового излучения: энергетическая светимость, излучательная способность, отражательная и поглощательная способности тел — и связь между этими величинами. Закон Кирхгофа. Абсолютно черное тело и законы его теплового излучения: закон Стефана–Больцмана, закон Вина. Экспериментальные кривые зависимости излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны излучения для различных температур. Квантовая гипотеза. Формула Планка и ее связь с законами Стефана–Больцмана и Вина.

Элементы квантовой оптики. Энергия, масса и импульс фотона (кванта излучения). Вывод формулы давления света на основе квантовой теории. Эффект Комптона. Корпускулярно-волновой дуализм света (излучения).

Дополнительный материал. Внешний фотоэффект и его законы. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Световая и вольтамперная характеристики фотоэффекта. Метод определения постоянной Планка с помощью внешнего фотоэффекта.

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ

Номер и тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов
Занятие 1. Квантовая природа электромагнитного излучения	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 2. Внешний фотоэффект и его законы	Углубление, обобщение, систематизация	Управляемая самостоятельная работа студентов	2
Занятие 3. Изучение законов теплового излучения. Определение постоянной Планка и работы выхода электрона из металла	Систематизация, предварительный контроль	Лабораторное занятие	4
Занятие 4. Тепловое излучение. Элементы квантовой оптики	Обобщение и систематизация	Практическое занятие	2

Репозиторий БГАТУ

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ

1. ***Тепловое излучение*** — свечение тел при их нагревании. Оно происходит за счет той части внутренней энергии тела, которая связана с беспорядочным движением его частиц.

2. ***Равновесное излучение*** — процесс излучения, при котором убыль энергии тела за счет его собственного излучения компенсируется количеством энергии, получаемой данным телом от окружающих тел.

3. ***Световой поток (поток энергии)*** **(Ф)** — это мощность излучения, т. е. количество энергии, излучаемой в единицу времени.

$$\Phi = \frac{dW}{dt}.$$

4. ***Энергетическая светимость тела*** **(R_T)** — поток энергии излучения всех возможных длин волн (частот), испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям наружу, т. е. в пределах плоского угла 2π.

$$R_T = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dS \cdot dt}.$$

5. ***Излучательная (испускательная) способность тела для длины волны*** **λ ($r_{\lambda,T}$)** — количество энергии, испускаемой в единицу времени единицей поверхности тела в единичном интервале длин волн вблизи данной длины волны λ.

$$r_{\lambda,T} = \frac{dW}{dS \cdot dt \cdot d\lambda} = \frac{dR_{\lambda,T}}{d\lambda}.$$

6. ***Поглощательная способность тела для излучения данной длины волны*** **λ *при температуре T* ($a_{\lambda,T}$)** — безразмерная величина, показывающая, какую долю от падающего потока ($d\Phi$) в интервале длин волн (λ, $\lambda + d\lambda$) вблизи данной длины тело поглощает:

$$a_{\lambda,T} = \frac{d\Phi'_\lambda}{d\Phi_\lambda},$$

где $d\Phi'_\lambda$ — поглощенный поток, отнесенный к интервалу длин волн $d\lambda$.

7. ***Отражательная способность тела для излучения данной длины волны*** **λ *при температуре T* ($\rho_{\lambda,T}$)** — безразмерная величина, показывающая, какую долю падающего излучения ($d\Phi_\lambda$) в интервале (λ, $\lambda + d\lambda$) вблизи данной длины волны тело отражает:

$$\rho_{\lambda,T} = \frac{d\Phi''_\lambda}{d\Phi_\lambda},$$

где $d\Phi''_\lambda$ — отраженный поток, отнесенный к интервалу длин волн $d\lambda$.

8. ***Абсолютно черное тело (а.ч.т)*** — тело, для которого $a_{\lambda,T} = 1$ и $\rho_{\lambda,T} = 0$ для всех длин волн и температур, т. е. тело, полностью поглощающее всю энергию падающих на него электромагнитных волн, независимо от их длин волн.

9. ***Серое тело*** — тело, у которого поглощательная способность, оставаясь меньше единицы, зависит от природы тела, но не зависит от длины волны падающего на него излучения: $a_{\lambda,T} = a_0 = \text{const}$, $a_0 < 1$.

10. ***Оптическая пирометрия*** — определение абсолютных температур тел оптическим путем, без непосредственного контакта с телом.

11. ***Кванты энергии*** — дискретные порции излучаемой энергии (ε), величина которых согласно гипотезе Планка пропорциональна частоте излучения: $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, где $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка.

12. ***Внешний фотоэффект*** — явление испускания электронов веществом (в вакуум или другое вещество) под действием электромагнитного излучения.

13. ***Красная граница фотоэффекта*** — минимальная частота излучения (максимальная длина волны λ_0), ниже которой фотоэффект не возникает.

14. ***Фотоэлементы*** — приборы, основанные на использовании явления фотоэффекта.

Репозиторий БГАТУ

15. ***Фототок насыщения*** — наибольшее значение силы фототока при заданной освещенности фотокатода.

16. ***Задерживающее напряжение*** — абсолютное значение напряжения, при котором фототок прекращается.

17. ***Световая характеристика фотоэлемента*** — зависимость фототока насыщения от величины светового потока при постоянном напряжении на электродах фотоэлемента.

18. ***Вольтамперная характеристика фотоэлемента*** — зависимость фототока от напряжения на электродах фотоэлемента при постоянном световом потоке.

19. ***Интегральная чувствительность фотоэлемента*** — это величина фототока, появляющегося при освещении фотоэлемента белым светом при световом потоке в один люмен.

20. ***Эффект Комптона*** — изменение длины волны рентгеновских лучей, происходящее при рассеянии их веществом с легкими атомами (уголь, парафин и т. д.).

21. ***Комптоновская длина волны*** — постоянная $\lambda_k = \frac{h}{m_0 c} =$ = 0,0241 Å, показывающая величину изменения длины волны при рассеянии под прямым углом.

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.2.1. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

4.2.1.1. Тепловое излучение и его основные характеристики. Абсолютно черное тело и законы его теплового излучения

Явления интерференции, дифракции, поляризации, дисперсии света убедительно свидетельствуют о волновых свойствах света. С волнами связана непрерывность распространения световой, т. е. электромагнитной энергии. Однако некоторые оптические явления не могут быть поняты с волновой точки зрения. Они получили объяснение благодаря развитию квантовых представлений о природе света. Согласно квантовой теории свет излучается и поглощается не непрерывно, а дискретно, некоторыми определенными порциями — квантами. Квантовые свойства излучения обнаруживаются в таких явлениях как фотоэффект, эффект Комптона (явление рассеяния рентгеновских лучей веществом), тепловое излучение тел.

При решении проблемы теплового излучения впервые проявилась недостаточность волновых представлений о свете.

Всякое тело при любой температуре, отличной от абсолютного нуля, излучает электромагнитные волны, что сопровождается потерей энергии излучающего тела. Для того чтобы излучение могло происходить длительное время, энергию в теле необходимо пополнять. Способы пополнения энергии могут быть весьма разнообразны, и следовательно, может быть различен и характер излучения телами электромагнитных волн (свечение тел). Можно заставить тело светиться, сообщая ему необходимую энергию нагреванием. В этом случае можно поддерживать излучение неизменным, если убыль энергии, уносимой излучением, пополнять сообщением соответствующего количества теплоты.

Свечение тел при их нагревании называется тепловым излучением.

Его источником может являться только тепловая энергия излучающего тела. В этом случае энергия внутренних хаотических тепловых движений частиц тела (при $T > 0$ °К) переходит в энергию испускаемого электромагнитного излучения. Тепловое излучение — наиболее распространенный и широко используемый вид излучения.

Репозиторий БГАТУ

Солнце, лампы накаливания, пламена и электрические дуги являются источниками теплового излучения. Излучают любые тела, если T больше абсолютного нуля (здания, самолеты, ракеты, узлы радиоаппаратуры и т. д.). В зависимости от степени нагревания этот свет будет видимым или невидимым, но он будет существовать. В одних случаях тепловое излучение вредно (тепловой шум в радиоэлектронных устройствах, источником которого является тепловое излучение деталей аппаратуры). Приходится применять специальные меры, чтобы обеспечить выделение принимаемого сигнала на фоне шумов. В других случаях тепловое излучение тел используется практически, например, для осуществления так называемой пассивной (тепловой) локации (теплопеленгаторы), для создания систем самонаведения управляемых реактивных снарядов, при использовании приборов ночного видения (ночные бинокли, прицелы и т. д.).

Однако оказывается, что существует целый ряд случаев, когда тела испускают свет (светятся) при таких условиях, при которых невозможно допустить наличие соответствующей высокой температуры. Это случаи свечения, при которых энергия тела восполняется за счет какой-либо другой формы энергии, а не за счет теплоты. Случаи свечения тел при различном внешнем воздействии объединяют под общим названием *люминесценция*. Известны, например, фотолюминесценция (процессы излучения, вызываемые освещением тела), катодолюминесценция (свечение твердых тел при бомбардировке электронами), электролюминесценция (возбуждение свечения газов или паров при прохождении через них электрических разрядов) и т. д.

Особенностью теплового излучения, позволяющей выделить его среди всех других видов излучения, является *равновесность*. Процесс излучения происходит равновесно, если убыль энергии тела за счет его собственного излучения компенсируется количеством энергии, которое данное тело получает от окружающих тел путем поглощения. Это означает, что между телом, заключенным в адиабатическую оболочку, и его излучением устанавливается термодинамическое равновесие. При этом тело будет излучать в единицу времени энергии столько же, сколько поглощать. Поместим излучающее тело внутрь оболочки, непроницаемой для излучения и имеющей идеально отражающую поверхность, т. е. теплообмен системы с внешней средой отсутствует. Воздух из оболочки удалим. Тогда излучение, испускаемое телом, отражаясь оболочкой, сохраняется внутри полости, вновь падает на излучающее тело. Упав на тело, поглотится им в большей или меньшей степени. Следовательно, будет происходить непрерывный обмен энергией между телом и заполняющим оболочку излучением. Никакой потери энергии наша система — излучающее тело и излучение — не испытывает. Состояние системы будет равновесным, если с течением времени распределение энергии между телом и излучением не меняется, т. е. в любой момент времени для каждой длины волны получаемая телом энергия равна поглощенной. Поместим внутрь полости нагретое тело (твердое, жидкое, газообразное). Если тело в единицу времени будет излучать больше энергии, чем поглощать (или наоборот), то его внутренняя энергия будет убывать, что приведет к понижению (повышению) температуры. При этом будет уменьшаться (увеличиваться) количество полученной телом энергии до тех пор, пока опять не установится равновесиое состояние. Такое состояние устойчиво. После всякого его нарушения вновь восстанавливается равновесие. Состояние излучающего тела при этом может быть охарактеризовано определенной температурой T. Наоборот, излучение, возбужденное не нагреванием, а какими-либо другими процессами, не будет равновесным.

Таким образом, равновесное излучение всегда имеет характер теплового излучения. Тепловое излучение, интенсивность и спектральный состав которого определяются температурой тела, иногда называют температурным.

Чтобы рассмотреть основные закономерности теплового излучения, введем некоторые понятия.

Интенсивность теплового излучения характеризуют величиной потока энергии, измеряемой в ваттах. Поток энергии (световой поток) — это мощность излучения, т. е. количество энергии, излучаемой в единицу времени. Поток энергии излучения всех возможных длин волн (частот), излучаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям наружу (т. е. в пределах телесного угла 2π), называют *энергетической светимостью тела*. Будем обозначать ее буквой R_T. Энергетическая светимость является функцией температуры: $R_T = \dfrac{d\Phi}{dS}$.

Размерность этой величины: $\left[R_T\right] = \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^2\text{с}}$.

Здесь под $d\Phi$ подразумевается полный интегральный поток световой энергии, т. е. поток, относящийся ко всем длинам волн, испускаемых телом.

Репозиторий БГАТУ

Введем для энергетической светимости функцию распределения по длинам волн. Обозначим через $dR_{\lambda,T}$ — поток энергии, испускаемый единицей поверхности тела в интервале длин волн (λ, $\lambda + d\lambda$) вблизи некоторой определенной длины волны λ. При малом интервале $d\lambda$ поток $dR_{\lambda,T}$ будет пропорционален $d\lambda$: $dR_{\lambda,T} = r_{\lambda,T} \cdot d\lambda$. Коэффициент пропорциональности $r_{\lambda,T} = \dfrac{dR_{\lambda,T}}{d\lambda}$ называют *излучательной (испускательной) способностью тела для длины волны* λ. Как и энергетическая светимость, излучательная способность сильно зависит от температуры тела, т. е. является функцией длины волны и температуры.

Излучательная способность тела для длины волны λ есть количество энергии, испускаемой в единицу времени единицей поверхности тела в единичном интервале длин волн вблизи данной длины волны λ.

Энергетическая светимость связана с излучательной способностью формулой $R_T = \int_{\lambda=0}^{\infty} dR_{\lambda,T} = \int_{\lambda=0}^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$.

Рассмотрим теперь поглощение света. Ограничимся случаем, когда излучающее и поглощающее тело непрозрачно. Этому условию можно удовлетворить, если толщина тела достаточна, чтобы всякий луч, вступивший в него, успел поглотиться, не достигнув противоположной границы тела. Пусть на единицу поверхности тела падает поток энергии $d\Phi_\lambda$, относящийся к малому интервалу длин волн $d\lambda$ вблизи некоторой определенной длины волны λ. Обозначим поглощенный поток, отнесенный к тому же интервалу длин волн $d\lambda$, через $d\Phi'_\lambda$, а отраженный поток — через $d\Phi''_\lambda$. На основании закона сохранения энергии $d\Phi_\lambda = d\Phi'_\lambda + d\Phi''_\lambda$.

Разделив левую и правую части равенства на $d\Phi_\lambda$, получим:

$$\frac{d\Phi'_\lambda}{d\Phi_\lambda} + \frac{d\Phi''_\lambda}{d\Phi_\lambda} = 1.$$

Безразмерная величина $a_{\lambda,T} = \dfrac{d\Phi'_\lambda}{d\Phi_\lambda}$, показывающая, какую долю от падающего потока в интервале длин волн (λ, $\lambda + d\lambda$) вблизи данной волны λ тело поглощает, называется *поглощательной способностью* тела для излучения данной длины волны λ при температуре T.

Безразмерная величина $\rho_{\lambda,T} = \dfrac{d\Phi''_\lambda}{d\Phi_\lambda} = 1 - a_{\lambda,T}$, показывающая, какую долю от падающего излучения в интервале (λ, $\lambda + d\lambda$) вблизи данной длины волны λ тело отражает, называется *отражательной способностью* тела для излучения данной длины волны λ при температуре T.

Тело, которое абсолютно не поглощает излучение и полностью отражает все падающие на него лучи, называется *абсолютно белым телом*.

Для него $a_{\lambda,T} = 0$ и $\rho_{\lambda,T} = 1$.

Наблюдаемый цвет такого тела полностью определяется спектральным составом освещающего его излучения.

Тело, полностью поглощающее все падающее на него излучение, называется *абсолютно черным телом (а.ч.т.)*. А.ч.т. при любой температуре поглощает всю энергию падающих на него электромагнитных волн независимо от их длин волн. Для а.ч.т. $a_{\lambda,T} = 1$ и $\rho_{\lambda,T} = 0$ для всех длин волн и температур. При освещении такого тела оно ничего не отражает и на фоне других предметов кажется черным. В природе а.ч.т., как и других идеализированных объектов, нет. Наибольшим приближением к нему являются поверхности, покрытые платиновой и висмутовой чернью или сажей.

Существуют тела, у которых поглощательная способность, оставаясь меньше единицы, зависит от природы тела, но не зависит от длины волны падающего на него излучения. Такие тела называются серыми.

$a_{\lambda,T} = a_0 = \text{const}$ называют коэффициентом черноты тела ($a_0 < 1$). В природе нет тел, для которых коэффициент поглощения был бы постоянным по всему спектру, однако на ограниченных участках спектра тело можно считать серым. Так, в видимой области спектра свойствами серого тела обладают уголь (a_0 = 0,8 при 125–625 °С), угольные нити ламп накаливания (a_0 = 0,526 при 1040–1405 °С), сажа (a_0 = 0,94–0,96 при 100–200 °С). Платиновая и висмутовая чернь поглощают и излучают как серое тело в наиболее широком интервале от видимого света до 25–30 мкм (a_0 = 0,93–0,96).

Перейдем к рассмотрению законов теплового излучения и поглощения тел. Первый крупный шаг в теоретическом исследовании свойств теплового излучения был сделан Кирхгофом (1859 г.).

Репозиторий БГАТУ

Исходя из термодинамических соображений, Кирхгоф получил соотношение между $r_{\lambda,T}$ и $a_{\lambda,T}$, которое прекрасно подтвердилось на опыте. *Закон Кирхгофа гласит: отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тел и является для всех тел универсальной функцией длины волны и температуры.*

$$\frac{r^{(1)}_{\lambda,T}}{a^{(1)}_{\lambda,T}} = \frac{r^{(2)}_{\lambda,T}}{a^{(2)}_{\lambda,T}} = \frac{r^{(3)}_{\lambda,T}}{a^{(3)}_{\lambda,T}} = \ldots = f(\lambda,T) \qquad (2.1)$$

где индексы 1, 2, 3,… относятся к разным телам. Значения $r_{\lambda,T}$ и $a_{\lambda,T}$, взятые отдельно, могут сильно меняться при переходе от одного тела к другому. Обозначим для а.ч.т. излучательную способность через $r^*_{\lambda,T}$, его поглощательная способность $a_{\lambda,T} = 1$.

Закон Кирхгофа можно записать в виде:

$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = \frac{r^*_{\lambda,T}}{a^*_{\lambda,T}} = r^*_{\lambda,T} = f(\lambda,T) \cdot \qquad (2.2)$$

Таким образом, универсальная функция в законе Кирхгофа есть испускательная способность а.ч.т.

Закону Кирхгофа теперь можно дать следующую формулировку: отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности есть универсальная функция длины волны и температуры тела, равная испускательной способности а.ч.т. при одинаковой их температуре и для одной и той же длины волны.

Закон Кирхгофа относится только к тепловому излучению и служит самым надежным критерием для распознавания природы свечения: свечение, не подчиняющееся закону Кирхгофа, заведомо не является температурным. Из закона Кирхгофа можно сделать следующие заключения:

1. Испускательная способность а.ч.т. при данной температуре и для данной длины волны λ есть универсальная функция — одна и та же для всех тел:

$$r^*_{\lambda,T} = f(\lambda,T).$$

Зная испускательную способность а.ч.т., испускательную способность любого тела можно вычислить по экспериментально измеренной поглощательной способности:

$$r_{\lambda,T} = a_{\lambda,T} \cdot r^*_{\lambda,T}. \qquad (2.3)$$

2. Так как для нечерных тел $a_{\lambda,T} < 1$, то $r_{\lambda,T} < r^*_{\lambda,T}$. Из всех тел при одной и той же температуре а.ч.т. обладает наибольшей испускательной способностью для любой длины волны.

3. При $a_{\lambda,T} = 0$ $r_{\lambda,T} = 0$. Если тело не поглощает лучи данной длины волны, то оно этих лучей и не испускает.

Всякое тело при данной температуре излучает лучи преимущественно таких длин волн, которые оно при той же температуре сильнее всего поглощает. Тело, сильнее поглощающее, должно и больше испускать, только при условии, что сравнение проводится при одинаковой температуре. Это заключение из закона Кирхгофа имеет совершенно общее значение, независимо от механизма, обуславливающего поглощение: всякая сильно поглощающая система будет и сильнее излучать, независимо от того, обусловлено ли сильное поглощение свойствами поверхности или устройством системы как целого. На этом принципе основано устройство тела, наиболее приближающегося по своим свойствам к а.ч.т., т. е. закон Кирхгофа открывает возможность искусственного построения а.ч.т.

Такое устройство изготавливается в виде замкнутой полости, в стенке которой сделано малое отверстие (диаметр которого не более 0,1 поперечника полости). Луч света, проникающий через отверстие, будет претерпевать многократные отражения от стенок полости. При каждом отражении часть лучистой энергии поглощается. Повторные поглощения на стенках приводят к тому, что практически все излучение любой длины волны поглощается стенками полости. Если стенки полости с малым отверстием ярко осветить снаружи, то отверстие будет выделяться своей чернотой на светлом фоне освещенных стенок. По этой же причине кажутся темными открытые окна домов, рассматриваемые с улицы.

При нагревании такая система в соответствии с законом Кирхгофа будет и сильно испускать. Если раскалить стенки полости, сделанные из материала с малой поглощательной способностью (например, из белого фарфора), то отверстие будет ярко светиться на более тусклом фоне прямого излучения самих стенок.

Таким образом, полость с малым отверстием в отношении поглощения, а поэтому по закону Кирхгофа и в отношении испускания, ведет себя как а.ч.т. Если поддерживать некоторую температуру T стенок полости, то из отверстия исходит излучение, близкое по спектральному составу к излучению а.ч.т. при той же температуре. Модель а.ч.т. на практике может быть осуществлена в виде длинной трубки из тугоплавкого и кислородостойкого материала

Репозиторий БГАТУ

(кислород является агрессивной средой), внутрь которой помещаются перегородки (диафрагмы) с отверстиями. Трубка вставляется в электрическую печь таким образом, чтобы обогрев ее был равномерным. Применяя такие модели, при наличии высокотемпературного нагревателя можно получить спектры излучения а.ч.т. до относительно высоких температур.

Разлагая излучение а.ч.т. в спектр с помощью дифракционной решетки и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно найти экспериментально вид функции $r^*_{\lambda,T}$. Результаты таких опытов приведены на рис. 2.1. Разные кривые относятся к различным температурам а.ч.т.

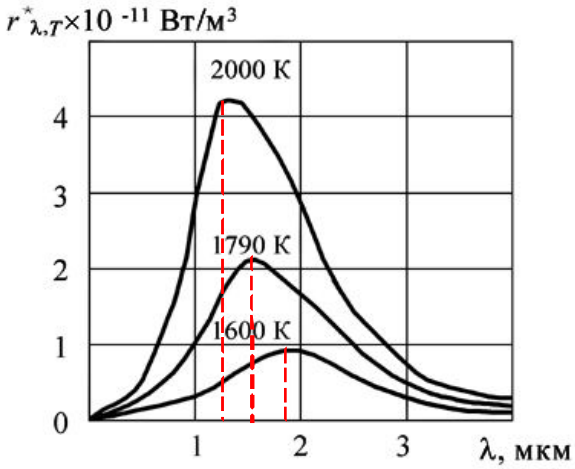

Рис. 2.1. Кривые зависимости испускательной способности абсолютно черного тела от длины волны при различных температурах

Из приведенного рисунка можно сделать ряд выводов:

1. Спектр излучения а.ч.т. сплошной, т. е. в нем представлен непрерывный ряд длин волн от 0 до ∞. А.ч.т. поглощает при данной T волны всякой длины, поэтому его спектры, как спектр поглощения, так и спектр испускания, — сплошные (из закона Кирхгофа).

2. Существует отчетливо выраженный максимум испускательной способности, который с повышением температуры смещается в сторону более коротких длин волн.

3. Площадь, охватываемая кривой (между соответствующей кривой и осью абсцисс), дает энергетическую светимость а.ч.т. при соответствующей температуре T. Из рис. 2.1 следует, что энергетическая светимость а.ч.т. сильно возрастает при повышении температуры.

Таким образом, закон Кирхгофа $\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = r^*_{\lambda,T}$ поставил в центр внимания теории теплового излучения функцию $r^*_{\lambda,T} = f(\lambda,T)$, представляющую собой испускательную способность а.ч.т.

Определение вида этой функции явилось основной проблемой учения о тепловом излучении. Многие экспериментальные исследования вида этой функции и теоретическое решение задачи о распределении энергии в спектре а.ч.т. привели к возникновению и развитию квантовой теории

Рассмотрим законы излучения а.ч.т.

Закон Стефана–Больцмана: энергетическая светимость а.ч.т. возрастает пропорционально четвертой степени абсолютной температуры тела:

$$R^*_{\lambda,T} = \int r^*_{\lambda,T} \cdot d\lambda = \sigma T^4 . \qquad (2.4)$$

По современным измерениям постоянная Стефана-Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4).

Закон смещения Вина касается положения максимума функции $r^*_{\lambda,T}$. Длина волны λ_{max}, на которую приходится максимум излучательной способности а.ч.т., меняется обратно пропорционально абсолютной температуре:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} . \qquad (2.5)$$

Измерения дают $b = 2{,}896 \cdot 10^{-3}$ м · К.

Чем выше температура а.ч.т., тем на более короткую длину волны приходится максимум излучательной способности а.ч.т. При комнатной температуре максимум излучения лежит в далекой инфракрасной области. При температуре между 5000 и 6000 °К максимум проходит через область спектра, к которой человеческий глаз наиболее чувствителен (5500 Å в желто-зеленой области видимого спектра). Температуре 5900 К отвечает температура поверхности Солнца. Такое излуче-

Репозиторий БГАТУ

ние воспринимается как белый, дневной свет. При более высоких T максимум смещается в ультрафиолетовую область. Атомная бомба в момент взрыва имеет $T = 10^7$ К (рентгеновские лучи).

Третий закон указывает, что максимальная излучательная способность а.ч.т возрастает прямо пропорционально пятой степени абсолютной температуры:

$$(r^*_{\lambda,T})_{\max} = C \cdot T^5 , \qquad (2.6)$$

где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5).

Рассмотренные законы излучения а.ч.т. лежат в основе определения абсолютных температур тел оптическим путем, без непосредственного контакта с телом (*оптическая пирометрия*).

4.2.1.2. Квантовая гипотеза. Формула Планка и ее связь с законами Стефана–Больцмана и Вина

Рассмотренные законы излучения а.ч.т. не решают основной задачи о распределении энергии по длинам волн в спектре излучения а.ч.т. Многочисленные попытки определить вид функции $r^*_{\lambda,T}$ не приносили долгое время желательных результатов, приводили к заключениям, согласующимися с опытом в ограниченном интервале T и λ.

Так, Рэлей и Джинс применили к равновесному тепловому излучению внутри замкнутой полости теорему классической статической механики о равномерном распределении энергии по степеням свободы и получили следующее выражение для $r^*_{\lambda,T}$:

$$r^*_{\lambda,T} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT . \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) согласуется с опытными данными лишь для длинноволнового участка спектра. Кроме того, формула Рэлея–Джинса приводит к противоречию с законом Стефана–Больцмана, т. к. энергетическая светимость а.ч.т. при любой температуре обращается в ∞.

$$R^*_T = \int_{\lambda=0}^{\infty} r^*_{\lambda,T} d\lambda = 2\pi c \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \infty .$$

Все эти затруднения получили в физике название «ультрафиолетовая катастрофа». Выход из создавшегося положения был

указан Планком. Лишь в 1900 г. немецкому физику Планку удалось найти вид функции $r^*_{\lambda,T}$, в точности соответствующий опытным данным.

Планк допускал, что электромагнитное излучение испускается телами не непрерывно, а в виде отдельных порций энергии (квантов), величина которых пропорциональна частоте излучения.

Эти дискретные порции излучаемой энергии Планк назвал квантами:

$$\varepsilon_ф = h\nu = h\frac{c}{\lambda_0} , \qquad (2.8)$$

где $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; λ_0 — длина волны в вакууме.

Согласно Планку излучательная способность а.ч.т.:

$$r^*_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} , \qquad (2.9)$$

где c — скорость света; h — постоянная Планка; k — постоянная Больцмана; λ — длина волны.

Формула Планка совпала с результатами самых тщательных экспериментальных исследований, совпала с опытной кривой $r^*_{\lambda,T}$ (см. рис. 2.1). Нетрудно убедиться, что из формулы Планка можно получить упоминавшиеся выше законы излучения а.ч.т. — закон Стефана–Больцмана и Вина. При этом не только из формулы Планка получается внешняя форма этих законов, но и входящие в них постоянные могут быть вычислены из универсальных постоянных h, k, c. Обратно, пользуясь экспериментально найденными значениями σ и b, можно вычислить значения h и k. Именно таким путем и было получено первое численное значение постоянной Планка.

Закон Стефана–Больцмана получается непосредственным интегрированием формулы Планка по длине волны:

$$R^*_T = \int_{\lambda=0}^{\infty} r^*_{\lambda,T} d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 (e^{h/c\lambda kT} - 1)} = \sigma T^4 ,$$

где $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$.

Репозиторий БГАТУ

Воспользовавшись условием максимума функции $r^*_{\lambda,T}$, $\frac{dr^*_{\lambda,T}}{d\lambda}=0$, получим, что максимуму функции $r^*_{\lambda,T}$ соответствует длина волны $\lambda_{max}=\frac{b}{T}$, где $b=\frac{hc}{4{,}965k}$.

При больших длинах волн величина $\frac{hc}{\lambda kT}<<1$, $e^{hc/\lambda kT}$ можно разложить в ряд, ограничиваясь двумя первыми членами: $e^{hc/\lambda kT}=1+\frac{hc}{\lambda kT}$.

Подставив в формулу Планка, будем иметь:

$$r^*_{\lambda,T}=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\cdot\frac{\lambda kT}{hc}=\frac{2\pi c}{\lambda^4}\cdot kT,$$

что соответствует формуле Рэлея–Джинса (2.7). Такое совпадение формул показывает, что в области больших длин волн (малых частот) выводы классической и квантовой теорий излучения дают одинаковые результаты. Это следует из того, что в соответствии с равенством $\varepsilon_ф=h\nu=\frac{h\cdot c}{\lambda}$ энергия кванта тем меньше, чем больше длина волны. Применив эту формулу к разным областям электромагнитного спектра, можно найти значения квантов энергии при различных λ. Для измерения энергии квантов и вообще энергии отдельных атомов обычно пользуются единицей эВ. Электронвольт — это энергия, которую приобретает электрон, проходя в электрическом поле разность потенциалов в 1 В.

$$1\text{ эВ} = 1{,}6\cdot10^{-19}\text{ Кл}\cdot 1\text{ В} = 1{,}6\cdot10^{-19}\text{ Дж}.$$

При больших длинах волн (радиоволны) величина кванта энергии столь мала, что невозможно отличить, целое или дробное число порций энергии (квантов) содержится в излучении. Вследствие этого квантовая (дискретная) природа излучения особенно проявляется в коротковолновой части спектра.

Гипотеза квантов энергии Планка явилась началом нового направления в теоретической физике. Свое дальнейшее развитие она

получила в исследовании ряда других явлений — фотоэффекта, эффекта Комптона и др. В настоящее время признанными являются электромагнитная (волновая) и квантовая теории света.

4.2.1.3. Элементы квантовой оптики. Энергия, масса, импульс фотона. Давление света с точки зрения квантовой теории

Чтобы объяснить распределение энергии в спектре равновесного теплового излучения, Планк допустил, что свет (электромагнитное излучение) испускается телами не непрерывно, а в виде отдельных порций. Эти дискретные порции энергии Планк назвал квантами $\left(\varepsilon=h\nu=\frac{h\cdot c}{\lambda}\right)$. Для объяснения фотоэффекта Эйнштейну достаточно было допустить, что свет поглощается такими же порциями. Но Эйнштейн пошел значительно дальше. Он выдвинул гипотезу, что свет распространяется в пространстве в виде дискретных частиц — квантов света. Эти частицы света были названы впоследствии фотонами (в 1926 г.). Непосредственное подтверждение существования световых частиц (фотонов) дали опыты С. И. Вавилова и его сотрудников по обнаружению флуктуаций («дрожаний», «миганий») слабых световых потоков видимого света. Наблюдения были основаны на том, что после достаточно длительного пребывания в темноте человеческий глаз обладает резким порогом зрительного ощущения, т. е. зрительно воспринимает свет, интенсивность которого не меньше некоторого определенного значения. Если в среднем в области наибольшей чувствительности глаза (λ = 0,555 мкм) порог зрительного ощущения составляет примерно 100 фотонов в секунду, т. е. глаз начинает реагировать на свет при попадании на зрачок примерно 100 фотонов в секунду, то за отдельные секунды их попадет в глаз и несколько больше (например, 110) и несколько меньше (например, 90). В последнем случае глаз не воспринимает света. Поэтому в опытах С. И. Вавилова и наблюдались периодически повторяющиеся вспышки («мигания») слабого источника, средняя интенсивность света которого совпадала с порогом зрительного ощущения наблюдателя.

При объяснении распределения энергии в спектре абсолютно черного тела, а также явления фотоэффекта была использовала

Репозиторий БГАТУ

только одна характеристика фотона — его энергия. Энергия фотона определяется частотой ν или длиной волны λ (см. формулу (2.8)).

Согласно теории относительности частица с энергией $\varepsilon_ф$ имеет массу:

$$m = \frac{\varepsilon_ф}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda_0}. \qquad (2.10)$$

Масса фотона существенно отличается от массы микроскопических тел и масс других элементарных частиц, таких как электрон, протон, нейтрон и др. В отличие от них фотон не обладает массой покоя ($m_0 = 0$).

Фотон движется в вакууме со скоростью $u = c$. Учтем этот факт в формуле, выражающей зависимость массы от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (2.11)$$

Получаем, что при конечных значениях массы покоя фотона m_0 и $u \to c$ масса движущегося фотона $m \to \infty$, что противоречит формуле (2.10). Поэтому из формулы (2.11) вытекает, что $m_0 = 0$, т. е. покоящихся фотонов не существует. Таким образом, фотоны представляют собой частицы особого рода, которые имеют нулевую массу покоя и могут двигаться только со скоростью c в любом веществе (c — скорость распространения света в вакууме). Этот вывод не противоречит тому, что фазовая и групповая скорости света в веществе отличны от c. Дело в том, что распространение света в среде сопровождается процессами «переизлучения» — фотоны поглощаются и вновь испускаются частицами среды.

Величину импульса фотона можно записать в виде:

$$P_ф = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda_0}. \qquad (2.12)$$

Импульс фотона можно записать через волновой вектор $\vec{k}$, модуль которого $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (волновое число) и который направлен по направлению распространения света, т. е. по направлению потока фотонов:

$$P_ф = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k, \qquad (2.13)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Таким образом, фотон, подобно любой движущейся частице или телу, обладает энергией, массой и импульсом. Все три корпускулярные характеристики фотона связаны с волновыми характеристиками света — его частотой ν и длиной волны λ.

Найдем *световое давление*, которое производится на поверхность тела потоком монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности. Давление света на какую-нибудь поверхность равно импульсу, который передают фотоны единице поверхности за 1 сек $\left(p = \frac{F}{S} = \frac{dP}{dt \cdot S} \right)$.

Пусть N — число фотонов, падающих за единицу времени на единицу поверхности тела перпендикулярно к ней.

Так как каждый фотон обладает импульсом $h\frac{\nu}{c}$, то он сообщает поглощающей поверхности импульс $h\frac{\nu}{c}$, а отражающей поверхности — импульс $2h\frac{\nu}{c}$, т. к. при отражении импульс фотона изменяется от $+h\frac{\nu}{c}$ до $-h\frac{\nu}{c}$, т. е. на $2h\frac{\nu}{c}$.

Таким образом, если все фотоны поглощаются телом (абсолютно черное тело), то давление будет равно:

$$p = N\frac{h\nu}{c} = \frac{N\varepsilon_ф}{c}. \qquad (2.14)$$

Если все фотоны отражаются телом (абсолютно белое тело), то давление света будет равно:

$$p = 2N\frac{h\nu}{c} = 2N\frac{\varepsilon_ф}{c}. \qquad (2.15)$$

Репозиторий БГАТУ

Если коэффициент отражения поверхности равен ρ, то из полного числа падающих фотонов N отражается ρN фотонов и поглощается $(1 - \rho)N$ фотонов. Следовательно, в общем случае давление света на поверхность:

$$p = 2\frac{\varepsilon_ф}{c}N\rho + \frac{\varepsilon_ф}{c}N(1-\rho) = \frac{\varepsilon_ф}{c}N(1+\rho). \qquad (2.16)$$

Если учесть, что $N\varepsilon_ф = Nh\nu$ есть энергия всех фотонов, падающих нормально на единицу поверхности тела за единицу времени, т. е. интенсивность света I, а $\frac{I}{c} = \omega$ — объемная плотность энергии падающего излучения, то:

$$p = \frac{I}{c}(1+\rho) = \omega(1+\rho). \qquad (2.17)$$

Формулу (2.17) для давления света на поверхность тела мы получили, исходя из представлений о свете как о потоке фотонов. Можно объяснить давление света и получить формулу (2.17), исходя из электромагнитной теории света Максвелла, т. е. давление света одинаково успешно объясняется как волновой, так и квантовой теориями света. Отсюда следует, что световое давление не может считаться убедительным доказательством существования квантовых свойств излучения.

Впервые световое давление было обнаружено и измерено профессором Московского университета П. Н. Лебедевым при помощи опытов, представляющих для своего времени образец экспериментального искусства (в 1900 г. — на твердые тела, в 1909 г. — на газы).

Световое давление в яркий солнечный день оказалось равным около $4 \cdot 10^{-6}$ Н/м^2.

Измерения светового давления подтвердили высказанное еще Кеплером предположение, что отклонение кометных хвостов в сторону от Солнца является результатом давления на частицы со стороны солнечных лучей.

4.2.1.4. Эффект Комптона. Корпускулярно-волновой дуализм света (излучения)

Квантовые свойства света наиболее отчетливо проявляются в эффекте, который обнаружил А. Комптон (1923 г.), наблюдая рассеяние монохроматического рентгеновского излучения веществами с легкими атомами (графит, парафин и др.).

Явление Комптона состоит в изменении длины волны рентгеновских лучей, происходящем при рассеянии их веществом с легкими атомами.

(Впоследствии это явление было обнаружено и при рассеянии тяжелыми атомами, причем в последнем случае оно оказывается более сложным.)

С точки зрения волновой теории света рассеяние рентгеновских лучей связано с вынужденными колебаниями электронов вещества, так что частота рассеянного света должна равняться частоте падающего. Тщательные измерения Комптона показали, однако, что в рассеянном рентгеновском излучении появляется излучение несколько большей длины волны (рис. 2.2).

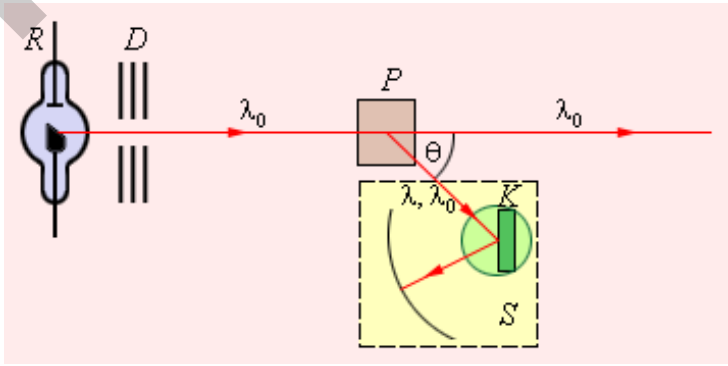

Рис. 2.2. Схема опыта Комптона

Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения, выделяемый диафрагмами D, рассеивается веществом с легкими атомами (графит, парафин и т. д.). Рассеянный под углом θ свет изучался на рентгеновском спектрографе фотографически или с помощью ионизационной камеры.

Наблюдаемое изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ не зависит от длины волны рассеиваемых рентгеновских лучей и от природы рассеивающего вещества, но зависит от направления рассеяния:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_к(1-\cos\theta) = 2\lambda_к \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (2.18)$$

Репозиторий БГАТУ

где $\lambda_к$ = 0,02426 Å — постоянная, найденная из опыта и показывающая величину изменения длины волны при рассеянии под прямым углом; θ — угол между направлением первичного пучка и направлением рассеянного света. Комптоновское рассеяние интенсивно для веществ с малым атомным весом (водород, углерод, бор, алюминий), имеющих в своем составе электроны, относительно слабо связанные с ядром атома. Явление Комптона удается объяснить, если предположить, что процесс рассеяния рентгеновских лучей сводится к упругому столкновению фотонов рентгеновских лучей со свободными или слабо связанными с ядром электронами, входящими в состав вещества, причем соблюдаются законы сохранения энергии и импульса сталкивающихся частиц.

В результате столкновения электрон, скорость которого можно считать пренебрежительно малой по сравнению со скоростью движения фотона (электрон мы считали покоящимся), приобретает энергию и импульс и покидает атом (так называемые электроны отдачи), а фотон изменяет направление своего движения (рассеивается) и его энергия уменьшается, т. е. уменьшается частота или соответственно увеличивается длина волны (рис. 2.3).

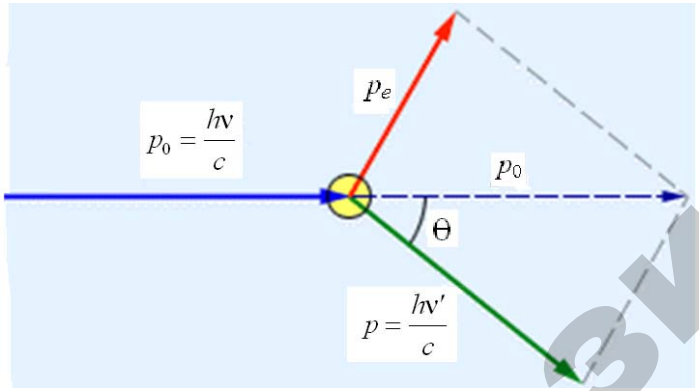

Рис. 2.3. Диаграмма импульсов при упругом рассеянии фотона на покоящемся электроне

Диаграмма изображает соотношение импульсов падающего фотона $\vec{p}_0$, рассеянного фотона $\vec{p}$ и электрона после столкновения $\vec{p}_e = m\vec{u}$: $\vec{p}_0 = \vec{p} + m\vec{u}$.

После столкновения импульс электрона отдачи *mu* определяется по теореме косинусов:

$$(mu)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - \frac{2h^2}{c^2}\nu\nu'\cos\theta. \qquad (2.19)$$

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2; \qquad (2.20)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (2.21)$$

Выполнение законов сохранения энергии и импульса приводит к следующему результату:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (2.22)$$

Эта формула совпадает с экспериментальной формулой (2.18). Подставляя численные значения *h*, m_0, *c*, найдем $\lambda_к = \frac{h}{m_0c} =$ $= 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м. $\lambda_к = \frac{h}{m_0c}$ — универсальная постоянная, получившая название комптоновской длины волны рассеивающей частицы.

Независимо от природы рассеивающего вещества линия комптоновского рассеяния сдвинута относительно первичной линии на величину:

$$\Delta\lambda = 0{,}04853\sin^2\frac{\theta}{2}\ \text{Å}. \qquad (2.23)$$

Максимального значения Δλ достигает для лучей, рассеянных под углом θ = π, т. е. в направлении, обратном по отношению к направлению первичных лучей (рис. 2.4).

Благодаря хорошему совпадению экспериментальных и теоретических данных, относящихся к явлению Комптона, можно утверждать, что доказана выполнимость законов сохранения энергии

Репозиторий БГАТУ

и импульса для отдельных элементарных процессов, а также применимость элементарного представления о взаимодействии фотона с электроном как о взаимодействии двух частиц.

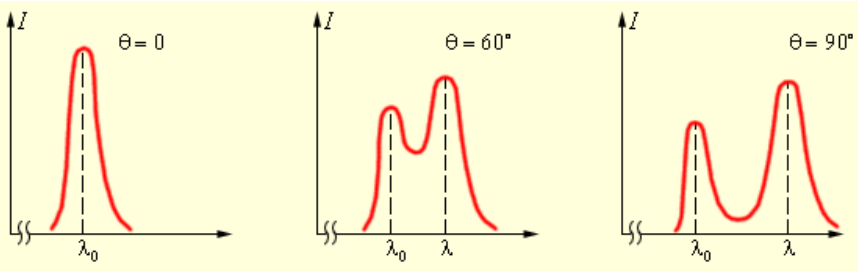

Рис. 2.4. Спектры рассеянного излучения

В явлении Комптона свет взаимодействует с отдельными электронами, поэтому в этом явлении и проявляется наиболее отчетливо корпускулярная (дискретная, прерывистая) природа света. Эффект Комптона широко используется в научных исследованиях как средство изучения структуры атомов, ядер, элементарных частиц.

Волновая и квантовая теории света дополняют друг друга. С позиции волновых свойств света объясняются такие оптические явления как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия, поглощение, рассеяние света. С позиции квантовых свойств света — тепловое излучение, фотоэффект, давление света, эффект Комптона.

Квантовая (дискретная) природа обнаруживается более отчетливо с уменьшением длины волны (увеличением частоты).

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

4.3.1. ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ И ЕГО ЗАКОНЫ

4.3.1.1. Законы внешнего фотоэффекта

Среди явлений, в которых при взаимодействии света с веществом проявляется квантовый характер поглощения света, очень важным является фотоэффект. Кроме того, из всех квантово-оптических явлений фотоэффект наиболее широко используется. Внешний фотоэффект применяется в вакуумных и газонаполненных фотоэлементах, в фотоумножителях, в электронно-оптических преобразователях, получивших широкое применение в различных областях науки и техники: в автоматике, телемеханике, измерительной технике. Фотоэлементы всех типов находят распространение в производстве для управления технологическими процессами, в сигнализации, в технике безопасности — для ограждения и блокировки движущихся частей механизмов и машин.

Внешним фотоэффектом называется явление испускания электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Внешний фотоэффект называют также фотоэлектронной эмиссией или сокращенно — фотоэмиссией.

Внешний фотоэффект наблюдается в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация), в атомных ядрах (фотоядерные реакции) и в конденсированных средах. Наиболее детально разработана теория фотоэмиссии из металлов. Обнаружил внешний фотоэффект из металлов и дал его описание Герц в 1886–1887 гг. Систематическое исследование внешнего фотоэффекта немногим более года спустя после работ Герца было проведено профессором Московского университета А. Г. Столетовым. Его экспериментальные исследования были продолжены советскими физиками П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым. Экспериментально установлены следующие законы внешнего фотоэффекта:

1. Сила фототока насыщения, а следовательно, и количество фотоэлектронов, вылетающих в единицу времени с единицы поверхности вещества, прямо пропорциональны интенсивности падающего излучения, если его спектральный состав остается неизменным.

Репозиторий БГАТУ

2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с увеличением частоты падающего монохроматического излучения и не зависит от его интенсивности.

3. Для каждого вещества существует минимальная частота ν_0 (максимальная длина волны λ_0), называемая *красной границей фотоэффекта*. Если частота падающего электромагнитного излучения меньше ν_0, фотоэффект не наблюдается.

Объяснить второй и третий законы фотоэффекта с точки зрения классических волновых представлений невозможно. С точки зрения классической физики энергия фотоэлектрона должна находиться в прямой связи с интенсивностью падающего излучения. Однако опыт показывает, что энергия фотоэлектронов совершенно не зависит от интенсивности света. Увеличение интенсивности приводит к пропорциональному увеличению лишь числа фотоэлектронов, но не их энергии. Энергия же отдельного фотоэлектрона зависит только от частоты падающего света.

4.3.1.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

В 1905 г. Эйнштейн объяснил экспериментальные закономерности фотоэффекта на основе гипотезы световых квантов. А. Эйнштейн развил идеи Планка о квантовом характере излучения. Он предположил, что процесс поглощения света веществом можно рассматривать как взаимодействие отдельных квантов излучения (фотонов) с электронами вещества. В результате такого взаимодействия энергия кванта может перейти к электрону только целиком — электрон поглощает фотон.

Рассмотрим более подробно фотоэффект с поверхности металлов. Пусть на поверхность металла падает квант света. Если его энергия передается электрону в металле, то часть этой энергии электрон затратит на преодоление потенциального барьера, существующего вблизи поверхности металла. Величина этого барьера определяется работой выхода электронов из металла. Оставшаяся часть энергии кванта используется на сообщение кинетической энергии электрону, покинувшему металл. Заметим, что не каждый поглощенный фотон приводит к освобождению электрона. Эффективность выбивания электронов характеризуется квантовым выходом — величиной, равной отношению числа фотоэлектронов к числу поглощенных фотонов, которая, как правило, меньше единицы.

Используя закон сохранения энергии и предполагая, что каждый электрон поглощает один фотон, можно найти максимальную кинетическую энергию электронов, вылетевших из металла при освещении его поверхности монохроматическим светом частоты ν:

$$\left(\frac{mu^2}{2}\right)_{\max} = h\nu - A_{\text{вых}}. \qquad (2.24)$$

Данное уравнение получило название *уравнения Эйнштейна*.

Исходя из этого уравнения, можно объяснить указанные выше основные закономерности внешнего фотоэффекта.

Так как каждый электрон испускается в результате поглощения одного фотона, то общее число фотоэлектронов, испускаемых за единицу времени, пропорционально числу фотонов, падающих за то же время на поверхность вещества. Но число фотонов пропорционально потоку Ф излучения, следовательно, фототок насыщения пропорционален интенсивности падающего излучения.

Поскольку для каждого вещества $A_{\text{вых}}$ = const, то максимальная кинетическая энергия испускаемых фотоэлектронов определяется только частотой излучения и не зависит от его интенсивности.

Из соотношения (2.24) следует, что существует некоторая минимальная частота падающего на металл излучения, при которой еще возможен фотоэффект. Она определяется соотношением:

$$\nu_0 = \frac{A_{\text{вых}}}{h}. \qquad (2.25)$$

Частота ν_0 получила название *красной границы фотоэффекта*. Красная граница фотоэффекта различна для разных металлов и так же, как и работа выхода, существенно зависит от химической природы вещества и состояния его поверхности. Граница фотоэффекта для металлов с малой работой выхода (щелочные металлы) лежит в видимой области спектра, а для металлов с большой работой выхода (серебро, платина и др.) — в ультрафиолетовой области.

Рассмотренный процесс фотоэмиссии справедлив только для светового потока небольшой мощности, когда взаимодействие излучения с веществом носит линейный характер, При освещении поверхности металла мощным лазерным источником света возмож-

Репозиторий БГАТУ

но поглощение одним электроном двух или нескольких фотонов. При этом красная граница фотоэффекта сдвигается в область более длинных волн и зависит от интенсивности светового потока (многофотонный фотоэффект).

4.3.1.3. Световая и вольтамперная характеристики фотоэффекта. Определение постоянной Планка с помощью внешнего фотоэффекта

Световой характеристикой называется зависимость фототока $i_Ф$ от величины светового потока Ф при постоянном напряжении U на электродах фотоэлемента. Световая характеристика снимается при напряжении U, соответствующем фототоку насыщения. При постоянном U величина фототока $i_Ф$ должна быть прямо пропорциональна потоку световой энергии, падающему на катод: $i_Ф = k \cdot Ф$, где k — интегральная чувствительность фотоэлемента.

Интегральная чувствительность фотоэлемента — это величина фототока, который дается фотоэлементом при освещении его белым светом при световом потоке в 1 лм. В реальных фотоэлементах линейная зависимость $i_Ф = f(Ф)$ при U = const может быть искажена рядом побочных явлений.

Вольтамперной характеристикой называется зависимость фототока $i_Ф$ от напряжения U на электродах фотоэлемента при постоянном световом потоке Ф = const.

На рис. 2.5 представлены вольтамперные характеристики, полученные для двух значений светового потока Ф ($Ф_2 > Ф_1$) при облучении монохроматическим светом (ν = const). Если на анод фотоэлемента подано достаточно большое положительное напряжение, то все вылетевшие из катода электроны достигнут анода и фототок будет иметь максимальное значение для данного светового потока. Этот ток называется *фототоком насыщения*.

С уменьшением положительного напряжения на аноде уменьшается анодный ток, так как не все электроны, вылетевшие с катода, достигнут анода. Если подать отрицательное напряжение на анод ($U < 0$), то с увеличение напряжения (по абсолютной величине) фототок будет уменьшаться и при напряжении $U_З$ станет равным нулю. Напряжение $U_З$, при котором фототок равен нулю, называют *задерживающим напряжением*.

Постепенное уменьшение фототока показывает, что фотоэлектроны обладают различными энергиями. При напряжении $U_З$ задерживаются все фотоэлектроны. Следовательно, определив задерживающий потенциал, можно вычислить максимальную энергию фотоэлектронов:

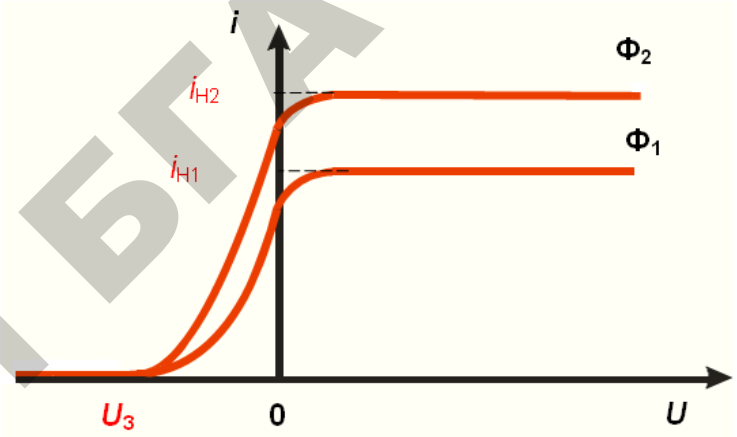

Рис. 2.5. Кривые зависимости силы фототока I от напряжения U, соответствующие различным освещенностям катода

$$\left(\frac{mu^2}{2}\right)_{max} = eU_З. \qquad (2.26)$$

Определим потенциал выхода электрона из металла как отношение: $\varphi_{вых} = \frac{A_{вых}}{e}$. Тогда из уравнения Эйнштейна (2.24) получим:

$$eU_З = h\nu - e\varphi_{вых}, \text{ или } U_З = \frac{h\nu}{e} - \varphi_{вых}. \qquad (2.27)$$

Следовательно, задерживающий потенциал линейно зависит от частоты света, падающего на фотоэлемент. Если найти экспериментальную зависимость $U_З$ от частоты, то из графика зависимости $U_З = f(\nu)$ можно определить постоянную Планка.

Для любой пары точек, находящихся на прямой $U_З = f(\nu)$ и имеющих частоты ν' и ν'', соответственно, можно записать: $U_З' = \frac{h}{e}\nu' - \varphi_{вых}$ и $U_З'' = \frac{h}{e}\nu'' - \varphi_{вых}$, откуда:

Репозиторий БГАТУ

$$h = \frac{e\left(U_з'' - U_з'\right)}{\nu'' - \nu'}. \qquad (2.28)$$

Зная e и подставляя значения задерживающих напряжений и соответствующих им частот, взятых из экспериментальной зависимости $U_з = f(\nu)$, можно вычислить постоянную Планка.

Экспериментальная проверка этой зависимости впервые произведена Р. Э. Милликеном и подтверждена П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым.

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИИ

План лекции «Квантовая природа электромагнитного излучения»

1. Тепловое излучение и его основные характеристики. Абсолютно черное тело и законы его теплового излучения.
2. Квантовая гипотеза. Формула Планка и ее связь с законами Стефана–Больцмана и Вина.
3. Элементы квантовой оптики. Энергия, масса, импульс фотона. Давление света с точки зрения квантовой теории.
4. Эффект Комптона. Корпускулярно-волновой дуализм света (излучения).

Контрольные вопросы

1. Какое излучение называется тепловым?
2. Что такое абсолютно черное тело? Его модель.
3. В чем заключается квантовая гипотеза Планка?
4. Что такое корпускулярно-волновой дуализм света?

Вопросы для самоконтроля

I уровень

1. Чем отличается тепловое излучение от других видов излучений?
2. Какое излучение называется равновесным?
3. Определение спектральной поглощательной способности тела.
4. Что называется спектральной испускательной способностью тела?

Репозиторий БГАТУ

5. Что такое интегральная испускательная способность тела (энергетическая светимость)?

6. Что такое абсолютно черное тело? Его модель.

7. Какое тело называется серым?

8. Записать закон Стефана–Больцмана.

9. Записать закон Кирхгофа и закон смещения Вина

10. Формула Рэлея–Джинса, ультрафиолетовая катастрофа.

11. Квантовая гипотеза и формула Планка.

12. Формулы для энергии, массы и импульса фотона.

13. Формула давления, производимого светом при нормальном падении на поверхность с заданным коэффициентом отражения.

14. Формула Комптона для изменения длины волны рентгеновских лучей при рассеянии их веществом с легкими атомами.

15. Формула Эйнштейна для фотоэффекта.

16. Что такое красная граница фотоэффекта?

17. Что такое комптоновская длина волны частицы?

II уровень

1. Изобразить графически зависимость излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны для различных температур. Проанализировать ход этих кривых.

2. Из формулы Планка для излучательной способности абсолютно черного тела получить закон Стефана–Больцмана и закон смещения Вина.

3. Излучает ли электромагнитные волны книга, которую вы читаете, стул, на котором вы сидите?

4. При какой температуре (приблизительно) нагретые тела дают видимое излучение?

5. Какую температуру должно иметь абсолютно черное тело, чтобы максимум излучения лежал в красной области спектра?

6. Применим ли закон смещения Вина ко всем телам?

7. Вывести формулу светового давления на поверхность тела, оказываемого потоком монохроматического излучения, падающим перпендикулярно поверхности, с квантовой точки зрения.

8. Вывести формулу Комптона, рассматривая процесс рассеяния рентгеновских лучей как упругое столкновение фотонов рентгеновских лучей со свободными или слабо связанными с ядром электронами, входящими в состав вещества.

9. На основе уравнения Эйнштейна объяснить основные законы фотоэффекта.

10. Проанализировать зависимость фототока от разности потенциалов между электродами фотоэлемента при внешнем фотоэффекте. Что такое ток насыщения? Задерживающая разность потенциалов.

11. Давление света на черную поверхность в два раза меньше, чем на белую. Почему?

12. Почему хвост комет всегда направлен от Солнца, хотя между веществом кометы и Солнцем существует гравитационное притяжение?

13. Эффект Комптона наблюдается при рассеянии фотонов на свободных электронах. Какие электроны в веществе можно считать свободными?

Репозиторий БГАТУ

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задание 1. Законспектировать пп. 4.3.1.1.–4.3.1.3. данного модуля.

Вопросы для самоконтроля

I уровень

1. В чем заключается явление внешнего фотоэффекта?
2. Сформулировать экспериментально установленные законы внешнего фотоэффекта.
3. Что такое вольтамперная характеристика фотоэффекта?
4. Что такое красная граница фотоэффекта?
5. Что такое задерживающая разность потенциалов? От чего она зависит?
6. Что такое работа выхода электрона из вещества? В каких единицах она измеряется и от чего зависит?
7. В чем состоит квантовая гипотеза Планка и ее обобщение Эйнштейном?

II уровень

1. Объяснить зависимость фототока насыщения от величины светового потока.
2. Чем объяснить наличие фототока насыщения у вакуумных фотоэлементов?
3. Написать уравнение Эйнштейна и на его основе объяснить основные законы фотоэффекта.
4. В чем состоит метод определения постоянной Планка, основанный на внешнем фотоэффекте?

Задание 2. Решать задачи на уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, на красную границу фотоэффекта.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\varepsilon = h\nu = A_{\text{вых}} + (W_{\text{кин}})_{\max},$$

где $\varepsilon = h \cdot \nu$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; $A_{\text{вых}}$ — работа выхода электрона из металла; $(W_{\text{кин}})_{\max}$ — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона. $(W_{\text{кин}})_{\max}$ в нерелятивистском и релятивистском случаях выражается разными формулами.

Если энергия фотона $h\nu < 5$ кэВ, то:

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = \frac{m_0 u_{\max}^2}{2} = eU_{\text{з}},$$

где m_0 — масса покоя электрона; $U_{\text{з}}$ — задерживающее напряжение.

Если энергия фотона $h\nu \geq 5$ кэВ, то:

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right),$$

где m — масса релятивистского электрона.

Красная граница фотоэффекта для данного металла:

$$\nu_0 = \frac{A_{\text{вых}}}{h};\ \lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}},$$

где λ_0 — максимальная длина волны (соответственно, ν_0 — минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен.

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. При фотоэффекте с платиновой поверхности величина задерживающего потенциала оказалась равной 0,8 В. Определить: длину волны падающего излучения, красную границу фотоэффекта.

Дано:	**Решение:**
$U_{\text{з}} = 0{,}8$ В $A_{\text{вых}} = 5{,}3$ эВ = $= 5{,}3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж = $= 8{,}46 \cdot 10^{-19}$ Дж $u_1 = u_{\max}$; $u_0 = 0$ $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с	Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта: $h\nu = A_{\text{вых}} + (W_{\text{кин}})_{\max}$ Так как вылетевшие с поверхности металла электроны полностью задерживаются тормозящим полем, то их кинетическая энергия равна работе задерживающего электрического поля:
λ — ? λ_0 — ?	

Репозиторий БГАТУ

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = \frac{m_0 u_{\max}^2}{2} = eU_{\text{з}}.$$

Уравнение Эйнштейна примет вид:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + eU_{\text{з}}.$$

Из этого уравнения выразим λ:

$$\lambda = \frac{hc}{A_{\text{вых}} + eU_{\text{з}}}.$$

Произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{8{,}48 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}8} = 2{,}04 \cdot 10^{-7}\,(\text{м}).$$

При облучении светом, длина волны которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю, т. е. красная граница соответствует энергии фотона, равной работе выхода электрона из металла.

Так как $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_0} = A_{\text{вых}}$, получим $\lambda_0 = \frac{hc}{A_{\text{вых}}}$.

Проведем расчет:

$$\lambda_0 = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{8{,}48 \cdot 10^{-19}} = 2{,}34 \cdot 10^{-7}\,(\text{м}).$$

Ответ: $\lambda = 2{,}04 \cdot 10^{-7}$ м; $\lambda_0 = 2{,}34 \cdot 10^{-7}$ м.

II уровень

Пример 2. Определить максимальную скорость фотонов, вырываемых с поверхности серебра γ-излучением с длиной волны $2{,}47 \cdot 10^{-12}$ м.

Дано:	**Решение:**
$\lambda = 2{,}47 \cdot 10^{-12}$ м $A_{\text{вых}} = 7{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $u_{\max}$ — ?	Воспользуемся уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта: $h\nu = A_{\text{вых}} + (W_{\text{кин}})_{\max}$.

Вычислим энергию фотона для γ-излучения:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda};$$

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2{,}47 \cdot 10^{-12}} = 8{,}05 \cdot 10^{-14}\,(\text{Дж}) = 0{,}503\,(\text{МэВ}).$$

Вычислим энергию покоя электрона:

$$E_0 = m_0 c^2,$$

где m_0 — масса покоя электрона.

$$E_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^{8})^2 = 0{,}51\ \text{МэВ}.$$

Так как энергия фотона сравнима с энергией покоя электрона, то кинетическая энергия фотоэлектрона находится по релятивистской формуле:

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = (m - m_0)c^2,\ m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где m — масса релятивистского электрона, движущегося со скоростью, близкой к скорости света.

Подставив релятивистскую массу, получим:

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),\ \beta = \frac{u_{\max}}{c}.$$

Так как работа выхода электрона $A_{\text{вых}} = 4{,}7$ эВ пренебрежимо мала по сравнению с энергией γ-фотона, то можно считать, что:

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = 0{,}503\ \text{МэВ} = 8{,}05 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж}.$$

Сделав преобразования, получим:

$$\beta = \sqrt{\frac{(W_{\text{кин}})_{\max}[(W_{\text{кин}})_{\max} + 2E_0]}{(W_{\text{кин}})_{\max} + E_0}}.$$

Подставив значения E_0 и $(W_{\text{кин}})_{\max}$, получим $\beta = 0{,}864$.

$$u_{\max} = c \cdot \beta = 2{,}59 \cdot 10^{8}\ \text{м/с} = 259\ \text{Мм/с}.$$

Ответ: $u_{\max}$ =259 Мм/с.

Репозиторий БГАТУ

Задачи для закрепления материала

I уровень

1. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны 300 нм, $A_{вых}$ = 4,7 эВ? (не будет)

2. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта — 300 нм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна 1 эВ? (0,8)

3. Найти красную границу фотоэффекта для цезия и натрия. ($5{,}17 \cdot 10^{-7}$ м, $6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м)

4. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект. (2,48 эВ)

5. Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определить наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ. (0,91 В)

6. При освещении вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны λ_1 = 0,4 мкм он заряжается до разности потенциалов φ_1 = 2 В. Определить, до какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его монохроматическим светом с длиной волны λ_2 = 0,3 мкм. (3,4 В)

7. Определить максимальную скорость электронов, вырываемых с поверхности цинка ($A_{вых}$ = 4 эВ) при облучении γ-излучением с длиной волны 2,47 пм. (259 Мм/с)

8. Выбиваемые светом при фотоэффекте электроны при облучении фотокатода видимым светом полностью задерживаются обратным напряжением $U_з$ = 1,2 В. Специальные измерения показали, что длина волны падающего света — 400 нм. Определить красную границу фотоэффекта. (652 нм)

9. Задерживающее напряжение для платиновой пластинки (работа выхода — 6,3 эВ) составляет 3,7 В. При тех же условиях для другой пластинки задерживающее напряжение равно 3,5 В. Определить работу выхода электронов из этой пластинки. (4,7 эВ)

II уровень

1. Определить постоянную Планка, если известно, что фотоэлектроны, вырываемые из поверхности некоторого материала светом с частотой $2{,}2 \cdot 10^{15}$ $с^{-1}$, полностью задерживаются обратным потенциалом 6,6 В, а вырываемые светом с частотой $4{,}5 \cdot 10^{15}$ $с^{-1}$ — потенциалом 16,5 В. ($6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с)

2. Определить, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны 208 нм. Работа выхода электронов из серебра — 4,7 эВ. (1,27 В)

3. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны 310 нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определить по этим экспериментальным данным постоянную Планка. ($6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж · с)

4. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определить: работу выхода электронов из этого металла; максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 400 нм. (2,48 эВ; 468 км с)

5. Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны 83 нм. Определить, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью E = 10 В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра — 264 нм. (1,03 см)

6. Фотоны с энергией 5 эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A_{вых}$ = 4,7 эВ. Определить максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона. ($2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с)

Репозиторий БГАТУ

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. Определить мощность теплового излучения из канала ствола 100 мм пушки, если после стрельбы внутренняя поверхность его нагрета до 227 °С. Полость канала ствола принять за абсолютно черное тело.

Дано:	**Решение:**
$D = 100$ мм $= 0{,}1$ м $T = 227\ ^{o}\text{C} = 500$ К $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) Ф — ?	Согласно закону Стефана–Больцмана полная излучательная способность абсолютно черного тела R_T пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$R_T = \sigma T^4,$$

где R_T — энергия, излучаемая в единицу времени с единицы площади поверхности абсолютно черного тела.

Излучаемая энергия за время t со всей поверхности а.ч.т. энергия выразится так:

$$W = R_T S t = \sigma T^4 t S,\ S = \frac{\Pi \cdot d^4}{4}.$$

Мощность теплового излучения: $\Phi = \dfrac{W}{t} = \sigma T^4 S$.

Произведем вычисления в системе СИ:

$$\Phi = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 25^2 \cdot 10^8 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}25 = 111{,}3\ (\text{Вт}).$$

Ответ: 111,3 Вт.

Пример 2. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке равен 0,3 мм, длина спирали — 5 см. При включении лампочки в цепь напряжением 127 В через лампочку течет ток в 0,31 А. Найти температуру нити накала. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется лучеиспусканием.

Отношение суммарной излучательной способности вольфрама к суммарной излучательной способности а.ч.т. при этой температуре равно 0,31.

Дано:	**Решение:**
$d = 0{,}3$ мм $= 3 \cdot 10^{-4}$ м $l = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $U = 127$ В $I = 0{,}31$ А $k = \dfrac{R_T}{R_T^*} = a_T = 0{,}31$ T — ?	Если для абсолютно черного тела полная излучательная способность дается законом Стефана–Больцмана, то для реальных тел

$$R_T = k\sigma T^4,$$

где безразмерный коэффициент k называют степенью черноты тела (средняя поглощательная способность тела).

R_T — это энергия поглощения всех длин волн с единицы поверхности за единицу времени при данной температуре. Вся излучаемая мощность со всей боковой поверхности спирали:

$$P_{\text{изл}} = R_T \pi d l.$$

Мощность тока, израсходованная на накал:

$$P = IU = P_{\text{изл}} = R_T \pi d l = k\sigma T^4 \pi d l.$$

Откуда: $T = \sqrt[4]{\dfrac{IU}{k\sigma\pi d l}}$.

Производим вычисления:

$$T = \sqrt[4]{\frac{0{,}31 \cdot 127}{0{,}31 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}} = 2500\ (\text{К}).$$

Ответ: $T = 2500$ К.

Пример 3. Определить энергию, массу и импульс фотона, если соответствующая ему длина волны равна $1{,}6 \cdot 10^{-3}$ нм.

Дано:	**Решение:**
$\lambda = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ нм $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ м $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с ε — ? m — ? P — ?	Энергия фотона $\varepsilon = h \cdot \nu$, где h — постоянная Планка; ν — частота электромагнитного излучения.

Примем во внимание, что $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, где c — скорость электромаг-

Репозиторий БГАТУ

нитного излучения в вакууме, λ — длина волны электромагнитного излучения, получим $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$.

Масса фотона определяется по формуле: $m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$.

Импульс фотона: $p = m \cdot c = \frac{h}{\lambda}$.

Проведем вычисления:

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 1{,}24 \cdot 10^{-13}\,(\text{Дж});$$

$$m = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^{8} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 1{,}38 \cdot 10^{-30}\,(\text{кг});$$

$$P = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} = 4{,}14 \cdot 10^{-22}\,(\text{кг} \cdot \text{м/с}).$$

Ответ: ε = 1,24 · 10^{-13} Дж; m = 1,38 · 10^{-30} кг; P = 4,14 · 10^{-22} кг · м/с.

II уровень

Пример 4. Огненный шар радиусом 100 м, возникающий при ядерном взрыве, в некоторый момент времени имеет температуру поверхности 10^4 К. Определить количество энергии, которую поглощает 1 м^2 маскировочного покрытия, находящегося от места взрыва на расстоянии 2 км, в течение 10^{-3} с. Поглощательную способность покрытия принять равной 0,7. Полагать, что плоскость маскировочного покрытия перпендикулярна падающим лучам.

Дано:	**Решение:**
R = 100 м $T = 10^4$ К S = 1 м^2 $t = 10^{-3}$ с R =2 км = 2 · 10^3 м a_T = 0,7	Рассматривая огненный шар, возникающий при ядерном взрыве, как а.ч.т., по закону Стефана–Больцмана находим: $R_T = \sigma T^4$. Энергия, излучаемая всей поверхностью огненного шара за время t:
$W_{\text{погл}}$ — ?	

$$W_{\text{изл}} = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 t.$$

Из закона сохранения энергии следует, что энергия, падающая за время t на единицу площади сферы радиуса r, будет равна энергии, излученной огненным шаром, деленной на площадь поверхности сферы радиуса r:

$$\frac{\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 t}{4\pi r^2} = \frac{\sigma T^4 R^2 t}{r^2}.$$

Из этого излучения поглощается доля, равная a_T. Тогда количество энергии, поглощаемой маскировочным покрытием площадью S за время t, определится так: $W_{\text{погл}} = a_T \frac{\sigma T^4 R^2}{r^2} St$.

Производим вычисления:

$$W_{\text{погл}} = 0{,}7 \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{16} \cdot 10^{2} \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{6}} = 990\ (\text{Дж}).$$

Аналогичным образом можно рассчитать величину солнечной постоянной, т. е. количество энергии солнечного излучения, поступающего за 1 мин на площадку 1 см^2, расположенную перпендикулярно к солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на расстоянии r, равном среднему расстоянию от Земли до Солнца. Принимая, что Солнце излучает как а.ч.т. при T = 6000 К (поглощением энергии в атмосфере пренебречь), для солнечной постоянной получим значение: $C = 1400\ \text{Дж/м}^2 \cdot \text{с} = 8{,}4\ \text{Дж/см}^2 \cdot \text{мин}$.

Ответ: $W_{\text{погл}}$ = 990 Дж.

Пример 5. Пучок монохроматического света с длиной волны λ = 663 нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии Ф = 0,6 Вт. Определить силу F давления, испытываемого этой поверхностью, а также число N фотонов, падающих на нее за время t = 5 с.

Дано:	**Решение:**
λ = 663 нм i = 90° ρ = 1 Ф = 0,6 Вт Δt = 5 с	Свет, падая на тела, оказывает на них давление P, зависящее от интенсивности света и отражательной способности поверхности тела ρ:
F — ? N — ?	

$$P = \frac{I}{c}(1 + \rho),$$

Репозиторий БГАТУ

где I — интенсивность света, т. е. световая энергия, падающая за одну секунду на единицу поверхности тела, перпендикулярную направлению распространения света; c — скорость света в вакууме; ρ — коэффициент отражения света.

Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления P на площадь поверхности S:

$$F = P \cdot S = \frac{I \cdot S}{c}(1+\rho) = \frac{\Phi}{c}(1+\rho).$$

$\Phi = I \cdot S$ — поток энергии излучения, падающий на площадь S поверхности, перпендикулярной направлению распространения, за одну секунду. Рассчитаем силу давления:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8}(1+1) = 4 \cdot 10^{-9}(\text{Н}) = 4\,(\text{нН}).$$

За время Δt энергия излучения W, получаемая рассматриваемой площадью, будет равна: $W = \Phi \cdot \Delta t$.

Учитывая, что энергия падающего фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, вычислим количество квантов, падающих на площадь S за время Δt:

$$N = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{\Phi \cdot \lambda \cdot \Delta t}{hc}.$$

Рассчитаем число фотонов, падающих на поверхность:

$$N = \frac{0,6 \cdot 663 \cdot 10^{-9} \cdot 5}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 10^{19}\,(\text{фотонов}).$$

Ответ: $F = 4$ нН; $N = 10^{19}$.

Пример 6. Фотон при соударении с электроном в результате эффекта Комптона был рассеян на угол 90°. Кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном пренебрежимо малы. Определить энергию ε фотона до рассеяния, если известно, что энергия ε' рассеянного фотона равна 0,4 МэВ.

Дано:	**Решение:**
$\theta = 90°$	Изменение длины волны $\Delta\lambda$ фотона при рассеянии
$\varepsilon' = 0,4$ МэВ	его электроном на угол θ находится по формуле
ε — ?	Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \cdot \sin^2\frac{\theta}{2},$$

где m_0 — масса покоя электрона отдачи; λ и λ' — соответственно длины волн падающего и рассеянного фотонов; θ — угол рассеяния.

Выразим длины волн λ и λ' через энергии соответствующих фотонов:

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda};\ \lambda = \frac{hc}{\varepsilon};\ \lambda' = \frac{hc}{\varepsilon'},$$

тогда:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon};$$

$$\frac{hc}{\varepsilon'} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{2h}{m_0 c} \cdot \sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{m_0 c^2}\sin^2\frac{\theta}{2};\ m_0 c^2 = E_0;$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon'} - \frac{2}{E_0}\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{E_0 - 2\varepsilon' \cdot \sin^2 \theta/2}{\varepsilon' E_0};$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - 2\varepsilon' \cdot \sin^2 \theta/2}.$$

Подставив значения ε', E_0, θ, получим:

$$\varepsilon = \frac{0,4 \cdot 0,51}{0,51 - 2 \cdot 0,4 \cdot 0,5} = \frac{0,204}{0,11} = 1,85\,(\text{МэВ}).$$

Ответ: $\varepsilon = 1,85$ МэВ.

Аудиторные задачи

I уровень

1. Найти площадь излучающей поверхности 25-ваттной лампы, если температура нити $T = 2450$ К. Излучение нити составляет 30 %

Репозиторий БГАТУ

излучения а.ч.т. при данной температуре. Потерями тепла, связанными с теплопроводностью, пренебречь. (0,4 см^2)

2. Охлаждение а.ч.т. происходит только за счет лучеиспускания. Определите, на сколько градусов остыло тело, если максимум излучательной способности сместился с фиолетовой границы видимой части спектра ($\lambda_{ср}$ = 0,4 мкм) до ее красной границы ($\lambda_к$ = 0,74 мкм). (3330 К)

3. Определить, в какой части солнечного спектра спектральная излучательная способность имеет максимальное значение. Как велико это значение? Температура поверхности Солнца — 6000 К. (λ_{max} = 0,482 мкм; $r^*_{\lambda,T\,max} = 1,04 \cdot 10^{14}$ Дж/см^3)

4. Температура поверхности «белых карликов» примерно равна 10^4 К. В каком участке спектра лежит максимум излучения? ($\lambda_{max} = 2,9 \cdot 10^{-7}$ м)

5. Мощность излучения абсолютно черного тела 10 кВт. Найти величину излучающей поверхности тела, если известно, что длина волны, на которую приходится максимум его спектральной лучеиспускательной способности, равна $7 \cdot 10^{-5}$ см. (6 см^2)

6. Какую энергию должен иметь фотон, чтобы его масса была равна массе покоя электрона? ($81,99 \cdot 10^{-15}$ Дж = 0,51 МэВ)

7. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны $\lambda = 5,2 \cdot 10^{-7}$ м? ($9,2 \cdot 10^5$ м/с)

8. Найти энергию и массу фотона: а) радиоизлучения λ = 300 м; б) видимой области света (для красных лучей), $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м; в) рентгеновского излучения, $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-11}$ м; г) γ-излучения $\lambda = 1,24 \cdot 10^{-12}$ м.

9. Давление P монохроматического света (λ = 600 нм) на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,1 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время t = 1 с на поверхность площадью 1 см^2. ($9 \cdot 10^{15}$ фотонов)

10. Фотон с энергией 0,25 МэВ рассеян на свободном электроне. Энергия рассеянного фотона равна 0,2 МэВ. Определить угол рассеяния. (60°40′ или 229°20′)

11. Какова была длина рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом 60° длина волны рассеянного излучения оказалась равной $2,54 \cdot 10^{-9}$ см? ($2,42 \cdot 10^{-11}$ м)

12. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda = 0,2 \cdot 10^{-10}$ м испытывают комптоновское рассеяние под углом 90°. Найти: а) изменение

длины волны рентгеновских лучей при рассеянии; б) энергию электрона отдачи. ($\lambda' = 9,75 \cdot 10^{-7}$ м; ε' = 1,28 эВ)

13. Определить давление света на стенки электрической 150-ваттной лампочки, принимая, что вся потребляемая мощность идет на излучение и стенки лампочки отражают 15 % падающего на них света. Считать лампочку сферическим сосудом радиуса 4 см. (28,6 мкПа)

14. Давление P монохроматического света с длиной волны λ = 600 нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определить: а) концентрацию n фотонов в световом пучке; б) число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м^2 поверхности. ($n = 3,02 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$; $N = 9,06 \cdot 10^{19}$)

15. На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны λ = 0,55 мкм. Поток излучения Ф составляет 0,45 Вт. Определить: а) число фотонов, падающих на поверхность за время t = 3 с; б) силу давления, испытываемого этой поверхностью. ($N = 3,73 \cdot 10^{18}$; F = 3 нН)

II уровень

1. Температура поверхности Солнца — 6000 К. Диаметр Солнца — $1,39 \cdot 10^6$ км. Определить максимальную энергию, получаемую ежеминутно каждым 1 м^2 освещенной Солнцем земной поверхности на широте экватора при нормальном падении лучей, если расстояние от Земли до Солнца равно $1,49 \cdot 10^8$ км. Поглощением энергии в атмосфере пренебречь. ($9,54 \cdot 10^4$ Дж)

2. Найти, насколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится вдвое. Температуру поверхности Солнца принять равной 5600 К. Радиус Солнца $R = 7 \cdot 10^8$ м, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг. ($\Delta m = 1,4 \cdot 10^{17}$ кг; $t = 7 \cdot 10^{12}$ лет)

3. Найти число фотонов, испускаемых в одну секуну с 1 см^2 поверхности а.ч.т., имеющего температуру 6000 К, в интервале длин волн от 0,5 до 0,55 мкм. ($1,3 \cdot 10^{21}$)

4. Монохроматическое излучение с длиной волны 500 нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой 10 нН. Определить число фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность. ($3,77 \cdot 10^{18}$)

Репозиторий БГАТУ

5. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпевает рассеяние на угол 180°? Энергия фотона до рассеяния равна 0,255 МэВ. (0,5)

6. Определить силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром 0,8 мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равна 2800 °С. Поверхность проволоки считать серой с поглощательной способностью a_T = 0,343. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды — 17 °С. (48,8 А)

7. Рассматривая особенности механизма комптоновского рассеяния, объяснить: а) почему длина волны рассеянного излучения больше, чем длина волны падающего излучения; б) наличие в составе рассеянного излучения несмещенной линии.

8. Фотон с длиной волны 5 пм испытал комптоновское рассеяние под углом 90° на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить: а) изменение длины волны при рассеянии; б) энергию электрона отдачи; в) импульс электрона отдачи. (2,43 пм; 81,3 кэВ; $1{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с)

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

I уровень

1. Какое излучение называется тепловым?
2. Что такое абсолютно черное тело? Его модель.
3. В чем заключается квантовая гипотеза Планка?
4. Записать формулы для энергии, массы и импульса фотона.
5. Записать формулу для изменения длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии.
6. Что называется внешним фотоэффектом?
7. Записать уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.
8. Что такое красная граница фотоэффекта для какого-либо металла?
9. Применим ли закон Вина ко всем телам?

II уровень

1. Вывести формулу для давления света с точки зрения квантовой теории.
2. Из формулы Планка для испускательной способности абсолютно черного тела получить закон Стефана–Больцмана и закон смещения Вина.

Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 8б

ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ

Студент должен:

1) **знать** (описывать и формулировать): *понятия и определения* атома как системы микрочастиц, линейчатого спектра, структуры спектра атома водорода, сериальной формулы, ядерной модели атома, основанной на опытах Резерфорда, опытов, подтверждающих дискретность состояний атомов (опыты Франка и Герца), волновых свойств микрочастиц, волны де Бройля и формулы де Бройля, волновой функции электрона и ее физического смысла, квантовых чисел состояния электрона в атоме и их возможных значений (в том числе спинового квантового числа), вырождения состояний и кратности вырождения, правила отбора, орбитальных и собственных механического и магнитного моментов электрона в атоме и их связи с квантовыми числами, самопроизвольного и вынужденного излучений, квантовых генераторов, особенности лазерного излучения; *постулаты* Бора и условие квантования круговых орбит, зависимость радиуса стационарной орбиты, скорости и энергии электрона на стационарной орбите от квантового числа (согласно боровской теории), *уравнение* Шредингера для стационарных состояний, *соотношение* неопределенностей для координаты и импульса электрона, *выражения* дискретных значений энергии электрона в бесконечно глубокой потенциальной яме и в атоме водорода;

2) **доказывать (получать) и характеризовать:** выражения для радиусов стационарных орбит, скорости электрона на стационарных орбитах, дискретные значения энергии электрона в водородоподобных системах на основании теории Бора, сериальную формулу и выражение постоянной Ридберга через физические константы, опыты Девисона и Джермера по дифракции электронов и корпускулярно-волновой дуализм материи, проводя аналогию с электромагнитным излучением, выражение плоской волны де Бройля и уравнение Шредингера как волновое уравнение, соотношение неопределенностей на основе дифракции электронов, границы применимости классического описания движения частицы, решение

Репозиторий БГАТУ

задачи движения микрочастицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, ход решения уравнения Шредингера для водородоподобной системы, вид простейших волновых функций электрона в последнем случае, кратность вырождения состояний электрона в атоме водорода по квантовым числам *n*, *l*, *m,* нормальный эффект Зеемана, спиновое квантовое число на основе результатов опытов Штерна и Герлаха, спин-орбитальное взаимодействие, полный момент импульса электрона в атоме, вероятности спонтанного и вынужденного излучений, принцип действия рубинового и гелий-неонового лазеров;

3) **моделировать и прогнозировать:** движение микрочастицы в простейших силовых полях (в прямоугольной потенциальной яме, при наличии простейшего потенциального барьера, в потенциальной яме параболической формы);

4) **уметь:**

— собирать и анализировать незнакомую информацию, путем логического мышления приходить к выводу;

— устанавливать пригодность классического описания движения частицы на основе формулы де Бройля и на основе соотношения неопределенностей.

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ

Теория Бора для атома водорода. Опыты Резерфорда, ядерная модель атома. Постулаты Бора. Опыт Франка и Герца. Атом водорода и его спектр по теории Бора. Вывод формул для радиусов стационарных орбит электрона, его скорости и энергии в стационарных состояниях. Формула Бальмера. Спектральные серии атома водорода. Затруднения теории Бора.

Волновые свойства частиц вещества. Волновая функция. Уравнение Шредингера. Гипотеза де Бройля. Экспериментальное подтверждение волновых свойств микрочастиц. Опыт Девиссона и Джермера по рассеянию электронов монокристаллом никеля и другие опыты по дифракции электронов. Волновая функция микрочастицы, ее физический смысл. Условие нормировки. Волновая функция свободной частицы (волна де Бройля). Соотношение неопределенностей Гейзенберга как проявление корпускулярно-волнового дуализма материи. Соотношение неопределенностей для координат и импульсов частицы. Примеры применения соотношений неопределенностей. Границы применимости классической механики.

Уравнение Шредингера. Спин электрона. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Уравнение Шредингера со временем. Решение уравнения Шредингера для частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Уровни энергии частицы и нормированная волновая функция частицы в потенциальной яме. Предельный переход к классическому описанию.

Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода. Возможные значения энергии электрона. Квантовые числа *n*, *l*, *m*. Вырождение состояний, кратность вырождения. Формулы квантования орбитальных механического и магнитного моментов электрона в атоме водорода и их проекций на направление внешнего магнитного поля. Магнетон Бора. Снятие вырождения по квантовому числу *m* при помещении атома во внешнее магнитное поле. Опыт Штерна и Герлаха. Спин электрона, спиновое

Репозиторий БГАТУ

квантовое число. Формулы квантования спиновых механического и магнитного моментов электрона в атоме и их проекций на направление магнитного поля. Понятие явлений магнитного резонанса.

Оптические квантовые генераторы. Излучение (спонтанное и вынужденное) и поглощение света, принцип детального равновесия. Закон поглощения Бугера–Ламберта. Инверсная населенность атомов. Метастабильное состояние. Принцип работы квантового генератора. Особенности излучения квантового генератора.

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ

Номер и тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов
Занятие 1. Атомная теория Бора. Волновые свойства частиц вещества. Волновая функция	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 2. Уравнение Шредингера. Соотношение неопределенностей. Уравнение Шредингера для частицы в одномерной потенциальной яме	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 3. Квантово-механическое описание движения электрона в атоме водорода	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 4. Спин электрона. Оптические квантовые генераторы	Знакомство с новым материалом	Лекция	2
Занятие 5. Теория Бора водородоподобных атомов	Углубление, обобщение, текущий контроль	Управляемая самостоятельная работа студентов	2
Занятие 6. Атомная теория Бора. Волновые свойства частиц. Водородоподобные атомы по квантовой механике	Углубление, обобщение, систематизация	Практическое занятие	2
Занятие 7. Элементы атомной физики и квантовой механики	Суммарный контроль	Практическое занятие	1

Репозиторий БГАТУ

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ

1. ***Атом*** — это мельчайшая частица вещества, определяющая его физические и химические свойства.

2. ***Линейчатый спектр*** — спектр излучения (или поглощения) атомов, состоящий из отдельных линий определенных длин волн. Группа линий спектра называется ***серией*** (линий).

3. ***Сериальная формула*** — формула для вычисления частот (или длин волн), соответствующих линиям линейчатого спектра излучения (или поглощения).

4. ***Ядерная модель атома*** предполагает, что в центре атома находится положительно заряженное ядро, вокруг которого движутся электроны.

5. ***Водородоподобные системы (водородоподобные атомы)*** — атомы, из которых удалены все, кроме одного, электроны.

6. ***Стационарное состояние электрона в атоме (или атома)*** — это состояние с определенным возможным значением (механической) энергии. Совокупность возможных значений энергии электрона в атоме составляет *дискретный (не непрерывный)* ряд значений; другими словами: *энергия электрона в атоме квантуется*. *Энергетический уровень* — это определенное значение энергии.

7. ***Основное состояние электрона (атома)*** — состояние с минимально возможным значением энергии.

8. ***Стационарные орбиты электрона*** — это возможные орбиты электрона в атоме, двигаясь по которым электрон не излучает и не поглощает энергию.

9. ***Боровский радиус*** — по теории Бора радиус круговой орбиты электрона в атоме водорода в основном состоянии $r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м.

10. ***Частота перехода электрона в атоме*** — это та частота электромагнитного излучения, которую излучает (или поглощает)

электрон при переходе из одного стационарного состояния, характеризуемого определенным значением энергии, в другое стационарное состояние, характеризуемое другим значением энергии.

11. ***Квантовое число*** — целое число, изменяющееся в определенных пределах, каждому значению которого соответствует определенное значение энергии или другой физической величины, описывающей состояние частицы.

12. ***Условие квантования круговых орбит по теории Бора***: в атоме возможны такие стационарные круговые орбиты электрона, для которых выполняется условие $m_e ur = n\hbar$, где квантовое число $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

13. ***Корпускулярно-волновой дуализм материи***: мельчайшие частицы вещества (электроны, протоны, нейтроны, атомы, ионы) проявляют свойства как частиц (корпускул), так и волн.

14. ***Длина волны де Бройля*** — это длина сопоставляемой микрочастице (например, электрону) волны, имеющей при движении импульс mu: $\lambda = \dfrac{h}{mu}$.

15. ***Волновая функция электрона (или ψ — функция электрона)*** — функция ψ (x, y, z, t), описывающая волновой процесс, сопоставляемый электрону (частице); величина $|\psi^2|dV$ определяет вероятность обнаружения частицы в объеме dV в окрестности точки с координатами x, y, z в момент времени t (физический смысл волновой функции).

16. ***Условие нормировки волновой функции*** выражает тот факт, что вероятность обнаружения частицы во всем пространстве равна единице.

17. ***Волна де Бройля*** — волновая функция частицы, на которую не действуют силы (свободной частицы); она представляет собой плоскую гармоническую волну $\psi(x, y, z, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - \vec{p}\cdot\vec{r})}$.

18. ***Уравнение Шредингера*** — дифференциальное уравнение, которому подчиняется волновая функция микрочастицы (системы микрочастиц).

19. ***Соотношение неопределенностей***: соотношение, показывающее порядок величин ошибок (неопределенностей) при классическом описании движения микрочастицы; например, при одновременном определении координаты x и проекции импульса p_x час-

Репозиторий БГАТУ

тицы неопределенности этих величин Δx и Δp_x таковы, что их произведение по порядку величины не может быть меньше порядка постоянной Планка h: $\Delta p_x x \approx h$.

20. ***Потенциальная яма*** — область пониженного значения потенциальной энергии; ***потенциальный барьер*** — область повышенного значения потенциальной энергии.

21. ***Главное квантовое число n, орбитальное квантовое число l, магнитное квантовое число m*** — квантовые числа, характеризующие состояние электрона в атоме (без учета спина электрона).

22. ***Вырождение состояний*** — совпадение значений энергии электрона в нескольких различных его состояниях; ***кратность вырождения*** — число различных состояний электрона, соответствующих одному значению его энергии.

23. ***Электронный слой*** — совокупность электронов многоэлектронного атома, имеющих одно и то же значение энергии (а значит, их состояниям соответствует одно и то же значение главного квантового числа n); ***электронная оболочка или конфигурация*** — совокупность электронов, состояниям которых соответствует одинаковый набор квантовых чисел n, l.

24. ***Собственный момент импульса (спин, спиновый момент импульса) электрона*** — момент импульса, которым обладает электрон независимо от его состояния движения, векторная характеристика электрона.

25. ***Спиновое квантовое число*** $s = \frac{1}{2}$ определяет величину собственного момента импульса.

26. ***Спиновое магнитное квантовое число*** $m_s = \pm\frac{1}{2}$ определяет проекцию собственного момента импульса на направление магнитного поля.

27. ***Магнетон Бора*** $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ дает проекцию спинового магнитного момента электрона на выделенное направление: $p_{ms} = \pm\mu_B$.

28. ***Спонтанное (самопроизвольное) излучение атома*** — излучение возбужденного атома без какого-либо действия на него извне.

29. ***Вынужденное (индуцированное) излучение атома*** — излучение возбужденного атома при падении на него кванта излучения соответствующей частоты.

30. ***Квантовый генератор*** — устройство, создающее когерентное электромагнитное излучение на основе индуцированного излучения атомов.

4.1.2. ПОНЯТИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Длина волны, частота волны, циклическая частота волны.
2. Шкала электромагнитных волн.
3. Сила Кулона, потенциальная энергия точечного заряда в кулоновском поле.
4. Второй закон Ньютона.
5. Момент импульса материальной точки.
6. Энергия ионизации.
7. Волновое уравнение, уравнение плоской гармонической волны.
8. Магнитный момент замкнутого тока и его взаимодействие с внешним магнитным полем.
9. Гиромагнитное отношение.
10. Когерентность электромагнитных волн (когерентность излучения).

Репозиторий БГАТУ

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.2.1. ТЕОРИЯ БОРА ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА

4.2.1.1. Спектр атома водорода. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома

Представление об атомах как о мельчайших частицах материи зародилось в древних Греции и Риме. Слово «атомос» в переводе с греческого языка означает «неделимый». До конца 19-го века считалось, что атом — мельчайшая неделимая частица вещества, определяющая его физические и химические свойства; атомы объединяются в молекулы.

В конце 19-го столетия накопились экспериментальные и теоретические сведения о сложной структуре атома. Было доказано, что, с одной стороны, электромагнитные волны, в том числе и свет, излучаются при ускоренном движении электрических зарядов. С другой стороны, атомы излучают и поглощают электромагнитные волны определенных, характерных для каждого химического вещества частот. Это указывает на присутствие в атомах движущихся зарядов. Важную роль в развитии новых представлений об атомах сыграло изучение спектра атомарного водорода.

Спектры излучения твердых и жидких веществ являются сплошными, они представляют собой непрерывный набор частот (или длин волн) в определенном интервале, который зависит от температуры тела. Непрерывность спектра в этом случае объясняется достаточно большими силами взаимодействия между атомами и молекулами твердых и жидких тел. Сплошными также являются спектры газов и паров в том случае, когда они находятся под большим давлением. В видимой области электромагнитного излучения в сплошных спектрах один цвет непрерывно переходит в другой (радужный спектр). Разреженные газ или пар, состоящие из молекул, взаимодействие между которыми можно не учитывать, излучают так называемые полосатые спектры. Они представляют собой совокупность определенных полос спектральных линий.

Наконец, разреженный газ, состоящий из отдельных атомов, при определенных условиях излучает электромагнитные (в частности, световые) волны, спектр которых состоит из отдельных узких линий. Поэтому атомные спектры называют линейчатыми. Спектральные линии линейчатых спектров размещены по группам — так называемым сериям линий, в которых наблюдается определенная закономерность частот (или длин волн). Атомные спектры различных химических элементов различны. По последовательности линий в спектре можно однозначно определить состав сложного вещества.

Наиболее простую структуру имеет линейчатый спектр атома водорода. Длины волн линий спектра атома водорода подчиняются следующей (сериальной) формуле:

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (3.1)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = m + 1, m + 2, m + 3, \ldots$ до ∞; $R = 10973731{,}77\ \text{м}^{-1}$ — постоянная Ридберга (в честь шведского ученого-спектроскописта). Первые серии (группы) в спектре излучения атома водорода названы в честь открывших их физиков следующим образом: $m = 1$ — серия Лаймана, она находится в далекой ультрафиолетовой области спектра; $m = 2$ — серия Бальмера, находится в видимой и близкой ультрафиолетовой областях спектра; $m = 3$ — серия Пашена, находится в близкой инфракрасной области спектра; $m = 4$ — серия Брэккета в средней инфракрасной области спектра.

Формулу (3.1) можно переписать для частот линий спектра, так как $\nu = \frac{c}{\lambda}$, следующим образом:

$$\nu = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (3.2)$$

где $R' = Rc = 3{,}2931193 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$ тоже называется постоянной Ридберга; сериальная формула в виде (3.2) называется обобщенной формулой Бальмера (1885 г.).

Частоты всех спектральных линий атома водорода можно представить в виде разности двух функций целых чисел m и n. Эти функции $T(m)$ и $T(n)$ называются спектральными термами:

$$\nu = T(m) - T(n), \qquad (3.3)$$

где $T(m) = \frac{R'}{m^2}$, $T(n) = \frac{R'}{n^2}$.

Репозиторий БГАТУ

Из приведенных выше формул (3.1)–(3.3) следует, что для каждой определенной серии спектра водорода число m имеет постоянное значение. Изменяя число n от значения $m + 1$ до бесконечности, получаем частоты всех линий данной серии. Например, для серии Бальмера $T(m)=\frac{R'}{2^2}$, $T(n)=\frac{R'}{n^2}$, n = 3, 4, 5, … . При $n \to \infty$ $T(n) \to 0$ и частоты линий серии стремятся к пределу, которым является величина $\nu_{2\infty} = T(2) = \frac{R'}{2^2}$. Эта частота является границей серии (в нашем примере серии Бальмера). Каждая серия имеет свою граничную частоту $\nu_{m\infty} = \frac{R'}{m^2}$. Спектры других атомов (не атома водорода) также могут быть описаны с помощью формулы (3.3), но функции $T(m)$ и $T(n)$ в этом случае будут иметь более сложный вид. Закономерности в атомных спектрах различных элементов были обнаружены в ходе экспериментальных исследований, характеризующихся высокой степенью точности.

Наряду с изучением спектра атома водорода были открыты и исследованы так называемые катодные лучи, представляющие собой поток заряженных частиц, названных электронами. Было установлено, что электроны вырываются из атомов, которые при этом превращаются в положительно заряженные ионы. Эти открытия указывали на сложное строение атомов.

Первая попытка создать модель атома на основе полученных экспериментальных данных принадлежит Д. Д. Томсону (1903 г.). Томсон считал, что атом представляет собой шар, непрерывно заполненный положительно заряженным веществом, в котором движутся отрицательно заряженные частицы — электроны. Нетрудно показать, что в таком случае электроны должны совершать гармонические колебания около центра указанного шара. Действительно, если шар (атом) имеет радиус R и объемную плотность заряда $\rho > 0$, то напряженность электрического поля шара внутри него на расстоянии r от центра ($r \le R$) определяется формулой:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3},$$

где q — заряд шара. Сила, действующая на электрон, имеющий заряд $-e$:

$$f = -eE = -\frac{qe}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} = -kr,\ k = \frac{qe}{4\pi\varepsilon_0 R^3},$$

имеет характер квазиупругой силы, заставляющей электрон совершать гармонические колебания около центра шара с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_e}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}},$$

где m_e — масса электрона. Из приведенных рассуждений следует, что частота колебаний всех электронов атома должна быть одинаковой и равной ω. Таким образом, модель атома Томсона может объяснить существование только одной линии в спектре атома данного вещества. Надо отметить, что, пользуясь последней формулой, можно по частоте излучения атома рассчитать порядок радиуса атома R. Эти вычисления приводят к величине порядка 10^{-10} м, что совпадает с экспериментальными данными. Модель атома Томсона не могла разрешить многочисленных проблем, связанных с объяснением свойств атомов и их излучения, она представляет только исторический интерес.

В опытах Резерфорда, поставленных в 1911 голу, быстрые заряженные частицы пропускались через тонкие слои вещества, наблюдалось изменение направления движения частиц, т. е. их рассеяние. В качестве быстрых частиц использовались α-частицы, которые вылетали с большой скоростью (порядка 10^7 м/с) из некоторых веществ при их радиоактивном распаде. В то время было уже известно, что α-частица имеет положительный заряд, равный двум элементарным зарядам ($+2e$), и что при объединении с двумя электронами она образует атом гелия (He). Схема опыта, проведенного Резерфордом, показана на рисунке 3.1а. В свинцовой полости находится радиоактивный элемент Р, являющийся источником α-частиц. Частицы вылетают узким пучком через маленькое отверстие в полости. На их пути устанавливается тонкая металлическая фольга (толщиной 10^{-6}–10^{-7} м). При прохождении через фольгу α-частицы отклоняются от направления первоначального движения на различные углы θ. Рассеянные частицы попадают на экран Э, покрытый сернистым цинком, и вызывают свечение (сцинтилляции) в результате люминесценции. Сцинтилляции наблюдаются в микроскоп М, который вместе с экраном поворачивается вокруг фольги, и тем

Репозиторий БГАТУ

самым создается возможность наблюдать частицы, отклоненные на различные углы θ (0 ≥ θ ≥ 150°). Вся экспериментальная установка помещается в кожух, из которого был выкачан воздух.

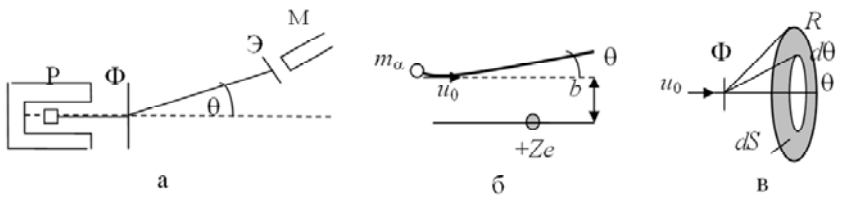

Рис. 3.1. Опыты Резерфорда: *а* — схема экспериментальной установки; *б* — α-частицы, имеющие на бесконечно большом расстоянии начальную скорость u_0, приближаются к ядру атома с зарядом $+Ze$ и рассеиваются на углы θ; *в* — рассеяние α-частиц в телесном угле между конусами с углами при вершине 2θ и 2(θ + dθ)

Наблюдения за прохождением α-частиц через фольгу показали, что под каждым углом θ рассеивалось определенное количество частиц, причем большая их часть отклонялась на малые углы и только некоторые α-частицы рассеивались на большие углы (до 150º).

Анализируя зависимость $N(\theta)$ — числа рассеянных частиц от угла рассеяния, — полученную в результате измерений, Резерфорд пришел к выводу, что значительное отклонение движения α-частиц от направления первоначального движения возможно только в случае, когда частица встречает, двигаясь в фольге, сильное электрическое поле, созданное сконцентрированным в малом объеме положительным зарядом, названным ядром атома. Те α-частицы, которые проходили вблизи от этой малой области (ядра), претерпевали резкое отклонение в результате значительной силы отталкивания между положительными зарядами.

На основе этой гипотезы Резерфорд теоретически решил задачу рассеяния α-частиц в кулоновском поле ядра, содержащего Z положительных элементарных зарядов и имеющего заряд Ze. Если α-частица массы m_α, находясь на большом расстоянии от ядра атома, имея скорость u_0 и соответственно кинетическую энергию $W_{к0} = \dfrac{m_\alpha u_0^2}{2}$, приближается к ядру (рис. 3.1б), то потенциальная энергия взаимодействия между α-частицей и ядром зависит от расстояния r между ними по известному закону: $W_n = \dfrac{2e \cdot Ze}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Если считать, что ядро все время покоится, то, в соответствии с законом сохранения механической энергии, конечная скорость α-частицы при ее удалении на бесконечность равна u_0 и направлена под углом θ к первоначальному направлению движения. Можно показать, что траектория α-частицы при указанных условиях будет гиперболой, асимптоты которой образуют угол θ. Обозначим буквой n плотность потока α-частиц, падающих на фольгу-мишень, т. е. количество частиц, падающих в единицу времени на единицу площади мишени; телесный угол между конусами с углами при вершине 2θ и 2(θ + dθ) (рис. 3.1в) обозначим через $d\Omega$. Величину $d\Omega$ нетрудно вычислить, пользуясь определением телесного угла и проводя вокруг точки F — центра фольги — сферу произвольного радиуса R: $d\Omega = \dfrac{dS}{R^2}$, где dS — заштрихованная на рисунке площадь сферического кольца: $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$. В результате телесный угол в области между углами рассеяния θ и θ + dθ: $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Резерфорд получил, что количество α-частиц, рассеянных в указанном телесном угле, определяется следующей формулой:

$$dN = n\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha u_0^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}. \qquad (3.4)$$

Формула Резерфорда (3.4) показывает, что для данного материала фольги, начальной скорости α-частиц и заданной плотности их потока произведение $\dfrac{dN}{d\Omega} \cdot \sin^4 \dfrac{\theta}{2}$ — величина постоянная для всех углов рассеяния θ. Этот теоретический результат находится в согласии с экспериментальными данными.

Формула (3.4) дает возможность по измеренному числу частиц, рассеянных в данном телесном угле, определять число Z элементарных положительных зарядов, находящихся в атоме вещества фольги. Исследования показали, что число Z есть не что иное, как порядковый номер элемента в периодической системе элементов Д. И. Менделеева.

Репозиторий БГАТУ

Рассуждения Резерфорда дают возможность оценить верхнюю границу размеров ядра атома. При прямом центральном ударе α-частицы и ядра минимальное расстояние между ними находится из равенства первоначальной кинетической энергии α-частицы и потенциальной энергии кулоновского взаимодействия ее с ядром в точке остановки частицы (случай рассеяния на 180º):

$$\frac{m_\alpha u_0^2}{2} = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3.5)$$

α-частицы, излучаемые радиоактивным веществом *RaC*, имеют скорость порядка $1{,}9 \cdot 10^7$ м/с. В этом случае для золотой фольги ($Z = 79$) вычисления по формуле (3.5) приводят к значению минимального расстояния между α-частицей и ядром порядка $3 \cdot 10^{-14}$ м. Следовательно, размеры ядра атома меньше указанной величины.

На основании результатов экспериментов и теоретических исследований Резерфорд предложил следующую ядерную модель атома: в ядре атома, имеющего размеры порядка 10^{-15}–10^{-14} м и составляющем малую часть объема атома, сконцентрирован весь положительный заряд и почти вся масса атома. Около ядра в области с линейными размерами порядка 10^{-10} м движутся электроны, масса которых составляет незначительную часть массы атома. Ядерная модель атома по своей структуре напоминает Солнечную систему, поэтому эту модель иногда называют планетарной моделью атома.

С точки зрения классической физики ядерная модель является неустойчивой. Электрон, двигаясь вокруг ядра, например, по круговой орбите, должен излучать электромагнитные волны. Скорость электрона на орбите радиусом порядка 10^{-10} м имеет порядок 10^6 м/с. При таком движении центростремительное (нормальное) ускорение есть величина порядка 10^{22} м/с^2. Благодаря этому ускорению электрон должен, излучая электромагнитные волны, терять энергию и, следовательно, приближаться к ядру по спирали. Вместе с этим должна изменяться частота излучения, так как она по классическим представлениям соответствует частоте обращения по орбите. В результате по классическим представлениям атом Резерфорда должен быть неустойчивым, а его излучение должно иметь сплошной спектр. Но наблюдения свидетельствуют о противоположном: атом является устойчивой системой, спектр излучения атома — линейчатый.

4.2.1.2. Постулаты Бора. Опыты Франка и Герца

Датский физик Нильс Бор в 1913 году сделал первую попытку построить неклассическую (квантовую) теорию атома. Эта теория должна была объяснить следующие известные в то время факты: закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения электромагнитных волн. Все эти факты были подтверждены многочисленными экспериментальными исследованиями. Теория Бора была создана для описания атома водорода и так называемых водородоподобных систем (атомов). Последние представляют собой ионизированные атомы, в которых вокруг ядра, имеющего заряд $+Ze$, двигается только один электрон. Примерами водородоподобных систем являются ионы He^+, Li^{2+} и т. д.

Теория Бора основывается на двух постулатах, названных постулатами Бора. Первый постулат Бора — постулат стационарных состояний — состоит в следующем: из бесконечного множества электронных орбит, возможных с точки зрения классической механики, реализуются только определенные — стационарные орбиты, по которым движутся электроны в атоме. При движении по стационарным орбитам электроны, несмотря на наличие ускорения, не излучают и не поглощают электромагнитных волн. Момент импульса электрона, движущегося по круговой стационарной орбите, должен иметь значение, определяемое следующей формулой:

$$L_n = m_e u_n r_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar, \qquad (3.6)$$

где m_e — масса (покоя) электрона; n — целое число, $n = 1, 2, 3, \ldots$, называемое главным квантовым числом; u_n и r_n — скорость электрона на орбите и радиус стационарной орбиты, соответствующие квантовому числу n. Равенство (3.6), которое называется условием квантования по теории Бора, указывает, что момент импульса электрона в атоме принимает дискретный ряд значений, или квантуется.

В каждом стационарном состоянии атом обладает определенной энергией. Возможные значения энергии атома образуют дискретный ряд $W_1, W_2, W_3, \ldots$. Возможные значения энергии атома принято графически изображать с помощью энергетических уровней атома (см. следующий параграф). Стационарное состояние атома, соответствующее квантовому числу $n = 1$, называют основным (или

Репозиторий ГГАТУ

нормальным) состоянием. Все остальные состояния называются возбужденными.

Таким образом, первый постулат Бора выделяет дискретную последовательность состояний атома и соответствующих уровней энергии.

Второй постулат Бора раскрывает механизм излучения атомами электромагнитных волн: при переходе атома из одного стационарного состояния (n) в другое (m) он излучает или поглощает монохроматическую электромагнитную волну частоты ν_{nm}, определяемой равенством:

$$h\nu_{nm} = W_n - W_m,\ \nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h}. \qquad (3.7)$$

Если $W_m < W_n$, происходит излучение фотона, если $W_m > W_n$ — поглощение фотона.

Атом переходит из возбужденного состояния в основное или непосредственно, или через промежуточные возбужденные состояния. Каждая спектральная линия в спектре атома соответствует переходу между его определенными уровнями энергии (между определенными стационарными состояниями).

Преобразуя формулы (3.1)−(3.3), (3.7), получим, что энергия атома водорода в определенном стационарном состоянии:

$$W_n = -\frac{R'h}{n^2} = -\frac{Rch}{n^2} = -\frac{A}{n^2}, \qquad (3.8)$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Здесь введена энергетическая постоянная:

$$A = R'h = Rch. \qquad (3.9)$$

Спектральный терм $T(n)$ связан с энергией атома следующим простым соотношением:

$$T(n) = \frac{|W_n|}{h}. \qquad (3.10)$$

Правило квантования энергии (3.8) для атома водорода и водородоподобных систем можно вывести из правила квантования момента импульса электрона (3.6), которое входит в первый постулат Бора. Этим самым показывается, что целое число n в формуле (3.8) является именно квантовым числом, входящим в выражение (3.6).

Основная идея Бора — дискретность энергетических уровней атома — была экспериментально подтверждена в опытах Франка и Герца.

Опыты Франка и Герца основаны на следующих рассуждениях. Как известно, при столкновении двух частиц происходит (в идеальных случаях) абсолютно упругий или абсолютно неупругий удар. Соответственно, механическая энергия не переходит или переходит во внутреннюю энергию соударяющихся частиц. Представим себе одноатомный газ, атомы которого, согласно постулатам Бора, находятся в нормальном энергетическом состоянии с энергией W_1. Это возможно, если энергии теплового движения атомов недостаточно для того, чтобы при столкновении один из атомов получил дополнительную энергию $W_2 - W_1$, т. е. при условии $\frac{3}{2}kT << W_2 - W_1$. Допустим, что в этот газ влетает пучок электронов, каждый из которых имеет энергию W. Если $W < W_2 - W_1$, то внутренняя энергия атомов при столкновении с электронами не должна измениться и эти столкновения являются абсолютно упругими ударами. В связи с тем, что масса электрона в тысячи раз меньше массы атома, кинетическая энергия электрона в результате удара почти не изменится (изменится направление его движения).

Если увеличить энергию электронов, то при условии $W > W_2 - W_1$ становятся возможными неупругие удары, в результате которых механическая энергия электрона частично переходит во внутреннюю энергию атома. В таких случаях атом переходит в стационарное состояние с энергией W_2, а энергия электрона уменьшается — $W'' = W - (W_2 - W_1)$. В случае когда $W > 2(W_2 - W_1)$, электрон может претерпеть два неупругих столкновения и т. д., каждый раз теряя порцию энергии $W_2 - W_1$. Если бы энергия атома изменялась непрерывно, то энергия электронов, столкнувшихся с атомами, имела бы непрерывный спектр значений.

Руководствуясь приведенными рассуждениями, Франк и Герц использовали экспериментальную установку, изображенную на рисунке 3.2а. В трубке, заполненной парами ртути под небольшим давлением (приблизительно 1 мм. рт. ст), были размещены три электрода: катод К, сетка С, анод А. Электроны, вылетая из катода в результате термоэлектронной эмиссии, ускорялись разностью потенциалов U, приложенной между К и С. Эту разность потенциалов можно было менять с помощью потенциометра П. Между сеткой

Репозиторий БГАТУ

и анодом было образовано слабое тормозящее электрическое поле с задерживающим потенциалом около 0,5 В. В опытах измерялась зависимость силы тока I в цепи анода от напряжения U между катодом и сеткой. Результаты измерений показали, что при увеличении U до значения 4,9 В сила тока увеличивалась, но при дальнейшем увеличении напряжения U резко падала, а затем снова начинала расти, достигая максимального значения при U = 9,8 В, при дальнейшем увеличении напряжения сила тока падала и т. д. Такая зависимость силы тока от напряжения, показанная на рис. 3.2б, объясняется дискретностью уровней энергии атомов ртути, с которыми соударялись электроны. При $U < 4{,}9$ В энергия электронов, ускоренных электрическим полем между катодом и сеткой, меньше, чем порция энергии $\Delta W_1 = W_2 - W_1$, которую способен принять атом ртути для перехода из основного в первое возбужденное состояние. Поэтому для напряжений, меньших граничного значения (4,9 В для атомов ртути), происходят только упругие столкновения электронов с атомами. Часть электронов проходит задерживающее напряжение между сеткой и анодом, образуя в цепи анода замкнутый ток, измеряемый гальванометром Г. С ростом U увеличивается число электронов, достигающих анода, и сила тока растет. Когда при увеличении напряжения энергия электронов достигает значения ΔW_1, начинают происходить неупругие соударения электронов с атомами ртути, в результате чего электроны теряют энергию ΔW_1 и становятся неспособными преодолеть задерживающее напряжение между сеткой и анодом. С ростом U число таких электронов увеличивается, и сила тока падает до минимума. При дальнейшем увеличении напряжения U оставшейся у электрона после столкновения с атомом энергии становится достаточно для преодоления задерживающего напряжения, и сила тока начинает расти. При $U > 9{,}8$ В становятся возможными для некоторых электронов два последовательных неупругих столкновения с атомами ртути, сила тока падает. С ростом напряжения число электронов, долетающих до анода после двух неупругих ударов, увеличивается, и сила тока растет и т. д.

Во время опытов Франк и Герц наблюдали ультрафиолетовое свечение паров ртути, что подтверждает второй постулат Бора: возбужденные атомы возвращаются в основное состояние, излучая световые кванты.

Таким образом, в опытах Франка и Герца непосредственно обнаруживается существование дискретных энергетических уровней атомов.

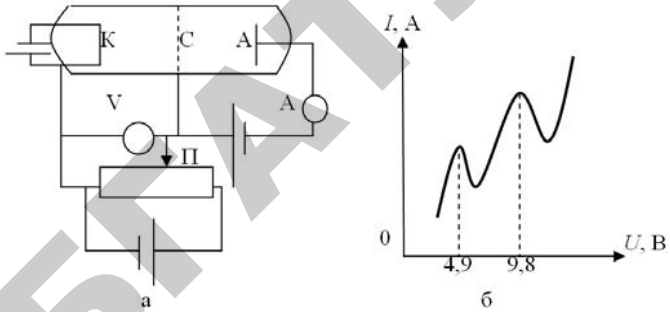

Рис. 3.2. Опыты Франка и Герца: *а* — схема экспериментальной установки; *б* — зависимость силы тока I в цепи анода от напряжения U между катодом и сеткой

4.2.1.3. Атом водорода и водородоподобные системы по теории Бора

Используя постулаты Бора, рассмотрим некоторую водородоподобную систему, состоящую из ядра, имеющего заряд $+Ze$, и одного электрона, который, как будем считать для простоты, движется вокруг ядра по круговой орбите. Предположим также, что ядро неподвижно. При этих условиях движение электрона по орбите должно быть равномерным, так как его механическая энергия, состоящая из кинетической и потенциальной в кулоновском поле ядра, должна оставаться постоянной. Радиус орбиты электрона r_n и скорость электрона на орбите u_n (рис. 3.3) связаны условием квантования (3.6), входящим в первый постулат Бора.

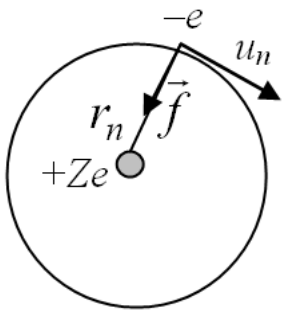

Рис. 3.3. Водородоподобный атом согласно теории Бора

Репозиторий БГАТУ

Между электроном и ядром действует кулоновская сила притяжения, придающая электрону нормальное (центростремительное) ускорение. По второму закону Ньютона:

$$\frac{m_e u_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \qquad (3.11)$$

Выражая u_n из формулы (3.6) и подставляя в выражение (3.11), получим равенство, из которого выводится формула для радиусов стационарных орбит:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e Ze^2}. \qquad (3.12)$$

Величина r_1, полученная с помощью равенства (3.12) при $Z = 1$, $n = 1$, $r_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$, представляющая собой радиус стационарной орбиты атома водорода в основном состоянии, носит название радиуса Бора (Боровского радиуса). $r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м.

С помощью формул (3.6) и (3.12) получим выражение для скорости электрона в стационарном состоянии:

$$u_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar n}, \qquad (3.13)$$

которое показывает, что с ростом квантового числа n, а значит, и радиуса орбиты, скорость электрона уменьшается.

Энергия (механическая) электрона в стационарном состоянии в водородоподобной системе равна сумме кинетической энергии $W_к$ и потенциальной энергии $W_П$ в кулоновском поле ядра:

$$W_n = W_к + W_П = \frac{m_e u_n^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}, \qquad (3.14)$$

так как из равенства (3.11) следует, что:

$$\frac{m_e u_n^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}.$$

Подставляя r_n из формулы (3.12) в условие (3.14), получим окончательное выражение энергии электрона в стационарном состоянии, соответствующем квантовому числу n:

$$W_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2 n^2}. \qquad (3.15)$$

Так как ядро считается неподвижным, то механическая энергия электрона в водородоподобной системе (3.15) одновременно является полной механической энергией этой системы. Последняя формула показывает, что эта энергия отрицательна, так как электрон связан с ядром атома силами притяжения, и $W_n \to 0$ при $n \to \infty$. Последний случай соответствует выходу электрона из атома, т. е. ионизации атома.

Для атома водорода выражение (3.15) совпадает с (3.8), если энергетическая постоянная A и постоянная Ридберга R выражаются следующим образом через фундаментальные постоянные:

$$A = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}, \quad R = \frac{A}{2\pi c\hbar}. \qquad (3.16)$$

Теоретические значения величин A и R, полученные по формулам (3.16), незначительно отличаются от соответствующих экспериментальных значений. Причина несовпадения в том, что указанные формулы выведены при условии неподвижного ядра, что возможно только при его бесконечно большой массе.

Как показывает формула (3.15), возможные значения энергии атома выражаются через квантовое число $n = 1, 2, \ldots$. По этой причине n называют главным квантовым числом. Следовательно, числа m и n в обобщенной формуле Бальмера (3.2) (или в сериальной формуле (3.1)) имеют простой смысл: m — главное квантовое число (или номер орбиты, на которую произошел переход электрона при излучении кванта света); n — главное квантовое число (номер орбиты, с которой произошел переход электрона). На рисунке 3.4 показана диаграмма уровней атома водорода в зависимости от главного квантового числа n, построенная на основании выражений (3.15) или (3.8). На этой диаграмме стрелками указаны переходы электрона, в результате которых излучаются линии различных серий спектра.

Определим закономерность изменения расстояния между уровнями. Для этого найдем разность энергий ΔW_n для двух соседних энергетических уровней, пользуясь формулой (3.15):

Репозиторий БГАТУ

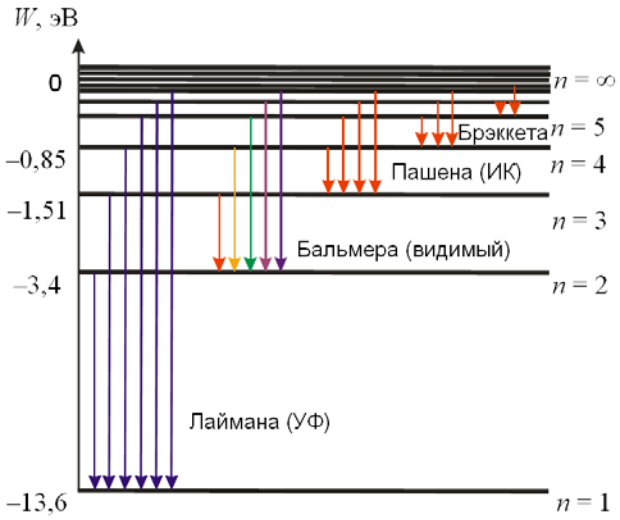

Рис. 3.4. Диаграмма энергетических уровней атома водорода, возможные переходы электрона между уровнями, вызывающие появление линий спектра атомарного водорода (согласно теории Бора)

$$\Delta W_n = W_{n+1} - W_n = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}. \qquad (3.17)$$

Из формулы (3.17) следует, что $\lim \Delta W_n = 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что с увеличением главного квантового числа n (номера энергетического уровня) энергетический промежуток между соседними уровнями уменьшается, энергетические уровни сближаются друг с другом.

Абсолютное значение энергии электрона в атоме в определенном стационарном состоянии является энергией, которую необходимо придать электрону для того, чтобы он покинул атом. Энергией ионизации атома W_i называется минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону, находящемуся в нормальном состоянии, для вылета электрона из атома:

$$W_i = |W_1| = A = Rch = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}. \qquad (3.18)$$

Из выражения (3.18) видно, что константа A — атомная постоянная — характеризует энергию ионизации атома. Энергия ионизации связана с потенциалом ионизации φ_i: $W_i = e\varphi_i$. Потенциал ионизации атома водорода φ_i = 13,53 В. Оторвавшись от атома вследствие ионизации, электрон становится свободным. Энергия свободного электрона может принимать произвольные положительные значения, она не квантуется. На диаграмме 3.4 выше нулевого значения энергии расположена область непрерывных значений W.

В основном состоянии (n = 1), которому соответствует минимальное значение энергии W_1, при отсутствии внешнего воздействия атом находится бесконечно долгое время. Минимальная энергия, необходимая для возбуждения атома водорода, это энергия $W_2 - W_1$, необходимая атому для его перехода с первого (основного) энергетического уровня на второй. Соответствующий первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_{воз}$ = 10,2 В. Диаграмма объясняет структуру спектра атома водорода. Каждая серия линий в спектре состоит из линий, возникающих в результате переходов атома на определенный энергетический уровень (m = const в серийальной формуле (3.1)) со все более высоких уровней ($m < n < \infty$). Линии серии Лаймана ультрафиолетовой области спектра излучаются атомом водорода при переходах атома на основной энергетический уровень (m = 1) со всех возбужденных энергетических уровней (n = 2, 3, …). Линии серии Бальмера в видимом диапазоне длин волн образуются при переходах электрона в атоме водорода на второй энергетический уровень (m = 2) с уровней, соответствующих главным квантовым числам n = 3, 4, … . Серия Пашена соответствует m = 3, n = 4, 5, …, серия Брэккета — m = 4, n = 5, 6, … .

Таким образом, теория Бора объясняла возникновение линейчатых спектров атомов вообще и серий линий спектра атома водорода в частности. К успехам теории Бора относится также теоретическое вычисление постоянной Ридберга, объяснение спектральных линий ионизированного атома гелия He^+ (водородоподобная система при Z = 2). С учетом точных теоретических значений постоянной Ридберга R для атома водорода и иона гелия было вычислено отношение масс протона (ядра атома водорода) и электрона $\frac{m_p}{m_e} = 1847$, что соответствовало экспериментальным данным. Исходя из численного значения постоянной Ридберга был найден удельный заряд

Репозиторий БГАТУ

электрона, т. е. $\frac{e}{m_e}$. Теория Бора объясняла природу характеристических рентгеновских спектров — рентгеновских волн, излучаемых при переходах электронов между внутренними, близкими к ядру, уровнями в многоэлектронных атомах, а также влияние магнитного поля на спектры атомов и другие явления. Теория Бора сыграла большую роль в создании атомной физики и переходе к квантовой механике. Это была первая не полностью классическая (полуклассическая) теория, ее постулаты не соответствуют классическим представлениям.

Совмещая неклассические постулаты и классические представления при их развитии, теория Бора столкнулась с существенными трудностями при попытке решения ряда проблем. Оказалось, что на основе теории Бора невозможно описать атом гелия, содержащий два электрона, и вообще многоэлектронные атомы. Теория Бора не могла также решить вопрос об интенсивности спектральных линий. Она явилась переходным этапом от классической теории атома к новой, квантовой, механике и квантовой теории атомных процессов. Новые теории подтвердили основной постулат теории Бора — дискретность энергетических состояний атомов.

4.2.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

4.2.2.1. Гипотеза де Бройля. Опыты, подтверждающие волновую природу микрочастиц

Затруднения теории Бора при описании многоэлектронных атомов и другие проблемы привели к выводу, что движение электронов в атомах подчиняется законам, отличным от законов классической механики и классической электродинамики.

Рассмотрим аналогию между природой света (электромагнитного излучения) и природой микрочастиц материи (электронов, протонов и т. д.). В результате углубленного изучения природы света было установлено, что в некоторых явлениях свет ведет себя как электромагнитная волна, другие явления (фотоэффект, эффект Комптона) можно объяснить, только принимая свет за поток корпускул — частиц света, получивших название фотонов. Эта двойственность природы света называется корпускулярно-волновым дуализмом света.

Микрочастицам материи всегда приписывались только корпускулярные свойства, такие как масса, определенные координаты и скорость в каждый момент времени. В 1924 году французский ученый Луи де Бройль выдвинул смелую гипотезу, что корпускулярно-волновой дуализм не является особенностью только света, а присущ также электронам и другим микрочастицам.

Известно, что корпускулярно-волновой дуализм света основывается на простых соотношениях между его волновыми и корпускулярными характеристиками. А именно, световой волне частоты ν (или циклической частоты ω) длины волны λ соответствует поток фотонов, каждый из которых имеет энергию $W_ф$ и импульс $p_ф$, причем:

$$W_ф = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega\,,\ p_ф = \frac{W_ф}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k\,, \quad (3.19)$$

или в векторном виде: импульс фотона связан с волновым вектором $\vec{k}$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число), направленным по направлению распространения волны, выражением:

$$\vec{p}_ф = \hbar\vec{k}\,. \quad (3.20)$$

Де Бройль предположил, что электроны и другие микрочастицы имеют не только корпускулярные, но и волновые свойства, и постулировал формулы связи корпускулярных и волновых характеристик (3.19) и (3.20) для микрочастиц, т. е. предложил считать, что электрону, движущемуся в пространстве свободно, без действия сил, со скоростью u, имеющему импульс $\vec{p} = m_e\vec{u}$, кинетическую (и одновременно полную) энергию $W = \frac{m_e u^2}{2} = \frac{p^2}{2m_e}$, соответствует волновой процесс, характеризуемый длиной волны:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e u}\,. \quad (3.21)$$

Выражение (3.21) вытекает из соотношения (3.19), постулированного для микрочастиц. Естественно также было предположить, что энергия свободного электрона определяет частоту волнового процесса по такой же формуле, как и для фотона:

Репозиторий БГАТУ

$$\nu = \frac{W}{h},\ \omega = 2\pi\nu = \frac{W}{\hbar}. \qquad (3.22)$$

Формула (3.21) называется формулой де Бройля, вычисленная с ее помощью длина волны для частицы массой m, движущейся со скоростью u, — длиной волны де Бройля.

Таким образом, каждой микрочастице был поставлен в соответствие определенный волновой процесс, и тем самым был постулирован корпускулярно-волновой дуализм материи.

Это теоретическое предположение через некоторое время было подтверждено экспериментально. В 1927 году американскими учеными Дэвиссоном и Джермером были проведены опыты, подтвердившие волновые свойства электронов. В этих опытах наблюдалась дифракция электронов на кристалле. Электроны, излучаемые раскаленной нитью A (рис. 3.5а), ускорялись разностью потенциалов U, приложенной между нитью A и электродом B. Проходя через отверстие в электроде B, ускоренные электроны попадали на кристалл никеля и рассеивались. Рассеянные электроны улавливались детектором D, связанным с чувствительным гальванометром G. Детектор D мог перемещаться и улавливать электроны, рассеянные под различными углами. Определялось количество рассеянных под разными углами электронов в зависимости от угла их падения на кристалл α при разных значениях ускоряющего потенциала U, т. е. при различных энергиях электронов.

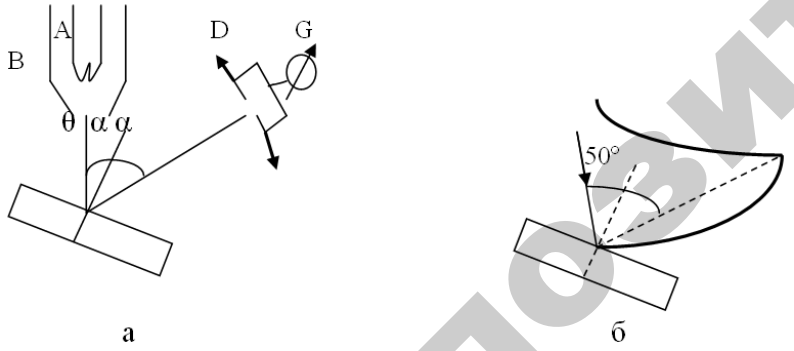

Рис. 3.5. Опыты Дэвиссона и Джермера: *а* — схема экспериментальной установки; *б* — полярная диаграмма распределения интенсивности потока электронов с энергией 54 эВ, рассеянных на кристалле никеля

На рисунке 3.5б показана полярная диаграмма распределения интенсивности (количества) электронов с энергией 54 эВ, рассеянных на кристалле никеля. Из рисунка видно, что интенсивность рассеянных электронов в рассматриваемом случае имеет максимум при угле падения $\beta = 25°$. Известно, что при дифракции рентгеновских лучей на кристалле никеля максимум отраженных рентгеновских лучей для угла падения 25° наблюдается для длины волны $\lambda = 1{,}67$ Å, как следует из формулы Вульфа–Брэггов $2d\cos\alpha = k\lambda$. Длина волны де Бройля электронов вычисляется по формуле (2.21), причем скорость электрона необходимо найти через ускоряющую разность потенциалов из условия равенства кинетической энергии электрона и работы ускоряющего поля: $\frac{m_e u^2}{2} = eU$. Вычисление длины волны де Бройля электронов, ускоренных разностью потенциалов 54 В, дает:

$$\lambda = \frac{h}{m_e u} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{м}.$$

Таким образом, дифракционные максимумы при рассеянии электронов, полученные в опытах Дэвиссона и Джермера, находятся под теми же углами, что и дифракционные максимумы при рассеянии рентгеновских лучей, причем длина волны де Бройля электронов совпадает с длиной волны рентгеновских лучей.

В дальнейшем были проведены исследования дифракции электронов при пропускании их через тонкие металлические пластинки (Томсон, Тартаковский). Дифракционная картина была получена также при отражении атомных или молекулярных пучков от кристаллов (Штерн). Началось использование нейтронов для исследования структуры кристаллов. Многочисленные наблюдения показали, что все микрочастицы при определенных условиях проявляют волновые свойства, при этом дифракционная картина для микрочастиц соответствует длине волны, вычисленной по формуле де Бройля (3.21). На рисунке 3.6а показана общая схема упомянутых опытов по дифракции частиц: пучок ускоренных электронов (протонов, ионов и т. д.), проходя через металлическую пленку П, претерпевает дифракцию на межатомных расстояниях, попадает на фотопластинку Ф, вызывая ее почернение в точках оседания электронов.

Репозиторий БГАТУ

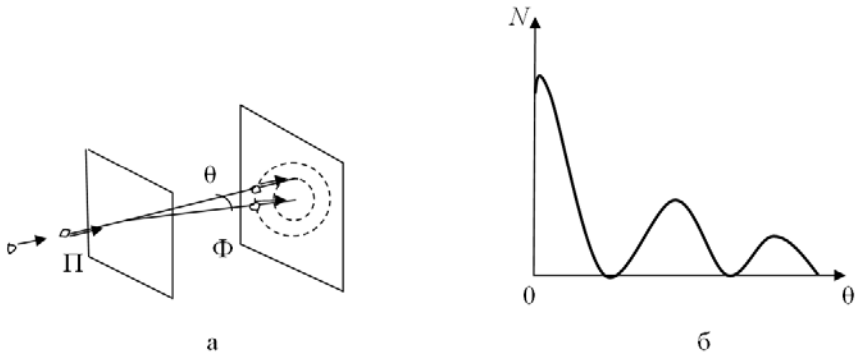

Рис. 3.6. Исследования дифракции частиц: *а* — общая схема опытов; *б* — зависимость количества частиц на фотопластинке от угла дифракции

После проявления фотопластинки на ней наблюдалась дифракционная картина, подобная той, что получается, например, при дифракции света на отверстии: около центрального пятна располагается ряд концентрических окружностей, куда попадают частицы; эти окружности чередуются с областями «запрещенных» точек, в которые не попадают частицы. На рис. 3.6б показана зависимость количества частиц на фотопластинке от угла дифракции θ.

В некоторых опытах по дифракции электронов, проведенных Фабрикантом, через маленькое отверстие пропускался не пучок электронов, а отдельные электроны один за другим через определенный промежуток времени. После проведения продолжительного эксперимента в этом случае также была получена описанная выше дифракционная картина распределения электронов. Этот результат дает основание предполагать, что волновые свойства проявляются у каждого электрона, а не только в потоке электронов.

Результаты наблюдения дифракции частиц говорят о том, что нельзя говорить об определенной траектории микрочастиц. Действительно, представим себе, что электроны попадают на непрозрачный для них экран с двумя отверстиями. Если по очереди закрывать одно отверстие, а через другое пропускать электроны, то после прохождения большого количества электронов на фотопластинке напротив каждого отверстия появится дифракционная картина, соответствующая дифракции на одном отверстии. Если же открыть оба отверстия одновременно, то в результате дифракции на фотопластинке получим дифракционную картину от двух щелей. Значит, нельзя говорить об определенной траектории каждого электрона, т. к. невозможно точно ответить на вопрос: через какое из двух открытых отверстий прошел электрон? Координаты точек на экране, в которые прилетают электроны, определяются не классическими законами движения частиц (корпускул), а более сложными волновыми законами.

Возникает вопрос: почему не наблюдаются волновые свойства у макрообъектов, окружающих нас в повседневной жизни, например, у камня, пылинки и т. д.? Для ответа на этот вопрос обратимся к аналогии между частицами и световыми (электромагнитными) волнами. Из оптики известно, что волновая природа света отчетливо проявляется при огибании препятствий, размеры которых сравнимы с длиной световой волны (или когда разность хода лучей, приходящих от двух сторон препятствия, имеет порядок длины волны). В тех же случаях, когда длина волны намного меньше размеров препятствия (отверстия), волновые свойства света становятся незаметными, их можно не учитывать, и можно пользоваться геометрической оптикой. Применительно к механике движения тел геометрическая оптика соответствует классической механике Ньютона. Механика Ньютона является предельным случаем более общей механики — квантовой механики, которая учитывает волновые свойства объекта. Использование квантовой механики необязательно в тех случаях, когда длина волны де Бройля для данного объекта (тела) намного меньше характерных размеров системы (препятствий, неоднородностей и т. д.). В опытах Дэвиссона и Джермера дебройлевская длина волны электронов, как показано выше, имеет порядок 1 Å = 10^{-10} м. Расстояние между узлами кристаллической решетки, на которых происходило рассеяние электронов, также имеет порядок 1 Å, и наблюдалась отчетливая дифракционная картина. Для сравнения длина волны де Бройля для макроскопического объекта — пылинки, которая, имея массу 1 мг, движется со скоростью 10^6 м/с, после вычисления по формуле (3.21) — $\lambda \approx 6{,}6 \cdot 10^{-22}$ м. Следовательно, даже у малого макроскопического объекта (пылинки) длина волны де Бройля намного меньше собственных размеров этого объекта. При прохождении пылинки, например, через отверстие (которое должно быть больше пылинки) волновые свойства наблюдаться не будут, так как длина волны на много порядков меньше размеров отверстия (характерных размеров системы).

Репозиторий БГАТУ

4.2.2.2. Волновая функция микрочастицы

Наличие у электрона волновых свойств не позволяет описывать состояние электрона методами классической механики. В классической механике материальная точка массы m в каждый момент времени имеет определенные координаты, скорость $\vec{u}$, импульс $\vec{p}$, изменение которого по второму закону Ньютона определяется силами, действующими на материальную точку. Для каждых начальных условий решение классических уравнений движения, записанных на основе 2-го закона Ньютона, дает определенную траекторию материальной точки. Способ описания волнового процесса иной. Волновой процесс характеризуется определенной волновой функцией, зависящей от координат и времени и имеющей конкретный физический смысл для волн определенной природы: для упругой волны волновая функция $\psi(x, y, z, t)$ — это смещение от положения равновесия частиц среды или давление в среде; для электромагнитной волны — это векторы напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E}$, $\vec{H}$ и т. д. Подобным образом электрону необходимо сопоставить волновую функцию $\psi(x, y, z, t)$, называемую ψ-функцией. Задание закона движения частицы в квантовой механике равнозначно заданию значений волновой функции частицы в каждый момент времени и в каждой точке пространства.

Физический смысл волновой функции, впервые сформулированный Максом Борном, состоит в следующем: величина $|\psi(x, y, z, t)|^2 dV$ пропорциональна вероятности того, что электрон (или другая микрочастица) будет обнаружен в момент времени t в элементе объема пространства dV в окрестности точки с координатами x, y, z. Обозначая эту вероятность как dP, на основании этого определения можно записать:

$$dP \sim |\psi(x, y, z, t)|^2 dV. \qquad (3.23)$$

Основанием для такого утверждения могут служить следующие рассуждения. Обратимся к корпускулярно-волновому дуализму, существующему как в оптике для электромагнитных волн, так и в механике микрочастиц. Сопоставим дифракционные явления в оптике с дифракцией микрочастиц. В оптике световые максимумы, наблюдаемые при дифракции световых волн, с точки зрения волновой теории являются областями, в которых квадрат

амплитуды световых колебаний, т. е. интенсивность, максимален, или, что то же самое, это области (точки), где максимален квадрат амплитуды волновой функции. С точки зрения корпускулярной (фотонной) теории света интенсивность света в максимумах пропорциональна количеству фотонов, попадающих в эту область пространства. Для согласования обоих описаний (волнового и корпускулярного) необходимо допустить, что количество фотонов, попадающих в определенный объем пространства, пропорционально квадрату амплитуды световой волны. Перенося подобные рассуждения на микрочастицы, получим следующий вывод: количество частиц, например, электронов, попадающих в элемент пространства dV, должно быть пропорционально квадрату амплитуды волновой функции частицы и величине объема dV. Волновая функция является величиной комплексной, поэтому под квадратом волновой функции надо понимать квадрат модуля волновой функции: $|\psi(x, y, z, t)|^2 = \psi(x, y, z, t)\, \psi^*(x, y, z, t)$, где $\psi^*(x, y, z, t)$ — функция, комплексно сопряженная с $\psi(x, y, z, t)$. С другой стороны, количество частиц в определенной области пространства пропорционально вероятности обнаружить частицу в этой области. В результате приходим к соотношению (3.23). Оно показывает, что физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции, а не сама волновая функция. В связи с этим волновую функцию можно рассматривать как вспомогательную величину, служащую для определения физических величин, характеризующих состояние микрочастицы.

Физический смысл волновой функции накладывает на нее определенное условие: при движении частицы в пространстве вероятность найти ее во всем пространстве (в любой точке пространства) в момент времени t должна быть равной единице, так как является достоверностью. Это условие записывается в следующем виде:

$$\int_{\infty} \left|\psi(x, y, z, t)\right|^2 dV = 1, \qquad (3.24)$$

где интегрирование проводится по всему пространству. Условие (3.24) называется условием нормировки волновой функции. Если $\psi(x, y, z, t)$ подчинено условию нормировки (3.24), то соотношение (3.23) переписывается следующим образом:

$$dP = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV = \rho(x, y, z, t) dV, \qquad (3.25)$$

Репозиторий БГАТУ

где $\rho(x, y, z, t)dV = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$ — плотность вероятности, означающая вероятность обнаружения микрочастицы в определенный момент времени в единичном объеме пространства около точки (x, y, z). Величина

$$P = \int_V |\psi(x, y, z, t)|^2 \, dV \qquad (3.26)$$

означает вероятность обнаружения частицы в объеме V в момент времени t.

Как видим, описание движения частицы в квантовой механике носит статистический характер. Причина этого в том, что хотя частицы имеют в каждый момент времени точные координаты, из-за их огромного количества в любом теле за каждой из них невозможно проследить, и поэтому должны быть использованы определенные средние характеристики движения (такое положение вещей существует, например, в классической кинетической теории газов). Статистическое описание микрочастиц соответствует их природе. Микрочастицу надо представлять себе как бы размазанной по пространству в соответствии с величиной ψ-функции.

Каждому состоянию движения частицы соответствует определенный аналитический вид волновой функции. Простейшей волной является плоская монохроматическая волна:

$$\psi(\vec{r}, t) = A\cos(\omega r - \vec{k} \cdot \vec{r}), \qquad (3.27)$$

распространяющаяся вдоль волнового вектора $\vec{k}$. Функция (3.27) является действительной частью комплексной функции

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \qquad (3.28)$$

Согласно гипотезе де Бройля, функция (3.28) сопоставляется электрону, на который не действуют силы, имеющему определенную постоянную скорость $\vec{u}$, а значит, импульс $\vec{p}$. В таком случае, заменяя по формулам (3.20) и (3.22) циклическую частоту ω и волновой вектор $\vec{k}$ на корпускулярные характеристики электрона W и $\vec{p}$, из выражения (3.28) получим:

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})}. \qquad (3.29)$$

Волновая функция (3.29) называется (плоской) волной де Бройля, она является волновой функцией свободной частицы. Величина W, входящая в последнее выражение, является кинетической и одновременно полной энергией частицы,

$$W = W_к = \frac{p^2}{2m}, \qquad (3.30)$$

где m — масса частицы (для электрона m_e).

Вычислим фазовую скорость волны де Бройля. Фазовая скорость волны связана с циклической частотой и волновым числом соотношением: $u_ф = \frac{\omega}{k}$, поэтому, используя формулы (3.20), (3.22) и (3.30), получим:

$$u_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{W}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{u}{2}, \qquad (3.31)$$

т. е. фазовая скорость равна половине скорости частицы. Этот результат не ведет к противоречиям, так как фазовая скорость волны де Бройля не имеет непосредственного физического смысла. Выражение (3.31) лишь показывает, что $u_ф$ зависит от скорости движения частицы u, значит, от ее энергии W и частоты волны ω. Это указывает на существование дисперсии волн де Бройля даже в вакууме (фазовая скорость волны зависит от ее частоты).

Физический смысл имеет не фазовая, а групповая скорость волн де Бройля. Можно показать, что групповая скорость волн де Бройля:

$$\upsilon = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dW}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p}{m} = u. \qquad (3.32)$$

Как показывает условие (3.32), групповая скорость волн де Бройля совпадает со скоростью частицы.

4.2.2.3. Уравнение Шредингера

Волновая функция (3.29) — плоская волна де Бройля — описывает состояние свободной частицы. Для нахождения волновой функции частицы, на которую действуют определенные силы, необходимо иметь дифференциальное уравнение для ψ-функции частицы, находящейся в силовом поле. Это уравнение должно быть

Репозиторий БГАТУ

линейным (неизвестная функция ψ должна быть только в первой степени) для того, чтобы выполнялся принцип суперпозиций, состоящий в том, что если микрочастица может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3, …, то она может находиться и в состояниях, описываемых линейной комбинацией указанных волновых функций:

$$\psi = \sum_{n=1}^{N} C_n \psi_n ,$$

где C_n — произвольные постоянные.

Найдем дифференциальное уравнение (волновое уравнение), которому удовлетворяет плоская волна де Бройля (3.29). Для этого вычислим частные производные функции (3.29) по времени:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} W\psi , \qquad (3.33)$$

и вторые производные по пространственным координатам:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\hbar^2}\psi p_x^2 , \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\hbar^2}\psi p_y^2 , \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\hbar^2}\psi p_z^2 . \qquad (3.34)$$

Учитывая соотношение (3.30) для свободной частицы, где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, с помощью формул (3.33) и (3.34) получим волновое уравнение для ψ-функции свободного электрона:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m_e}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right),$$

или, используя обозначения оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m_e}\Delta\psi . \qquad (3.35)$$

Этому дифференциальному уравнению соответствуют функции вида (3.29) и их линейные комбинации. Заметим, что зависимость от времени функции (3.29), т. е. волны де Бройля, описывается законом:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar}Wt} . \qquad (3.36)$$

Функция $\psi(x, y, z)$, стоящая в правой части равенства (3.36), это часть функции $\psi(x, y, z, t)$, зависящая только от пространственных координат x, y, z. Подставим условие (3.36) в уравнение (3.35) и получим дифференциальное уравнение для волновой функции свободной частицы в следующем виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi = W\psi . \qquad (3.37)$$

Чтобы обобщить формулу (3.37) на случай движения электрона в силовом поле, будем считать, что величина W, которая для свободной частицы является кинетической и одновременно полной энергией электрона, в случае его движения под действием сил является кинетической энергией электрона. Тогда, переходя к описанию движения электрона под действием сил, заменим W в уравнении (3.37) на $W_к = W - U$, где W — полная энергия несвободного электрона; U — его потенциальная энергия в силовом поле, в дальнейшем считается, что она не зависит от времени. После такой замены получим уравнение для волновой функции в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + U\psi = W\psi . \qquad (3.38)$$

Уравнению (3.38) подчиняются волновые функции электрона, имеющего потенциальную энергию U, если выполняется условие (3.36). При выполнении этого условия квадрат модуля волновой функции $|\psi^2| = \psi\psi^*$, определяющий плотность вероятности нахождения частицы в определенной области пространства, не зависит от времени. В случае выполнения условия (3.36) говорят, что ψ-функция описывает стационарное состояние частицы (системы). Уравнение (3.38) в честь немецкого физика Э. Шредингера называется уравнением Шредингера для стационарных состояний электрона.

Заменяя с помощью формулы (3.33) величину $W\psi$, приходим к общему уравнению Шредингера, или уравнению Шредингера со временем:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} , \qquad (3.39)$$

где в общем случае волновая функция ψ и потенциальная энергия U определенным образом зависят от координат и времени.

Репозиторий БГАТУ

Уравнение (3.39) является основным уравнением квантовой механики, где оно играет ту же самую роль, что уравнение 2-го закона Ньютона в классической механике. Выражение (3.39) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка по времени и второго порядка по пространственным координатам. Для решения этого уравнения, т. е. нахождения волновой функции $\psi(x, y, z, t)$ в каждом конкретном случае, должны быть заданы начальные и граничные условия. Начальными условиями является задание функции $\psi(x, y, z, t)$ в момент времени $t = 0$ во всей области пространства, где требуется найти решение уравнения. Граничные условия в общем случае сводятся к требованию однозначности, непрерывности и ограниченности модуля ψ-функции и ее первых производных по координатам.

4.2.2.4. Соотношение неопределенностей

Опыты по дифракции электронов показывают, что микрочастицы во многих случаях не имеют определенной траектории движения, т. е. определенных координат в каждый момент времени. Следовательно, классические представления неприменимы к микрочастицам. Поведение микрочастицы, ее состояние необходимо описывать с помощью волновой функции, которая находится при решении уравнения Шредингера (3.38) или (3.39). Рассмотрим, к чему приводит попытка точного определения координат электрона.

Пусть электроны, проходящие через щель в экране Э, попадают на фотопластинку Ф (рис. 3.7). После проявления фотопластинки на ней наблюдается определенная дифракционная картина. Пусть перед падением на щель электроны имели определенный импульс $\vec{p}$, ($p_x = 0$, $p_y = p$) и им соответствовала волновая функция в виде плоской волны де Бройля (3.29). Процесс прохождения электронов через щель описывается в квантовой механике следующим образом. Плоская волна распределяется по всему пространству, каждый электрон «размазан» по всему пространству. Проходя через щель, плоская волна претерпевает дифракцию, благодаря которой образуется расходящаяся волна, интенсивность которой зависит от направления распространения. На фотопластинке Ф получается картина распределения электронов, подобная дифракционной картине, наблюдаемой при дифракции света на щели. Максимум нулевого порядка находится при угле дифракции $\varphi = 0$,

первый минимум образуется при угле дифракции φ, удовлетворяющем условию $b\sin\varphi = k\lambda$, из которого получается:

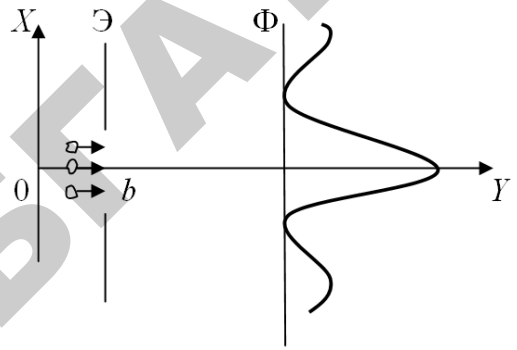

Рис. 3.7. Схема опытов по дифракции электронов на щели шириной b и распределение числа электронов на экране

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{b}, \qquad (3.40)$$

где λ — длина волны де Бройля электрона, падающего на щель. Большая часть электронов на приемной фотопластинке сосредоточена в нулевом (центральном) максимуме. На этом основании в первом приближении можно не обращать внимания на остальную часть дифракционной картины.

Теперь представим себе электрон в виде обычной частицы (корпускулы). Тогда опыт по дифракции электронов описывается следующим образом. Электроны, обладая определенным импульсом $p = p_y$, а значит, и скоростью $u = u_y$, движутся к щели, и в момент прохождения через нее их координата по оси OX определяется с точностью до ширины щели b. Обозначим как Δx разброс координаты электрона по оси OX в момент прохождения через щель:

$$\Delta x = b. \qquad (3.41)$$

В тот же момент времени изменяется направление импульса (и скорости) электрона. Если учитывать только те электроны, которые попадают в центральный максимум, можно утверждать, что у электронов появляется проекция импульса на ось OX, т. е. p_x, величина которой находится в границах:

Репозиторий БГАТУ

$$0 \le p_x \le p\sin\varphi. \qquad (3.42)$$

Таким образом, каждому электрону пучка, прошедшего через щель, можно приписать импульс в направлении оси *OX*, имеющий неопределенность (разброс значений) Δp_x:

$$\Delta p_x \approx p\frac{\lambda}{b}, \qquad (3.43)$$

(использовано равенство (3.40)). Длина волны связана с импульсом частицы формулой де Бройля (3.2), применяя которую к предыдущему равенству, получим:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{b}. \qquad (3.44)$$

Наконец, в соответствии с условием (3.41) ширина щели b представляет собой неопределенность координаты электрона x в момент прохождения его через щель. С учетом этого из выражения (3.44) окончательно получим:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h. \qquad (3.45)$$

Соотношения типа (3.45) обобщаются на координаты y и z:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx h,\ \Delta z \cdot \Delta p_z \approx h. \qquad (3.46)$$

Соотношения (3.45) и (3.46) называются соотношениями неопределенностей. Как видно из приведенных выше рассуждений, смысл их в следующем: характеризовать микрочастицу с помощью физических величин, свойственных макротелу, можно только с определенной точностью, в определенном приближении. При этом произведение неопределенности координаты частицы на неопределенность соответствующей проекции ее импульса представляет собой величину порядка постоянной Планка h, значит, по крайней мере, порядка 10^{-34} Дж · с. Соотношения неопределенностей следуют из анализа любого опыта с микрочастицами, а также непосредственно из уравнений Шредингера. Они были впервые получены немецким физиком Гейзенбергом и иногда называются соотношениями неопределенностей Гейзенберга.

Соотношение (3.45) показывает, что чем с большей точностью определяется координата x частицы (чем меньше неопределенность Δx), тем большей в тот же момент времени должна быть не-

определенность Δp_x проекции импульса частицы на ось *OX*, а вместе с этим и разброс проекции скорости частицы на эту ось, так как из условия (3.45) нетрудно получить, что:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x},\ \Delta u_x \approx \frac{h}{m_e \Delta x}. \qquad (3.47)$$

То же самое относится к координатам y и z, а также к проекциям импульса на соответствующие оси. Надо подчеркнуть, что соотношение неопределенностей Гейзенберга не накладывает никаких ограничений на точность одновременного определения координаты x и проекции импульса частицы на оси *OY* и *OZ* и вообще на разноименные координаты и проекции импульса.

В условиях каждой конкретной задачи соотношения неопределенностей (формулы (3.45) и (3.46)) могут служить критерием необходимости учета волновых свойств частицы, т. е. с помощью указанных соотношений можно ответить на вопрос: необходимо ли применение законов квантовой механики при описании движения данной частицы или достаточно классических представлений. Приведенные ниже примеры показывают, как на основе соотношений неопределенностей делаются подобные заключения.

1. Электрон в атоме, согласно теории Бора, имеет скорость движения по орбите порядка 10^6 м/с. При этом координаты электрона определяются с точностью до размеров атома, т. е. с разбросом значений координаты $\Delta x \approx 10^{-10}$ м. В таком случае в соответствии с формулами (3.47) неопределенность (неточность) скорости электрона будет равна:

$$\Delta u_x \approx \frac{h}{m_e \Delta x} \approx 6{,}6 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Получили, что неопределенность скорости электрона Δu_x в данном случае есть величина порядка этой скорости. В таком случае невозможно сохранить представление об орбите электрона, по которой он движется с определенной скоростью. Классические представления об орбите электрона неприменимы для описания его движения и используются только для наглядности.

2. Рассмотрим небольшое макротело, например, пылинку, и покажем, что соотношение неопределенности позволяет в этом случае применять классические представления о траектории. Пусть масса

Репозиторий БГАТУ

пылинки $m = 10^{-6}$ кг, разброс в определении ее координаты $\Delta x \approx 10^{-6}$ м. В соответствии с выражениями (3.47) неопределенность скорости пылинки вдоль оси OX:

$$\Delta u_x \approx \frac{h}{m \cdot \Delta x} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-20} \text{ м/с}.$$

Полученный результат указывает на то, что скорость пылинки в условиях задачи может быть измерена практически с любой точностью. Поэтому будет достаточным классическое описание.

4.2.2.5. Частица в прямоугольной потенциальной яме

Рассмотрим движение частицы в случае, когда ее потенциальная энергия $U(x)$ равна нулю на отрезке $0 \le x \le a$, стремится к бесконечности при $x < 0$ и равна определенной положительной величине $U_0 > 0$ при x > a (рис. 3.8а). Если полная энергия частицы $W < U_0$, то говорят, что частица находится в прямоугольной потенциальной яме. В частном случае $U_0 \to \infty$ говорят, что частица находится в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме (рис. 3.8б). Как движется частица в потенциальной яме? По законам классической механики частица, имея постоянную полную механическую энергию $W < U_0$, движется по отрезку $0 \le x \le a$ с постоянной кинетической энергией, а значит, с постоянной по величине скоростью. Энергия классической частицы в яме W может иметь любые значения. Частица не может выйти за край ямы, где $U \to \infty$, так как в этих областях ее полная энергия была бы меньше потенциальной (т. е. кинетическая энергия была бы отрицательной), что невозможно. При своем движении частица отражается от стенок ямы. Движется в противоположном направлении с неизменной по величине скоростью. Таким образом, согласно законам классической механики в случае $W < U_0$ частицы отсутствуют вне ямы и с одинаковой вероятностью могут быть найдены в любой точке ямы.

Перейдем к квантовомеханическому рассмотрению движения частицы в потенциальной яме, изображенной на рисунке 3.8а. Поведение частицы определяется волновой функцией, которая является решением уравнения Шредингера для стационарных состояний (3.38). В данном одномерном случае это уравнение имеет следующий вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = W\psi\,. \qquad (3.48)$$

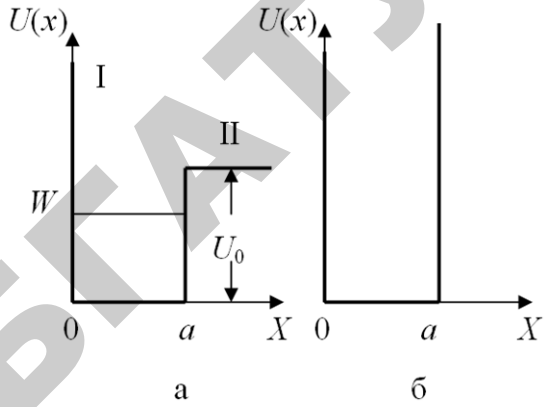

Рис. 3.8. Прямоугольные потенциальные ямы:
а — яма, у которой высота правой стенки равна U_0; *б* — бесконечно глубокая яма

В соответствии с видом функции $U(x)$ разобьем область изменения x на две части: область I, включающую в себя координаты $0 < x < a$, где $U = 0$, и область II, в которой $a < x < \infty$ и $U = U_0$. Область $x < 0$, как будет видно из дальнейшего, интереса не представляет.

Для области I уравнение (3.48) приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi_1}{dx^2} = W\psi_1\,, \qquad (3.49)$$

в области II:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + U_0\psi_2 = W\psi_2\,. \qquad (3.50)$$

Введем следующие обозначения:

$$k_1^2 = \frac{2mW}{\hbar^2},\; k_2^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}(U_0 - W)\cdot \qquad (3.51)$$

С помощью условий (3.51) уравнения (3.49) и (3.50) приобретают следующий вид:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0\,; \qquad (3.52)$$

Репозиторий БГАТУ

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2^2\psi_2 = 0. \qquad (3.53)$$

Величины k_1^2 и k_2^2 положительны. Уравнения (3.52) и (3.53) являются обыкновенными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами (см., например, дифференциальное уравнение гармонических колебаний). Общие решения этих уравнений, как известно, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A\sin(k_1 x + \varphi); \\ \psi_2 &= Be^{k_2 x} + Ce^{-k_2 x}, \end{aligned} \qquad (3.54)$$

где A, B, C, φ — произвольные постоянные.

Примем теперь во внимание условия, которым должна удовлетворять волновая функция. ψ-функция должна быть всюду ограничена. Если $k_2 > 0$, то множитель $e^{k_2 x}$, входящий в формулу (3.54), неограниченно растет при $x \to \infty$. Во избежание этого необходимо принять, что:

$$B = 0. \qquad (3.55)$$

Потребуем также, чтобы решения ψ_1 и ψ_2 в точке $x = a$ совпадали и переходили друг в друга гладко (без излома). Эти требования означают, что в этой точке совпадают функции ψ_1 и ψ_2 и их первые производные по x. Это приводит к уравнениям:

$$A\sin(k_1 a + \varphi) = Ce^{-k_2 a}; \qquad (3.56)$$

$$k_1 A\cos(k_1 a + \varphi) = -k_2 Ce^{-k_2 a}. \qquad (3.57)$$

Разделив выражение (3.56) на формулу (3.57), будем иметь следующее равенство:

$$\mathrm{tg}(k_1 a + \varphi) = -\frac{k_1}{k_2}. \qquad (3.58)$$

Исследуем случай, когда потенциальная энергия U_0 имеет очень большое численное значение. Это соответствует движению частицы, ограниченному в точках $x = 0$, $x = a$ абсолютно непроницаемы-

ми стенками, т. е. нахождению частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (рис. 3.8б). Как показывают уравнения (3.51), k_1 не зависит от U_0, k_2 при увеличении U_0 растет. Если $U_0 \to \infty$, отношение $\frac{k_1}{k_2} \to 0$, и при бесконечно высокой правой стенке ямы из формулы (3.58) следует:

$$\mathrm{tg}(k_1 a + \varphi) = 0,$$

что возможно, если:

$$\sin(k_1 a + \varphi) = 0, \qquad (3.58)$$

а значит, с учетом уравнений (3.54), $\psi_1(a) = 0$. Таким образом, в точке, где потенциальная энергия бесконечно велика, волновая функция превращается в нуль. За бесконечно высокой стенкой функция, начиная с нулевого значения, может только уменьшаться по величине, как показывает второе равенство (3.54). Следовательно, надо положить, что $\psi_2 = 0$ во всей области определения. Производная $\frac{d\psi_1}{dx}$ при $U_0 \to \infty$ не превращается в 0. Следовательно, в точке, где потенциальная энергия скачком превращается в бесконечность, ψ-функция превращается в 0, оставаясь непрерывной, но не гладкой.

Приведенные выше рассуждения целиком относятся и к бесконечно высокой левой стенке ямы, т. е. при $x = 0$ $\psi_1 = 0$, что на основании уравнений (3.54) дает:

$$\varphi = 0. \qquad (3.60)$$

ψ-функция остается равной нулю слева от точки $x = 0$, т. е. при всех отрицательных значениях x. С учетом равенства (3.60) волновая функция частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме приобретает вид:

$$\psi_1 = A\sin(k_1 x), \qquad (3.61)$$

причем выполняется условие:

$$\sin k_1 a = 0, \qquad (3.62)$$

вытекающее из формулы (3.59) с учетом равенства (3.60). Условие (3.62) выполняется, если:

Репозиторий БГАТУ

$$k_1 a = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

или

$$k_1 = \frac{n\pi}{a}. \qquad (3.63)$$

Решение $k_1 = 0$ также удовлетворяет уравнению (3.62), но при этом функция ψ_1 становится тождественно равной нулю, что означает отсутствие частицы в потенциальной яме.

Из условия (3.63) с помощью первого равенства (3.51) приходим к выражению возможных значений энергии частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками:

$$W_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (3.64)$$

Формула (3.64) показывает, что частица, замкнутая в потенциальной яме, может иметь только определенные дискретные (или квантованные) значения энергии, которые называются энергетическими уровнями. Обратим внимание на то, что минимальное значение энергии $W_1 \neq 0$, в то время как с точки зрения классической механики частица может быть неподвижной в некоторой из точек отрезка $0 < x < a$. Неравенство нулю минимальной энергии квантовомеханической частицы можно предусмотреть, опираясь на соотношение неопределенностей. В данном случае неопределенность координаты частицы имеет порядок a, ей соответствует неопределенность импульса $\Delta p_x \neq 0$, и следовательно, не равна нулю соответствующая кинетическая энергия.

Выясним причину, по которой возникло квантование энергии частицы в рассматриваемой задаче. Общее решение уравнения Шредингера (3.52) и (3.53) для отдельных областей пространства не приводит к квантованию. Условие квантования (3.63) возникает из требования непрерывности ψ-функции на границе двух областей, в которых она имеет различный аналитический вид: $\psi_1(a) = \psi_2(a)$ или равенство (3.56). Полученный результат иллюстрирует общую теорему квантовой механики, которая состоит в том, что энергия квантуется (имеет дискретный спектр) в тех системах, которые могут двигаться только в ограниченной части пространства, не уходя в бесконечность. В тех же случаях, когда система имеет возможность удаляться на бесконечность, энергия системы может принимать произвольные значения, т. е. не квантуется. В последнем случае спектр энергии непрерывный.

Проанализируем возможные значения энергии (3.64) частицы, двигающейся в бесконечно глубокой потенциальной яме. Найдем разность между двумя соседними значениями энергии:

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}(2n+1)\cdot \qquad (3.65)$$

Из выражения (3.65) вытекает, что разность энергий, соответствующих двум энергетическим уровням, обратно пропорциональна величине a^2. Для потенциальных ям размером порядка 10^{-7} м разность значений энергии соседних энергетических уровней электрона $\Delta W = 0{,}34(2n + 1)$ эВ.

В потенциальной яме макроскопических размеров, например, при $a = 10^{-2}$ м соседние энергетические уровни отстоят друг от друга на $\Delta W = 3{,}4(2n + 1) \cdot 10^{-15}$ эВ. В этом случае уровни располагаются так плотно, что их приближенно можно считать квазинепрерывными (как бы непрерывными), и результаты квантовомеханического описания движения частицы будут близки к результатам классического описания.

Обратим внимание на зависимость величины ΔW от числа n согласно формуле (3.65). Увеличение числа n ведет к росту разности соседних значений энергии. Это показано на рисунке 3.9а, где изображено три энергетических уровня W_1, W_2, W_3, соответствующих значениям $n = 1, 2, 3$.

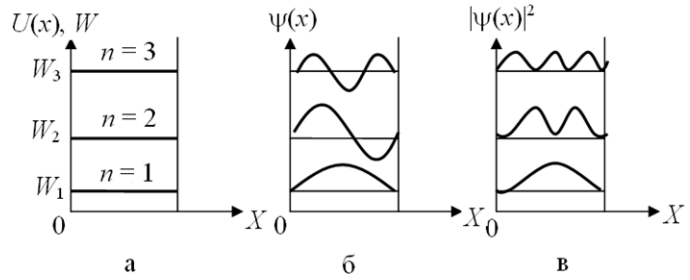

Рис. 3.9. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме:
а — схема энергетических уровней; *б* — графики волновых функций частицы для значений главного квантового числа $n = 1, 2, 3$; *в* — графики зависимости квадратов модулей этих волновых функций от координаты x

Репозиторий БГАТУ

Волновая функция частицы (3.61) с учетом условия (3.63) принимает следующий вид:

$$\psi_1 = A\sin\frac{n\pi}{a}x\,. \qquad (3.66)$$

Применим общее условие нормировки волновой функции (3.24) для определения коэффициента A в выражении (3.66). В одномерном случае, который имеет место в рассматриваемой задаче, условие нормировки имеет следующий вид:

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 1\,,$$

или

$$A^2\int_0^a \sin^2\frac{n\pi}{a}x dx = 1\,. \qquad (3.67)$$

Применяя тригонометрическое тождество $2\sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha$, вычислим интеграл в формуле (3.67) и получим $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$. С учетом этого результата волновая функция частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме запишется окончательно следующим образом:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\,. \qquad (3.68)$$

График функции (3.68) для первых значений квантового числа n изображен на рисунке 3.9б. На рисунке 3.9в построен график квадрата модуля волновой функции $|\psi(x)|^2 = \psi^2(x) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x$, которая является плотностью вероятности нахождения частицы в разных точках потенциальной ямы. Этот график показывает, что в состоянии, соответствующем числу $n = 1$, существует наибольшая вероятность обнаружить частицу в середине ямы, при $n = 2$ — в двух точках, расположенных симметрично относительно середины, и т. д. Напомним, что согласно классической механике вероятности нахождения частицы в любой точке отрезка $0 < x < a$ одинаковы.

Вернемся к потенциальной яме общего вида, изображенной на рис. 3.8а, когда потенциальная энергия U_0 в области $x > a$ имеет конечное значение. В этом случае $k_2 \neq 0$ и волновые функции в областях 1 и 2 записываются следующим образом:

$$\psi_1 = A\sin(k_1 x);$$
$$\psi_2 = Ce^{-k_2 x}\,, \qquad (3.69)$$

причем из формул (3.58) и (3.60) следует равенство:

$$\mathrm{tg}(k_1 a) = -\frac{k_1}{k_2}\,, \qquad (3.70)$$

определяющее возможные дискретные значения энергии частицы. Это уравнение является трансцендентным уравнением, решить его аналитически невозможно. Обычно оно решается с помощью вычислительных методов или графически, в результате чего определяются возможные значения энергии W_1, W_2, W_3, … .

Проанализируем теперь движение частицы в потенциальной яме общего вида в том случае, когда полная энергия частицы W больше потенциальной энергии U_0, $W > U_0$. В этом случае, вводя вместо условий (3.51) следующие обозначения:

$$\kappa_1^2 = \frac{2mW}{\hbar^2}\,,\ \kappa_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(W - U_0)\,, \qquad (3.71)$$

получим дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \kappa_1^2\psi_1 = 0,$$
$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \kappa_2^2\psi_2 = 0. \qquad (3.72)$$

Решения уравнений (3.72), записанные в комплексном виде, следующие:

$$\psi_1 = A\sin(\kappa_1 x) = \frac{A}{2i}\left(e^{i\kappa_1 x} - e^{-i\kappa_1 x}\right),\ \psi_2 = Be^{i\kappa_2 x} - Ce^{-i\kappa_2 x}\,. \qquad (3.73)$$

Можно показать, что применение граничных условий в точке $x = a$, ведет к системе уравнений, которая решается при любых значениях κ_1

Репозиторий БГАТУ

и κ_2, а значит, при любых значениях полной энергии частицы $W > U_0$. В этом случае, когда частица имеет возможность удаляться на бесконечность, энергия частицы не квантуется, она может принимать любые превосходящие потенциальную энергию значения.

4.2.2.6. Квантовомеханическое описание атома водорода. Волновая функция электрона. Квантовые числа

В части 3.2.1. была рассмотрена боровская полуклассическая теория атома водорода (водородоподобных систем). Переходя к квантовомеханическому описанию водородоподобных систем, будем, как и ранее, считать, что в электрическом поле ядра, имеющего заряд $+Ze$, движется единственный электрон (при $Z = 1$ имеем атом водорода). Предположим, что масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона и ядро покоится. Оно создает центральносимметричное электростатическое поле, в котором потенциальная энергия электрона

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = U(r) \qquad (3.74)$$

является функцией только от r — расстояния между ядром, принятым за точечный заряд, и электроном. Волновая функция электрона ψ в этом случае удовлетворяет уравнению Шредингера для стационарных состояний (3.38) с учетом выражения (3.74):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = W\psi\,, \qquad (3.75)$$

где $\Delta\psi$ — оператор Лапласа от волновой функции $\psi(x, y, z)$; m_e — масса электрона. Движение электрона происходит в силовом поле, имеющем сферическую симметрию, поэтому при решении уравнения (3.75) удобно перейти от декартовой прямоугольной системы координат к сферической системе координат. В сферической системе координат положение точки M в пространстве (рис. 3.10) определяется расстоянием r точки от начала координат (точки 0) и двумя углами: θ — между радиус-вектором точки $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ и осью OZ, φ — между проекцией радиус-вектора $\vec{r}$ на плоскость XY — отрезком OM' — и осью OX. Нетрудно установить следую-

щую связь между декартовыми координатами точки $M(x, y, z)$ и ее сферическими координатами r, θ, φ:

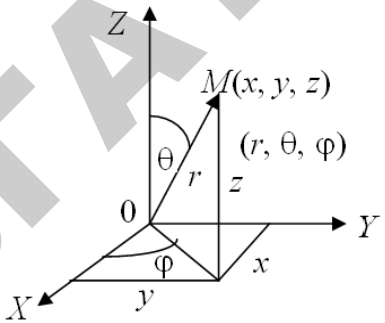

Рис. 3.10. Сферические координаты точки M

$$x = r\sin\theta\cos\varphi;\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,;$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi;\ \theta = \operatorname{arccoc}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,; \qquad (3.76)$$
$$z = r\cos\theta;\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

Начало координат совмещено с ядром. Рассматривая решение уравнения Шредингера (3.75) в сферических координатах, необходимо в этом уравнении перейти к координатам r, θ, φ с помощью формул (3.76) и считать волновую функцию функцией этих переменных — $\psi(r, \theta, \varphi)$. После перевода в сферические координаты оператора Лапласа получается следующий результат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{\theta\varphi}\,, \qquad (3.77)$$

где символом $\Delta_{\theta\varphi}$ обозначена часть оператора Лапласа, зависящая от углов θ, φ и не зависящая от r.

Из всех возможных состояний движения электрона в водородоподобной системе простейшими являются те, которые описываются

Репозиторий БГАТУ

центральносимметричной волновой функцией, т. е. волновой функцией $\psi(r)$, зависящей только от координаты r — расстояния от электрона до ядра — и не зависящей от направления в пространстве, т. е. от координат θ и φ. Эта волновая функция удовлетворяет уравнению (3.75), в котором оператор Лапласа (3.77) содержит только зависящую от r часть, т. е. уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\psi}{dr}\right)-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi=W\psi\,. \qquad (3.78)$$

Решение уравнения (3.78) приведено в пункте 4.3.3. дополнительного материала. Там показано, что конечная и однозначная волновая функция $\psi(r)$ (решение уравнения (3.78)) существует только в том случае, когда полная энергия электрона принимает следующие дискретные значения:

$$W=W_n=-\frac{Z^2e^4m_e}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}=-\frac{Z^2e^4m_e}{8\varepsilon_0^2h^2n^2}=-AZ^2\frac{1}{n^2}\,, \qquad (3.79)$$

где квантовое число n = 1, 2, 3, … (A — энергетическая постоянная (3.16)). Формула возможных значений энергии электрона в водородоподобной системе (3.79) полностью совпадает с соответствующим выражением, полученным в боровской теории (3.15). Квантование энергии электрона, выражаемое соотношением (3.79), получено из условия конечности волновой функции электрона, в то время как в теории Бора квантование состояний постулируется.

Положительные значения энергии электрона могут быть любыми, энергия не квантуется, что соответствует общему положению квантовой механики: значения энергии дискретны только в том случае, когда движение системы (электрона в нашем случае) происходит в ограниченной части пространства (в атоме). Если же электрон может удаляться на бесконечно большое расстояние от первоначального положения, то его энергия имеет непрерывный спектр значений. Последний случай имеет место в случае свободного электрона (U = 0), не связанного силами притяжения с ядром атома; полная энергия электрона в этом случае положительна (W > 0) и может иметь любое численное значение.

На рисунке 3.11 показаны энергетические уровни атома водорода, вписанные в потенциальную яму, образованную кривой потенциальной энергии $U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Напоминаем, что на подобных графиках каждый уровень энергии обозначает возможное значение *полной механической энергии* электрона W; для каждого n при любом значении r (расстояния от ядра до электрона) энергетическое расстояние от горизонтальной оси до точки на кривой потенциальной энергии дает значение *потенциальной энергии* $U(r)$ электрона для данного r; численное значение энергетического расстояния от уровня энергии до кривой потенциальной энергии дает *кинетическую энергию* электрона $W_к$.

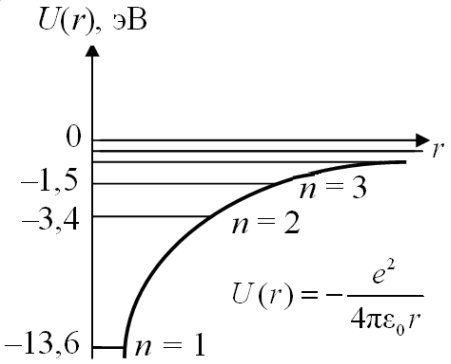

Рис. 3.11. Энергетические уровни атома водорода, вписанные в потенциальную яму

Центральносимметричная волновая функция может быть представлена в виде степенного ряда:

$$\psi(r)=\frac{1}{r}e^{-kr}\sum_{s=1}^{n}a_s r^s\,, \qquad (3.80)$$

где величина k связана с энергией электрона:

$$k^2=-\frac{2m_eW}{\hbar^2}, \qquad (3.81)$$

a_s — коэффициенты, определяемые из условия нормировки волновой функции. При значении квантового числа n = 1 имеем

Репозиторий БГАТУ

основное состояние электрона (атома), описываемое волновой функцией:

$$\psi_1(r) = a_1 e^{-k_1 r}, \qquad (3.82)$$

где постоянная a_1 находится из условия нормировки (3.24): $a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}$.

Как следует из выражения (3.82), волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода представляет собой экспоненту, что изображено на рисунке 3.12а. Функция $\psi_1(r)$ имеет максимум в начале координат. Но это не означает, что вблизи начала координат, где находится ядро атома, будет максимальной вероятность нахождения электрона. Действительно, вероятность dP нахождения частицы в объеме dV равна $|\psi(r)|^2 dV$. Возьмем в качестве элемента объемом dV сферический слой радиусом r элементарной толщиной dr. Тогда $dV = 4\pi r^2 dr$. Вероятность нахождения электрона в этом объеме:

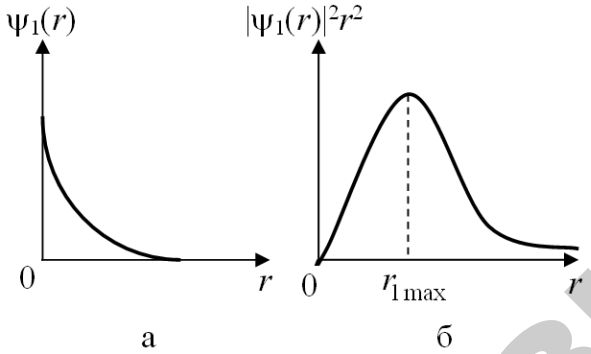

Рис. 3.12. Электрон в атоме водорода: *а* — график волновой функции основного состояния электрона; *б* — график функции, определяющей зависимость вероятности нахождения электрона в основном состоянии от расстояния r

$$dP = |\psi(r)|^2 dV = a_1^2 e^{-2k_1 r} 4\pi r^2 dr,$$

т. е. она определяется функцией $r^2 e^{-2k_1 r}$. График этой функции изображен на рис. 3.12б. Как показывает этот график, функция

$r^2|\psi(r)|^2$, определяющая пространственное распределение электрона в невозбужденном состоянии атома водорода, равна нулю в начале координат (так как $r = 0$) и экспоненциально стремится к нулю при $r \to \infty$. При определенном значении $r = r_{1\max}$ эта волновая функция имеет максимум. Чтобы определить это значение аргумента r, необходимо приравнять к нулю производную функции $r^2 e^{-2k_1 r}$:

$$2re^{-2k_1 r} - 2k_1 r^2 e^{-2k_1 r} = 0.$$

После сокращения на $2re^{-2k_1 r}$ получим, используя обозначения (3.81) и (3.79) для $n = 1$:

$$r_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}, \; k_1 = \frac{1}{r_1}, \; \psi_1(r) = a_1 e^{-\frac{r}{r_1}}, \qquad (3.83)$$

где величина r_1 совпадает со значением выражения (3.12) при $n = 1$, а значит, с боровским радиусом r_1. Таким образом, максимум вероятности нахождения электрона в невозбужденном атоме водорода приходится на радиус первой боровской орбиты.

Центральносимметричная волновая функция электрона, находящегося в первом возбужденном состоянии, получается из выражения (3.80) при значении квантового числа $n = 2$ и использовании рекуррентной формулы для коэффициентов ряда a_s:

$$\psi_2(r) = a_1 e^{-k_2 r}(1 - k_2 r). \qquad (3.84)$$

На рисунке 3.13а показан график функции $\psi_2(r)$, на рис. 3.13б — функции $r^2|\psi_2(r)|^2$, определяющей плотность вероятности нахождения электрона в сферическом слое радиусом r. Из этих графиков следует, что пространственное распределение при $n = 2$ довольно сложное: вероятность обнаружить электрон вблизи точки $r = 0$ равна нулю, она асимптотически стремится к нулю при $r \to \infty$ и имеет максимальное значение при определенном $r_{2\max}$.

Волновая функция $\psi(r)$, записанная выражением (3.80), является волновой функцией одного из возможных состояний электрона в атоме водорода, имеющего определенное значение энергии W. Это простейшее состояние с данным значением энергии, характеризуемое сферически симметричным движением электрона. Но решением уравнения Шредингера (3.75) являются также определенные волно-

Репозиторий БГАТУ

вые функции $\psi(r, \theta, \varphi)$, зависящие от трех координат. Для нахождения этих волновых функций необходимо решить уравнение (3.75), которое с учетом формулы (3.77) запишется следующим образом:

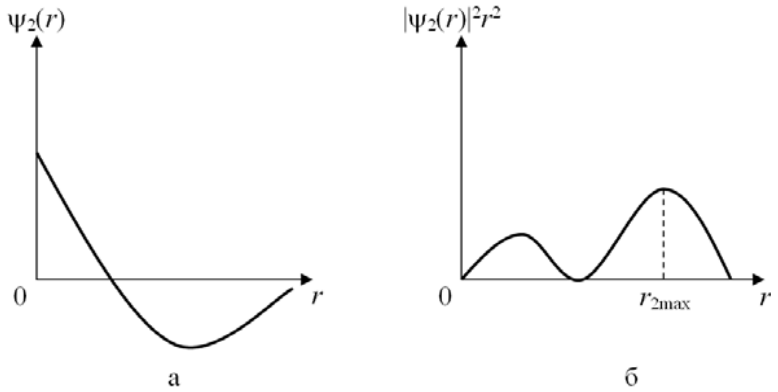

Рис. 3.13. Электрон атома водорода: *а* — график волновой функции электрона в первом возбужденном состоянии, определяемом квантовыми числами $n = 2$, $l = 0$; *б* — график зависимости функции, определяющей вероятность нахождения электрона в указанном состоянии, от расстояния r до ядра атома

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\Delta_{\theta\varphi}\right)\psi-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi=W\psi\,. \qquad (3.85)$$

Вид части оператора Лапласа, зависящей от углов θ и φ, т. е. $\Delta_{\theta\varphi}$ следует из выражения (3.77). В этом общем случае решение уравнения Шредингера (3.85) разыскивается в виде произведения двух функций: одна из них — радиальная функция $R(r)$ — зависит только от координаты r, а другая — угловая функция $Y(\theta,\varphi)$ — от угловых переменных θ и φ:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi). \qquad (3.86)$$

В ходе решения уравнения (3.85) при подстановке в него формулы (3.86) оказывается, что радиальная функция $R(r)$ зависит не только от r, но и от целочисленного параметра n_r, который был назван радиальным квантовым числом. Другими словами, радиальная функция квантуется по радиальному квантовому числу n_r (подобно тому, как центральносимметричная волновая функция $\psi(r)$ квантуется по квантовому числу n). Последовательность выражений радиальной функции $R_{n_r}(r)$ нумеруется квантовым числом $n_r = 1, 2, 3, \ldots$.

При решении уравнения Шредингера (3.64) также обнаруживается, что угловая функция $Y(\theta,\varphi)$ является известной в математике сферической функцией, которая зависит от угловых координат θ, φ и от двух целочисленных параметров: l и m, которые также являются квантовыми числами. При этом квантовое число n, определяющее значение энергии электрона в атоме водорода по формуле (3.79):

$$n = n_r + l. \qquad (3.87)$$

Таким образом, волновая функция электрона в атоме водорода, являясь функцией трех координат (например, r, θ, φ), зависит от трех целочисленных параметров: n_r, l, m либо с учетом связи (3.87) n, l, m. Обычно пользуются тройкой квантовых чисел n, l, m, так как энергия выражается через n. Окончательно приходим к выводу, что волновая функция электрона в атоме водорода $\psi = \psi_{n,l,m}$, а вместе с ней и состояние электрона определяются значениями трех квантовых чисел:

— главного квантового числа n, принимающего значения $n = 1, 2, 3, \ldots$;

— орбитального (или азимутального) квантового числа l, которое, как следует из равенства (3.87), для каждого данного n принимает значения $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$; число возможных значений равно n;

— магнитного квантового числа m, которое для каждого данного l принимает значения $m = -l, -l + 1, -l + 2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, l$; число возможных значений для данного значения l равно $2l + 1$.

Каждому значению главного квантового числа n соответствует определенное значение (полной механической) энергии электрона в атоме водорода согласно формуле (3.79). Но состояние электрона определено, если заданы все три квантовых числа n, l, m, от которых зависит волновая функция состояния (без учета спина). Если $n = 1$, то, как видно из равенства (3.87), орбитальное квантовое число l может иметь единственное значение $l = 0$ (возможные значения $n_r = 1, 2, 3, \ldots$). Это, в свою очередь, ведет к тому, что магнитное квантовое число m имеет тоже только одно значение $m = 0$. В этом случае ($n = 1$) существует только одно состояние электрона, оно описывается волновой функцией ψ_{100}, которая была получена как центральносимметричное решение уравнения Шредингера $\psi_1(r)$ и имеет вид (3.82), т. е. $\psi_{100} \equiv \psi_1(r)$. Если же $n > 1$, то возможны как

Репозиторий БГАТУ

состояние с $l = 0$, так и состояния с $l \neq 0$, т. е. возможны состояния со всеми значениями орбитального квантового числа l, удовлетворяющими неравенству $0 \le l \le n - 1$, это значит, $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ — всего n значений. Волновая функция состояния с $l = 0$ является центральносимметричным решением уравнения Шредингера (3.80), т. е. $\psi_{n00} = \psi(r)$. Каждому значению $l \neq 0$ соответствует определенный класс волновых функций $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$, а значит, состояний электрона, характеризуемых выбранными значениями n и l. Эти состояния отличаются значениями магнитного квантового числа m, которое может при этом принимать следующие значения: $m = -l, -l + 1, -l + 2, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, l$ — всего $2l + 1$ значение.

В атомной физике принято состояния электрона с определенными значениями орбитального квантового числа l обозначать маленькими латинскими буквами: состояние электрона с $l = 0$ принято называть s-состоянием, состояние с $l = 1$ называется p-состоянием, при $l = 2$ — d-состояние и т. д., как показано ниже:

$$\begin{array}{cccccccc} l = 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ s & p & d & f & g & h & i & k \end{array} \qquad (3.88)$$

Численное значение главного квантового числа n ставится перед буквой, обозначающей значение орбитального квантового числа l. Например, основное состояние электрона в атоме соответствует значениям $n = 1$, $l = 0$, оно обозначается $1s$; состояние с квантовыми числами $n = 3$, $l = 2$ обозначается $3d$ и т. д.

Энергия электрона в атоме водорода (или водородоподобной системе) зависит только от главного квантового числа n и не зависит от квантовых чисел l, m. Состояние же электрона определяется набором трех квантовых чисел n, l, m. Количество различных возможных сочетаний этих квантовых чисел при фиксированном значении n больше единицы за исключением случая $n = 1$, когда единственно возможное состояние — 1, 0, 0. Такое явление, когда одному значению энергии частицы соответствует несколько различных ее состояний, называется вырождением. Различные состояния, соответствующие одному значению энергии частицы, называются вырожденными состояниями. Число вырожденных состояний частицы, соответствующих одному значению ее энергии, называется кратностью вырождения энергетического уровня.

Найдем кратность вырождения энергетических уровней электрона в атоме водорода (без учета спина). Для этого надо найти, сколько значений m существует для всех возможных l при данном

значении n. Искомый результат получается при суммировании числа различных значений m для каждого l, т. е. числа $2l + 1$, для всех l от 0 до значения $n - 1$:

$$\kappa = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \qquad (3.89)$$

(сумма вычисляется по формуле суммы арифметической прогрессии).

Ниже приведена таблица возможных значений квантовых чисел n, l, m и кратности вырождения энергетических уровней водородоподобных систем для $n \le 4$ с использованием обозначений состояний (3.88).

n	l	m	состояние	число состояний	кратность вырождения
1	0	0	$1s$	1	1
2	0	0	$2s$	1	4
2	1	0, ±1	$2p$	3	
3	0	0	$3s$	1	9
3	1	0, ±1	$3p$	3	
3	2	0, ±1, ±2	$3d$	5	
4	0	0	$4s$	1	16
4	1	0, ±1	$4p$	3	
4	2	0, ±1, ±2	$4d$	5	
4	3	0, ±1, ±2, ±3	$4f$	7	

Как можно заметить, в атоме водорода и в водородоподобных системах невырожденным является только уровень, соответствующий главному квантовому числу $n = 1$, т. е. уровень основного состояния электрона. Уровень с $n = 2$ вырожден четырехкратно, так как этому значению энергии могут соответствовать состояние с орбитальным квантовым числом $l = 0$ ($m = 0$) и три состояния с $l = 1$ и т. д. На рисунке 3.14 дана схема энергетических уровней атома водорода, на которой в отличие от схемы, изображенной на рис. 3.4, показаны уровни энергии с различными значениями орбитального квантового числа l.

Излучение (или поглощение) кванта света происходит при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой (остается в силе второй постулат Бора). При этом, как доказывается в квантовой механике, переходы возможны только при изменении орбитального квантового числа на единицу, т. е. при условии:

Репозиторий БГАТУ

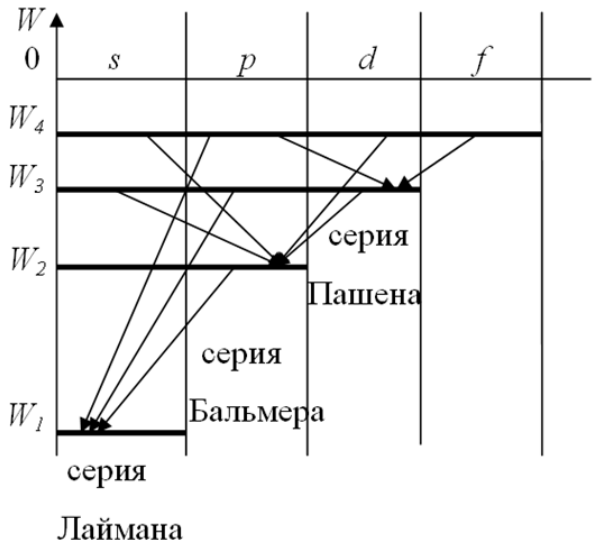

Рис. 3.14. Диаграмма энергетических уровней атома водорода с учетом значения орбитального квантового числа *l*

$$\Delta l = \pm 1 \qquad (3.90)$$

(Δl — изменение l). Условие (3.90) называется правилом отбора. На рис. 3.14 стрелками показаны возможные переходы, в результате которых излучаются линии спектра атома водорода, сгруппированные по сериям.

4.2.2.7. Орбитальный момент импульса и орбитальный магнитный момент электрона в атоме водорода

Момент импульса является важной характеристикой частицы или системы. Электрон в атоме водорода наряду с определенным значением (полной механической) энергии W имеет при своем движении определенный момент импульса $\vec{L}$, который называется орбитальным моментом импульса или механическим моментом. Как показывается в квантовой механике, его численное значение является решением следующего уравнения:

$$-\hbar^2 \Delta_{\theta\varphi} \psi = L^2 \psi\,, \qquad (3.91)$$

где $\Delta_{\theta\varphi}$ — часть оператора Лапласа, зависящая от сферических углов θ, φ (см. формулу (3.77)); ψ — волновая функция электрона. При решении дифференциального уравнения (3.91) определяются возможные значения (орбитального) момента импульса электрона $\vec{L}$. Оказывается, что они выражаются через орбитальное квантовое число l следующим образом:

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1),\ L = \hbar\sqrt{l(l+1)},\ l = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (3.92)$$

Таким образом, орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода квантуется по орбитальному квантовому числу l и, следовательно, при каждом определенном значении энергии электрона, т. е. при каждом определенном значении главного квантового числа n, может иметь одно из n различных значений, определяемых формулами (3.92).

Модуль вектора $\vec{L}$, записанный формулами (3.92), еще не определяет полностью этого вектора, так как остается неопределенным его направление. В квантовой механике доказывается, что одновременно с величиной L вектора момента импульса может быть определена проекция этого вектора *только на одно выделенное направление*, которое обычно выбирают за ось *OZ*.

Проекция вектора орбитального момента импульса на ось *OZ*:

$$L_z = \hbar m\,, \qquad (3.93)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$ является магнитным квантовым числом.

Таким образом, проекция орбитального момента импульса на выделенное направление квантуется по магнитному квантовому числу и при определенной величине момента импульса (т. е. при определенном значении орбитального квантового числа l) может иметь одно из $2l + 1$ значений, определяемых формулой (3.93). Под выделенным направлением (ось *OZ*) часто понимают направление внешнего магнитного поля, в которое помещен атом. Квантовое число m получило название магнитного квантового числа, так как оно определяет проекцию орбитального момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Модуль вектора $\vec{L}$ и его проекция L_z однозначно не определяют этот вектор. Для однозначного определения направления вектора необходимо знать еще одну его проекцию на некоторое независимое направление (например, на ось *OX*). По законам квантовой механики

Репозиторий БГАТУ

в каждом энергетическом состоянии электрона можно однозначно определить величину (модуль) вектора орбитального момента импульса $\vec{L}$, т. е. L, и только одну проекцию этого вектора L_z; проекции этого вектора на два других независимых направления в пространстве остаются неопределенными. Поэтому для каждого значения квантового числа l направление вектора $\vec{L}$ определяется с точностью до проекции лишь на одну выделенную ось (ось OZ). На рисунке 3.15 показаны возможные значения проекции L_z при $l = 2$. В этом случае $m = -2, -1, 0, 1, 2$, и соответственно, согласно формуле (3.93) $L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$. Для каждого из перечисленных значений проекции момента импульса на ось OZ вектор $\vec{L}$ может иметь произвольное направление по образующей конуса высотой L_z.

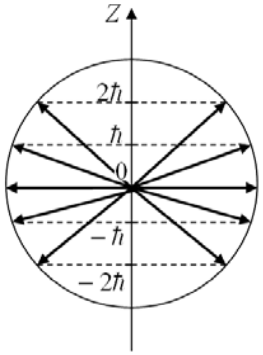

Рис. 3.15. Возможные значения L_z — проекции на ось Z орбитального механического момента электрона — при значении орбитального квантового числа $l = 2$

Максимальное значение проекции L_z меньше величины вектора L. Действительно, $L_{z\max} = \hbar^2 l^2$, в то время как согласно формуле (3.92) $L^2 = \hbar^2 l^2 + \hbar^2 l$. Это, с точки зрения классической физики, несоответствие связано с неопределенностью проекций L_x и L_y при определенном выборе L и L_z.

В курсе электродинамики (см. часть II, модуль 5) были рассмотрены в рамках классической теории орбитальный момент импульса электрона, движущегося в атоме, и соответствующий ему магнитный орбитальный момент p_m. Было получено гиромагнитное отношение,

которое показывает, что магнитный момент электрона, движущегося по плоской орбите, направлен в сторону, противоположную моменту импульса электрона (механическому моменту электрона), и отношение величин указанных моментов равно $\frac{e}{2m_e}$. Это значит, что гиромагнитное отношение для орбитальных моментов:

$$\gamma = \frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m_e}, \tag{3.94}$$

откуда

$$p_m = -\frac{e}{2m_e} L \cdot \tag{3.95}$$

Очевидно, что для проекций этих моментов справедливо аналогичное соотношение:

$$p_{mz} = -\frac{e}{2m_e} L_z \cdot \tag{3.96}$$

Переход к квантовой механике сохраняет соотношения (3.95) и (3.96) между орбитальными механическим и магнитным моментами и их проекциями на выделенное направление OZ. С учетом выражений (3.92) и (3.93) из двух последних равенств получаем возможные значения модуля орбитального магнитного момента электрона и проекции орбитального магнитного момента на ось OZ:

$$|p_m| = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}; \tag{3.97}$$

$$p_{mz} = -\frac{e\hbar}{2m_e} m \cdot \tag{3.98}$$

Постоянная величина

$$\frac{e\hbar}{2m_e} = \mu_B \tag{3.99}$$

называется магнетоном Бора, $\mu_B = 9{,}274 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл. Пользуясь этой постоянной, можно записать, что величина орбитального маг-

Репозиторий БГАТУ

нитного момента электрона в атоме водорода выражается через орбитальное квантовое число l следующим образом:

$$\left|p_m\right| = \mu_B \sqrt{l(l+1)}\,,\ l = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \qquad (3.100)$$

проекция орбитального магнитного момента электрона на выделенное направление выражается через магнитное квантовое число:

$$p_{mz} = \mu_B m,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l. \qquad (3.101)$$

Орбитальные механический и магнитный моменты электрона в атоме, $\vec{L}$ и $\vec{p}_m$, определяются экспериментально при наблюдении спектра излучения атома. Основанием для этого служат следующие рассуждения.

Из электродинамики известно, что замкнутый электрический ток во внешнем магнитном поле, а значит, движущаяся в магнитном поле по замкнутой траектории заряженная частица, обладают дополнительной энергией:

$$\Delta W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}\,, \qquad (3.102)$$

где $\vec{B}$ — вектор индукции магнитного поля. Чтобы получить выражение (3.102), необходимо вспомнить, что момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле, $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$. Он устанавливает свободный контур в магнитном поле таким образом, чтобы вектор магнитного момента контура $\vec{p}_m$ был направлен по индукции магнитного поля $\vec{B}$. Чтобы отклонить контур от этого положения равновесия на угол $d\varphi$, необходимо выполнить элементарную работу

$$\delta A = M d\varphi = p_m B \sin\varphi d\varphi,$$

которая идет на увеличение энергии контура в магнитном поле, $\delta A = dW$. Интегрируя выражение для δA, находим, что:

$$A = \Delta W = -p_m B \cos\varphi + \text{const}.$$

Если положить const = 0, получим выражение (3.102).

Предположим, что атомарный водород помещен во внешнее магнитное поле индукции $\vec{B}$. Направим вдоль магнитного поля ось OZ. Тогда энергия взаимодействия электрона с магнитным полем запишется на основании формулы (3.102):

$$\Delta W = -p_{mz} B, \qquad (3.103)$$

где p_{mz} — проекция орбитального магнитного момента электрона на направление внешнего магнитного поля. Согласно равенству (3.101) эта проекция принимает дискретный ряд значений, что ведет к квантованию энергии взаимодействия электрона с магнитным полем. А именно: электрон, обладая моментом импульса $\vec{L}$ и соответствующим магнитным орбитальным моментом $\vec{p}_m$, приобретает в магнитном поле дополнительную энергию ΔW:

$$\Delta W = \mu_B m B,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l. \qquad (3.104)$$

Из выражения (3.104) следует, что если в отсутствие внешнего магнитного поля энергия электрона не зависит от магнитного квантового числа m, то при наличии магнитного поля каждый уровень энергии W_n электрона в атоме водорода расщепляется на уровни (их еще называют подуровнями), соответствующие энергиям:

$$W_{nm} = W_n + \Delta W = W_n + m\mu_B B, \qquad (3.105)$$

количество значений энергии W_{nm} равно числу различных значений квантового числа m при данном значении главного квантового числа n. Это число равно $2l + 1$ при максимально возможном значении l, т. е. при $l = n - 1$. Получаем, что число уровней энергии, на которые расщепляется в магнитном поле первоначальный уровень энергии электрона в атоме водорода (или водородоподобной системе), равно $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$. В многоэлектронных атомах, т. е. в атомах, содержащих более одного электрона, энергия каждого электрона зависит от двух квантовых чисел — n и l, $W = W_{nl}$. В этом случае при помещении вещества в магнитное поле также происходит расщепление энергетических уровней согласно выражению (3.105). В результате снимается вырождение по m, и каждый энергетический уровень расщепляется на $2l + 1$ подуровней с соответствующим значением l, т. е. получаем возможные значения энергии электрона $W_{nlm} = W_{nl} + m\mu_B B$. На рисунке 3.16 показано расщепление энергетического уровня электрона в состоянии с определенным значением n и $l = 2$ на $2l + 1 = 5$ уровней при помещении атома в магнитное поле. Как следует из формулы (3.105), энергетическое расстояние между соседними подуровнями пропорционально индукции магнитного поля, зависит от магнитного квантового числа m и не зависит от квантовых чисел n и l.

Репозиторий БГАТУ

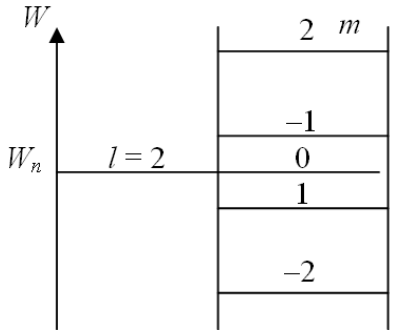

Рис. 3.16. Расщепление энергетического уровня электрона, находящегося в состоянии с орбитальным квантовым числом $l = 2$, при помещении атома в магнитное поле

Расщепление энергетических уровней атома в магнитном поле оказывает влияние на спектр атома. В присутствии магнитного поля при переходах электрона с подуровня m_1 уровня n на подуровень m_2 уровня k излучается квант света (электромагнитного излучения) частоты:

$$\nu'_{nk} = \frac{W_{nm_1} - W_{km_2}}{h} = \frac{W_n - W_k}{h} + \mu_B B(m_1 - m_2) = \nu_{nk} + \Delta m \mu_B B . \quad (3.106)$$

При выводе формулы (3.106) были использованы соотношения (3.7) и (3.105). В выражении (3.106) ν_{nk} — частота излучения в отсутствие внешнего магнитного поля, $\Delta m = m_1 - m_2$ — разность магнитных квантовых чисел соответствующих подуровней, которая, согласно правилу отбора для магнитного квантового числа, может быть равной только 0, ±1. С учетом этого приходим к выводу, что при помещении излучающих атомов во внешнее однородное магнитное поле линии спектра должны расщепляться: вместо одной линии частоты ν_{nk} должны наблюдаться три линии частот $\nu_{nk} + \mu_B B$, ν_{nk}, $\nu_{nk} - \mu_B B$. Это явление наблюдалось впервые в 1894 году голландским физиком Зееманом и получило название нормального эффекта Зеемана. Измеряя частоты излучения атомов водорода, помещенных во внешнее однородное магнитное поле, вычисляют магнетон Бора μ_B и, согласно формуле (3.101), проекцию магнитного момента на направление магнитного поля.

4.2.2.8. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона

В опытах, поставленных Штерном и Герлахом в 1924 году, пучки нейтральных атомов (в большинстве случаев атомов первой группы периодической системы, т. е. атомов с одним валентным электроном) пропускались через область, в которой было создано неоднородное магнитное поле. Неоднородность магнитного поля достигалась с помощью особой формы полюсов электромагнита. На рисунке 3.17 показаны полюса электромагнита, образующие сильное неоднородное магнитное поле в направлении оси *OZ*.

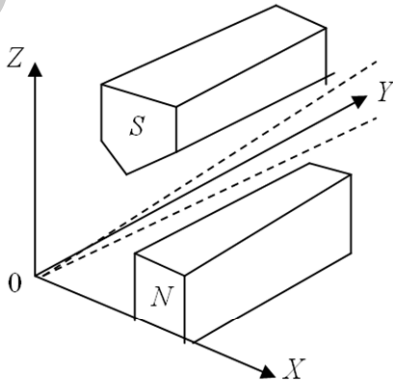

Рис. 3.17. Схема экспериментальной установки в опытах Штерна и Герлаха

Пучок атомов двигался вдоль оси *OY*. Сила, действующая на атомы вдоль оси *OZ* со стороны магнитного поля

$$F = F_z = -\frac{d}{dz}(\Delta W) = p_{mz}\frac{dB}{dz}, \quad (3.107)$$

возникает именно из-за неоднородности магнитного поля, так как $\frac{dB}{dz} \neq 0$. (В однородном магнитном поле нейтральный атом ориентируется своим магнитным моментом $\vec{p}_m$ по магнитному полю $\vec{B}$, но не изменяет своей траектории.) Зависимость силы (3.107) от величины проекции орбитального магнитного момента должна привести к расщеплению пучка атомов на столько частей, сколько воз-

Репозиторий БГАТУ

можных проекций имеет магнитный момент $\vec{p}_m$. Если этот магнитный момент вызван наличием у заряженной частицы (электрона в атоме) орбитального момента импульса $\vec{L}$, то пучок должен расщепиться на $2l + 1$ компоненту.

Рассмотрим результаты опытов Штерна и Герлаха, проведенных с атомами водорода. Если атомы водородного пучка находились в невозбужденном состоянии ($n = 1$, $l = 0$), то пучок не должен был расщепляться, так как в этом случае существует единственное значение магнитного квантового числа $m = 0$. Если же в пучке присутствуют атомы в p-состоянии ($l = 1$), то ожидалось расщепление пучка на три компоненты в соответствии с $m = 0, \pm 1$. Но опыт показал, что пучок невозбужденного атомарного водорода расщепляется на две части (две компоненты). Этот неожиданный результат привел к пересмотру некоторых положений квантовой механики. Детальный анализ показал, что электрон (или другая микрочастица) наряду с орбитальным моментом импульса $\vec{L}$, обязанным движению в атоме, обладает еще собственным моментом импульса, который может быть обусловлен вращением электрона вокруг собственной оси. Собственный момент импульса электрона был назван спином (от английского слова spin — верчение), он обозначается $\vec{S}$. В дальнейшем отказались от представления о вращении частицы вокруг собственной оси и считают, что спин является векторной величиной, характеризующей частицу так же, как ее скалярные характеристики: масса, заряд.

Соответственно спину $\vec{S}$ электрон обладает собственным магнитным моментом $\vec{p}_{ms}$. В опытах Штерна и Герлаха, проводимых с невозбужденными атомами ($l = 0$, $m = 0$), не имеющими орбитального магнитного момента ($\vec{p}_m = 0$), происходило взаимодействие собственного (спинового) магнитного момента атома с неоднородным магнитным полем. В результате этого взаимодействия произошло разделение пучка атомов на две части. Это означает, как следует из формулы (3.107), в которой p_{mz} необходимо заменить на p_{msz}, что число возможных проекций собственного магнитного момента на выделенное направление (внешнее магнитное поле вдоль оси OZ) равно 2. Обозначим квантовое число спина, т. е. собственного момента импульса, как s, которое обычно называют спи-

новым квантовым числом. Так же, как для орбитального момента импульса, число возможных проекций спина на выделенное направление равно $2s + 1$. Приравняв эту сумму экспериментальному значению, будем иметь:

$$2s + 1 = 2,$$

откуда

$$s = \frac{1}{2}. \tag{3.108}$$

Таким образом, спиновое квантовое число электрона имеет единственное, причем полуцелое, значение, равное $\frac{1}{2}$. Величина спина (величина собственного момента импульса) находится по формуле, аналогичной выражениям (3.92):

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}} = \hbar\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.109}$$

и тоже имеет единственное значение.

Квантовое число проекции спина, т. е. проекции собственного момента импульса на выделенное направление (ось OZ), называется магнитным спиновым квантовым числом и обозначается как m_s. Как показали опыты Штерна и Герлаха, m_s принимает два возможных значения. Учитывая, что максимальное значение магнитного спинового числа должно быть равно соответствующему значению квантового числа собственного момента импульса, т. е. s (точно так же, как для орбитального момента импульса $m_{\max} = l$), в данном случае будем иметь $m_{s\max} = s = \frac{1}{2}$. Из тех же соображений $m_{s\min} = -s = -\frac{1}{2}$ (так же, как $m_{\min} = -l$). Так как магнитные квантовые числа принимают значения через единицу, все возможные значения магнитного спинового квантового числа:

$$m_s = \pm\frac{1}{2}. \tag{3.110}$$

Репозиторий БГАТУ

Проекция спина на ось *OZ*, величина S_z, определяется магнитным квантовым числом m_s точно так же, как для орбитального момента $L_z = \hbar m$:

$$S_z = \hbar m_s = \pm\frac{1}{2}\hbar, \qquad (3.111)$$

т. е. имеет два возможных значения.

Перейдем к собственному (спиновому) магнитному моменту электрона $\vec{p}_{ms}$ и его проекции на ось *OZ* (на внешнее магнитное поле) p_{msz}. Связь между моментом импульса (механическим моментом) и магнитным моментом определяется, как известно, гиромагнитным отношением γ, которое для орбитальных моментов: $\gamma = -\frac{e}{2m_e}$ (см. формулу (3.94)). Штерн и Герлах, зная величину расщепления пучка электронов в известном неоднородном магнитном поле, вычислили проекцию спинового магнитного момента p_{msz}. Найденная величина указывала на то, что гиромагнитное отношение для спиновых моментов (магнитного и механического) в два раза больше, чем соответствующее значение для орбитальных моментов:

$$\gamma_s = \frac{p_{ms}}{S} = -\frac{e}{m_e}. \qquad (3.112)$$

Именно на такое значение гиромагнитного отношения спиновых моментов указывали также опыты Эйнштейна и де Гааза, проведенные с ферромагнитными веществами. Используя экспериментально установленное значение гиромагнитного отношения спиновых моментов (3.112), а также формулы (3.109) и (3.99), находим модуль спинового магнитного момента электрона:

$$\left|p_{ms}\right| = \frac{e}{m_e}S = \frac{e}{m_e}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mu_B\sqrt{3}. \qquad (3.113)$$

На основании (3.112) и (3.111) находим проекцию спинового магнитного момента электрона на ось *OZ*:

$$p_{msz} = -\frac{e}{m_e}S_z = -\frac{e}{m_e}\hbar m_s = \pm\frac{e\hbar}{2m_e} = \pm\mu_B. \qquad (3.114)$$

Таким образом, проекция спинового магнитного момента на ось *OZ* равна по величине одному магнетону Бора μ_B. Этот результат был экспериментально подтвержден точными измерениями Штерна и Герлаха.

Наличие спина приводит к тому, что состояние электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами: n — главное квантовое число, l — орбитальное квантовое число, m — магнитное квантовое число, m_s — спиновое магнитное квантовое число, показывающее проекцию спинового момента импульса (а значит, и спинового магнитного момента) на выделенное направление и принимающее, в соответствии с равенством (3.110), два возможных значения. Как показывает формула (3.89), если состояние электрона в водородоподобной системе характеризовать квантовыми числами n, l, m, то кратность вырождения, т. е. количество различных состояний электрона при определенном значении главного квантового числа n, равно n^2. С учетом спина электрона и двух возможных значений спинового магнитного числа m_s количество возможных состояний электрона для данного n удваивается и становится равным $2n^2$. Но нельзя сказать, что все $2n^2$ состояний будут соответствовать одному и тому же значению энергии, так как наличие спинового момента электрона ведет к частичному снятию вырождения. Причина этого в общих чертах объясняется ниже.

Рассмотрим электрон в атоме водорода (или водородоподобной системе), находящийся в состоянии с $n > 1$, $l \neq 0$. С орбитальным моментом импульса электрона $\vec{L}$ связан соответствующий магнитный момент $\vec{p}_m$, который образует магнитное поле индукции $\vec{B}_L$. Проекция спина электрона на направление этого магнитного поля может принимать два значения (3.110), соответствующие квантовому числу $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Энергия взаимодействия спинового магнитного момента с орбитальным полем $\vec{B}_L$ в этих двух случаях разная, что ведет к различным энергиям электрона в двух указанных состояниях. Поэтому уровни энергии с неравным нулю значением орбитального квантового числа l являются раздвоенными. Как видим, причиной такого расщепления уровней является спин-орбитальное взаимодействие. Это расщепление энергетических уровней называется тонкой структурой уровней. Его численное

Репозиторий БГАТУ

значение очень мало по сравнению с энергетическим расстоянием между уровнями.

Для обозначения различных энергетических уровней, соответствующих одному и тому же набору квантовых чисел n, l, вводится понятие полного момента импульса электрона. Полный момент импульса электрона в атоме представляет собой векторную сумму орбитального и спинового моментов импульса:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \qquad (3.115)$$

В квантовой механике существует особый, не совпадающий с классическим, закон сложения моментов импульса. Если, например, частица имеет момент импульса $\vec{L}_1$, характеризуемый квантовым числом $l_1 = 0, 1, \ldots, l_{1\max}$, и момент импульса $\vec{L}_2$ (или $\vec{L}_2$ — момент импульса другой частицы), принимающий значения в соответствии с квантовым числом $l_2 = 0, 1, \ldots, l_{2\max}$, то суммарный момент импульса частицы (или системы частиц) $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ квантуется по квантовому числу l, которое принимает значения через единицу от $l = |l_{1\max} - l_{2\max}|$ до $l = l_{1\max} + l_{2\max}$:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)};$$

$$l = |l_{1\max} - l_{2\max}|, |l_{1\max} - l_{2\max}| + 1, \ldots, |l_{1\max} + l_{2\max}|. \qquad (3.116)$$

Используя общее правило сложения моментов импульса (3.116) для нахождения полного момента импульса электрона (3.115), получим, что полный момент импульса $\vec{J}$ электрона в атоме принимает возможные значения, выраженные через квантовое число j:

$$J = \hbar\sqrt{j(j+1)}, \qquad (3.117)$$

где

$$j = \left| l - \frac{1}{2} \right|,\ l + \frac{1}{2}. \qquad (3.118)$$

Таким образом, квантовое число j, которое иногда называют внутренним квантовым числом, при $l = 0$ имеет единственное значение $j = \frac{1}{2}$, при $l \neq 0$ оно принимает два значения.

Соответственно, проекции полного момента импульса электрона на определенное направление, т. е. J_z, определяется как

$$J_z = \hbar m_j, \qquad (3.119)$$

где квантовое число

$$m_j = \pm j, \pm (j-1), \pm (j-2), \ldots, \pm \frac{1}{2}, \qquad (3.120)$$

принимает $2j + 1$ значение.

При обозначении состояний электрона в атоме, соответствующих определенным значениям квантовых чисел n и l, учитывается также значение внутреннего квантового числа j. Например, состояние с $n = 2$, $l = 1$ и $j = l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ обозначается $2p_{1/2}$, состояние с теми же значениями главного и орбитального чисел, но с $j = l + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ обозначается как $2p_{3/2}$.

Уравнение Шредингера (3.75) для электрона в атоме водорода, при решении которого определяются волновая функция и возможные значения энергии электрона, не учитывает спин электрона. Поэтому выражение (3.79) для возможных значений энергии электрона не учитывает спин-орбитальное взаимодействие, а значит, тонкую структуру энергетических уровней. Волновое уравнение, учитывающее спин электрона (так называемое релятивистское волновое уравнение), было предложено Дираком в 1928 году. Его решение не совпадает с формулой (3.79), а дает для возможных значений энергии электрона, находящегося в водородоподобной системе и обладающего спином, следующее выражение:

$$W_{nj} = -AZ^2 \frac{1}{n^2} - \frac{\alpha AZ^2}{n^2}\left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right), \qquad (3.121)$$

где A — энергетическая постоянная, определяемая формулой (3.16). Первое слагаемое в формуле (3.121) представляет собой обычное выражение для энергии водородоподобной системы, соответст-

Репозиторий БГАТУ

вующее уравнению Шредингера (и следующее из теории Бора). Второе слагаемое в уравнении (3.121) учитывает тонкую структуру энергетических уровней. Величина $\alpha = \frac{e^2}{\hbar^2} = 137$ называется постоянной тонкой структуры. Как показывает формула (3.121), энергия водородоподобной системы с учетом тонкой структуры зависит не только от главного квантового числа n, но и от j. На рисунке 3.18 показана схема спин-орбитального расщепления энергетического уровня атома водорода при значении главного квантового числа $n = 2$. Уровень $2s$ не расщепляется, так как в этом случае отсутствует орбитальное магнитное поле B_L и квантовое число j имеет единственное значение $j = \frac{1}{2}$. Уровень $2p$, который соответствует значению орбитального квантового числа $l = 1$, расщепляется на два подуровня: $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$.

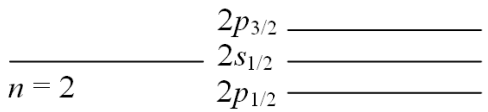

Рис. 3.18. Спин-орбитальное расщепление энергетического уровня атома водорода при значении главного квантового числа $n = 2$

4.2.2.9. Многоэлектронные атомы. Периодическая система элементов

Изложенное выше указывает на то, что электроны атома находятся в конкретных квантовых состояниях, которые определяются набором четырех квантовых чисел, например, n, l, m, m_s (в качестве четверки квантовых чисел можно выбрать другой набор, например, n, l, j, m_j). Рассмотрим, в каких состояниях находятся электроны невозбужденного многоэлектронного атома. С точки зрения классической физики ожидается, что все электроны невозбужденного атома должны занять уровень с наименьшей возможной энергией, т. е. нижайший энергетический уровень. Но опыт указывает на то, что с увеличением Z (количества электронов в атоме) происходит последовательное заполнение энергетических уровней атома. Не-

мецкий физик Вольфганг Паули выдвинул гипотезу о том, что в каждом квантовом состоянии в атоме может находиться только один электрон. Каждый следующий электрон невозбужденного атома занимает *нижайший из еще не заполненных уровней*. Был сформулирован *принцип Паули*: *в атоме или в другой квантовомеханической системе в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона*.

Принцип Паули вытекает из общих рассуждений, касающихся волновой функции. Рассмотрим систему, состоящую из двух электронов, находящихся в определенном силовом поле. Пусть положение первого электрона в пространстве характеризуется радиус-вектором $\vec{r}_1$, второго — $\vec{r}_2$. Энергетическое состояние первого электрона описывается волновой функцией $\psi_1(\vec{r}_1)$, второго — $\psi_2(\vec{r}_2)$. Для простоты будем считать, что эти электроны не взаимодействуют друг с другом, и зададимся вопросом, как записать волновую функцию системы двух электронов. Учитывая то, что квадрат модуля волновой функции определяет вероятность нахождения электрона в определенной области пространства, и принимая во внимание известное положение из теории вероятностей, что вероятность двух одновременных независимых событий равна произведению вероятностей каждого события в отдельности, можно ожидать, что волновая функция системы двух невзаимодействующих электронов равна произведению их волновых функций: $\psi_{12} = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)$. Это позволило бы отличить электрон с номером 1 от электрона с номером 2 в системе электронов. Но в микромире все частицы данного сорта (все электроны, все протоны и т. д.) неразличимы, они (без учета их состояния) полностью тождественны друг другу. Волновая функция системы двух электронов на основе их неразличимости может быть записана двумя способами:

$$\psi'_{12} = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) + \psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1),$$

или

$$\psi''_{12} = \psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) - \psi_1(\vec{r}_2)\psi_2(\vec{r}_1).$$

Каждое из написанных выше выражений состоит из двух частей: первое слагаемое описывает состояние системы, когда электрон 1

Репозиторий БГАТУ

находится в состоянии ψ_1, электрон 2 — в состоянии ψ_2, второе слагаемое описывает обратную ситуацию. Квадрат модуля каждой из функций ψ'_{12}, ψ''_{12} не изменяется при перестановке электронов, т. е при замене $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. С математической точки зрения волновая функция ψ'_{12} симметрична по отношению к перенумерации электронов, т. е. при замене $\vec{r}_1 \leftrightarrow \vec{r}_2$ она не изменяется; волновая функция ψ''_{12} при таком преобразовании меняет знак, т.е. она антисимметрична по отношению к перенумерации электронов. Предположим, что оба электрона находятся в одинаковом состоянии, это означает, что $\psi_1 = \psi_2$. В этом случае волновая функция системы ψ''_{12} обращается в нуль. Отсюда следует, что частицы, описываемые антисимметричными волновыми функциями, не могут быть в системе в одинаковых состояниях. Для частиц, состояние которых описывается симметричными волновыми функциями ψ'_{12}, такого ограничения не существует: в системе таких частиц в одном и том же состоянии может находиться любое количество частиц. Опыт показывает, что электроны и все другие частицы, имеющие полуцелый спин *s*, описываются антисимметричными волновыми функциями (электроны, протоны, нейтроны) и, следовательно, подчиняются принципу Паули. Частицы, имеющие целый спин или спин, равный нулю (фотоны, π-мезоны), не подчиняются принципу Паули (см. далее).

Применяя принцип Паули к электронам в атоме и выражение (3.89) с учетом спина электрона, приходим к выводу, что в атоме не может быть более $2n^2$ электронов, состояния которых соответствуют определенному значению главного квантового числа *n*. Электроны атома, имеющие одинаковое значение *n*, образуют один электронный слой. Максимальное количество электронов в слое равно $2n^2$. Электроны атома, состояния которых определяются одними и теми же значениями квантовых чисел *n*, *l*, образуют так называемую электронную конфигурацию, или оболочку. Оболочку составляют не более $2(2l + 1)$ электронов.

В состояниях с $n = 1$ могут находиться одновременно 2 электрона; эти состояния отличаются только проекцией спинового момента на выделенное направление $\left(m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Электронный слой с $n = 1$

принято называть К-слоем. Таким образом, в К-слое могут находиться 2 электрона, и их совокупность обозначается $1s^2$. Слой электронов, соответствующий главному квантовому числу $n = 2$, называется L-слоем. В нем в состоянии с $l = 0$ (*s*-состояние) могут быть, как всегда, два электрона, совокупность которых обозначается $2s^2$, в состоянии с $l = 1$ могут находиться $2(2l + 1) = 6$ электронов со следующими наборами квантовых чисел n, l, m, m_s: $\left(2, 1, 1, +\frac{1}{2}\right)$, $\left(2, 1, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(2, 1, 0, +\frac{1}{2}\right)$, $\left(2, 1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(2, 1, -1, +\frac{1}{2}\right)$, $\left(2, 1, -1, -\frac{1}{2}\right)$. Эти электроны образуют оболочку (электронную конфигурацию) $2p^6$ и т. д.

Распределение электронов в атоме на основании принципа Паули объясняет периодическую повторяемость свойств атомов в периодической системе Д. И. Менделеева. В периодической системе атомы расположены в порядке возрастания числа электронов в атоме, а значит (в силу нейтральности атома), в порядке увеличения числа *Z*, определяющего заряд ядра атома $+Ze$. В невозбужденном состоянии атома водорода *H* ($Z = 1$) единственный электрон находится в состоянии 1*s*, в котором $m = 0$, $m_s = +\frac{1}{2}$ или $m_s = -\frac{1}{2}$. Атом гелия имеет 2 электрона в состояниях 1*s*, в которых $m_s = \pm\frac{1}{2}$. В этом атоме К-слой целиком заполнен ($2n^2 = 2$ при $n = 1$). В связи с этим атомы *He* устойчивы, не вступают в соединения между собой или с другими атомами. В атоме лития (*Li*) три электрона: 2 электрона в К-слое в состояниях $1s^2$ и 1 электрон в L-слое в состоянии 2*s* и т. д. Подробнее этот вопрос изучается в курсе общей химии.

Для многоэлектронных атомов картина энергетических уровней более сложная, чем для водородоподобных систем. Энергия электрона в многоэлектронном атоме зависит (даже без учета спина электрона) от квантовых чисел *n* и *l*, т. е. $W = W_{nl}$. Объясняется это так называемым экранированием ядра, то есть тем, что каждый электрон в многоэлектронном атоме движется в электрическом поле ядра и остальных электронов. Это электрическое поле не является кулоновским (т. е. напряженность поля не пропорциональна $\frac{1}{r^2}$),

Репозиторий БГАТУ

но остается сферически симметричным. Это приводит к тому, что с ростом орбитального квантового числа l для данного n энергия состояния возрастает. На эту зависимость энергии электрона от орбитального квантового числа накладывается слабая ее зависимость от квантовых чисел m и m_s, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием.

4.2.2.10. Понятие явлений магнитного резонанса

Наличие магнитных моментов у электронов атомов, а также у ядерных частиц приводит к явлению магнитного резонанса, играющего большую роль в современных методах исследования строения и свойств вещества.

Магнитным резонансом называется избирательное поглощение энергии переменного электромагнитного поля веществом, находящимся в постоянном магнитном поле. Это явление связано с *вынужденными* переходами электрона (см. пункт 4.2.3.1.) между подуровнями, возникшими в результате зеемановского расщепления (см. пункт 4.2.2.7.) одного уровня под действием постоянного магнитного поля.

Магнитный резонанс, связанный с магнитными моментами электронов, называется электронным магнитным резонансом. Как известно, в постоянном магнитном поле напряженностью $\vec{H}$ вектор магнитного момента электрона $\vec{p}_m$ совершает прецессионное движение вокруг направления вектора $\vec{H}$ с некоторой частотой прецессии ν_0. Если кроме постоянного магнитного поля на атом действует еще переменное магнитное поле напряженности $\vec{H}'$, направление которого перпендикулярно направлению вектора $\vec{H}$, а частота изменяется, то это переменное магнитное поле создает вращающий момент $\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}'$, действующий на магнитный момент электрона $\vec{p}_m$. Под действием этого момента сил вектор $\vec{p}_m$ совершает прецессию вокруг направления вектора $\vec{B}' = \mu_0 \mu \vec{H}$, ориентация магнитного момента $\vec{p}_m$ относительно постоянного магнитного поля $\vec{H}$ изменяется, т. е. изменяется проекция p_{mH} магнитного момента электрона на направление постоянного магнитного поля. Если частота переменного поля совпадает с частотой прецессии ν_0 (магнитный резонанс), то изменение величины p_{mH} будет очень сильным, и это приведет к значительному изменению энергии электрона в магнитном поле $\vec{H}$, т. е. вызовет энергетические переходы между подуровнями зеемановского расщепления.

Магнитный резонанс может быть использован для определения частоты ν_0 прецессии, после чего можно определять магнитные моменты электронов.

Одним из методов изучения магнитного резонанса является исследование резонансного поглощения электромагнитных волн веществом, помещенным в постоянное магнитное поле. Если частота переменного магнитного поля совпадает с частотами, соответствующими переходам между подуровнями зеемановского расщепления (т. е. с частотой прецессии ν_0), то происходит интенсивное поглощение электромагнитных волн в радиочастотной области веществом.

Важным случаем резонансного поглощения является электронный парамагнитный резонанс.

Явление электронного парамагнитного резонанса состоит в поглощении парамагнитным веществом микроволнового радиоизлучения за счет переходов между подуровнями зеемановского расщепления.

Особым случаем парамагнитного резонанса является резонансное поглощение электромагнитных волн электронами проводимости в металлах, связанное со спином электронов. В ферромагнитных веществах наблюдается ферромагнитный резонанс, связанный с изменением ориентации электронных магнитных моментов внутри доменов или между доменами ферромагнетиков.

4.2.3. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

4.2.3.1. Излучение и поглощение света

Предположим, что на атом, находящийся в основном состоянии с энергией W_1, падает фотон частоты, соответствующей переходу $1 \rightarrow n$ атома в возбужденное состояние с энергией W_n, т. е. $h\nu = W_n - W_1$. С определенной вероятностью P_0 атом поглощает падающий фотон и переходит в энергетическое состояние n. Вслед за этим в отсутствие других фотонов через определенный промежуток времени Δt проис-

Репозиторий БГАТУ

ходит самопроизвольный (спонтанный) переход атома в основное состояние 1 или в определенное промежуточное между уровнями 1 и n состояние с излучением фотона соответствующей частоты. При подробном квантовомеханическом рассмотрении процесса поглощения и самопроизвольного излучения необходимо учесть взаимодействие атома с электромагнитным излучением, падающим на атом и возникающим при обратном переходе атома из возбужденного состояния в основное. Учет указанного взаимодействия приводит к выводу, что каждый энергетический уровень, кроме основного, имеет определенную ширину ΔW, связанную с временем существования возбужденного атома Δt следующим соотношением:

$$\Delta W \cdot \Delta t \approx h. \qquad (3.122)$$

Выражение (3.122) аналогично соотношению неопределенностей для проекции импульса на определенную ось и координаты частицы вдоль этой оси (например, (3.45)). Условие (3.122), которое называется соотношением неопределенностей для энергии, устанавливает связь между разбросом возможных значений энергии ΔW для каждого энергетического уровня W и средним временем жизни возбужденного состояния. Для основного (невозбужденного) энергетического уровня $\Delta W = 0$, т. е. он не имеет ширины, и как следствие, $\Delta t \to \infty$. Это означает, что в основном состоянии без внешнего воздействия (например, без падающего на атом фотона) атом может находиться бесконечно долго. Время жизни возбужденного состояния, как правило, уменьшается с ростом энергии состояния, и это означает расширение уровней с ростом энергии (рис. 3.19). Как показывают вычисления, время жизни атома в возбужденном энергетическом состоянии Δt имеет порядок 10^{-8} с. Спустя такой промежуток времени атом возвращается в основное или промежуточное состояние с излучением фотона. Такое излучение без участия внешних факторов называется самопроизвольным или спонтанным излучением.

С учетом ширины энергетических уровней излучаемый фотон имеет энергию в промежутке ΔW и, значит, частоту в соответствующем промежутке $\Delta\nu$.

Процессы поглощения и излучения света — это примеры прямого и обратного процессов. В классической физике утверждается возможность обратных процессов (обратимые процессы). Например, в классической механике: если возможна некоторая траектория тела, то она может быть пройдена телом в обратном направлении (имеются в виду обратимые чисто механические процессы без превращения механической энергии во внутреннюю). Также возможна обратимость процесса распространения света в рамках геометрической оптики: если луч света, проходящий через определенную оптическую систему, пустить в противоположном направлении, то он пройдет тот же путь. Можно сказать, что в классической механике и оптике при изменении знака времени t изменяют знак также все скорости, но траектории движения сохраняются. В квантовой механике существует аналогичное утверждение. Соответствующее квантовомеханическое утверждение состоит в следующем: если между двумя состояниями возможен переход в одном направлении, то он возможен и в обратном направлении; при этом вероятности прямого и обратного переходов одинаковы. Это утверждение называется принципом детального равновесия.

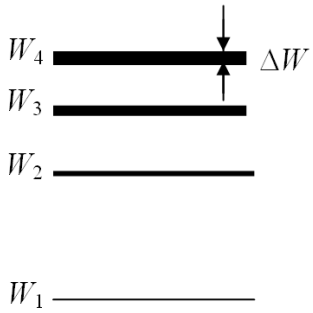

Рис.3.19. Расширение энергетических уровней атома с ростом его энергии

На основе принципа детального равновесия вероятность P_0 того, что атом, на который падает один фотон подходящей частоты (частоты, соответствующей определенному переходу атома из одного состояния в другое), поглощает его и переходит в возбужденное состояние, равна вероятности обратного перехода — спонтанного излучения возбужденного атома (при отсутствии внешнего фотона).

Пусть теперь на атом, находящийся в основном состоянии с энергией W_1, падает поток фотонов, состоящий из $N + 1$ фотонов энергии $W_n - W_1$. Прямой и обратный процессы в этом случае следующие: атом с определенной вероятностью P_{1n} поглощает один фотон (их остается N), переходит в состояние с энергией W_n (прямой процесс); возбужденный атом излучает фотон (их количество

Репозиторий ГГТУ

после этого равно $N + 1$) и возвращается в невозбужденное состояние. В результате вся система — атом и поток фотонов — возвращается в исходное состояние. Очевидно, что вероятность P_{1n} поглощения фотона в прямом процессе в этом случае больше, чем вероятность поглощения P_0, когда на атом падает только один фотон, в $N + 1$ раз:

$$P_{1n} = P_0(N + 1) = P_0 + P_0N. \qquad (3.123)$$

По принципу детального равновесия вероятность обратного процесса — перехода $W_n \to W_1$ — также равна P_{1n}. Но теперь величина $P_{n1} = P_{1n}$ представляет собой вероятность излучения фотона определенной частоты возбужденным атомом *в присутствии N фотонов той же самой частоты (без учета ширины уровней)*. Выражение (3.123) показывает, что вероятность P_{1n} слагается из двух частей: первое слагаемое (P_0) представляет собой вероятность спонтанного излучения — излучения в отсутствие других фотонов; второе слагаемое в формуле (3.123) означает вероятность излучения по причине падения на атом фотонов. Излучение атома, происходящее по причине падения на возбужденный атом фотонов соответствующей частоты, называется вынужденным или индуцированным излучением. Вероятность вынужденного излучения пропорциональна количеству падающих фотонов N. На существование вынужденного излучения первым обратил внимание А. Эйнштейн. Оказалось, что фотон, излучаемый возбужденным атомом при падении на него другого фотона, т. е. фотон индуцированного излучения, имеет точно такие же частоту, направление распространения, поляризацию (имеется в виду поляризация излучаемой электромагнитной волны) и фазу, что и падающий на атом фотон, вызвавший этот переход атома в состояние с меньшей энергией. В результате фотон, падающий на возбужденный атом, и фотон, излучаемый атомом под его воздействием при индуцированном излучении, оказываются когерентными. Заметим, что фотоны имеют спиновое квантовое число $s = 0$ и не подчиняются принципу Паули. Существование потока фотонов определенного состояния, наоборот, увеличивает вероятность появления еще одного фотона этого же состояния.

Таким образом, для двух энергетических уровней атома, например, W_m и W_n, при наличии потока фотонов энергии $W_n - W_m$ возможны три типа оптических процессов: поглощение фотона, спонтанное излучение и индуцированное (или вынужденное) излучение. На рисунке 3.20 схематически изображены эти процессы.

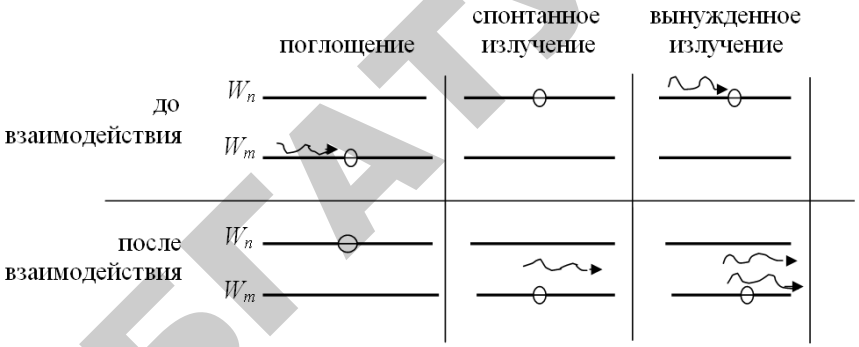

Рис. 3.20. Возможные оптические процессы, происходящие под действием потока фотонов энергии $W_n - W_m$

Пусть на вещество падает электромагнитное излучение определенной частоты ν_{nm}, соответствующей переходу электронов атомов вещества между энергетическими уровнями W_m и W_n. В соответствии с принципом детального равновесия при переходах между указанными энергетическими уровнями вероятности поглощения атомом фотона P_{mn} и излучения P_{nm} одинаковы. Последняя (P_{nm}) включает в себя вероятности спонтанного и индуцированного излучений. При большом количестве падающих фотонов вероятность индуцированного излучения, как показывает формула (3.123), во много раз превышает вероятность спонтанного излучения.

На этом основании будем считать, что P_{nm} — вероятность именно индуцированного перехода. Количество атомов ΔN_{mn}, перешедших с уровня W_m на уровень W_n, поглощая фотон энергии $W_n - W_m$, пропорционально исходному количеству атомов в состоянии W_m, которое обозначим как N_m. Можно записать:

$$\Delta N_{mn} = P_{mn}\, N_m. \qquad (3.124)$$

Аналогично количество атомов, излучающих фотон путем индуцированного излучения (спонтанное излучение не учитываем):

$$\Delta N_{nm} = P_{nm} N_n. \qquad (3.125)$$

Количество атомов, которые при термодинамическом равновесии находятся в состоянии с определенным значением энергии, подчиняется распределению Больцмана, согласно которому количество атомов N_i с энергией W_i:

Репозиторий БГАТУ

$$N_i \approx e^{-\frac{W_i}{kT}}. \qquad (3.126)$$

Соотношение (3.126) показывает, что с увеличением энергии W_i уменьшается количество атомов N_i. Разделив равенство (3.124) на равенство (3.125) с учетом условия (3.126), а также равенства вероятностей $P_{mn} = P_{nm}$, получим следующее соотношение:

$$\frac{\Delta N_{mn}}{\Delta N_{nm}} = \frac{N_m}{N_n} = e^{-\frac{W_m - W_n}{kT}}. \qquad (3.127)$$

В нашем случае, когда $W_n > W_m$, из формулы (3.127) следует неравенство:

$$\Delta N_{mn} > \Delta N_{nm}, \qquad (3.128)$$

показывающее, что если свет (поток фотонов) проходит через вещество, находящееся в термодинамическом равновесии, то количество актов поглощения света (ΔN_{mn}) превосходит количество актов излучения света (ΔN_{nm}). В результате этого световой поток, проходя через вещество, в обычных условиях ослабляется. Закон ослабления (поглощения) света показывает зависимость интенсивности света от пути, пройденного в веществе, и имеет следующий вид:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}. \qquad (3.\ 129)$$

Зависимость (3.129) называется законом поглощения Бугера–Ламберта. В записи закона использованы следующие обозначения: I_0 — интенсивность света, падающего на вещество; I — интенсивность света в веществе на глубине x; α — определенный для каждого вещества коэффициент поглощения, зависящий от частоты света и некоторых других условий. Очевидно, что при выполнении неравенства (3. 128), когда число актов поглощения превосходит число актов излучения, $I < I_0$ и коэффициент поглощения α — величина положительная. Можно показать, что α пропорционален разности $\Delta N_{mn} - \Delta N_{nm}$, а именно:

$$\alpha = \beta(\Delta N_{mn} - \Delta N_{nm}) \qquad (3.130)$$

(β — определенный положительный коэффициент пропорциональности).

4.2.3.2. Квантовые генераторы

Если с помощью определенных процессов перевести вещество в состояние (неравновесное), в котором количество атомов N_n на более высоком энергетическом уровне больше, чем количество атомов N_m на более низком энергетическом уровне, то из соотношения (3.127) получим:

$$\Delta N_{mn} < \Delta N_{nm}, \qquad (3.131)$$

т. е. количество актов излучения (индуцированного) при таких условиях будет превосходить количество актов поглощения. В этом случае коэффициент поглощения α становится отрицательным, $\alpha < 0$, что означает усиление света при прохождении через вещество. Состояние вещества, в котором количество атомов в более высоком энергетическом состоянии превосходит количество атомов в более низком энергетическом состоянии, называется инверсным состоянием вещества или состоянием с инверсной населенностью. Процесс перехода вещества в инверсное состояние называется накачкой вещества (среды). На первый взгляд кажется, что наиболее естественным процессом накачки, переводящей вещество в инверсное состояние, в котором количество возбужденных атомов с энергией W_n больше количества атомов в невозбужденном состоянии с энергией W_1, является поглощение света частоты $\nu_{1n} = \frac{W_n - W_1}{h}$ (так называемая оптическая накачка); или, если вещество в газообразном состоянии, возбуждение атомов в результате их столкновения с электронами (электрическая накачка). Но в результате спонтанного излучения и неупругих столкновений атомов, когда они отдают свою энергию электронам, перечисленные два способа не ведут к образованию инверсной населенности.

Практическое осуществление инверсной населенности уровней привело ученых Н. Г. Басова и А. М. Прохорова и независимо от них американского ученого Ч. Таунса к созданию оптических квантовых генераторов. В 1955 году Н. Г. Басов и А. М. Прохоров впервые предложили для достижения инверсной населенности уровней использовать три энергетических уровня вещества (так называемую трехуровневую систему). Первый генератор видимого когерентного света, принцип действия которого состоит в усилении

Репозиторий БГАТУ

света вынужденным излучением в веществе с инверсной населенностью, был создан в 1960 году. Созданная экспериментальная установка была названа оптическим квантовым генератором (ОКГ), или лазером. Последнее название (лазер) образовано из первых букв английского названия этого прибора, которое означает усиление света индуцированным излучением. Основанные на том же явлении (вынужденном излучении) источники, излучающие когерентные электромагнитные волны в диапазоне ультракоротких радиоволн, называются мазерами.

В первом лазере, схема которого показана на рисунке 3.21а, рабочим веществом является кристалл рубина, представляющий собой оксид алюминия Al_2O_3 с примесью оксида хрома Cr_2O_3 в количестве от 0,03 % до 0,05 % (от количества *Cr* зависит интенсивность окраски рубина). В кристаллической решетке оксида алюминия определенная часть атомов *Al* заменена атомами *Cr*. Активным веществом в такой кристаллической системе являются именно ионы Cr^{3+}, между энергетическими уровнями которых происходят вынужденные переходы. При поглощении падающего на кристалл света (накачка) ионы Cr^{3+} переходят из основного энергетического состояния 1 в возбужденное состояние 3 (рис. 3.21б). Обратный переход в основное состояние происходит в большинстве случаев в два этапа. Вначале возбужденные ионы Cr^{3+} отдают часть своей энергии, а именно $W_3 - W_2$, кристаллической решетке, переходя на уровень 2. Самопроизвольный переход из возбужденного состояния 2 в основное состояние 1 запрещен правилами отбора, поэтому среднее время жизни в состоянии 2 составляет 10^{-3} с, а не 10^{-8} с при отсутствии запрета. Энергетическое состояние 2 называется метастабильным состоянием, это состояние неустойчивого равновесия иона. На другом этапе под воздействием фотонов частоты, соответствующей переходу $2 \rightarrow 1$, происходит вынужденное излучение фотона этой же частоты ν_{21} при переходе иона Cr^{3+} в основное состояние 1. Свет частоты ν_{12}, излучаемый описанным образом, имеет длину волны $\lambda = 6943$ Å и, соответственно, красный цвет. В рубиновом лазере накачка осуществляется с помощью света импульсной неоновой лампы, излучающей в широком диапазоне частот. При достаточной мощности накачки образуется инверсная населенность уровней 1 и 2: количество ионов на уровне 2 становится больше, чем количество ионов на уровне 1. Если спонтанно или под действием фотона накачки произойдет переход $2 \rightarrow 1$ в одном ионе, то излученный при этом фотон становится причиной вынужденного

излучения следующего фотона и т. д., количество фотонов энергии $W_{21} = W_2 - W_1$ будет лавинообразно возрастать. Кристаллу рубина, используемому в рубиновом лазере, придают форму цилиндра длиной около 10 см, диаметром 1 см. Торцы рубинового стержня отполированы и представляют собой параллельные плоские (или немного вогнутые) зеркала. Один торец покрыт непрозрачным слоем серебра, другой — тонким слоем серебра, пропускающим 8 % излучения. Если направление движения фотона не совпадает с осью рубинового цилиндра, то этот фотон покидает рабочий объем цилиндра, называемого резонатором. Фотоны, двигающиеся вдоль оси резонатора или под незначительным углом к ней, многократно отражаются от зеркальных торцов стержня, вызывая новые акты вынужденного излучения в том же направлении. Таким образом вдоль оси цилиндра образуется поток фотонов энергии W_{21}. При достижении определенной интенсивности потока часть фотонов выходит через полупрозрачный торец рубина. Рубиновые лазеры работают в импульсном режиме с частотой повторения, равной нескольким импульсам в минуту. Во время работы кристалл нагревается, предусмотрено его охлаждение жидким воздухом.

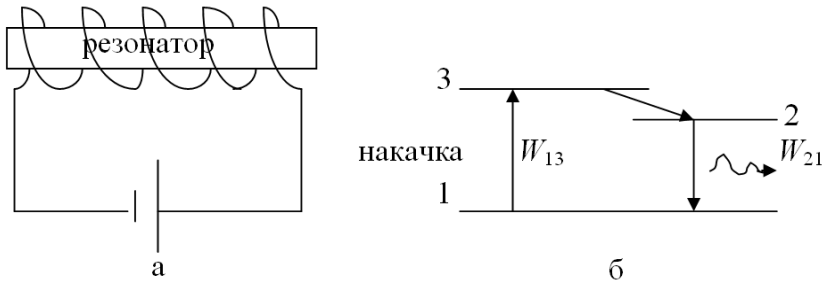

Рис. 3.21. Рубиновый лазер: *а* — схема;
б — рабочие энергетические уровни и переходы

В 1961 году был создан газовый лазер, в котором рабочим веществом является смесь газов *He* и *Ne*. Накачка в гелий-неоновом лазере осуществляется за счет электрического разряда в рабочей смеси *He–Ne*. Энергетические переходы, используемые в гелий-неоновом лазере, показаны на рисунке 3.22. Разряд в газе возбуждает атомы гелия. Первый возбужденный уровень атома *He* — это уровень 2*s* (точнее, два уровня $2s^2$, соответствующие двум проек-

Репозиторий БГАТУ

циям спина); он является метастабильным уровнем, так как переход $2s \rightarrow 1s$ запрещен в силу правила отбора. Энергетические уровни $5s$ и $4s$ атома неона близки к уровню $2s$ гелия. При столкновении атомов *Ne* с возбужденными атомами *He* последние передают атомам *Ne* энергию, переводя их в возбужденные состояния $4s$ и $5s$. С этих энергетических уровней атому неона разрешены переходы на $3p$ и дальше на s-уровни. Время жизни на уровне $4s$ составляет величину 10^{-6} с, поэтому в электрическом газовом разряде образуется инверсная населенность уровней $4s$, $5s$ неона в сравнении с уровнем $3p$ этого атома. В результате гелий-неоновый лазер, являясь лазером непрерывного действия, излучает волны видимого света, соответствующие переходу $5s \rightarrow 3p$, и волны инфракрасного света . соответствующие переходу $4s \rightarrow 3p$. Как видим, действие этого квантового генератора также основано на трехуровневой системе: основной уровень, возбужденный метастабильный ($4s$, $5s$), конечный уровень рабочего перехода ($3p$).

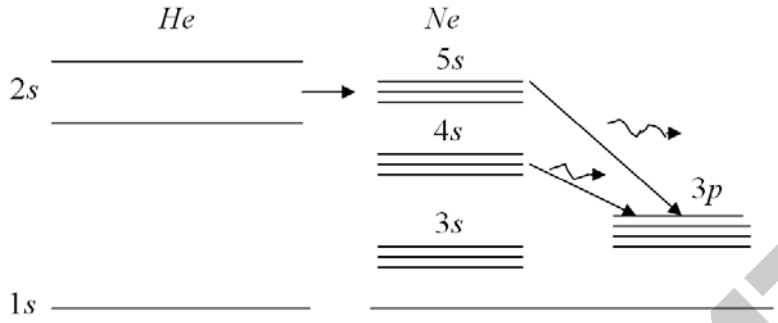

Рис. 3.22. Рабочие энергетические уровни и переходы в гелий-неоновом лазере

Лазерное излучение обладает множеством замечательных особенностей, соответствующих свойствам вынужденного излучения. Поток лазерного излучения характеризуется временной и пространственной когерентностью: фазовые соотношения сохраняются с течением времени не только в определенной точке, но и в различных точках.

Это связано с высокой монохроматичностью лазерного излучения и дает возможность получать непрерывный цуг монохроматической волны протяженностью на несколько порядков большей, чем для света, излучаемого естественными источниками. Важной

особенностью лазерного излучения является его строгая направленность, незначительное расхождение пучка. Как отмечалось, в генерации пучка участвуют только фотоны, летящие параллельно оси рабочего тела (оси резонатора). Наконец, лазеры дают возможность получить свет большой мощности, плотность потока энергии лазерного излучения имеет порядок 10^9 Вт/см^2.

Отмеченные особенности лазерного излучения лежат в основе их многостороннего использования: для радиосвязи, локации, для механической обработки, сварки, воздействия на ход химических реакций. Лазерные лучи используются в хирургии для точечной сварки биологических тканей.

Репозиторий БГАТУ

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

4.3.1. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР. ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

Рассмотрим движение частицы в поле сил, соответствующих потенциальной энергии, показанной на рис. 3.23. Силы действуют на частицу в ограниченной области $0 < x < a$, вне этой области частица движется как свободная. В таком случае область $U \neq 0$ называется потенциальным барьером. Пусть частицы падают на барьер, двигаясь в положительном направлении оси OX. Разделим всю область изменения координаты x на I, II, III, присвоим соответствующие индексы ψ-функции в этих областях и используем уравнение Шредингера для стационарных состояний (3.48) в каждой одномерной области. Получим:

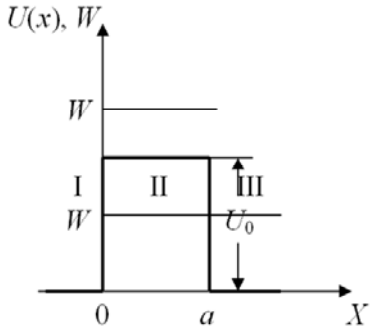

Рис. 3.23. Прямоугольный потенциальный барьер; зависимость потенциальной энергии от координаты x

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k_1^2\psi_1 = 0,\ x < 0;$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - k_2^2\psi_2 = 0,\ 0 \le x \le a; \qquad (3.132)$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k_3^2\psi_3 = 0,\ x > a,$$

где

$$k_1^2 = k_3^2 = \frac{2mW}{\hbar^2},\ k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W). \qquad (3.133)$$

Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (3.132) имеют следующий вид:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},\ x < 0,\ U = 0;$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x},\ 0 \le x \le a,\ U = U_0; \qquad (3.134)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x},\ x > a,\ U = 0.$$

В системе уравнений (3.134) слагаемые вида e^{ikx} представляют собой плоскую волну де Бройля, распространяющуюся в положительном направлении оси OX; слагаемые вида e^{-ikx} — плоскую волну, распространяющуюся в обратном направлении. В области I имеем падающую волну и отраженную от передней стенки барьера. Будем считать, что амплитуда падающей волны $A_1 = 1$. В области III частица уходит на бесконечность, и волна в отрицательном направлении оси OX отсутствует, т. е. $B_3 = 0$.

Условия непрерывности волновой функции и ее производной на границах областей имеют следующий вид:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0),\ \frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx};$$
$$\psi_2(a) = \psi_3(a),\ \frac{d\psi_2(a)}{dx} = \frac{d\psi_3(a)}{dx}. \qquad (3.135).$$

Если в эти уравнения подставить выражения (3.134) с учетом того, что $A_1 = 1$, $B_3 = 0$, получим систему четырех уравнений для неизвестных величин B_1, A_2, B_2, A_3.

В случае, когда $W < U_0$, величина $k_2^2 > 0$, k_2 — действительная величина. В этом случае решение системы уравнений (3.135) дает следующее выражение A_3, т. е. амплитуды проходящей через барьер волны:

$$A_3 = \frac{4ik_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1 + ik_2)^2 e^{k_2a} - (k_1 - ik_2)^2 e^{-k_2a}}. \qquad (3.136)$$

Репозиторий БГАТУ

По законам классической механики для частицы с энергией $W < U_0$ потенциальный барьер полностью непрозрачен, и в точке $x = 0$ она должна отразиться от потенциального барьера и начать движение в обратном направлении. Но для микрочастиц, подчиняющихся законам квантовой механики, амплитуда плоской волны в области III оказывается не равной нулю, она выражается формулой (3.136). Это означает, что микрочастица способна пройти через барьер, и это происходит с определенной вероятностью. Явление просачивания через потенциальный барьер частиц с энергией, меньшей, чем высота барьера, называется туннельным эффектом (туннельным переходом).

Вероятность нахождения частицы в определенной области пространства определяется квадратом модуля волновой функции, $|\psi|^2$. Эта же величина определяет интенсивность волны де Бройля частицы. Если интенсивность падающей на барьер волны — $I_{\text{ПАД}}$, а волны, прошедшей через барьер, — $I_{\text{ПР}}$, то величина

$$D = \frac{I_{\text{ПР}}}{I_{\text{ПАД}}} \tag{3.137}$$

называется прозрачностью барьера. Прозрачность барьера имеет смысл вероятности просачивания частицы через барьер. Учитывая выражение (3.136) амплитуды прошедшей через барьер волны и равенство единице амплитуды падающей волны, для прозрачности барьера получаем следующее выражение:

$$D = \frac{|\psi_3(a)|^2}{|\psi_1(0)|^2} = |A_3|^2 = e^{-2k_2 a} = \exp\left[-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W)}\,a\right]. \tag{3.138}$$

Из выражения (3.138) следует, что при неограниченном расширении барьера ($a \to \infty$) его прозрачность $D \to 0$, так же как при $U_0 \to \infty$, т. е. при неограниченном увеличении высоты барьера. Следовательно, туннельный переход возможен только через барьер конечной ширины и конечной высоты. Расчет показывает, что в случае $U_0 - W = 10$ эВ прозрачность барьера ширины 10^{-10} м для электрона имеет порядок e^{-1}; но при ширине барьера 10^{-2} м D имеет уже порядок $\exp(-10^9)$. С увеличением массы частицы прозрачность барьера уменьшается. Прозрачность барьера имеет значительную величину, когда ширина барьера имеет порядок по крайней мере совпадающий с порядком величины k_2^{-1}, т. е. порядок величины

$$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W)}\,. \tag{3.139}$$

Формула (3.138) получена для барьера прямоугольной формы. Если форма барьера более сложная, соответствует определенной функции $U(x)$ (рис. 3.24), то прозрачность барьера выражается следующей формулой:

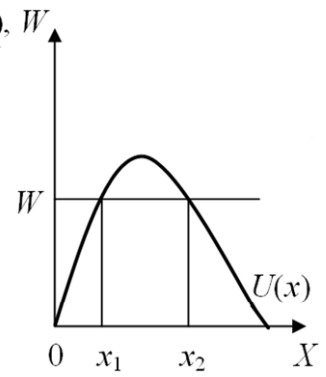

Рис. 3.24. Потенциальный барьер общего вида; $U(x)$ — определенная функция координаты x

$$D = \exp\left[-2\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U(x) - W)}\,dx\right], \tag{3.140}$$

где x_1 и x_1 — координаты начала и конца потенциального барьера для определенного значения энергии.

Состояние частицы в области самого барьера ($0 < x < a$) определяется с точностью ширины барьера a. Поэтому можно утверждать, что неопределенность координаты частицы Δx имеет порядок a. На основании соотношения неопределенностей (3.45) для координаты частицы x и проекции импульса p_x получаем, что

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{a}, \text{ или } \Delta p_x \approx \frac{\hbar}{a}.$$

С учетом выражения (3.139), определяющего порядок величины a, последнее выражение дает:

Репозиторий БГАТУ

$$\Delta p_x \geq \sqrt{2m(U_0 - W)}\,. \qquad (3.141)$$

С туннельным эффектом связаны некоторые физические явления. Прохождением частиц через потенциальный барьер объясняется явление автоэлектронной эмиссии из металлов. Вырывание электронов из металлов электрическими полями наблюдается при напряженностях электрического поля, которые значительно (в сотни раз) меньше, чем необходимые для преодоления электроном скачка потенциала на границе металл–вакуум. Объяснение этого явления дает квантовая механика. Действие электрического поля ведет к сужению потенциального барьера на границе металл–вакуум. Электрон с энергией, меньшей чем высота барьера, способен выйти из металла путем туннельного эффекта. Это ведет к уменьшению по сравнению с классическими расчетами напряженности поля, вызывающей автоэлектронную эмиссию.

Электрическое поле также вырывает, благодаря туннельному эффекту, электроны из отдельных атомов и молекул. Это явление, названное автоионизацией, также происходит при меньших, чем дают расчеты классической физики, напряженностях электрического поля.

С туннельным эффектом связаны α-распад радиоактивных ядер и вообще явление самопроизвольного деления ядер.

4.3.2. ЛИНЕЙНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Классический гармонический осциллятор можно представить себе в виде пружинного маятника, т. е. небольшого шарика (материальной точки) массы m, подвешенного на невесомой упругой пружине. Известно, что в этом случае на шарик действует квазиупругая сила $F_x = -kx$, где k — жесткость пружины; x — смещение шарика от положения равновесия; он совершает гармонические колебания с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и обладает потенциальной энергией $W_{\text{П}} = \frac{kx^2}{2}$, график которой представляет собой параболу (рис. 3.25).

Обратимся к описанию квантовомеханического осциллятора — частицы массой m, находящейся в поле квазиупругих сил и двигающейся вдоль оси OX по квантовомеханическим законам. Примерами

квантовомеханических осцилляторов являются атомы и молекулы, колеблющиеся около положения равновесия, частицы в узлах кристаллических решеток, совершающие тепловые колебания.

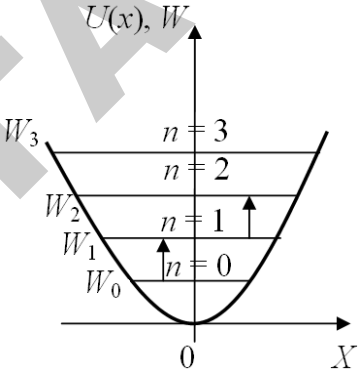

Рис. 3.25. Зависимость потенциальной энергии гармонического осциллятора от координаты x; энергетические уровни гармонического осциллятора

Зависимость потенциальной энергии гармонического осциллятора от координаты, изображенная на рис. 3.25, показывает, что задача о квантовомеханическом осцилляторе представляет собой задачу о поведении частицы в потенциальной яме параболической формы. Для решения такой задачи необходимо найти конечное, однозначное и непрерывное решение уравнения Шредингера для стационарных состояний в одномерном случае (3.48), если потенциальная энергия частицы зависит от координаты по закону $\frac{kx^2}{2}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2\psi = W\psi\,. \qquad (3.142)$$

Учитывая то, что в данном случае потенциальная энергия быстро возрастает при увеличении x, т. е. при удалении от положения равновесия, можно сделать вывод, что колеблющаяся частица не удалится на бесконечность. В таком случае, согласно общему положению квантовой механики, решение уравнения Шредингера (3.142) существует не для всех, а только для определенных дискретных значений энергии осциллятора. Действительно, точное решение уравнения

Репозиторий БГАТУ

(3.142) приводит к следующему выражению для возможных значений энергии квантовомеханического осциллятора:

$$W_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad (3.143)$$

где n = 0, 1, 2, … является квантовым числом. Как следует из формулы (3.143), наименьшее значение энергии осциллятора не равно нулю: если n = 0, то $W_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{\hbar}{2}$. Это минимальное значение W_0 называется нулевой энергией осциллятора, она соответствует его основному, невозбужденному, состоянию. Существование нулевой энергии осциллятора показывает, что квантовомеханическая частица не может покоиться («лежать») на дне параболической потенциальной ямы так же, как и на дне прямоугольной потенциальной ямы. Это связано с соотношением неопределенностей для координаты x и проекции импульса частицы p_x.

Существование нулевой энергии осциллятора подтверждено экспериментально в явлении рассеяния света кристаллами при сверхнизких температурах. Рассеяние света происходит на тепловых колебаниях атомов, молекул или ионов в узлах кристаллической решетки. С классической точки зрения интенсивность рассеяния при температуре $T \to 0$ должна убывать до нуля, так как должны прекращаться тепловые колебания узлов решетки. Опыты показали, что при уменьшении температуры интенсивность рассеянного кристаллами света стремится к определенному ненулевому значению. Следовательно, при стремлении температуры к абсолютному нулю сохраняются некоторые нулевые колебания частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки. Наличие нулевой энергии является характерным признаком любой системы квантовомеханических частиц.

Сравним формулу (3.143) с соответствующим выражением для прямоугольной потенциальной ямы (3.64). В отличие от энергии частицы в потенциальной яме энергия осциллятора пропорциональна первой степени квантового числа n. Это ведет к тому, что энергетические уровни гармонического осциллятора отстоят друг от друга на одинаковую величину для всех значений n:

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \sqrt{\frac{k}{m}}\hbar\cdot \qquad (3.144)$$

Энергетические уровни для первых значений n (n = 0, 1, 2) показаны на рисунке 3.25. Если осциллятор (например, атом) переходит из состояния с энергией W_n в состояние с энергией W_{n+1} путем поглощения фотона, то фотон должен иметь частоту $\nu = \frac{\Delta W}{h}$, или циклическую частоту

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{\Delta W}{\hbar} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (3.145)$$

совпадающую с собственной частотой классического осциллятора. Точные вычисления показывают, что при взаимодействии с фотоном гармонический осциллятор может переходить с определенного начального энергетического уровня только на соседний уровень, как показано стрелками на рисунке 3.25.

На рис. 3.26а изображены графики ψ-функций, являющихся решениями уравнения Шредингера (3.142) для n = 0, 1, 2. По оси абсцисс отложены отрезки, равные удвоенной амплитуде колебаний классического осциллятора с соответствующей энергией W_n. Заметим, что волновая функция $\psi(x)$, соответствующая основному состоянию осциллятора (n = 0), нигде не обращается в нуль. Волновая функция, соответствующая уровню n = 1, обращается в нуль только при x = 0. $\psi(x)$ для квантового числа n = 2 обращается в нуль дважды и т. д. Точки, в которых волновая функция обращается в нуль, называются узлами волновой функции. Число узлов волновой функции гармонического осциллятора равно значению квантового числа n.

Вероятность найти частицу в интервале dx около точки x определяется величиной $|\psi(x)|^2$. График функции $|\psi(x)|^2$, которая является плотностью вероятности, для n = 0, 1, 2 показан на рис. 3.26б сплошными линиями. Пунктирными линиями на тех же рисунках показаны плотности вероятности найти классический осциллятор в окрестности точки x. Эта классическая величина определяется как отношение времени dt нахождения классического осциллятора на отрезке dx к периоду его колебаний. Как можно заметить, классическая вероятность обнаружения частицы наибольшая вблизи точек поворота осциллятора (в амплитудных смещениях), где скорость равна нулю. В точке x = 0 классическая частица имеет наибольшую скорость, и вероятность ее обнаружения в этой точке минимальна. При небольших значениях квантового числа n квантовый осциллятор

Репозиторий БГАТУ

ведет себя иначе, а именно: вероятность его обнаружения оказывается наибольшей в точках, соответствующих максимальным значениям волновой функции $\psi(x)$. Но для больших значений n усредненная кривая функции $|\psi(x)|^2$ приближается к соответствующей кривой плотности вероятности для классического осциллятора.

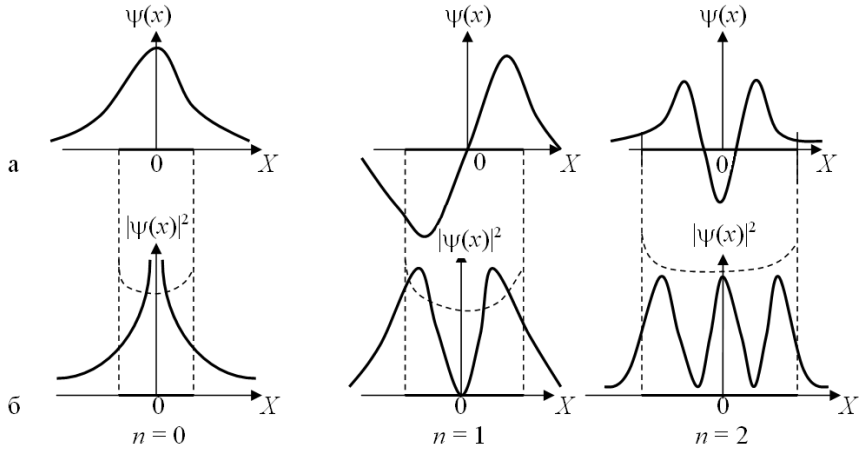

Рис. 3.26. Графики: *а* — волновых функций $\psi(x)$ гармонического осциллятора в состояниях, определяемых значениями квантового числа $n = 0, 1, 2$; *б* — $|\psi(x)|^2$ — квадратов модулей волновых функций, или плотностей вероятностей в этих состояниях гармонического осциллятора

Особенностью квантовомеханического осциллятора является также то, что $\psi(x)$ и, соответственно, $|\psi(x)|^2$ не равны нулю за точками, ограничивающими движение классической частицы, т. е. за точками поворота.

4.3.3. ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНОЙ СИСТЕМЫ

Найдем решение уравнения Шредингера для электрона водородоподобной системы в простейшем случае, когда волновая функция $\psi(x)$ зависит только от расстояния между электроном и ядром, т. е. от координаты r. В пункте 4.2.2.6. данного модуля показано, что в этом центральносимметричном случае уравнение, записанное в сферических координатах, имеет вид (3.78):

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\psi}{dr}\right)-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\psi = W\psi\,.$$

Разделив это уравнение на $-\frac{\hbar^2}{2m_e}$, введем следующие обозначения:

$$\beta=\frac{Ze^2m_e}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2},\ k^2=-\frac{2m_eW}{\hbar^2}. \qquad (3.146)$$

Знак величины k^2 зависит от знака величины полной энергии атома W. Электрон находится в атоме в случае $W < 0$; если же $W > 0$, то электрон движется за пределами атома. Так как мы рассматриваем состояние электрона в атоме, то в дальнейшем считаем, что $W < 0$ и, значит, $k^2 > 0$. С обозначениями (3.146) предыдущее уравнение приобретает вид:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d\psi}{dr}+\frac{\beta}{r}\psi=k^2\psi\,. \qquad (3.147)$$

Для решения уравнения (3.147) удобно перейти к новой неизвестной функции $u(r)$ согласно соотношению:

$$\psi(r)=\frac{u(r)}{r}\,. \qquad (3.148)$$

Вычислив производные функции ψ, выраженной через $u(r)$:

$$\frac{d\psi}{dr}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}u\,,\ \frac{d^2\psi}{dr^2}=\frac{d^2u}{dr^2}\cdot\frac{1}{r}-\frac{2}{r^2}\cdot\frac{du}{dr}+\frac{2}{r^3}u\,, \qquad (3.149)$$

подставив их в формулу (3.147), получим дифференциальное уравнение для функции $u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\beta\frac{u}{r}=k^2u\,. \qquad (3.150)$$

Сначала выясним поведение функции $u(r)$ на бесконечности. При условии $r \to \infty$ можно не учитывать слагаемое $\beta\frac{u}{r}$ в уравне-

Репозиторий БГАТУ

нии, так как оно намного меньше величины k^2u. В таком случае функция $u(r)$ при больших значениях r удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2u_0}{dr^2} - k^2u_0 = 0 \cdot \qquad (3.151)$$

Общее решение уравнения (3.151) при $k^2 > 0$ имеет вид:

$$u_0 = Ae^{-kr} + Be^{kr}. \qquad (3.152)$$

Будем считать $k > 0$. Второе слагаемое в равенстве (3.152) при $r \to \infty$ ведет к $u_0 \to \infty$. Но волновая функция, которая связана с функцией $u(r)$ соотношением (3.148), должна быть ограниченной, непрерывной и однозначной. Поэтому постоянную величину B в равенстве (3.152) необходимо положить равной нулю. Окончательно для больших расстояний от центра поля имеем:

$$u_0 = At^{-kr}. \qquad (3.153)$$

Основываясь на виде функции $u_0(r)$, т. е. $u(r)$ при $r \to \infty$, будем искать функцию $u(r)$ для всех значений аргумента в виде:

$$u(r) = e^{-kr} f(r). \qquad (3.154)$$

Вычисляя производные функции, имеющей структуру (3.154), и подставляя их в уравнение (3.150), получим:

$$\frac{d^2f}{dr^2} - 2k\frac{df}{dr} + \beta\frac{f}{r} = 0\,. \qquad (3.155)$$

Решение этого уравнения разыскивается в виде степенного ряда:

$$f(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s r^s\,. \qquad (3.156)$$

После подстановки выражения (3.156) в формулу (3.155) получим:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s s(s-1) r^{s-2} - 2k\sum_{s=1}^{\infty} a_s s r^{s-1} + \beta\sum_{s=1}^{\infty} a_s r^{s-1} = 0\,. \qquad (3.157)$$

Равенство (3.157) должно выполняться для всех значений r. Это возможно, если сумма коэффициентов при каждой степени r равна нулю. Выпишем коэффициенты при степени аргумента r, равной $n - 1$, т. е. при r^{n-1}: $a_{n+1}(n + 1)n - 2kna_n + \beta a_n$. Этот коэффициент, согласно выражению (3.157), равен нулю, что дает следующее уравнение:

$$a_{n+1}(n + 1)n - 2kna_n + \beta a_n = 0,$$

из которого следует рекуррентная формула для коэффициентов ряда (3.156):

$$a_{n+1} = a_n \frac{2kn - \beta}{n(n+1)}\,. \qquad (3.158)$$

В зависимости от величин β и k, определенных формулами (3.146), числитель дроби в выражении (3.158) или не равен нулю, или превращается в нуль при определенном значении n. Соответственно, в первом случае ряд (3.156) бесконечный, во втором случае — обрывается на определенном слагаемом. Можно показать, что в первом случае функция $f(r)$, а вместе с ней и $u(r)$ неограниченно растет при $r \to \infty$. Требование ограниченности волновой функции $\psi(r)$ (3.148) выполняется, если ряд (3.156) состоит из определенного конечного числа слагаемых. Это имеет место, когда определенный коэффициент ряда равен нулю, ибо тогда, благодаря рекуррентной формуле (3.158), все последующие члены ряда также равны нулю. Таким образом, для определенного значения n должно выполняться равенство:

$$2kn - \beta = 0. \qquad (3.159)$$

В этом случае коэффициент a_{n+1} и все последующие члены ряда a_{n+2}, … равны нулю, ряд обрывается на n-м слагаемом. Условие (3.159) с учетом обозначений (3.146) определяет возможные значения энергии водородоподобной системы:

$$\beta^2 = (2kn)^2,$$

откуда:

$$W = W_n = -\frac{Z^2e^4m_e}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}\,. \qquad (3.160)$$

Полученное выражение энергии водородоподобной системы полностью совпадает с формулой (3.15), полученной в теории Бора. Квантование энергии электрона (3.160) получилось в результате требования ограниченности волновой функции во всей области определения.

Репозиторий БГАТУ

Найдем сферически симметричную волновую функцию электрона в атоме водорода. Для этого подставим выражение (3.156) в равенство (3.154), то, в свою очередь, в формулу (3.148) и получим общее выражение сферически симметричной волновой функции:

$$\psi(r) = \frac{1}{r} e^{-kr} \sum_{s=1}^{n} a_s r^s \ . \qquad (3.161)$$

Конкретный вид волновой функции, как и энергии, а вместе с ней и величины k, определяется значением квантового числа n, на котором обрывается сумма в выражении (3.161). В случае $n = 1$ атом имеет минимальное значение энергии W_1, следовательно, он находится в основном состоянии. В этом случае по формуле (3.156) функция $f(r) = a_1 r$, так как, начиная с a_2, все последующие коэффициенты a_s, как следует из рекуррентной формулы (3.158) при условии (3.159) при $n = 1$, превращаются в нуль. Функция $u(r)$ в этом случае имеет вид $u(r) = a_1 e^{-kr} r$, и наконец, на основании связи (3.144):

$$\psi_1(r) = a_1 e^{-kr}. \qquad (3.162)$$

Постоянная a_1 находится из условия нормировки волновой функции $\psi_1(r)$. $k = k_1$ определяется равенством (3.159) при условии $n = 1$:

$$k_1 = \frac{\beta}{2} = \frac{e^2 m_e}{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \ . \qquad (3.163)$$

Анализ выражения (3.162) дан в пункте 4.2.2.6. данного модуля.

Найдем сферически симметричную волновую функцию электрона в атоме водорода, находящегося в первом *возбужденном состоянии*. В этом случае следует считать $n = 2$, и из формулы (3.161) получаем:

$$\psi_2(r) = \frac{1}{r} e^{-k_2 r} \left(a_1 r + a_2 r^2 \right), \qquad (3.164)$$

где величина k_2 удовлетворяет условию (3.159) при $n = 2$, и поэтому

$$k_2 = \frac{\beta}{4} = \frac{e^2 m_e}{8\pi\varepsilon_0 \hbar^2} \ . \qquad (3.165)$$

Для вычисления коэффициента a_2 через a_1 необходимо использовать рекуррентную формулу (3.158), в которой надо положить $n = 1$, $k = k_2$. В результате с учетом равенства (3.165) получим:

$$a_2 = -a_1 \frac{\beta}{4} = -a_1 k_2 \ . \qquad (3.166)$$

Окончательно волновая функция $\psi_2(r)$ для первого возбужденного состояния электрона в атоме водорода приобретает вид:

$$\psi_2(r) = a_1 e^{-k_2 r} (1 - k_2 r) \ . \qquad (3.167)$$

Обсуждение этого результата дано в основном материале, пункт 4.2.2.6.

Репозиторий БГАТУ

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ

План лекции 1 «Атомная теория Бора. Волновые свойства частиц вещества. Волновая функция»

1. Развитие представлений о строении материи: атом Томсона, линейчатые спектры атомов, обобщенная формула Бальмера. Опыты Резерфорда. Ядерная модель атома.
2. Постулаты Бора. Опыты Франка и Герца.
3. Радиусы стационарных орбит электрона в атоме водорода, скорость электрона на стационарных орбитах, механическая энергия электрона. Схема энергетических уровней электрона в атоме водорода согласно теории Бора. Затруднения теории Бора.
4. Гипотеза де Бройля (формула де Бройля). Опыты, подтверждающие волновую природу света: опыт Дэвиссона и Джермера (сравнить его с опытами по дифракции рентгеновских волн на кристалле), общая схема опытов по дифракции частиц, результаты опытов Фабриканта. Объяснение отсутствия волновых свойств у макрообъектов.
5. Волновая функция микрочастицы. Ее физический смысл. Условие нормировки. Запись волновой функции свободной частицы (волны де Бройля) в комплексном виде. Фазовая и групповая скорости волны де Бройля.

Контрольные вопросы

1. Почему говорят, что постулаты Бора противоречат классической физике?
2. Какие характеристики электромагнитного излучения описывают его как волну и какие как частицы (фотоны)? Какова связь между ними?

3. Как изменяется длина волны де Бройля электрона при его ускорении?
4. Почему незаметны волновые свойства макротел?

План лекции 2 «Уравнение Шредингера. Соотношение неопределенностей. Уравнение Шредингера для частицы в одномерной потенциальной яме

1. Уравнение Шредингера как волновое уравнение (получить для волны де Бройля). Стационарный случай. Обобщение уравнения Шредингера на случаи движения частицы в силовом поле. Уравнение Шредингера для стационарных состояний и уравнение Шредингера со временем.
2. Соотношение неопределенностей (получить, рассматривая дифракцию электронов на одной щели). Записать соотношение неопределенностей для различных координат. Применение соотношения неопределенностей как критерия применимости классической механики (рассмотреть 2 примера: электрон в атоме и движущаяся пылинка).
3. Частица в прямоугольной одномерной потенциальной яме, классическое описание. Уравнение Шредингера для данного случая. Запись общего решения, граничных условий. Перейти к бесконечно глубокой яме, получить условия квантования энергии, выражение для расстояния между двумя соседними уровнями. Найти волновую функцию, проанализировать ее для n = 1, 2, 3, построить графики $\psi(x)$ и $|\psi(x)|^2$. Поведение частицы в яме конечной глубины.

Контрольные вопросы

1. Если все бесконечное пространство, в котором движется частица, разделить на две части, то чему будет равна вероятность обнаружить частицу в одной части пространства?
2. Можно ли в один определенный момент времени точно определить координату y движущегося электрона и проекцию p_x его импульса?
3. Может ли классическая частица покоиться на дне потенциальной ямы? Может ли покоиться в потенциальной яме квантовомеханическая частица?
4. При каком условии решение квантовомеханической задачи движения частицы в потенциальной яме стремится к классическому решению соответствующей задачи?

Репозиторий БГАТУ

План лекции 3 «Квантовомеханическое описание движения электрона в атоме водорода»

1. Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода, переход к сферическим координатам. Результат решения уравнения (ссылка на дополнительный материал): квантование энергии, запись простейшей (центрально симметричной) волновой функции, ее анализ для $n = 1, 2$, графики $\psi(r)$ и $|\psi(r)|^2 r^2$.

2. Квантовые числа n, l, m. Зависимость волновой функции общего решения от трех квантовых чисел, их возможные значения, обозначения состояний. Вырождение состояний, кратность вырождения. Таблица возможных значений квантовых чисел n, l, m и кратностей вырождения при $n = 1, 2, 3, 4$. Схема энергетических уровней атома водорода, правило отбора.

3. Орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода. Его возможные квантованные значения, неопределенность направления. Квантование проекции L_z (рисунок). Магнитный орбитальный момент электрона, его запись с использованием гиромагнитного отношения, квантование. Магнетон Бора. Снятие вырождения по m при помещении атома в магнитное поле (нормальный эффект Зеемана).

Контрольные вопросы

1. На каком расстоянии от ядра вероятнее всего найти электрон в атоме водорода в нормальном состоянии?
2. Можно ли точно указать направление момента импульса электрона в атоме?
3. Все ли уровни энергии электрона в атоме водорода вырождены?

План лекции 4 «Спин электрона. Оптические квантовые генераторы»

1. Опыты Штерна и Герлаха. Спин электрона (найти спиновое квантовое число электрона, опираясь на результат опытов, записать собственный (спиновый) момент импульса электрона (спин)). Квантование проекции спина на выделенную ось, спиновое магнитное число. Гиромагнитное отношение для собственных моментов. Спиновый магнитный момент и его проекция на выделенную ось. Спин-

орбитальное взаимодействие. Зависимость энергии электрона в атоме водорода от спина. Понятие о магнитных резонансах.

2. Излучение и поглощение света. Самопроизвольное (спонтанное) и вынужденное (индуцированное) излучения, их вероятности, принцип детального равновесия (схема процессов поглощения, собственного и вынужденного излучений). Получить закон поглощения Бугера–Ламберта, используя распределение Больцмана.

3. Квантовые генераторы. Инверсное состояние вещества. Изобретение оптического квантового генератора (лазера). Рубиновый лазер. Принцип действия газового гелий-неонового лазера.

Контрольные вопросы

1. Сколько различных значений может иметь спиновое квантовое число? Спиновый момент импульса электрона?
2. Одинаковы ли гиромагнитные отношения для орбитальных магнитного и механического и для спиновых магнитного и механического моментов?
3. Зависит ли энергия электрона в атоме водорода от спинового магнитного квантового числа?
4. Является ли равновесным инверсное состояние вещества?

Вопросы для самоконтроля

I уровень

1. Структура спектра атома водорода. Сериальная формула.
2. Сформулировать I и II постулаты Бора.
3. Сущность и результаты опытов Франка и Герца.
4. Зависимость радиусов стационарных орбит электрона в атоме водорода от квантового числа.
5. Выражение для дискретных значений энергии электрона в водородоподобной системе.
6. В чем состоит корпускулярно-волновой дуализм материи?
7. Формула длины волны де Бройля. В каких случаях проявляются волновые свойства частицы?
8. В чем состоял опыт Дэвиссона и Джермера?
9. Записать волну де Бройля через корпускулярные характеристики электрона.
10. Каков физический смысл волновой функции?

Репозиторий БГАТУ

11. В чем состоит условие нормировки волновой функции?

12. Какие состояния движения микрочастицы называются стационарными? Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний.

13. Запись общего уравнения Шредингера (уравнения Шредингера со временем).

14. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса частицы.

15. Записать уравнение Шредингера для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Записать формулу для дискретных значений энергии частицы в яме.

16. Волновая функция частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Ее графики для различных значений квантового числа.

17. Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода.

18. Выражение для возможных значений энергии электрона в атоме водорода.

19. Простейшая (центрально симметричная) волновая функция электрона в атоме водорода. Зависимости $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$, а также плотностей вероятности $|\psi_1(r)|^2 r^2$, $|\psi_2(r)|^2 r^2$ и их графическое изображение.

20. Квантовые числа n, l, m, определяющие состояние электрона в атоме (без учета спина), их возможные значения. Обозначение состояний по квантовым числам n и l.

21. Что такое вырождение состояний частицы? Что такое кратность вырождения; чему равна кратность вырождения состояний электрона в атоме водорода (без учета спина)?

22. Каковы возможные значения орбитального момента импульса (механического момента) электрона в атоме водорода и его проекции на направление внешнего магнитного поля?

23. Каковы возможные значения орбитального магнитного момента электрона и его проекции на направление внешнего магнитного поля (записать через магнетон Бора)?

24. Что показали опыты Штерна и Герлаха?

25. Что такое спин электрона? Чему равно спиновое квантовое число и спиновое магнитное квантовое число? Чему равен спин электрона и каковы возможные проекции спина на направление внешнего магнитного поля?

26. Чему равен собственный (спиновый) магнитный момент электрона и каковы его возможные проекции на направление внешнего магнитного поля?

27. Поглощение световых квантов. Время жизни состояния. Спонтанное излучение. Вынужденное излучение.

28. Закон поглощения света (закон Бугера–Ламберта).

29. Инверсное состояние вещества, квантовые генераторы (лазеры).

II уровень

1. Используя I постулат Бора, найти выражения для радиусов стационарных орбит электрона в водородоподобной системе, скорости электрона на стационарной орбите.

2. Найти выражение для дискретных значений энергии электрона в водородоподобной системе и показать, что с ростом значений энергии электрона энергетические уровни сгущаются.

3. Вывести сериальную формулу (обобщенную формулу Бальмера) для частот излучения атома водорода.

4. Записать волну де Бройля и получить волновое уравнение, которому она удовлетворяет, т. е. уравнение Шредингера для свободной частицы. Обобщить на случаи движения электрона в силовом поле.

5. Получить соотношение неопределенностей для координаты и импульса электрона, рассматривая дифракцию электронов на щели. Привести примеры применения соотношения неопределенностей.

6. Решить уравнение Шредингера для частицы, находящейся в бесконечно глубокой потенциальной яме: найти дискретные значения энергии, волновую функцию. Рассмотреть зависимость энергетического расстояния между уровнями от ширины ямы, а также зависимость волновой функции $\psi(x)$ и квадрата ее модуля $|\psi(x)|^2$ (плотности вероятности нахождения частицы) от квантового числа.

7. Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид $\psi_1(r) = a_1 e^{-kr}$, где a_1 — коэффициент, определяемый из условия нормировки; $k^2 = -\dfrac{2m_e W}{\hbar^2}$; W — энергия электрона. Показать, что плотность вероятности нахождения электрона, т. е. $|\psi|^2 r^2$ максимальна при значении r, совпадающем с Боровским радиусом, т. е. при $r = r_1$.

8. Найти кратность вырождения состояний электрона в водородоподобной системе (по квантовым числам n, l, m).

9. Найти возможные значения орбитального магнитного момента электрона. Объяснить явление расщепления энергетических

Репозиторий БГАТУ

уровней электрона при помещении атома в магнитное поле (нормальный эффект Зеемана).

10. Полный момент импульса электрона в атоме. Спин-орбитальное взаимодействие. Зависимость энергии электрона в атоме водорода от проекции спина (тонкая структура уровней энергии).

11. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение световых квантов. Получить закон поглощения света Бугера–Ламберта.

12. Принцип действия рубинового лазера. Гелий-неоновый лазер.

III уровень

1. Найти простейшее (центрально симметричное) решение уравнения Шредингера для атома водорода.

2. Показать, что выражение для возможных значений энергии электрона в водородоподобной системе по квантовомеханической теории совпадает с соответствующим выражением, найденным по теории Бора.

3. Показать, что вероятность нахождения свободной частицы во всех точках пространства одинакова.

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задание 1. Изучить и законспектировать материал по теме «Теория Бора для атома водорода» с выводом формул для радиусов стационарных орбит, скоростей электрона на стационарных орбитах и возможных значений механической энергии электрона в водородоподобном атоме.

Задание 2. Решить задачи индивидуального задания по теме «Теория Бора для атома водорода» из следующего ряда задач.

I уровень

1. Определить длины волн, соответствующие: а) границе серии Лаймана; б) границе серии Бальмера; в) границе серии Пашена. Проанализировать результаты. (91 нм; 364 нм; 820 нм)

2. Используя теорию Бора для атома водорода, определить: а) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый Боровский радиус); б) скорость движения электрона по этой орбите. (r_1 = 52,8 пм; u_1 = 2,19 Мм/с)

3. Определить скорость электрона на третьей орбите атома водорода. (0,731 Мм/с)

4. Определить длину волны, излучаемой при переходе электрона с более высокого уровня энергии на более низкий уровень, если при этом энергия атома уменьшилась на ΔW = 10 эВ. (124 нм)

5. Электрон находится на первой боровской орбите атома водорода. Определить для электрона: а) потенциальную энергию; б) кинетическую энергию; в) полную энергию. (−27,2 эВ; 13,5 эВ; −13,5 эВ)

6. Определить, какая энергия требуется для полного отрыва электрона от ядра однократно ионизированного атома гелия, если: а) электрон находится в основном состоянии; б) электрон находится в состоянии, соответствующем главному квантовому числу n = 3. (54,4 эВ; 6,04 эВ)

7. Невозбужденный атом водорода поглощает квант излучения с длиной волны λ = 102,6 нм. Вычислить, пользуясь теорией Бора, радиус электронной орбиты возбужденного атома водорода. (0,476 нм)

Репозиторий БГАТУ

8. Вычислить по теории Бора период вращения электрона в атоме водорода в возбужденном состоянии, определяемом главным квантовым числом $n = 2$. ($12 \cdot 10^{-16}$ с)

9. Найти энергию ионизации и потенциал ионизации ионов гелия He^+ и лития Li^{2+}. (Гелий: 54 эВ, 54 В; литий: 122 эВ, 122 В)

10. На какой орбите скорость электрона атома водорода равна 734 км/с? ($n = 1$)

11. Зная, что наибольшая длина волны спектральной линии серии Лаймана равна 121,6 нм, найти наибольшую длину волны серии Бальмера. (656,6 нм)

12. Найти длину волны четвертой по порядку спектральной линии в инфракрасной серии Пашена. (1,002 мкм)

II уровень

1. Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n = 4$. Определить возможные спектральные линии в спектре водорода, появляющиеся при переходе атома из возбужденного состояния в основное. ($1{,}21 \cdot 10^{-7}$ м; $1{,}02 \cdot 10^{-7}$ м; $0{,}97 \cdot 10^{-7}$ м; $6{,}54 \cdot 10^{-7}$ м; $4{,}85 \cdot 10^{-7}$ м; $18{,}7 \cdot 10^{-7}$ м)

2. Определить число спектральных линий, испускаемых атомарным водородом, возбужденным на n-ый энергетический уровень. $\left(N = \frac{1}{2} n(n-1)\right)$

3. Во сколько раз изменится период вращения электрона в атоме водорода, если при переходе в невозбужденное состояние атом излучил фотон с длиной волны $\lambda = 97{,}5$ нм? (В 64 раза)

4. В каких пределах $\Delta\lambda$ должна лежать длина волны монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты электрона увеличился в 16 раз? (90,8 нм $\leq \lambda \leq$ 105 нм)

5. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент ‘лектрона, движущегося по третьей орбите атома водорода. ($2{,}8 \cdot 10^{-23}$ А $\cdot$м^2)

6. Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $W_i = 13{,}6$ эВ, определить первый потенциал возбуждения φ_1 этого атома. (10,2 эВ)

7. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ эВ, определить в электронвольтах энергию фотона, соответствующего второй линии серии Бальмера. (2,25 эВ)

8. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном энергии $W_\phi = 17{,}7$ эВ. Определить скорость электрона за пределами атома. (1,2 Мм/с)

9. Определить, какие спектральные линии появятся в видимой области излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}1$ мкм. ($1{,}22 \cdot 10^{-7}$ м, $1{,}03 \cdot 10^{-7}$ м, $6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м)

10. Первоначально неподвижный атом водорода излучил фотон, соответствующий первой линии серии Лаймана. Найти скорость, полученную атомом. Масса атома водорода равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. (3,25 м/с)

11. Неподвижный ион гелия He^+ излучил фотон, соответствующий первой линии серии Лаймана. Этот фотон вырвал фотоэлектрон из основного состояния неподвижного атома водорода. Определить скорость фотоэлектрона. ($3{,}1 \cdot 10^6$ м/с)

12. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая с помощью этой дифракционной решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41°$. Период решетки $d = 5 \cdot 10^{-6}$ м. (3)

Задание 3. Решить задачи индивидуального задания из следующего ряда задач.

Длина волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

I уровень

1. Найти длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью: а) 20 км/с; б) 0,8 км/с. (36,4 нм; 0,9 мкм)

2. Определить длину волны де Бройля электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите. (1 нм)

3. Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом 1,4 м. Определить длину волны де Бройля для электрона. Масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. (0,197 пм)

4. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де Бройля протона была равна 1 нм. (0,821 мВ)

Репозиторий ГГАТУ

5. Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определить длину волны де Бройля. (38,8 пм)

6. Определить, как изменится длина волны де Бройля электрона атома водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую. (Уменьшится в 2 раза)

7. Ширина Δx следа электрона, обладающего кинетической энергией 1,5 кэВ, на фотопластинке составляет 1 мкм. Определить, можно ли по данному следу обнаружить отклонение движения электрона от законов классической механики. (нет)

8. Электронный пучок выходит из электронной пушки под действием разности потенциалов U = 200 В. Определить, можно ли одновременно измерить траекторию электрона с точностью до 100 пм (с точностью порядка диаметра атома) и его скорость с точностью до 10 %. (нет)

II уровень

1. Вычислить кинетическую энергию электрона и частицы, радиус которой — 0,1 мкм и плотность — 2000 кг/м^3, если в обоих случаях частицам соответствует длина волны де Бройля 100 пм. (150 эВ, 16,4 пэВ)

2. На грань кристалла никеля падает под углом 64° к поверхности грани параллельный пучок электронов. Расстояние между атомными плоскостями, параллельными грани кристалла, d = 500 пм. Пользуясь условием Вульфа–Брэггов, найти скорость электронов, если отраженные от грани кристалла электроны образуют максимум первого порядка. (2,02 Мм/с)

3. Вывести связь между длиной круговой электронной орбиты и длиной волны де Бройля.

4. Во сколько раз должна измениться абсолютная температура идеального газа, чтобы дебройлевская длина волны молекул газа уменьшилась на 20 %? (1,25)

5. Используя соотношение неопределенностей в форме $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, найти минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером l = 0,2 нм. (1 эВ)

6. Свободный электрон в момент t = 0 локализован в области Δx_0 = 0,1 нм (порядок размера атома). Оценить размер области локализации электрона спустя t = 1 с. (10^3 км)

7. Применяя соотношение неопределенностей, показать, что для движущейся частицы, неопределенность координаты которой равна

длине волны де Бройля, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

8. Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допустимая неопределенность скорости составляет 10 % от ее числового значения, определить неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории? (3,34 нм)

9. Объяснить физический смысл соотношения неопределенностей для энергии частицы и времени: $\Delta W \Delta t \geq \hbar$. Воспользовавшись этим соотношением, оценить размытость энергетического уровня в атоме водорода: а) для основного состояния; б) для возбужденного состояния, время жизни которого равно 10^{-8} с. (0; 414 нэВ)

Волновая функция. Уравнение Шредингера. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме. Квантовомеханическое описание атома водорода

I уровень

1. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена в виде $\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{W}{\hbar}t}$. Показать, что плотность вероятности нахождения частицы определяется только координатной частью ψ-функции.

2. Записать одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний для частицы, движущейся под действием квазиупругой силы.

3. Записать возможные значения орбитального квантового числа l и магнитного квантового числа m для главного квантового числа состояния электрона в атоме водорода n = 4.

4. Определить, сколько различных волновых функций электрона в атоме водорода соответствует главному квантовому числу n = 3.

5. Электрон в атоме находится в f-состоянии. Определить возможные значения (в единицах $\hbar$), которые принимает проекция момента импульса L_z орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля.

6. Электрон в атоме находится в d-состоянии. Определить: а) орбитальный момент импульса электрона L; б) максимальное значе-

Репозиторий БГАТУ

ние проекции момента импульса L_z на направление внешнего магнитного поля. (2,45 $\hbar$; 2$\hbar$)

7. Определить: а) числовое значение собственного механического момента импульса (спина) S; б) проекцию спина S_z на направление внешнего магнитного поля. ($9{,}09 \cdot 10^{-35}$ Дж · с; $5{,}25 \cdot 10^{-35}$ Дж · с)

II уровень

1. ψ-функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определить нормировочный коэффициент A. $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\right)$

2. Волновая функция $\psi = A\sin\frac{2\pi x}{l}$ определена только в области $0 \le x \le l$. Используя условие нормировки, определить нормировочный множитель A. $\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)$

3. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Записать уравнение Шредингера в пределах ямы ($0 \le x \le l$) и решить его. ($\psi(x) = A\sin kx$, где $k = \frac{n\pi}{l}$)

4. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Найти выражение для возможных значений энергии частицы. $\left(W_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\right)$

5. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Найти отношение разности $\Delta W_{n,n+1}$ соседних энергетических уровней к энергии W_n частицы в трех случаях: а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n \to \infty$. (5/4; 11/25; 0)

6. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится в основном

состоянии. Какова вероятность P обнаружения частицы в крайней четверти ящика? $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\right)$

7. Частица находится в сферически симметричном стационарном поле. Волновая функция частицы $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \frac{e^{-r/a}}{r}$, где r — расстояние от центра поля; a — постоянная величина. Найти среднее значение r. (Среднее значение величины, зависящей от r, т. е. некоторой функции $f(r)$ вычисляется по формуле $\langle f(r) \rangle = \int_V |\psi|^2 f(r) dV$, где $\psi(r)$ — нормированная волновая функция частицы.) $\left(\frac{a}{2}\right)$

8. Известно, что нормированная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеет вид $\psi = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x$. Определить среднее значение координаты x электрона. $\left(\frac{a}{2}\right)$

9. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками находится в основном состоянии. Определить вероятность обнаружения частицы в левой трети ямы. (0,195)

10. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками. Определить вероятность обнаружения электрона в средней трети ямы, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n = 3$). Изобразить график, отражающий плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии. (1/3)

11. Волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме водорода, имеет вид: $\psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$, где r — расстояние от электрона до ядра; a — первый боровский радиус. Определить наиболее вероятное расстояние $r_в$ между электроном и ядром. (a)

Репозиторий БГАТУ

12. Показать возможные энергетические уровни атома водорода в состоянии с главным квантовым числом $n = 6$, если атом помещен во внешнее магнитное поле.

13. Волновая функция $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, описывающая атом водорода, определяется главным квантовым числом n, орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m. Определить, чему равно число различных состояний, соответствующих данному n. (n^2)

14. Нормированная волновая функция основного состояния атома водорода $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты. Найти среднее значение силы Кулона $\langle F \rangle$, действующей на электрон в атоме водорода в основном состоянии. $\left(\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1^2} \right)$

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

5.3.1. АТОМ ВОДОРОДА ПО БОРУ

1. Длины волн и частоты спектра атома водорода могут быть вычислены по сериальной формуле и обобщенной формуле Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \nu = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где постоянные Ридберга $R = 10973731{,}77\ \text{м}^{-1} \approx 1{,}1 \cdot 10^7\ \text{м}^{-1}$, $R' = Rc = 3{,}2931193 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$; целое число $m = 1, 2, 3, \ldots$ определяет серию (серия Лаймана, серия Бальмера, серия Пашена, серия Брэккета и т. д.), целое число $n = m + 1, m + 2, \ldots$ определяет отдельную линию в соответствующей серии. По теории Бора m — номер орбиты, на которую произошел переход электрона, n — номер орбиты, с которой произошел переход.

2. Первый постулат Бора говорит о том, что в атоме возможны только некоторые орбиты электронов — стационарные орбиты; условие, которому подчиняются круговые стационарные орбиты (условие квантования круговых орбит) имеет вид:

$$m_e u_n r_n = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar,$$

где m_e — масса электрона; $n = 1, 2, \ldots$ — квантовое число; r_n — радиус n-й стационарной орбиты; u_n — скорость электрона на ней; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

3. Второй постулат Бора определяет частоту излучения (поглощения) атома при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое:

$$h\nu = W_n - W_m,$$

где W_n и W_m — соответственно энергии стационарных состояний до и после перехода.

4. Водородоподобная система — это атом с зарядом ядра $+Ze$, из которого удалены все электроны, кроме одного. Z — порядковый

Репозиторий БГАТУ

номер элемента в периодической системе элементов Д. И. Менделеева, при $Z = 1$ это атом водорода.

5. Радиусы стационарных орбит электрона в атоме водорода:

$$r_n = r_1 n^2,$$

где $r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м$^{-1}$ — радиус первой боровской орбиты

6. Энергия электрона на n-й стационарной орбите в водородоподобной системе:

$$W_n = -\frac{Z^2 m_e e^4}{32\varepsilon_0^2 \pi^2 \hbar^2 n^2} = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Примеры решения задач

II уровень

Пример 1. Определить частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $m = 2$, если радиус орбиты электрона изменился в $k = 9$ раз.

Дано:	**Решение:**
$m = 2$ $\frac{r_n}{r_m} = k = 9$	Найдем главное квантовое число n — номер стационарной орбиты, с которой произошел переход электрона. Для этого воспользуемся выражением для радиуса стационарной орбиты в состоянии $m = 2$ и в состоянии n:
u_{nm} — ?	

$$r_m = r_2 = r_1 m^2 = 4r_1,\ r_n = r_1 n^2.$$

Разделив второе равенство на первое и воспользовавшись условием задачи, получим:

$$\frac{r_n}{r_m} = \frac{n^2}{4} = 9,$$

откуда $n^2 = 36$, $n = 6$. Таким образом, произошел переход $6 \to 2$.

Частоту света, излучаемого атомом при этом переходе, определим по обобщенной формуле Бальмера:

$$\nu_{nm} = \nu_{62} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 3{,}2931193 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = 0{,}731 \cdot 10^{15}\ (\text{Гц}).$$

Ответ: $\nu_{nm} = 0{,}731 \cdot 10^{15}$ Гц.

Пример 2. Определив энергию ионизации атома водорода, найти в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующего самой длинноволновой линии серии Лаймана.

Дано:	**Решение:**
$m = 1$	Энергия ионизации атома (энергия, необходимая для отрыва электрона, находящегося в основном состоянии, от атома) может быть определена с помощью соотношения, полученного из обобщенной формулы Бальмера
W_i — ? $W_{\lambda\max}$ — ?	

$$W_{nm} = h\nu_{nm} = R'h\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

в котором надо положить $m = 1$, $n \to \infty$. Тогда искомая энергия ионизации:

$$W_i = R'h = 3{,}29 \cdot 10^{15} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34} = 21{,}714 \cdot 10^{-19}\ (\text{Дж}) = 13{,}6\ (\text{эВ}).$$

Самая длинноволновая линия серии Лаймана соответствует переходу электрона со второго энергетического уровня на основной, т. е.

$$W_{\lambda\max} = W_{21} = h\nu_{21} = hR'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR' = \frac{3}{4}W_i = 10{,}2\ \text{эВ}.$$

Ответ: $W_i = 13{,}6$ эВ, $W_{\lambda\max} = 10{,}2$ эВ.

Пример 3. Найти, пользуясь теорией Бора, для первых двух орбит электрона в атоме водорода величину силы Кулона, действующей на электрон, напряженность электрического поля и ускорение электрона.

Дано:	**Решение:**
$n = 1, 2$	Сила Кулона, действующая на электрон в атоме водорода со стороны ядра:
F_K — ? E — ? a — ?	

$$F_K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Репозиторий БГАТУ

Выражая радиус стационарной орбиты через радиус первой боровской орбиты $r = r_1 n^2$, получим формулу квантования силы Кулона в атоме водорода:

$$F_{Kn} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2 n^2}.$$

Подставляя численные значения постоянных и $r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м, получим для первых орбит:

$$F_{K1} = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19})^2 \cdot 9\cdot 10^9}{(0{,}529\cdot 10^{-10})^2} = 81{,}7\cdot 10^{-9}\ (\text{Н}) = 81{,}7\ (\text{нН}),$$

$$F_{K2} = \frac{F_{K1}}{4} = 5{,}11\ (\text{нН}).$$

Напряженность электростатического поля вычисляем по известному определению $E = \frac{F_K}{e}$. Вычисляя, получаем:

$$E_1 = \frac{81{,}7\cdot 10^{-9}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 511\cdot 10^9\ (\text{В/м}) = 511\ (\text{ГВ/м}),\ E_2 = 31{,}9\ \text{ГВ/м}.$$

Центростремительное ускорение электрона находим по второму закону Ньютона: $a = \frac{F_K}{m_e}$. Для первых двух орбит получаем:

$$a_1 = \frac{F_{K1}}{m_e} = \frac{81{,}7\cdot 10^{-9}}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = 9\cdot 10^{22}\ (\text{м/с}^2),\ a_2 = \frac{5{,}11\cdot 10^{-9}}{9{,}11\cdot 10^{-31}} = 0{,}56\cdot 10^{22}\ (\text{м/с}^2).$$

Такое огромное ускорение электронов должно, с точки зрения классической электродинамики, сопровождаться сильным электромагнитным излучением. В результате энергия электронов должна быстро уменьшаться, и они должны упасть на ядро. Поэтому модель атома Резерфорда неустойчива.

Ответ: $F_{K1} = 81{,}7$ нН, $F_{K2} = 5{,}11$ нН; $E_1 = 511$ ГВ/м, $E_2 = 31{,}9$ ГВ/м; $a_1 = 9\cdot 10^{22}$ м/с^2, $a_2 = 0{,}56\cdot 10^{22}$ м/с^2.

III уровень

Пример 4. Частица позитрон является античастицей по отношению к электрону: позитрон имеет массу m_e, равную массе электрона; электрический заряд позитрона по величине совпадает с величиной заряда электрона, но имеет противоположный, следовательно, положительный, заряд, т. е. заряд позитрона равен $+e$. Представим себе «атом», в котором роль ядра выполняет позитрон и присутствует один электрон. Такая система частиц равных масс, но противоположных зарядов называется позитроний.

Применяя теорию Бора, определить минимальные размеры подобной системы.

Решение. Все соотношения теории Бора атома водорода (или водородоподобной системы) получены в предположении, что масса ядра атома намного больше массы электрона, $M_Я >> m_e$, и поэтому центр масс системы совпадает с ядром, которое остается неподвижным. Позитроний является системой частиц одинаковых масс, взаимодействующих друг с другом. В этом случае обе частицы движутся вокруг центра масс системы, который остается неподвижным, так как не действуют внешние силы (закон движения центра масс системы). Данная задача является частным случаем известной задачи двух тел: изучение движения двух тел (частиц) сравнимых масс можно заменить рассмотрением движения одной фиктивной частицы вокруг неподвижного центра; при этом расстояние от этой фиктивной частицы до неподвижного центра равно расстоянию между частицами, а масса фиктивной частицы $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, где m_1, m_2 — массы частиц, составляющих систему. Покажем это. Запишем уравнения движения (II закон Ньютона) для каждой частицы:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12},\ \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21},$$

где $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ — радиус-векторы частиц 1 и 2 (рис. 3.27); $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ — силы взаимодействия частиц. Вычитая второе из написанных выше равенств из первого, получим:

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21}.$$

Но так как по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то

Репозиторий БГАТУ

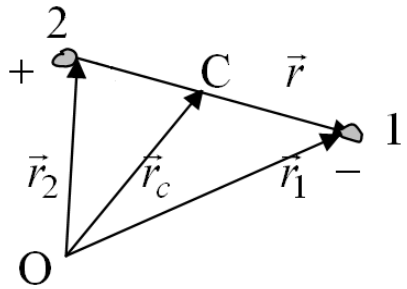

Рис. 3.27. Радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ частиц и радиус-вектор $\vec{r}_C$ центра масс системы этих частиц

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12}.$$

Обозначим $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$ и примем во внимание, что разность векторов $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$ есть вектор $\vec{r}$, направленный от частицы 2 к частице 1. Тогда получим:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} \text{ или } \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12},$$

причем

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Мы видим, что задача о движении системы двух тел (частиц) эквивалентна задаче о движении одной частицы, находящейся на расстоянии r от неподвижного центра и обладающей массой, выраженной через массы частиц системы последней формулой. Масса μ называется *приведенной массой* системы двух частиц.

В нашей задаче $m_1 = m_2 = m_e$, поэтому

$$\mu = \frac{m_e^2}{2m_e} = \frac{m_e}{2},$$

и задача о движении электрона и позитрона сводится к задаче о движении частицы массой $\frac{m_e}{2}$ вокруг неподвижного центра под действием кулоновской силы $\vec{F}_{12}$, величина которой $F_{12} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Для того чтобы, следуя постулатам Бора, определить возможные значения r, т. е. r_n, необходимо решить систему уравнений:

$$\mu u_n r_n = n\hbar,$$

$$\frac{\mu u_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

В результате решения этой системы уравнений получаем (см. формулу (3.12)):

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi e^2 \mu} = \frac{2\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi e^2 m_e}.$$

Минимальное значение расстояния между электроном и позитроном получаем при значении квантового числа $n = 1$:

$$r_{\min} = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 2r_1,$$

где $r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м — радиус первой боровской орбиты. Следовательно, минимальное расстояние между частицами, составляющими позитроний, равно $1{,}058 \cdot 10^{-10}$ м = 106 пм.

Ответ: $r_{\min} = 106$ пм.

Аудиторные задачи

I уровень

1. Определить, насколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м. (На 2,56 эВ)

2. Вычислить энергию фотона, соответствующего минимальной длине волны в ультрафиолетовой серии атома водорода. ($2{,}2 \cdot 10^{-18}$ Дж = 2,2 аДж)

Репозиторий БГАТУ

II уровень

1. Исходя из условия квантования круговых орбит по теории Бора и II закона Ньютона, получить выражения для радиусов стационарных орбит электрона в водородоподобной системе и скорости электрона на стационарной орбите. $\left(r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{Ze^2 m_e \pi}, u_n = \frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 hn} \right)$

2. Найти по теории Бора формулу квантования энергии электрона в водородоподобной системе. Выразить постоянную Ридберга R через физические константы. $\left(W_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}, R = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 ch^3} \right)$

3. Во сколько раз увеличится радиус орбиты электрона в атоме водорода при возбуждении его из основного состояния фотоном энергии 12,09 эВ? (В 9 раз)

4. Определить частоту f вращения электрона по третьей боровской орбите. ($2{,}42 \cdot 10^{14}$ Гц)

5.3.2. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА. ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Длина волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

1. Частице массы m, движущейся со скоростью u, соответствует волновой процесс с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$$

(формула де Бройля, p — импульс частицы).

2. При определении координат и импульса микрочастицы существуют неточности или *неопределенности* их величин, подчиняющиеся соотношению неопределенностей:

$$\Delta x \Delta p_x \approx h,\ \Delta y \Delta p_y \approx h,\ \Delta z \Delta p_z \approx h,$$

где Δx, Δy, Δz — неопределенности координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат.

3. При определении величины энергии микрочастицы в определенном состоянии и времени пребывания ее в этом состоянии выполняется соотношение неопределенностей:

$$\Delta W \Delta t \approx h,$$

где ΔW — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в данном состоянии.

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. Определить длину волны де Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре $T = 290$ К.

Дано:	**Решение:**
$T = 290$ К $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с λ — ?	Средняя квадратичная скорость вычисляется по формуле: $u_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$,

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-24}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Подставляя это выражение в формулу де Бройля, получим:

$$\lambda = \frac{h}{mu_{\text{кв}}} = \frac{h}{\sqrt{3kTm}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-24} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}} = 148\ (\text{пм}).$$

Ответ: 148 пм.

Пример 2. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1 % от ее численного значения. Определить неопределенность координаты электрона. Являются ли электроны в данных условиях квантовыми или классическими частицами?

Репозиторий БГАТУ

Дано:
$U = 1$ кВ $= 10^3$ В
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$\dfrac{\Delta u}{u} = 0{,}001$

Δx — ?

Решение:
Из равенства кинетической энергии электрона и работы электрического поля ускоряющей разности потенциалов U

$$\frac{m_e u^2}{2} = eU$$

находим скорость электрона:

$$u = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

По условию задачи $\Delta u = 0{,}001u$, т. е. $\Delta u << u$ — неопределенность скорости гораздо меньше значения скорости. Следовательно, электрон в условиях задачи является классической частицей. Из соотношения неопределенностей для координаты и импульса получим:

$$\Delta x \approx \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{m_e \Delta u} = \frac{h}{10^{-3} m_e \sqrt{2eU / m_e}} = \frac{h}{10^{-3}\sqrt{2eUm_e}}.$$

Подставляя в полученную формулу численные значения, получим:

$$\Delta x \approx \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}}{10^{-3}\sqrt{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 38{,}8 \text{ (нм)}.$$

Ответ: $\Delta x \approx 4 \cdot 10^{-8}$ м.

II уровень

Пример 3. Параллельный пучок моноэнергетических электронов направлен нормально на узкую щель шириной $b = 1$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем на расстоянии $L = 20$ см от щели, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta l = 48$ мкм.

Дано:
$b = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м
$L = 20$ см $= 0{,}2$ м
$\Delta l = 48$ мкм $= 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ м
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

u — ?

Решение:
I способ. В момент прохождения электроном щели неопределенность его координаты по оси X

$$\Delta x = b$$

(см. рис. 3.7). Из соотношения неопределенностей находим неопределенность проекции импульса электрона на ось X:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} \approx \frac{h}{b}.$$

Ограничимся распределением электронов в области центрального максимума. Тогда неопределенность величины p_x может быть вычислена через величину импульса $p_x = m_e u$ и угол φ, определяющий направление на первый минимум дифракционной картины:

$$\Delta p_x = m_e u \sin\varphi.$$

Из-за малости угла φ можно принять, что $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta l}{2L}$. Воспользовавшись этим, последнее равенство с учетом предыдущего перепишем в виде:

$$\Delta p_x = m_e u \frac{\Delta l}{2L} = \frac{h}{b}$$

и выразим скорость:

$$u = \frac{2hL}{m_e b \cdot \Delta l}.$$

II способ. Рассматривая прохождение электронов через щель как дифракцию волны, соответствующей электронам, запишем условие первого минимума для дифракции на одной щели:

$$b\sin\varphi = \lambda,$$

где в данном случае λ — длина волны де Бройля электрона: $\lambda = \dfrac{h}{m_e u}$. Заменяя $\sin\varphi$ на $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta l}{2L}$, из условия минимума дифракции вновь получим окончательную формулу:

Репозиторий БГАТУ

$$u = \frac{2hL}{m_e b \cdot \Delta l} = \frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}2}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5}} = 606 \text{ (км/с)}.$$

Ответ: u = 606 км/с.

Аудиторные задачи

I уровень

1. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов 500 В, имеет длину волны де Бройля λ = 1,282 пм. Принимая, что заряд этой частицы равен заряду электрона, определить ее массу. ($1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг)

II уровень

1. Параллельный пучок электронов падает перпендикулярно на щель шириной b = 1 мкм. Электроны при прохождении через щель образуют дифракционную картину. Найти расстояние между первыми дифракционными минимумами. Экран расположен перпендикулярно падающему пучку на расстоянии 60 см от щели. Скорость падающих электронов равна $5 \cdot 10^3$ км/с. (4,5 мкм)

2.Моноэнергетический пучок нейтронов падает на кристалл с периодом d = 0,15 мм. Определить скорость нейтронов, если брегговское отражение первого порядка наблюдается, когда угол скольжения θ = 30°. (2,64 км/с)

Волновая функция. Уравнение Шредингера. Частица в одномерной потенциальной яме. Атом водорода по квантовой механике

1. Вероятность нахождения частицы в объеме dV в момент времени t в окрестности точки с координатами x, y, z:

$$dP = \psi\psi^* dV = |\psi|^2 dV,$$

где $\psi = \psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; ψ^* — функция, комплексно сопряженная с ψ; $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ — квадрат модуля волновой функции.

2. Условие нормировки волновой функции (нормировки вероятностей):

$$\int_{\infty} |\psi|^2 dV = 1,$$

где интегрирование ведется по всему бесконечному пространству.

3. Вероятность обнаружения частицы в некотором объеме V:

$$P = \int_V |\psi|^2 dV.$$

4. Среднее значение некоторой физической величины $f(x, y, z)$, зависящей от координат и характеризующей частицу, состояние которой описывается волновой функцией ψ:

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f |\psi|^2 dV;$$

например, среднее значение расстояния от начала координат до частицы:

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r |\psi|^2 dV.$$

5. Общее уравнение Шредингера или уравнение Шредингера со временем:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y, z, t)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

где $\psi(x, y, z, t)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; m — масса частицы; Δ — оператор Лапласа (в декартовой системе координат $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$); $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $U = U(x, y, z, t)$ — потенциальная энергия частицы.

6. Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = W\psi,$$

где $\psi = \psi(x, y, z)$ — координатная часть волновой функции, $\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-\frac{i}{\hbar}Wt}$; $U = U(x, y, z)$ — не зависящая

Репозиторий БГАТУ

от времени потенциальная энергия частицы; W — полная механическая энергия частицы.

7. Волновая функция, описывающая свободное одномерное движение частицы (одномерная волна де Бройля):

$$\psi(x,t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Wt-p_x x)},$$

где A — амплитуда волны де Бройля (или нормирующий множитель); p_x — импульс частицы; полная механическая, а значит, в данном случае кинетическая энергия частицы:

$$W = \frac{p_x^2}{2m}.$$

8. Возможные значения энергии W_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками:

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где a — ширина ямы.

9. Волновые функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n}{a}x.$$

10. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром в водородоподобной системе:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

11. Возможные значения энергии электрона в водородоподобной системе:

$$W_n = -\frac{Zme^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

12. Орбитальный момент импульса (механический орбитальный момент) электрона в атоме водорода:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l — орбитальное (азимутальное) квантовое число, принимающее при заданном значении главного квантового числа n следующие значения: $l = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

13. Проекция орбитального момента импульса на направление внешнего магнитного поля, выбранного за ось Z:

$$L_z = \hbar m,$$

где m — магнитное квантовое число, принимающее при данном l следующие значения: $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm l$.

14. Нормированная волновая функция электрона, находящегося в атоме водорода в состоянии 1s (т. е. в основном состоянии $n = 1$, $l = 0$), или центрально симметричная волновая функция основного состояния:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}e^{-r/r_1},$$

где $r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0{,}529\cdot10^{-10}$ м — радиус первой боровской орбиты.

15. Спин (собственный механический момент импульса) электрона:

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

где $s = \frac{1}{2}$ — спиновое квантовое число.

16. Проекция спина на направление Z внешнего магнитного поля:

$$S_z = \hbar m_s,$$

где m_s — магнитное спиновое квантовое число, $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Репозиторий БГАТУ

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. Определить, во сколько раз орбитальный момент импульса L электрона, находящегося в f-состоянии, больше, чем для электрона в p-состоянии.

Решение. В f-состоянии орбитальное квантовое число $l = 3$. В p-состоянии орбитальное квантовое число $l = 1$.

Величина орбитального момента импульса электрона в атоме водорода выражается через орбитальное квантовое число:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}\,.$$

Следовательно, отношение моментов импульса электрона:

$$\frac{L_f}{L_p} = \frac{\sqrt{3(3+1)}}{\sqrt{1(1+1)}} = \sqrt{6} = 2{,}45\cdot$$

Ответ: 2,45.

II уровень

Пример 1. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний для свободной частицы, движущейся вдоль оси OX, и, решив его, найти волновую функцию свободной частицы. Провести нормировку волновой функции, если ее движение происходит на отрезке $(-L, +L)$.

Решение. На свободную частицу не действует силовое поле, и поэтому потенциальная энергия частицы $U = 0$. С учетом этого стационарное уравнение Шредингера в одномерном случае приобретает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2} = W\psi\,,$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mW}{\hbar^2}\psi = 0\,.$$

В этих выражениях W — кинетическая энергия частицы (потенциальная энергия отсутствует), связанная с импульсом частицы известным соотношением:

$$W = \frac{p^2}{2m},\ \text{откуда}\ 2mW = p^2.$$

Следовательно, уравнение Шредингера записывается в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}\psi = 0\,.$$

Его общее решение имеет вид:

$$\psi(x) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}} + Be^{-i\frac{p}{\hbar}}\,,$$

где первое слагаемое соответствует волне (частице), движущейся в положительном направлении оси OX, а второе — в отрицательном направлении этой оси. Полагаем $B = 0$, так как по условию задачи частица движется вдоль оси. Используя зависимость от времени стационарного решения уравнения Шредингера, окончательно получаем волновую функцию свободной частицы, движущейся вдоль оси OX:

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{Wt}{\hbar}} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Wt-px)}\,.$$

Найдем амплитуду A из условия нормировки в случае, когда частица движется по отрезку оси OX между точками с координатами $-L$, L:

$$\int_{-L}^{L}|\psi|^2\,dx = \int_{-L}^{L}\psi\psi^*dx = \int_{-L}^{L}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Wt-px)}Ae^{\frac{i}{\hbar}(Wt-px)}dx = A^2\int_{-L}^{L}dx = A^2\cdot 2L = 1\,,$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2L}}\cdot$$

Окончательно волновая функция записывается следующим образом:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}e^{-\frac{i}{\hbar}(Wt-px)}\,.$$

Репозиторий БГАТУ

Пример 2. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками находится в возбужденном состоянии, соответствующем квантовому числу $n = 3$. Определить, в каких точках ямы ($0 \le x \le a$) плотность вероятности обнаружения частицы: а) максимальна; б) минимальна.

Решение. Плотность вероятности нахождения частицы в одномерном случае стационарного движения $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Учитывая выражение волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме, имеем:

$$\rho(x) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{\pi n}{a}x = \frac{2}{a}\sin^2\frac{3\pi}{a}x.$$

Для нахождения координат точек, в которых плотность вероятности максимальна и минимальна, необходимо решить задачу на экстремум функции $\rho(x)$. Для решения этой задачи приравниваем производную этой функции к нулю:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{2}{a}\cdot 2\sin\frac{3\pi}{a}x\cdot\cos\frac{3\pi}{a}x\cdot\frac{3\pi}{a} = \frac{6\pi}{a^2}\sin\frac{6\pi}{a}x = 0.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sin\frac{6\pi}{a}x = 0,\ \frac{6\pi}{a}x = m\pi, \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, плотность вероятности нахождения частицы в потенциальной яме шириной a имеет экстремум (максимум или минимум) в точках, координаты которых удовлетворяют равенству

$$x = \frac{ma}{6}.$$

Теперь надо выяснить, какие из точек, удовлетворяющих последнему равенству, являются точками максимума, а какие — минимума функции $\rho(x)$.

Для этого вычислим вторую производную этой функции:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{(6\pi)^2}{a^3}\cos\frac{6\pi}{a}x.$$

В точках экстремума, т. е. в точках с координатами $x = \frac{ma}{6}$, вторая производная равна:

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{(6\pi)^2}{a^3}\cos m\pi.$$

Как известно, в точках, где функция имеет максимум, вторая производная отрицательна. Из последнего равенства следует: $\frac{d^2\rho}{dx^2} < 0$, если $\cos m\pi < 0$, что выполняется при нечетном числе m, т. е. $m = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, координаты максимумов плотности вероятности нахождения частицы в потенциальной яме в энергетическом состоянии, определяемом квантовым числом $n = 3$:

$$x_{\max} = \frac{ma}{6} = \frac{(2k+1)a}{6};$$

$$k = 0,\ x_{\max 1} = \frac{a}{6},$$

$$k = 1,\ x_{\max 2} = \frac{a}{2},$$

$$k = 2,\ x_{\max 3} = \frac{5}{6}a.$$

В точках, где функция имеет минимум, ее вторая производная положительна. $\frac{d^2\rho}{dx^2} > 0$, если $\cos m\pi > 0$, что выполняется при четном числе m, т. е. $m = 2k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Координаты минимумов плотности вероятности нахождения частицы в потенциальной яме в энергетическом состоянии, определяемом квантовым числом $n = 3$:

$$x_{\min} = \frac{ma}{6} = \frac{2ka}{6};$$

Репозиторий БГАТУ

$$k = 0,\ x_{\min 1} = 0,$$

$$k = 1,\ x_{\min 2} = \frac{a}{3},$$

$$k = 2,\ x_{\min 3} = \frac{2}{3}a,$$

$$k = 3,\ x_{\min 4} = a.$$

Полученные результаты иллюстрируются рисунком 3.24.

Ответ: $x_{\max} = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5}{6}a;\ x_{\min} = 0, \frac{a}{3}, \frac{2}{3}a, a$.

Пример 3. Волновая функция электрона в атоме водорода в состоянии 1*s* имеет вид $\psi_{100}(r) = a_1 e^{-r/r_1}$, где r_1 = 0,529 · 10^{-10} м — радиус первой боровской орбиты; a_1 — нормировочный множитель. Найти величину a_1 из условия нормировки.

Решение. По условию нормировки:

$$\int_{\infty} |\psi|^2 dV = 1,$$

где интегрирование проводится по всему бесконечному объему. В данном случае волновая функция электрона в атоме водорода зависит только от расстояния *r* от начала координат, где находится ядро атома, до любой точки пространства, где определена волновая функция. Задача имеет центральную симметрию и рассматривается в сферической системе координат, в которой элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$. Поэтому общее условие нормировки в данном случае имеет вид:

$$\int_{\infty} |\psi|^2 dV = 4\pi \int_0^{\infty} |\psi|^2 r^2 dr = 4\pi \int_0^{\infty} a_1^2 e^{-2r/r_1} r^2 dr = 4\pi a_1^2 \int_0^{\infty} e^{-2r/r_1} r^2 dr = 1.$$

Интеграл вычисляем по частям, пользуясь известным равенством: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$. В искомом интеграле обозначаем $r^2 = u$,

$e^{-2r/r_1} dr = dv$. Тогда получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-2r/r_1} r^2 dr = r_1 \int_0^{\infty} e^{-2r/r_1} r dr.$$

Записанный в последнем выражении интеграл еще раз вычисляем по частям, обозначая $r = u$, $e^{-2r/r_1} dr = dv$. Получаем $\int_0^{\infty} e^{-2r/r_1} r dr = \frac{r_1^2}{4}$.

Подставляя вычисленные интегралы в условие нормировки, получим:

$$\frac{4\pi a_1^2 r_1^3}{4} = 1, \text{ откуда } a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}.$$

Следовательно, нормированная волновая функция электрона в атоме водорода в состоянии 1*s* имеет окончательный вид:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}.$$

Ответ: $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}}$.

Аудиторные задачи

II уровень

1. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной *a* = 200 пм с бесконечно высокими стенками. Определить: а) минимальную энергию электрона; б) в состоянии, характеризуемом квантовым числом *n* = 4 вероятность обнаружения электрона в первой четверти ямы. ($W_{\min}$ = 1,5 · 10^{-18} Дж; *P* = 0,25)

2. Нормированная волновая функция, описывающая 1*s*-состояние

Репозиторий БГАТУ

электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r — расстояние от электрона до ядра; r_1 — радиус первой боровской орбиты. Определить: а) вероятность dP обнаружения электрона на расстояниях от r до $r + dr$ от ядра; б) расстояние от ядра, на котором электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью. $\left(dP = \frac{4}{r_1^3} r^2 e^{-2r/r_1} dr,\ r_{\max} = r_1 \right)$

3. 1s-электрон атома водорода, поглотив фотон с энергией W = 12,1 эВ, перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Определить изменение момента импульса ΔL орбитального движения электрона.

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

I уровень

1. Обобщенная формула Бальмера.
2. Условие квантования круговых орбит по Бору.
3. Второй постулат Бора.
4. Длина волны де Бройля частицы.
5. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.
6. Возможные значения энергии частицы в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме.
7. Возможные значения орбитального квантового числа состояния электрона в атоме при значении главного квантового числа n.
8. Спиновый (собственный) магнитный момент электрона в атоме.
9. **Задача.** Оценить с помощью соотношения неопределенностей неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $l \approx 0{,}1$ нм. Сравнить полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите данного атома.

II уровень

1. Найти кратность вырождения состояний электрона в атоме водорода (без учета спина).
2. Найти волновую функцию частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме.

III уровень

Найти решение общего уравнения Шредингера (уравнения Шредингера со временем) для свободной частицы.

Репозиторий БГАТУ

МОДУЛЬ 9

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ И ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

1. КОМПЛЕКСНАЯ ЦЕЛЬ МОДУЛЯ

Студент должен:

1) **знать** (описывать и формулировать) ***понятия и определения***: фермионы и бозоны, распределение Ферми–Дирака, распределение Бозе–Эйнштейна, принцип Паули, температура Ферми, энергия Ферми, работа выхода электрона из металла, потенциальная, кинетическая и полная энергии электронов внутри металла, потенциальная яма, потенциал выхода, законы Вольта, явление Зеебека, явление Пельтье, явление Томсона, электропроводность полупроводников, собственная проводимость полупроводников, примесная проводимость полупроводников, график функции распределения Ферми–Дирака, энергетическая диаграмма и уровень Ферми для полупроводника с собственной проводимостью, примесные уровни и уровень Ферми в примесных полупроводниках, фотопроводимость полупроводников, контактная разность потенциалов, вольтамперная характеристика *p*–*n*-перехода, ядерные силы, модели ядра, спин ядра и его магнитный момент, радиоактивное излучение и его виды, схемы распада ядер, законы радиоактивного распада, ядерные реакции, реакция деления ядра, реакция синтеза атомных ядер;

2) **характеризовать и доказывать**: отличие квантовых статистик от классической статистики, график функции распределения Ферми–Дирака для электронного газа в металле при различных температурах, деление твердых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники с точки зрения зонной теории, выражение и график зависимости от температуры для удельной проводимости собственного полупроводника, выражение для удельной проводимости примесных полупроводников и график ее зависимости от температуры, применение полупроводников, энергетические зоны до контакта и при контакте электронного и дырочного полупроводников, выпрямляющее действие *p*–*n*-перехода, изменение энергетических зон при пропускном и запорном подключениях *p*–*n*-перехода;

Репозиторий БГАТУ

3) **моделировать и прогнозировать**: образование энергетических зон в кристаллических телах, рисунки потенциальных ям до контакта и при контакте, внешнюю и внутреннюю контактные разности потенциалов, причины возникновения термоЭДС, проблемы управляемых термоядерных реакций, проблемы ядерной энергетики;

4) **уметь**:

— ***конспектировать*** рассматриваемый материал;

— ***описывать*** поведение системы квантовых ферми-частиц;

— ***использовать*** полученные знания при описании электронов проводимости в средах с различными типами проводимости;

— ***проводить*** численный эксперимент по определению термодинамических характеристик металлов, полуметаллов, полупроводников.

2. БАЗОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДУЛЯ

Отличие квантовых статистик от классической статистики. Принцип Паули. Распределение Ферми–Дирака для электронного газа в металле. График функции распределения при различных температурах. Температура Ферми. Энергия Ферми. Фермионы и бозоны. Понятие о зонной теории твердых тел. Образование энергетических зон в кристаллических телах. Деление твердых тел на металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории. Работа выхода электрона из металла. Потенциальная, кинетическая и полная энергии электронов внутри металла, потенциальная яма. Потенциал выхода. Контакт двух металлов. Рисунки потенциальных ям до контакта и при контакте. Внешняя и внутренняя контактные разности потенциалов. Законы Вольта. Причины возникновения термоЭДС. Вывод формулы для определения термоЭДС по квантовой теории. Явление Зеебека. Термопары. Явление Пельтье. Явление Томсона.

Собственная проводимость полупроводников. Носители заряда — электроны и дырки. График функции распределения Ферми–Дирака. Энергетическая диаграмма и уровень Ферми для полупроводника с собственной проводимостью. Выражение и график зависимости от температуры для удельной проводимости собственного полупроводника. Примесная проводимость полупроводников. Графики функции распределения электронов по энергетическим уровням. Энергетические диаграммы. Примесные уровни и уровень Ферми в примесных полупроводниках. Выражение для удельной проводимости примесных полупроводников и график ее зависимости от температуры. Применение полупроводников. Контактная разность потенциалов. Энергетические зоны до контакта и при контакте электронного и дырочного полупроводников. Выпрямляющее действие *p*–*n*-перехода. Изменение энергетических зон при пропускном и запорном подключениях *p*–*n*-перехода. Вольтамперная характеристика *p*–*n*-перехода.

Репозиторий БГАТУ

Состав атомного ядра. Энергия связи и масса ядра. Ядерные силы. Модели ядра. Спин ядра и его магнитный момент. Радиоактивное излучение и его виды. Схемы распада ядер. Законы радиоактивного распада. Ядерные реакции. Реакция деления ядра. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций. Проблемы ядерной энергетики.

Фотопроводимость полупроводников. Собственная и примесная фотопроводимости. Зависимость фотопроводимости от длины волны. Красная граница фотопроводимости. Фоторезисторы (фотосопротивления).

3. УЧЕБНО-ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ МОДУЛЯ

Номер и тема занятия	Тип занятия	Вид занятия	Кол-во часов
Занятие 1. Элементы квантовой статистики и зонной теории твердых тел. Элементы физики атомного ядра	Знакомство с новым материалом	Лекция	6
Занятие 2. Элементы квантовой статистики и зонной теории твердых тел. Элементы физики атомного ядра	Углубление, обобщение	Управляемая самостоятельная работа студентов	2
Занятие 3. Электропроводность полупроводников. Термоэлектродвижущая сила	Обобщение, систематизация, предварительный контроль	Лабораторное занятие	4
Занятие 4. Элементы квантовой статистики и зонной теории твердых тел. Элементы физики атомного ядра	Итоговый контроль	Контрольное занятие	1

Репозиторий БГАТУ

4. НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.1. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

4.1.1. НОВЫЕ ПОНЯТИЯ

1. ***Фазовое пространство*** — воображаемое пространство, используемое для описания состояния систем микроскопических частиц посредством задания положения частицы в данный момент времени с помощью трех проекций радиус-вектора и трех проекций составляющих импульса каждой частицы.

2. ***Размерность фазового пространства*** — количество независимых координат, необходимых для однозначного определения всех частиц системы.

3. ***Микроскопическое состояние системы частиц*** — способ описания системы частиц, при котором пространственное положение и импульс каждой частицы системы известны в любой момент времени.

4. ***Точка фазового пространства*** — отображение микроскопического состояния классической системы в виде радиус-вектора одной точки многомерного пространства, проекции которого на оси координат дают представление о координатах и импульсах всех частиц системы в реальном трехмерном пространстве.

5. ***Макроскопическое состояние системы частиц*** — способ описания состояния системы с использованием статистических методов усреднения действия большого количества частиц как совокупного комплексного отклика на вероятностной основе, характеризуемого макроскопическими параметрами состояния (температурой, энергией, давлением, плотностью и т. д.) при данных внешних условиях.

6. ***Соотношение неопределенностей Гейзенберга*** — базовое понятие квантовой механики о невозможности описания положения частицы в фазовом пространстве с одновременным сколь угодно

точным заданием ее координаты и проекции импульса на эту координату.

7. ***Элементарная ячейка фазового пространства*** — минимальный объем фазового пространства, требуемый для описания положения частицы в окрестности некоторой локальной области.

8. ***Принцип запрета Паули*** — недопустимость двум и более ферми-частицам находиться в пределах одной элементарной ячейки фазового пространства, то есть иметь одинаковые состояния.

9. ***Принцип тождественности квантовых частиц*** — положение квантовой механики о нецелесообразности микроскопического описания состояния системы с требованием контроля за поведением каждой из частиц, поскольку совокупное их действие на макроскопическом уровне описывается вероятностными закономерностями и усредняется по большому числу частиц. В системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке местами двух любых частиц.

10. ***Квантовая статистика*** — метод описания макроскопических систем из большого числа частиц на основе вероятностных принципов, позволяющий представлять макроскопическое состояние системы, которое возможно зарегистрировать приборами, как результат усреднения воздействия большого числа частиц во времени и пространстве.

11. ***Распределение Ферми–Дирака*** — статистический метод описания систем из большого числа частиц с полуцелым спином (электроны, протоны, нейтроны).

12. ***Распределение Бозе–Эйнштейна*** — статистический метод описания систем из большого числа частиц с целым или нулевым спином (фотоны, фононы).

13. ***Химический потенциал*** — энергетическая характеристика системы, состоящей из большого количества частиц, позволяющая на основе распределений в рамках классической и квантовой статистик получить вероятности заполнения ячеек фазового пространства частицами системы.

14. ***Металлы*** — материалы, хорошо проводящие электрический ток. Химический потенциал металлов расположен в середине зоны разрешенных значений энергии, электроны способны получать энергию от электрического поля, переходить на более высокий уровень энергии и участвовать в переносе заряда.

Репозиторий БГАТУ

15. ***Диэлектрик*** — материал, не проводящий электрический ток. Нижняя зона разрешенных значений энергии электронов полностью занята. Следующая зона разрешенных значений энергии свободна. Эти зоны разделены зоной запрещенных значений энергии электронов. Ширина зоны запрещенных значений энергии велика по сравнению с энергией тепловых колебаний и составляет 5–10 эВ.

16. ***Полупроводник*** — материал, при температурах больше абсолютного нуля способный проводить электрический ток. Качественно по структуре и заполнению энергетических зон полупроводник похож на диэлектрик с той разницей, что ширина зоны запрещенных значений энергии составляет 0,2–1,5 эВ.

17. ***Собственные полупроводники*** — материалы, не содержащие примесей. Химический потенциал расположен на середине зоны запрещенных значений энергии.

18. ***Донорная примесь*** — примесные атомы, валентность которых больше валентности основного атома кристаллической решетки полупроводника.

19. ***Акцепторная примесь*** — примесные атомы, валентность которых меньше валентности основного атома кристаллической решетки полупроводника.

20. ***Ионизация донорной примеси*** — переход избыточного электрона, не задействованного в химической связи (например, пятого электрона мышьяка), в зону проводимости с образованием свободного носителя заряда (в германии, легированном мышьяком). Донорный атом при этом обретает положительный заряд.

21. ***Ионизация акцепторной примеси*** — захват примесным атомом (например, бор, алюминий) электрона, недостающего для образования химической связи с четырьмя окружающими атомами германия. Недостающий электрон захватывается из химической связи соседнего атома германия. Акцепторный атом заряжается отрицательно. Атом германия, отдавший электрон акцептору, называется дыркой.

22. ***Работа выхода*** — энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы он покинул проводящий материал и вышел наружу с нулевой кинетической энергией.

23. ***Термоэлектродвижущая сила*** — характеристика проводящих сред, описывающая сторонние электрические силы тепловой природы. Имеет размерность В/К.

24. ***Контактная разность потенциалов*** — появление электрических зарядов и разности потенциалов на границе двух разнородных проводящих тел при их контакте.

25. ***Эффект Пельтье*** — выделение либо поглощение тепла при протекании тока через границу раздела двух разнородных проводников.

26. ***Эффект Томсона*** — обратимое выделение тепла в проводнике, имеющем градиент температуры.

27. ***Нуклоны*** — элементарные частицы (нейтрон, протон), входящие в состав ядра атома.

28. ***Массовое число*** — число нуклонов в ядре атома.

29. ***Атомная единица массы*** — одна двенадцатая массы изотопа углерода ^{12}C, равная $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

30. ***Изотопы*** — химические элементы, имеющие одинаковое зарядовое число.

31. ***Дефект массы*** — отличие массы ядра от суммы масс нуклонов, входящих в ядро.

32. ***Радиоактивность*** — переход неустойчивых изотопов к устойчивой модификации с испусканием энергии в виде частиц или квантов излучения.

Репозиторий БГАТУ

4.2. ОСНОВНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

4.2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ СТАТИСТИК

Для описания систем с большим количеством частиц (атомов, молекул, электронов и др.) используются как *микроскопические*, так и *статистические* методы. При этом применяют не трехмерное пространство, задающее координаты частицы, а воображаемое фазовое пространство, задающее и координаты, и проекции импульса частицы на соответствующие координаты.

При микроскопическом описании размерность фазового пространства определяется суммой независимых проекций радиус-вектора и импульса (x, y, z и p_x, p_y, p_z) на оси системы координат, которые однозначно определяют положение всех частиц системы. Для системы из N частиц требуется $6N$ координат, т. е. размерность фазового пространства равна $6N$. Если задать набор из $6N$ чисел, то этот набор определяет состояние системы, эквивалентное положению одной точки в фазовом пространстве. Движение «точки–состояния» по траектории в фазовом пространстве означает переход классической системы из этой точки фазового пространства в другую точку и отражает изменение микросостояния системы, эквивалентное динамическому описанию в механике Ньютона.

При статистическом способе описания, усредняющем действие большой совокупности частиц, размерность фазового пространства не зависит от количества частиц в системе и равна 6, что облегчает процедуру анализа. Макроскопические свойства классических частиц (идеальный газ) описывают с помощью статистики Максвелла–Больцмана, которая позволяет оценить долю частиц, находящихся в окрестности точки фазового пространства с координатами x, y, z и p_x, p_y, p_z.

Микрочастицы, из которых состоят тела, при определенных условиях проявляют волновые свойства, и в этом случае для описания их движения классическая механика непригодна, поскольку такие частицы движутся по законам волновой механики и описываются *квантовой статистикой*.

Для квантовых частиц, находящихся внутри некоторого замкнутого объема, также применяют понятие фазового пространства с координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z. Примером являются электроны проводимости в металле. Для электронов, находящихся в несвободном состоянии внутри атома, координатное и импульсное пространство заменяется набором четырех квантовых чисел — главного, орбитального, магнитного и спинового.

Отличие квантовых частиц от классических в том, что в связанном, несвободном состоянии — движение внутри металла, движение в пределах атома и т. д. — разрешенные уровни энергии (электронов) расположены дискретно. Между разрешенными значениями энергии лежат запрещенные значения энергии.

На одну классическую частицу приходится объем фазового пространства, равный нулю, поскольку как координаты, так и импульсы можно задать абсолютно точно (неопределенность задания координат и импульсов dx, dy, dz, dp_x, dp_y, dp_z равна нулю: $dx = dy = dz = dp_x = dp_y = dp_z = 0$).

Положение каждой из квантовых частиц можно задать только в пределах конечного (не нулевого по величине) шестимерного кубика со стороной вдоль каждой переменной dx, dy, dz, dp_x, dp_y, dp_z. Минимальный элементарный объем dV, в пределах которого находится квантовая частица, называют *элементарной ячейкой*. $dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z = \hbar^3$ (рис. 4.1).

Учитывая принцип неопределенности Гейзенберга ($\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar$), можно сказать, что два состояния электрона с координатами x, y, z; p_x, p_y, p_z и $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $p_x + dp_x$, $p_y + dp_y$, $p_z + dp_z$ *считаются не различимыми*, если они попадают внутрь фазового объема dV размером $\hbar^3$. То есть в объеме $dV = \hbar^3$ хватает места для расположения только одного электрона.

Принцип тождественности одинаковых частиц: в системе одинаковых частиц реализуются только такие состояния, которые не меняются при перестановке местами двух любых частиц. Например, при существовании в системе электрона 1 и электрона 2 макроскопическое поведение системы будет одинаковым, если в данном элементарном объеме будет находиться либо электрон 1, либо электрон 2. Таким образом, в элементарном объеме шестимерного фазового пространства dV электрон может находиться

Репозиторий БГАТУ

в одном из нескольких состояний, то есть иметь любой из нескольких наборов значений координат x, y, z и импульсов p_x, p_y, p_z, только если этот элементарный объем больше элементарной ячейки:

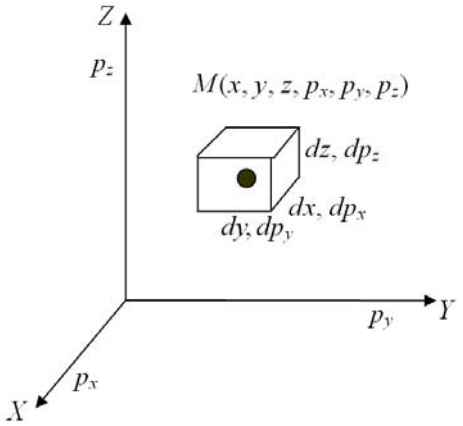

Рис. 4.1. Элементарная ячейка *фазового пространства* для квантовых микрочастиц. В данный момент времени частица достоверно находится в какой-либо из точек в пределах элементарной ячейки, точнее определить ее положение невозможно

$$dV > \hbar^3. \qquad (4.1)$$

Поэтому в квантовой статистике фазовое пространство складывается из *элементарных ячеек* с объемом $\hbar^3$, вмещающих только один электрон. Соответственно, электрон, находящийся в пределах одной элементарной ячейки, считается имеющим один набор проекций координат и импульсов, отвечающих одному состоянию. Переход электрона из одной ячейки объемом $\hbar^3$ в другую означает, что он *изменил свое состояние*.

Отличие квантовой статистики от классической в том, что:

— квантование состояний систем из множества частиц обуславливает ячеистое построение фазового пространства;

— неразличимость тождественных частиц допускает перестановку частиц внутри фазового объема без образования нового состояния системы;

— в классической физике распределение частиц по энергиям предполагает, что значение энергии ε может иметь неограниченное число частиц.

Классическое распределение Максвелла–Больцмана

$$f(\varepsilon) = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \qquad (4.2)$$

дает вероятность $f(\varepsilon)$ того, что из какого-то числа N частиц определенная их часть имеет энергию ε.

В квантовой статистике функция распределения $f(\varepsilon)$ показывает *вероятность* заполнения элементарной ячейки с энергией ε частицами, т. е. *вероятность нахождения частиц в состоянии с энергией* ε:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \pm 1}. \qquad (4.3)$$

— Знак «минус» применяют для *бозонов* (фотонов, фононов) — частиц с целочисленным спином: $S = 0, 1, 2, \ldots$. Для бозонов количество частиц, которые находятся в одинаковом состоянии, может быть произвольным: $0 \le n \le \infty$ (*статистика Бозе–Эйнштейна*).

— Знак «плюс» применяют для *фермионов* (электронов, протонов, нейтронов), то есть частиц с нецелочисленным спином $S = \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}, \ldots$, которые подчиняются *принципу запрета Паули* (*распределение Ферми–Дирака*).

Если изменение внутренней энергии dU происходит путем передачи теплоты δQ, выполнения работы $\delta A = PdV$ и путем обмена частицами с окружением, то элементарное приращение dU следует записать: $dU = TdS - PdV + \mu dn$. Величина μ — *химический потенциал* — есть изменение внутренней энергии, приходящееся на одну частицу при изохорноизоэнтропийном процессе (V = const, S = const). Иначе, химический потенциал равен свободной энергии одной частицы:

$$\mu = \left(\frac{dU}{dn}\right)_{V,S}. \qquad (4.4)$$

В соответствии с принципом Паули в пределах элементарной ячейки не могут находиться больше двух электронов. Элементарная

Репозиторий БГАТУ

ячейка так выбрана, что вмещает только один электрон. В металле не может существовать двух электронов, которые бы находились в окрестности точки с координатами x, y, z, p_x, p_y, p_z. В атоме два электрона не могут иметь одинаковые квантовые числа (n, l, m, s) (рис. 4.2).

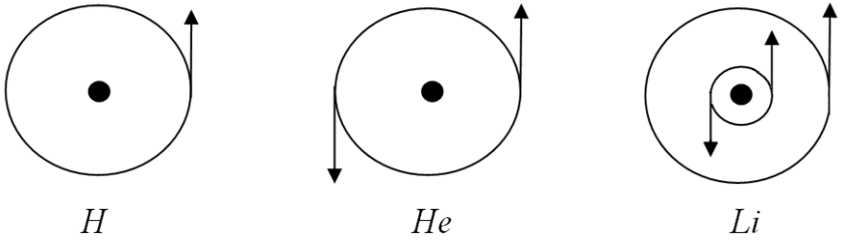

Рис. 4.2. Проявление принципа запрета Паули о недопустимости нахождения двух и более электронов в одном состояния. У атома водорода на орбите один электрон, и принцип Паули не задействован в построении конфигурации электронной оболочки. У атома гелия два электрона, они имеют одинаковый набор квантовых чисел n, l, m, но различаются спиновым числом — проекцией спина на выделенное направление (ось Z) +1/2 и –1/2 (стрелка). Для атома лития электроны различаются не только по проекции спинового числа, но и по главному квантовому числу, задающему номер орбиты

Функция Ферми–Дирака для газа свободных электронов металла:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}. \qquad (4.5)$$

Формула (4.5) показывает, сколько в среднем электронов приходится на одно квантовое состояние с энергией ε. В металле, содержащем большое количество свободных электронов, функция Ферми–Дирака позволяет определить число электронов, занимающих энергетические уровни от минимального до максимального при некоторой температуре T.

Для свободных электронов в металле химический потенциал связан с энергией Ферми ε_F. Энергия Ферми есть наивысший занятый уровень энергии при $T = 0$ К. Химический потенциал при $T = 0$ К равен энергии Ферми.

Таким образом, функция распределения Ферми–Дирака $f(\varepsilon)$ описывает заполнение элементарных ячеек фазового пространства системой из большого числа ферми-частиц и:

— показывает вероятность нахождения электронов в состоянии с энергией ε;

— дает среднюю заселённость электронами состояний с заданным значением энергии ε.

В *основном* устойчивом состоянии ($T = 0$ К) энергия системы *минимальна*. При этом электроны как ферми-частицы в соответствии с принципом запрета Паули занимают уровни энергии, начиная с наименьшей энергии. На каждом находится два электрона с различными значениями проекции спина на выделенное направление, ось Z (+1/2 и –1/2) (рис. 4.3).

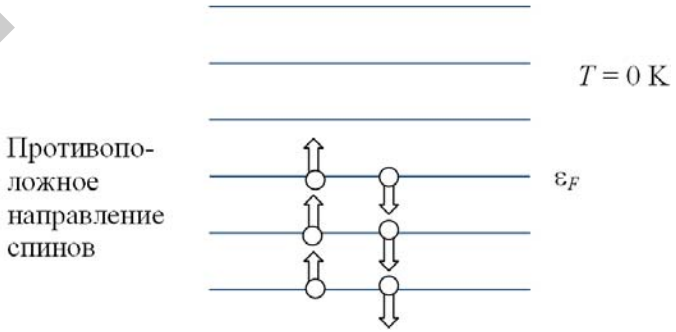

Рис. 4.3. Пример заполнения уровней энергии ферми-частицами (электроны проводимости в металле), составляющими квантовую систему

При $T = 0$ К существует резкая граница между областью заполненных уровней и областью свободных уровней энергии. Докажем это положение рассмотрев подробнее распределение $f(\varepsilon)$ (4.5). Для $T = 0$ существует два варианта заполнения уровней энергии свободными электронами:

1. Если $\varepsilon \le \varepsilon_F$, из формулы (4.5) следует, что $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$,

$f(\varepsilon) = \frac{1}{0+1} = 1$ — т. е. вероятность заполнения такого уровня равна 1.

Репозиторий БГАТУ

При T = 0 К в электронном газе заполнены электронами все энергетические уровни, которые лежат ниже, чем ε_F.

2. Если $\varepsilon > \varepsilon_F$, то $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{0}} = e^{\infty} = \infty$ и $f(\varepsilon) = 0$ — т. е. вероятность заполнения уровня с энергией $\varepsilon > \mu$ при $T = 0$ К равна 0.

Для любых $T \neq 0$ К:

1. Если $\varepsilon = \mu$, то $e^0 = 1$ и $f(\mu) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ — это значит, что вероятность заполнения уровня энергии, отвечающего химическому потенциалу, равна 0,5. При любых температурах данный уровень энергии занят наполовину.

2. Если $\varepsilon < \mu$, то $f(\varepsilon) > \frac{1}{2}$.

3. Если $\varepsilon > \mu$, то $f(\varepsilon) < \frac{1}{2}$.

4. Если $\varepsilon << \mu$, то $f(\varepsilon) = 1$.

5. Если $\varepsilon >> \mu$, то $f(\varepsilon) = 0$.

В промежутке значений энергии порядка kT распределение электронов около ε_F при $T \neq 0$ К отличается от распределения при T = 0 К. Уровни энергии ниже, чем μ, частично опустошаются, потому что некоторые электроны приобретают энергию теплового движения и размещаются выше над μ. Их количество описывается не резким переходом в виде ступеньки, а «хвостом» кривой распределения (рис. 4.4).

Энергия Ферми как наивысший из заполненных электронных уровней при $T = 0$ *К* определяется выражением:

$$\varepsilon_F = \mu = \frac{\hbar^2 \left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}}{2m}, \qquad (4.6)$$

где m — масса свободного электрона; n — концентрация электронов (число электронов, приходящихся на единицу объема).

Используя эти фундаментальные константы и полагая, что число свободных электронов проводимости в металле определяется валентностью атома, можно, определив концентрацию электронов (используя плотность металла и его молярный вес), рассчитать энергию Ферми.

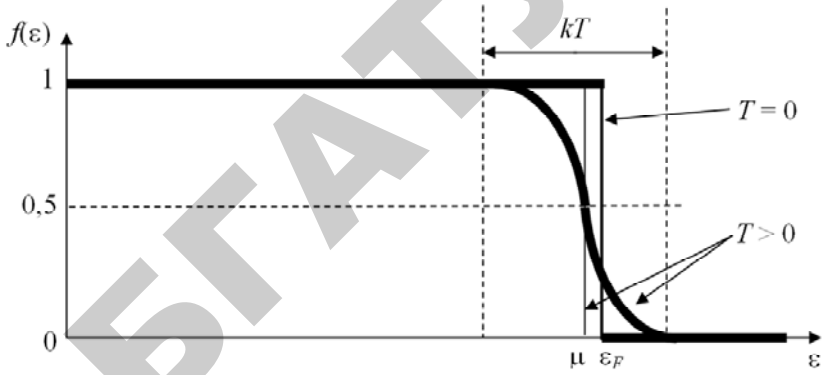

Рис. 4.4. Пример поведения вероятности заполнения уровней энергии (ячеек фазового пространства) электронами в металле в зависимости от величины энергии. При T = 0 К функция имеет вид резкой ступеньки. При $T \neq 0$ К ступенька размыта (размытие завышено по сравнению с величиной энергии Ферми)

С повышением температуры химический потенциал опускается в область меньших значений энергии (рис. 4.4).

$$\mu\left(T \neq 0\right) = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2 \left(kT\right)^2}{12\varepsilon_F{}^2}\right). \qquad (4.7)$$

При умеренных температурах, когда размытие ступеньки Ферми невелико, большая часть электронов имеет одинаковое значение энергии, близкое к энергии Ферми. Это означает, что состояние электронного газа вырожденное.

С повышением температуры распределение Ферми видоизменяется: понижается химический потенциал. Понижение тем сильнее, чем меньше энергия Ферми, т. е. чем меньше концентрация электронов. Для нормальных металлов ε_F составляет порядка одного электрон-вольта, для полуметаллов (плотность электронного газа в тысячу раз меньше, чем в металлах) величина энергии Ферми — порядка сотых долей электрон-вольта.

В результате повышение температуры приводит к размытию ступеньки Ферми. При больших температурах в системах с малым числом электронов размытие может достичь размеров самой энергии Ферми (рис. 4.5).

Репозиторий БГАТУ

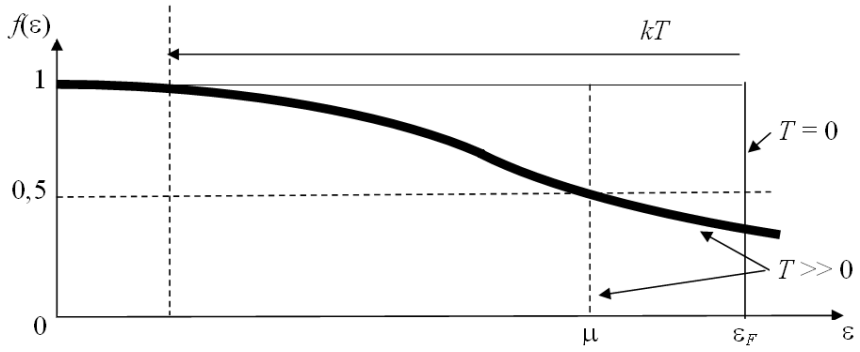

Рис. 4.5. Пример поведения функции Ферми–Дирака при больших температурах, когда размытие ступеньки становится порядка самого значения энергии Ферми

В подобных обстоятельствах выполняется условие $\varepsilon - \mu >> kT$. Соответственно, в распределении Ферми–Дирака экспонента в знаменателе становится большой по сравнению с единицей, $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} >> 1$, как следствие, приходим к распределению Максвелла–Больцмана. Действительно, легко видеть, что $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}} = e^{-\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} = e^{\frac{-\varepsilon}{kT}} e^{\frac{\mu}{kT}} = Ae^{\frac{-\varepsilon}{kT}}$, где ε — энергия данного состояния; A — нормировочная постоянная, содержащая химический потенциал.

Химический потенциал сильно опускается, вероятность заполнения ячеек фазового пространства свободными электронами в проводнике меньше единицы почти во всем диапазоне значений энергии.

Следовательно, при больших температурах распределение Ферми–Дирака переходит в распределение Максвелла–Больцмана. Различие между классической и квантовой статистиками исчезает, если выполняется неравенство: $e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} >> 1$. Газы частиц, которые подчиняются классической статистике, называются *невырожденными*, и записанное неравенство является условием нарушения вырождения электронного газа.

Температура Ферми

Зная величину энергии Ферми, можно определить температуру Ферми T_F, выше которой состояние частиц следует описывать методами классической статистики. Поэтому температуру вырождения можно определить из условий: $kT_в = \varepsilon_F$ или $T_в = T_F$.

Если рассмотреть среднюю энергию, приходящуюся на одну частицу в классическом $\langle\varepsilon\rangle_{кл}$ и квантовом $\langle\varepsilon\rangle_{кв}$ приближениях, то можно увидеть, что эти энергии существенно различаются. В классическом приближении средняя энергия одного электрона $\langle\varepsilon\rangle_{кл}$ записывается как и для идеального газа (воздух при нормальных условиях) $\langle\varepsilon\rangle_{кл} = \frac{3}{2}kT$. Поскольку в квантово-механическом приближении электроны заполняют все уровни энергии снизу доверху, то энергия, которой обладают электроны на низших уровнях, значительно меньше, чем энергия электронов на более высоких уровнях. Чтобы определить $\langle\varepsilon\rangle_{кв}$, необходимо просуммировать энергии всех уровней, учитывая, что на каждом уровне находится по два электрона, и разделить на общее число электронов. Для квантового газа электронов в металле $\langle\varepsilon\rangle_{кв}$, как показывают расчеты (рис. 4.6):

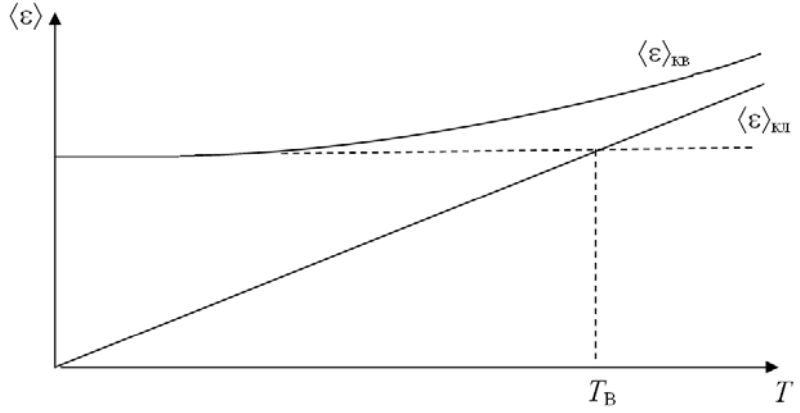

Рис. 4.6. Температурная зависимость средней энергии, приходящейся на один электрон в металле, в приближении классической и квантовой теорий. При температурах $T << T_в$ средняя энергия $\langle\varepsilon\rangle_{кв} >> \langle\varepsilon\rangle_{кл}$

Репозиторий БГАТУ

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{кв}} = \frac{3}{5}\varepsilon_F \left(1 + \frac{5}{12}\frac{\pi^2 k^2 T^2}{\varepsilon_F^2}\right). \qquad (4.8)$$

Определим температуру вырождения электронного газа через параметры задачи, используя условие (4.8):

$$\frac{3}{5}\varepsilon_F \left(1 + \frac{5}{12}\frac{\pi^2 k^2 T^2}{\varepsilon_F^2}\right) = \frac{3}{2}kT \text{ или } T_{\text{в}} \approx \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{km}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (4.9)$$

Для электронного газа в металле $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, $n = 6 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$. Для электронов в металле $T_{\text{в}} \approx 10^4$ К. Переход к невырожденному состоянию выполняется при температурах, больших, чем $T_{\text{в}}$. Это означает, что при заданной плотности (свободные электроны в металле) электронный газ при любых температурах вплоть до температуры плавления вырожден, на каждом из уровней энергии в пределах размытия ступеньки Ферми находится большое количество электронов.

В полупроводниках концентрация электронов значительно меньшая, чем в металлах ($n_{Ge} = 10^{22}$ м$^{-3}$), и соответственно, температура вырождения уменьшается ($T_{\text{в}} = 1$ К). В полупроводниках почти во всем диапазоне температур, включая комнатную, электроны являются невырожденным газом и подчиняются классической статистике Максвелла–Больцмана, и только при температурах $T < 1$ К электроны полупроводника становятся вырожденным электронным газом и описываются статистикой Ферми–Дирака.

Квантовая теория смогла объяснить, почему теплоёмкости металлов и диэлектриков приблизительно равны, при том, что металл всегда кажется более холодным по сравнению с, например, деревом, если прикасаться к ним рукой. Причиной этого является ничтожная теплоемкость электронного газа в металлах при достаточно большой его теплопроводности. Теплоемкость электронного газа очень мала по сравнению с теплоемкостью идеального газа.

Тепловая энергия может возбудить только электроны, находящиеся на самых верхних уровнях, примыкающих к уровню Ферми. Основная масса электронов, размещенных на более глубоких уровнях энергии, поглощать энергию при нагревании не будет, т. к. не сможет перейти на более высокие соседние уровни согласно принципу запрета Паули, а для перехода на свободные уровни им не

хватит энергии. Нагревание металла сопровождается переходом электронов с уровней, примыкающих к уровню Ферми, на уровни, лежащие выше него. Кривая распределения Ферми–Дирака при $T > 0$ вблизи уровня Ферми станет более плавной, размытой, причем область размытости имеет ширину порядка kT (рис. 4.4). Т. о., в процессе нагревания металла будет участвовать доля электронов, приблизительно равная $\frac{kT}{\varepsilon_F}$ (из ширины размытости). В результате теплоемкость, приходящаяся на один электрон, выражается как малая доля теплоемкости в классическом рассмотрении $c_e \approx \frac{kT}{\varepsilon_F}k$. Расчет показывает, что теплоемкость электронного газа меньше, чем классического, на два порядка: $C \approx C_e \approx C_{\text{кл}}\frac{T}{T_F} \approx C_{\text{кл}} \cdot \frac{1}{100}$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Статистика Бозе–Эйнштейна

Основным свойством частиц-бозонов является то, что вероятность P нахождения частицы в определенном состоянии тем больше, чем больше имеется частиц в этом состоянии. Другими словами, бозоны стремятся туда, где их больше. Для состояния, в котором уже имеется n таких частиц, вероятность появления новой частицы пропорциональна n: $P \sim n$.

Соответственно, в системе бозонов количество частиц, которые находятся в одинаковом состоянии, может быть произвольным $0 \le n \le \infty$. Бозоны склонны занимать одну элементарную ячейку фазового пространства и накапливаться в одном состоянии. Частицы-бозоны подчиняются *распределению Бозе–Эйнштейна*:

$$\vec{n}(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} - 1}, \qquad (4.10)$$

где $\vec{n}_i$ — среднее число частиц в состоянии с энергией ε_i; μ — химический потенциал, определяемый из условия, что сумма всех $\vec{n}_i$

Репозиторий БГАТУ

равна полному числу N частиц в системе, т. е. $\sum \vec{n}_i = N$. Существенно, что здесь химический потенциал, как и для классического распределения, отрицателен ($\mu \le 0$).

4.2.2. КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ. ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ РАБОТА ВЫХОДА ИЗ МЕТАЛЛА. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ И ПОЛНАЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ ВНУТРИ МЕТАЛЛА, ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА. ПОНЯТИЕ О ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В металле электроны проводимости перемещаются по всему объему, но самопроизвольно не покидают его. При возможности покидать металл электроны уносили бы отрицательный заряд и металл самостоятельно приобретал бы положительный заряд, чего на опыте не происходит.

Свободные электроны образуют объемный отрицательный заряд, а положительно заряженные ионы создают объемный положительный заряд. В любой точке внутри объема металл электрически нейтрален. Плотности отрицательного и положительного зарядов равны. Именно взаимодействие между этими распределенными по объему зарядами определяет силу металлической связи между атомами и прочностные свойства материалов.

Вблизи границы раздела «металл–вакуум» картина распределения положительного и отрицательного зарядов существенно отличается от внутриобъемной. Плотности положительного и отрицательного зарядов уменьшаются не одинаково. Медленнее, с меньшей крутизной из глубины уменьшается плотность отрицательного заряда. Как результат, в приповерхностной области существует два некомпенсированных электрических слоя — положительный с внутренней стороны границы раздела и отрицательный с наружной стороны. *Двойной электрический слой* у поверхности с толщиной в несколько атомных размеров препятствует выходу электронов из объема. Чтобы покинуть металл, электронам нужно совершить *работу против сил электрического поля этого слоя* (рис. 4.7).

Так как электроны не могут покинуть металл, считается, что энергия электрона в металле меньше, чем снаружи, вне его, т. е. в *металле электроны находятся в потенциальной яме*. Изобразим график потенциальной энергии электрона, приняв его энергию вне металла (в вакууме, электрон покоится) равной нулю (рис. 4.8). Тогда внутри металла полная энергия электрона является отрицательной величиной и складывается из потенциальной энергии и кинетической. Кинетическая энергия, как всегда, положительна по знаку, соответственно, потенциальная энергия является отрицательной по знаку и большей по модулю, чем кинетическая. Потенциальная энергия определяется глубиной дна потенциальной ямы и для всех электронов одинакова. Кинетическая энергия электронов неодинакова. Для электронов, заполняющих уровни энергии снизу вверх, их кинетическая энергия возрастает до максимального значения на уровне Ферми. Электроны самых верхних уровней имеют кинетическую энергию ε_k, приблизительно равную химическому потенциалу: $\varepsilon_k \approx \mu$.

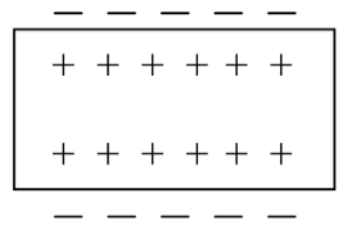

Рис. 4.7. Схематическое изображение двойного электрического слоя на верхней и нижней границах металла. Масштаб длины для ясности завышен

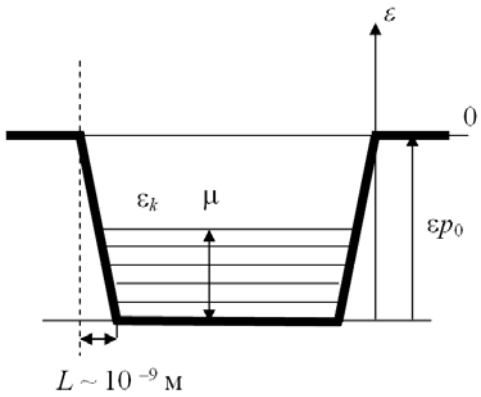

Рис. 4.8. Вид потенциальной ямы для электронов, находящихся внутри металла. Линии означают, что энергия электронов изменяется дискретно

Репозиторий БГАТУ

Глубину потенциальной ямы обозначим как εp_0. Скачок потенциальной энергии на границе металла происходит на расстоянии L порядка нескольких межатомных расстоянии (10^{-9} м). На рисунке 4.8 расстояние L для отчетливости завышено, но именно то, что стенки ямы нельзя считать абсолютно вертикальными, дает возможность электронам проникать несколько дальше, чем край положительного заряда ионов, и создавать упомянутый ранее двойной электрический слой. При абсолютно вертикальной границе потенциальной ямы сила, действующая на электрон на границе и отражающая его назад, была бы бесконечно большой, и электрон не мог бы проникнуть за пределы стенки.

Из рисунка 4.8 следует, что если бы электроны в металле не обладали кинетической энергией и находились на самом дне потенциальной ямы (это можно вообразить, если представить их классическими частицами типа молекул воздуха), то работа, необходимая для извлечения неподвижного электрона из металла, была бы равна глубине потенциальной ямы εp_0. Но согласно квантовой теории даже при $T = 0$ K электроны обладают кинетической энергией, максимальное значение которой для некоторых из них равно химическому потенциалу.

Из рисунка 4.8 также следует, что для удаления за пределы металла электрона, находящегося на самом дне потенциальной ямы, ему нужно сообщить как минимум энергию, равную εp_0, для удаления электрона, находящегося на уровне энергии ε_i, лежащем выше дна потенциальной ямы, требуется несколько меньшая энергия $\varepsilon = |\varepsilon p_0| - \varepsilon_i$.

Энергия, которую необходимо сообщить электрону вблизи уровня Ферми, чтобы удалить его из объема в вакуум, называется *термоэлектронной работой выхода* $A_{\text{вых}} = \Phi$. Существенно, что при $T = 0$ работа выхода строго равна разнице между глубиной потенциальной ямы и энергией Ферми (рис. 4.9). $\Phi = |\varepsilon p_0| - \varepsilon_F$. В этих условиях химический потенциал пропорционален концентрации электронов.

$$\mu(T=0) = \varepsilon_F = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{2m}. \qquad (4.11)$$

С увеличением температуры кинетическая энергия электронов незначительно возрастает, и их распределение по уровням энергии, как

было сказано выше, изменяется. Часть электронов имеет энергию несколько большую, чем энергия Ферми (рис 4.10). Туда электроны попадают за счет теплового возбуждения с уровней энергии, прилегающих к границе ступеньки Ферми–Дирака. При конечных температурах величина химического потенциала также изменяется и он немного опускается.

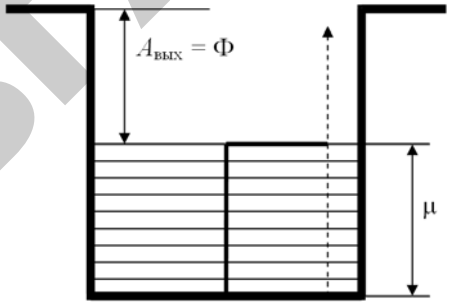

Рис. 4.9. Энергетическая диаграмма потенциальной ямы для электронов в металле с распределением по уровням энергии при $T = 0$ K

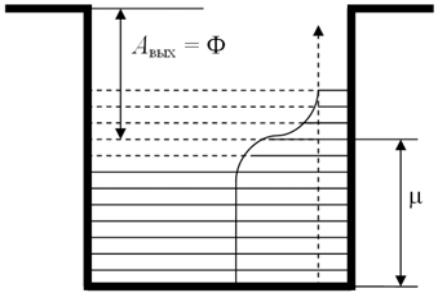

Рис. 4.10. Вид потенциальной ямы и заполнение электронами уровней энергии в металле при температуре, отличной от нуля.
Сплошные линии снизу вверх означают заполненные электронные уровни, штриховые линии показывают частично заполненные уровни

$$\mu(T \neq 0) = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2 (kT)^2}{\varepsilon_F{}^2}\right). \qquad (4.12)$$

Репозиторий БГАТУ

Характерно, что термоэлектронная работа выхода по-прежнему определяется глубиной отстояния химического потенциала от уровня вакуума (рис. 4.10).

Глубина потенциальной ямы εp_0 уменьшается за счет возрастания среднего расстояния между атомами, поэтому *работа выхода зависит*: 1) от температуры; 2) от чистоты поверхности.

Испускание нагретыми металлами электронов с поверхности называется термоэлектронной эмиссией и широко применяется в технике. Электронно-лучевые трубки осциллографов, кинескопы телевизоров, радиолампы работают на принципах управления потоками электронов, испускаемых нагретыми нитями накала.

Для различных металлов термоэлектронная работа выхода Ф имеет значение порядка нескольких электрон-вольт. В обычных условиях даже при нагреве испускающего электроны катода до тысячи градусов число эмитируемых электронов не очень велико. Но если покрыть поверхность металла тонким слоем атомов цезия, то атомы цезия легко отдадут свои валентные электроны металлу и зарядят поверхность положительным зарядом. Это приведет к искривлению энергетических зон, уменьшению заряда в двойном электрическом слое на поверхности и, следовательно, уменьшению глубины потенциальной ямы (рис. 4.11). Например, для поверхности вольфрама термоэлектронная работа выхода может быть уменьшена от исходного значения в 4,5 эВ до 1,5 эВ.

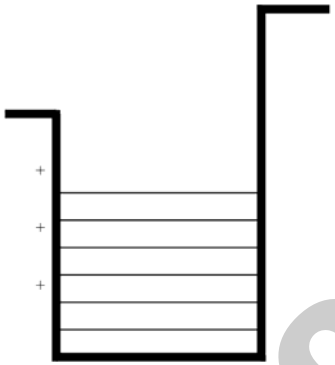

Рис. 4.11. Схематический вид потенциальной ямы для металла, на одну из поверхностей которого нанесен тонкий слой атомов цезия. Сформированный положительный поверхностный заряд уменьшает работу выхода. С другой стороны — вид уровня вакуума без активации поверхности атомами цезия

С работой выхода связывают потенциал работы выхода $\varphi_{вых} = \frac{\Phi}{e}$.

Понятие о зонной теории твердых тел

Как сказано выше, согласно квантовой теории энергия электронов в любом кристаллическом теле так же, как и в отдельном атоме, изменяется дискретно. На энергетическом уровне может находиться не больше двух электронов с противоположно направленными спинами, электроны попарно заполняют уровни энергии, начиная с самого низшего.

Если взять N атомов и начать их сближать, то одинаковые электронные уровни образуют энергетическую зону. Из рисунка 4.12 видно, что чем меньше расстояние между атомами, тем шире зоны, на которые расщепляются уровни, причем между зонами с разрешенными значениями энергии находятся зоны с запрещенными значениями энергии.

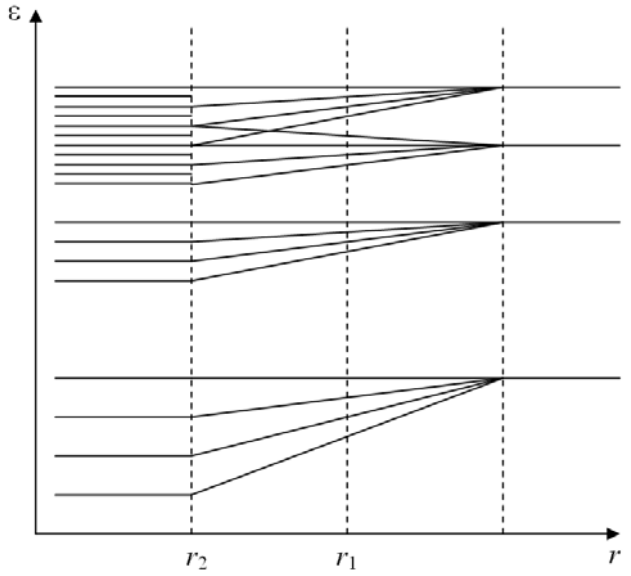

Рис. 4.12. Схема возникновения энергетических зон электронов в твердом теле при сближении атомов, образующих тело

Репозиторий БГАТУ

Уровни, заполненные более близкими к ядру электронами, расщепляются меньше, чем уровни, заполненные внешними электронами, ширина зоны, образованной внутренними электронами, меньше, чем ширина зоны внешних электронов.

Расщеплению в зоны подвергаются и более высокие уровни, не занятые электронами в основном состоянии.

Расстояние между соседними энергетическими уровнями в пределах зоны очень мало, и энергия при переходе с одного уровня на другой изменяется почти непрерывно. Сам факт конечного числа уровней в зоне играет важную роль для распределения электронов по состояниям.

Узкий энергетический уровень валентного электрона в изолированном атоме расширяется в кристалле в широкую полосу — зону разрешенных значений энергии с шириной порядка единиц электрон-вольт. (Электрон-вольт — это энергия, которую получает электрон в электрическом поле, пройдя разность потенциалов в 1 В: $1\text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $\cdot$ 1В $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Разрешенные энергетические зоны отделены друг от друга зонами запрещенных значений энергии (рис. 4.13). Последняя зона, заполненная электронами частично, или первая, полностью пустая (при $T = 0$ К), называется *зоной проводимости*. Ниже зоны проводимости находится заполненная электронами зона, которая называется *валентной*.

Ширина запрещенных зон может быть очень малой, а может достигать величин порядка нескольких электрон-вольт.

При абсолютном нуле энергия электронной системы должна быть минимальной. Нижние зоны, образованные слабо расщепленными уровнями, заполняются электронами, сохраняющими прочную связь со своими атомами. Внешние валентные электроны заполняют попарно нижние уровни разрешенной зоны, возникшей из уровня энергии, на котором находились валентные электроны в атоме. Более высокие разрешенные зоны при 0 К остаются *свободными*.

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещенной зоны кристаллы делят на три класса: проводники, полупроводники и диэлектрики (рис. 4.14). Энергия Ферми, как было сказано ранее, является максимальной для электронов в зоне проводимости при $T = 0$ К.

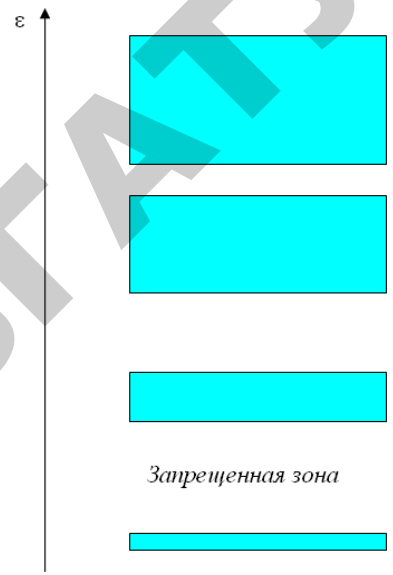

Рис. 4.13. Схематическое изображение зон с разрешенными и запрещенными значениями энергии для электронов в твердом теле. Запрещенные зоны представлены сплошными полосами

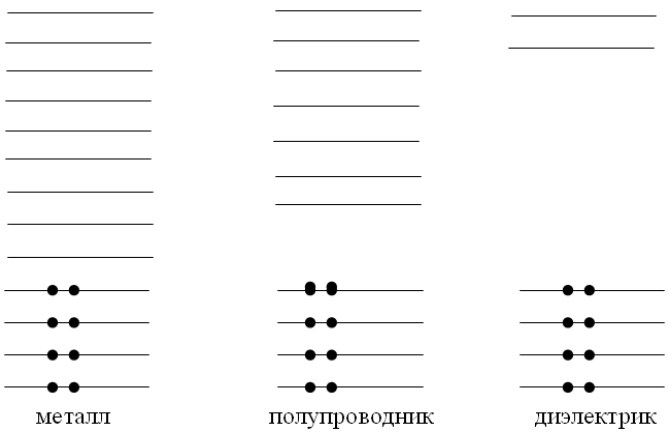

Рис. 4.14. Изображение зонных энергетических структур металла, полупроводника и диэлектрика

Репозиторий БГАТУ

Если электроны заполняют валентную зону в пределах половины ее объема, то достаточно малой порции энергии (например, тепловой энергии или энергии, сообщаемой электрическим полем), чтобы перевести их на более высокий уровень. Это означает, что электроны обретают дополнительное, направленное движение и переносят электрический заряд или тепло. Такой материал является металлическим *проводником*.

Металл — материал, у которого имеется частично заполненная электронами зона (зона проводимости).

Если уровни валентной зоны заняты электронами полностью, то электроны не могут получить порцию энергии извне и перейти на следующий уровень, поскольку свободных уровней в этой зоне нет. Чтобы увеличить энергию электрона, ему необходимо сообщить энергию не меньшую, чем ширина запрещенной зоны ΔW.

Если ширина запрещенной зоны мала, то характерная тепловая энергия может быть достаточной, чтобы перевести электрон в следующую свободную зону. Поскольку в свободной зоне (зоне проводимости) существуют незанятые уровни, под действием электрического поля электроны могут подниматься на эти свободные уровни, что означает их упорядоченное перемещение и перенос заряда.

Полупроводник — материал, у которого при $T = 0$ К валентная зона полностью занята, а ширина запрещенной зоны сравнима по величине с энергией теплового движения атомов и молекул.

Если ширина запрещенной зоны настолько велика, что при сообщении электронам дополнительной энергии тепловых колебаний ее не хватает и электроны не могут попасть в свободную зону, упорядоченное движение под действием электрического поля или градиента температуры возникнуть не может. Такой материал называется *диэлектриком*. При приложении сильного электрического поля переход электронов из валентной зоны в свободную зону проводимости возможен при так называемом электрическом пробое диэлектрика. *Диэлектрик — материал, у которого валентная зона полностью занята, а расстояние между заполненной валентной и следующей свободной зонами значительно больше энергии теплового движения атомов и молекул.*

4.2.3. ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ КОНТАКТНЫЕ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ НА КОНЦАХ ЦЕПИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЗВЕНЬЕВ, ПРИВЕДЕННЫХ В КОНТАКТ МЕТАЛЛОВ. ЗАКОНЫ ВОЛЬТА

Возьмем два различных незаряженных металла с отличающимися значениями химического потенциала и, соответственно, неодинаковыми термоэлектронными работами выхода (рис. 4.15). Как видно из этого рисунка, химический потенциал отсчитывается от одного общего уровня снизу вверх. Термоэлектронная работа выхода отсчитывается от уровня вакуума, где электрон, покинувший любой из металлов, покоится, то есть сверху вниз. Как видно, работа выхода электрона из первого металла меньше работы выхода из второго металла.

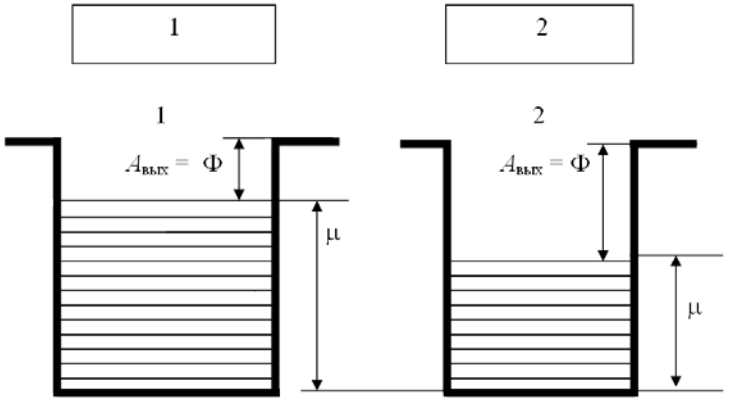

Рис. 4.15. Два различных металла, обособленно стоящих друг возле друга, и их энергетические диаграммы с обозначением химических потенциалов и термоэлектронных работ выхода

Если привести указанные металлы в контакт, то в первый момент времени система не будет находиться в термодинамическом равновесии (рис. 4.16). Различные значения химических потенциалов слева и справа от контакта приведут к возникновению потоков электронов из одного металла в другой и наоборот.

Репозиторий БГАТУ

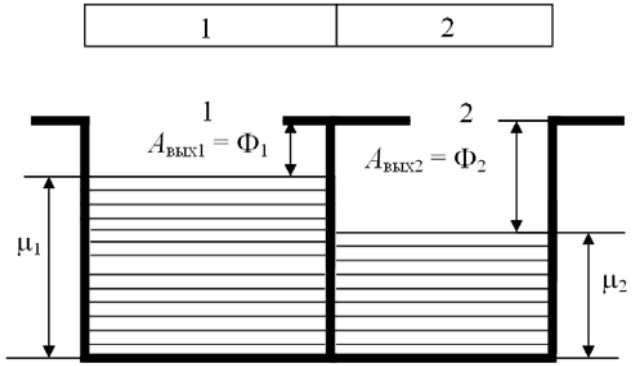

Рис. 4.16. Вид энергетических зон электронов проводимости двух металлов непосредственно после приведения их в контакт. Различие уровней химических потенциалов металлов 1 и 2 показывает, что после соприкосновения система электронов не находится в равновесии, и из-за этого через границу раздела начинается движение электронов

Поток электронов во 2-ой металл будет продолжаться до тех пор, пока химические потенциалы не выровняются для обеих частей. После прихода системы в равновесие на границе контакта возникнет разность потенциалов, которая называется внутренней *контактной разностью потенциалов*. При этом металл 1 с большим химическим потенциалом, то есть с меньшей работой выхода, будет иметь в месте контакта положительный заряд, а металл 2 с меньшим химическим потенциалом и большей работой выхода будет иметь в месте контакта отрицательный заряд. Это произошло потому, что энергетические зоны электронов сместились, как изображено на рисунке 4.17. Наклонные линии возле уровня вакуума показывают, что металл 1 понизил положение своей потенциальной ямы, а металл 2 соответственно сдвинул потенциальную яму и уровни энергии вверх.

Толщина переходного слоя L составляет несколько атомных слоев. Почему возникает внутренняя контактная разность потенциалов? Согласно квантовой теории, как уже было сказано, значение химического потенциала зависит от концентрации свободных электронов в металле $n = \frac{N}{V}$ и температуры:

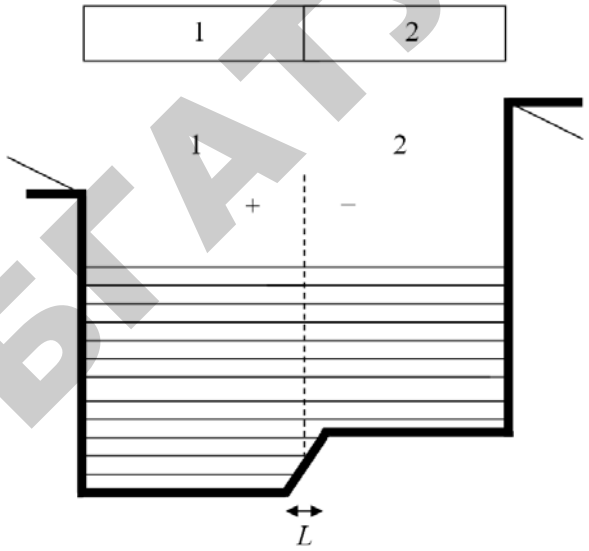

Рис. 4.17. Энергетическая диаграмма электронных уровней двух металлов как единой системы после прихода в равновесное состояние. На границе раздела существует переходной электрический слой, препятствующий перетеканию электронов

$$\mu(T) = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2 \pi^{\frac{4}{3}}}{2m} \left(1 - \frac{\pi^2 (kT)^2}{\varepsilon_F{}^2}\right). \qquad (4.13)$$

Следовательно, контактная разность потенциалов обусловлена различием концентраций свободных электронов в металлах 1 и 2. Для рассматриваемого случая $n_1 > n_2$ и поток электронов из 1 в 2 за малые доли секунды приводит систему двух металлов в равновесие, при котором химические потенциалы выравниваются. Говорят, что для установления равновесия требуется, чтобы уравнялись электрохимические потенциалы обоих металлов. Электрохимический потенциал определяется как сумма химического потенциала до контакта и возникшего электрического потенциала после контакта $e\varphi + \mu$.

Равенство электрохимических потенциалов означает, что $e\varphi_1 + \mu_1 = e\varphi_2 + \mu_2$. Соответственно, контактная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ может быть определена из следующего выражения:

Репозиторий БГАТУ

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \mu_2 - \mu_1 = \Phi_1 - \Phi_2. \qquad (4.14)$$

В выражении (4.14) контактная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ представлена как разность химических потенциалов или работ выхода, приведенная к заряду электрона:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e}. \qquad (4.15)$$

Поверхность каждого металла является эквипотенциальной, но потенциалы их различны. Для точек A и B (показаны на рис. 4.19) вне металлов 1 и 2 вблизи их поверхностей соответственно (рис. 4.18) $\varphi_1 = \frac{\Phi_1}{e}$ и $\varphi_2 = \frac{\Phi_2}{e}$.

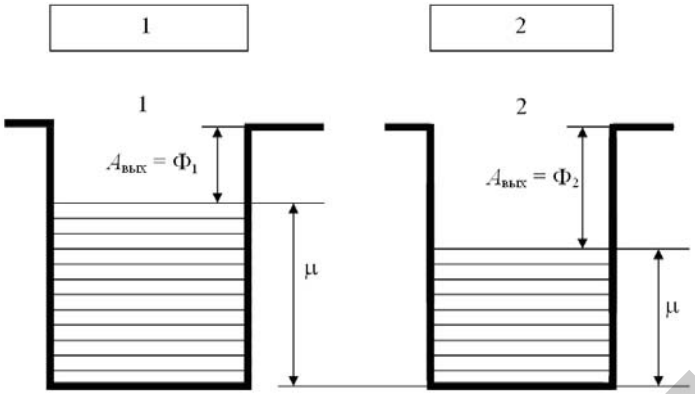

Рис. 4.18. Два металла, обособленно расположенных друг возле друга, и их энергетические диаграммы с обозначением химических потенциалов и термоэлектронных работ выхода. В промежутке между проводниками электрическое поле отсутствует

Рассмотрим другой вариант соединения разнородных металлов в одну электронную систему. В исходном состоянии металлы отстоят друг от друга на некоторое расстояние. Металлы электрически нейтральны, и между ними электрического поля нет.

Если два указанных металла соединить проводником с наружной стороны, то после прихода системы в равновесие будет иметь место следующая энергетическая диаграмма (рис. 4.19).

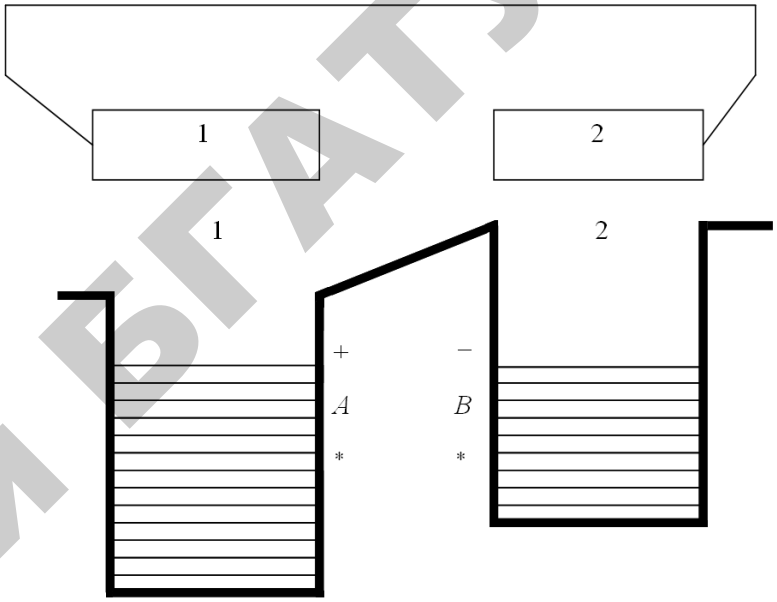

Рис. 4.19. Энергетическая диаграмма двух образцов из различных металлов после соединения их другим проводником с внешней стороны и установления электронного равновесия. На внутренней поверхности проводников возникают заряды, а в промежутке между точками A и B возникает электрическое поле. Вершины потенциальных ям оказываются на разной высоте

В данном случае равновесие означает также выравнивание электрохимических потенциалов. Величину, равную разности потенциалов выхода для 1-го и 2-го металлов вблизи их поверхностей, называют *внешней контактной разностью потенциалов* (в точках A и B). То есть потенциал точки A будет положительным по отношению к потенциалу точки B. Разность потенциалов для точек A и B $U_{12внеш} = \varphi_A - \varphi_B = \varphi_1 - \varphi_2$ определяется разностью работ выхода в соответствии с выражением:

$$U_{12внеш} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{e}. \qquad (4.16)$$

Поскольку для металла 1 работа выхода меньше, чем для металла 2, то с учетом отрицательности знака заряда электрона

Репозиторий БГАТУ

$U_{12внеш} = \varphi_A - \varphi_B = \varphi_1 - \varphi_2$ больше нуля, что и показано на рис. 4.19. Так как потенциалы у поверхностей различны, то во внешнем пространстве, между двумя металлами, соединенными между собой гальванически, возникает электрическое поле.

Вспоминая классическую теорию, применимую для описания электронного газа в полупроводниках, отметим, что концентрация электронов зависит от их потенциальной энергии. Согласно распределению Больцмана, применимому здесь, $n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Если взять в качестве исходных условий потенциальную энергию и концентрацию электронов в полупроводнике 1, тогда концентрация электронов в полупроводнике 2 есть $n_2 = n_1 e^{\frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{kT}}$, откуда $\ln(n_2) - \ln(n_1) = \frac{e(\varphi_2 - \varphi_1)}{kT}$, и окончательно:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad (4.17)$$

Таким образом, *классическое рассмотрение* также показывает, что если полупроводник 2 имеет меньшую концентрацию носителей и соответственно меньшее значение химического потенциала при большей работе выхода по сравнению с полупроводником 1, то полупроводник 2 будет иметь отрицательный потенциал по отношению к полупроводнику 1. Классическая формула весьма приблизительна, но она качественно объясняет, что чем больше различие в концентрациях свободных электронов в полупроводниках, тем больше внешняя контактная разность потенциалов между ними. На практике она достигает значения нескольких десятков милливольт.

Если вернуться к внутренней контактной разности потенциалов, то можно утверждать, что в месте контакта двух металлов возникает двойной электрический слой, на протяжении которого потенциал скачкообразно меняется на величину U'_{12}. Толщина этого слоя составляет несколько ангстрем, при этом с контактной поверхности одного металла на контактную поверхность другого переходит около 2 % свободных электронов. Столь незначительные изменения концентрации электронного газа в контактном слое и его малая толщина по сравнению с длиной свободного пробега электрона

приводят к тому, что через контакт двух металлов электронный ток идет так же легко, как и через сами металлы.

Существование контактной разности потенциалов было обнаружено экспериментально итальянским физиком А. Вольта в 1795 году, т. е. задолго до создания электронной теории проводимости.

Законы А. Вольты

1. *Разность потенциалов между концами цепи, составленной из нескольких металлов, определяется разностью потенциалов выхода для металлов, образующих крайние звенья цепи.*

Найдем разность потенциалов между концами цепи, составленной из металлов 1, 2, 3, 4, т. е. внешнюю контактную разность потенциалов (рис. 4.20).

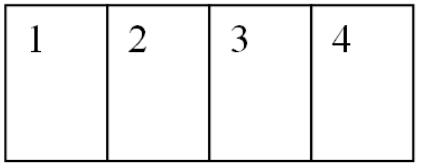

Рис. 4.20. Четыре куска из различных металлов, приведенные в омический контакт через боковые поверхности

Обозначим разность потенциалов в местах контакта между различными парами металлов как $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, $U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3$ и $U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4$. Видно, что последовательная сумма всех трех значений разности потенциалов есть разность потенциалов первого и последнего, четвертого металла: $U_{12} + U_{23} + U_{34} = U_{12} = \varphi_1 - \varphi_4 = U_{14}$.

2. *Сумма разностей потенциалов в замкнутой цепи, составленной из проводников, соприкосновение которых не влечет за собой химического превращения (металлы, сплавы, полупроводники, полуметаллы и т. д.), равна нулю.*

Замкнем рассматриваемую цепь из четырех металлов саму на себя через наружные поверхности металлов 1 и 4. Если записать сумму внутренних контактных разностей потенциалов во всей цепи, получим

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = \frac{1}{e}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1) = 0 .$$

Репозиторий ГГАТУ

Ряд А. Вольта

А. Вольта установил, что если металлы *Al*, *Zn*, *Sn*, *Pb*, *Sb*, *Bi*, *Gg*, *Fe*, *Cu*, *Ag*, *Au*, *Pt*, *Pd* привести в контакт в указанной последовательности, то каждый предыдущий при соприкосновении с одним из последующих зарядится положительно. Этот ряд металлов называется *рядом Вольта*. Каждый из последующих металлов в силу их специфики обладает большей работой выхода по отношению к предыдущему. Вследствие этого в состоянии равновесия химический потенциал предыдущего металла понижается, а последующего повышается с переходом части свободных электронов от алюминия к цинку, от цинка к олову, от олова к свинцу и т. д.

Сторонние термоэлектродвижущие силы

Установлено, что причиной движения носителей заряда и появления разности потенциалов между участками проводящих материалов могут являться не только электрические или химические силы, связанные с неодинаковостью концентраций носителей заряда, но и другие — тепловые, механические и т. д., называемые сторонними. Примером тепловых сторонних сил являются термоэлектрические силы, которые также приводят к движению носителей заряда и к появлению электрической разности потенциалов.

Если взять два разнородных металла, соединенных в замкнутую цепь, и поддерживать их контакты при неодинаковых температурах, то по металлам будет протекать электрический ток, называемый термоэлектрическим. Явление возбуждения термоэлектрического тока (*явление Зеебека — 1821 г.*), а также тесно связанные с ним явления Пельтье и Томсона называются *термоэлектрическими явлениями* (рис. 4.21).

Если поддерживать разность температур между контактами в незамкнутой цепи, то электрический ток будет отсутствовать, но возникнет разность потенциалов $\Delta\varphi_T$ между проводниками, составляющими контактную пару. Такая разность потенциалов определяется величиной термоэлектродвижущей силы α_{21}, или термоЭДС. Размерность α_{21} есть В/К. Для пары металлов термоЭДС α_{21} есть разность коэффициентов термоЭДС одного и другого металлов $\alpha_{21} = \alpha_2 - \alpha_1$. Соответственно, величина разности потенциалов определяется соотношением между значениями α_1 и α_2 обоих металлов.

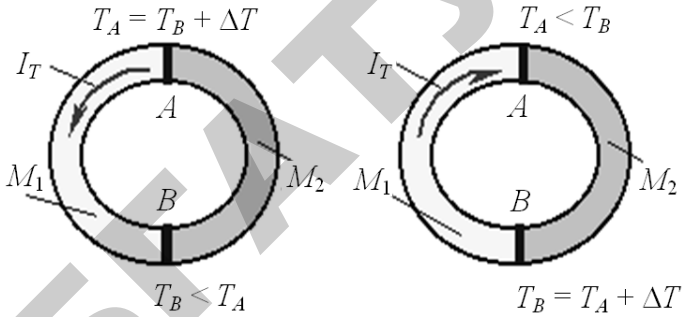

Рис. 4.21. Появление термоэлектрического тока в замкнутой цепи из разнородных проводников при существовании перепада температуры между местами соединения проводников. Результирующий ток есть алгебраическая сумма двух токов (для металлов 1 и 2) от более холодной части к нагретой области. Слева ток проводника 2 больше по абсолютной величине, чем ток проводника 1, и соответственно, суммарный ток течет против часовой стрелки. Справа ситуация обратная, ток для металла 1 больше, чем ток металла 2, и результирующий ток течет по часовой стрелке

$$\Delta\varphi_T = \alpha_{21}(T_2 - T_1) = -(\alpha_2 - \alpha_1)(T_2 - T_1).$$

Возникновение термоэлектричества присуще и одиночным однородным проводникам — металлам, полупроводникам, находящимся в неравновесном по температуре состоянии. Если в одиночном, неравномерно разогретом проводнике, который представляет собой незамкнутый участок электрической цепи, существует перепад температуры между холодным и нагретым концами, то имеется и электрическое поле тепловой природы. При отсутствии тока холодный конец имеет отрицательный заряд, а нагретый конец заряжается положительно из-за возникновения термоэлектродвижущей силы. У большинства металлов коэффициент термоэлектродвижущей силы имеет отрицательный знак, и как следствие, разность потенциалов между нагретым и холодным концами положительна (рис. 4.22).

Из металлов *Cu*, *Bi*, *Ag*, *Cu*, *Au*, *Cu* составляют термопары типа *Cu–Bi*, *Ag–Cu*, *Au–Cu*, которые используют на практике для регистрации температуры. При работе термопары один спай проводников поддерживается при заданной температуре (например, при температуре тающего льда, 273 К), а второй является измеритель-

Репозиторий БГАТУ

ным. Для простых металлов термоЭДС сравнительно невелика и составляет десятки микровольта на Кельвин, для переходных металлов, полупроводников α_{12} достигает единиц милливольт на Кельвин.

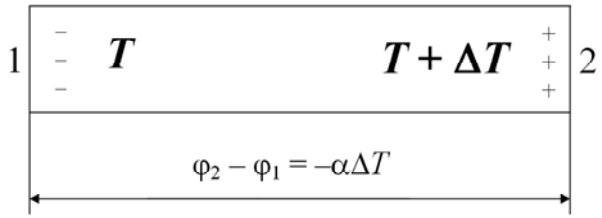

Рис. 4.22. Возникновение разности потенциалов и термоэлектрического поля между неодинаково нагретыми концами разомкнутого однородного проводника (термоэлектрический ток отсутствует)

Для полупроводника выражение для удельной термоэлектродвижущей силы можно получить, используя соотношения для контактной разности потенциалов, учитывая ее зависимость от температуры $\Delta\varphi_T = -\alpha_{21}(T_2 - T_1)$:

$$\Delta\varphi_T = U_{12} + U_{21} = \frac{kT_2}{e} ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{kT_1}{e} ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{k}{e} ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right)(T_2 - T_1) = -\alpha_{21}(T_2 - T_1).$$

Итак, термоЭДС возникает по *двум причинам*:

1. Для металлов при неодинаковых температурах в разных участках проводника электроны стремятся перейти от нагретого конца к холодному, у которого их концентрация повышается, что создает избыток положительного заряда у нагретого конца.

В установившемся состоянии электрические и тепловые силы, воздействующие на электроны, равны, и в разомкнутом проводнике ток отсутствует, но существуют термоэлектрическое поле и отвечающая ему разность потенциалов.

Если цепь из проводника с перепадом температуры замкнута другим проводником, то возникает встречный термоэлектрический ток в обоих проводниках, поскольку замыкающий проводник также будет иметь перепад температуры вдоль длины. Результирующий ток будет протекать по цепи либо в одном, либо в другом направлении.

Если замкнуть цепь проводником в сверхпроводящем состоянии, то величина и направление тока будут определяться величиной термоЭДС только первого проводника.

2. Для полупроводников кроме упомянутого механизма перехода электронов к более холодному участку из-за действия тепловых сил существует ощутимая зависимость химического потенциала от температуры. Соответственно, у нагретого конца проводника химический потенциал понижается сильнее, чем у холодного, и этот эффект дает дополнительный вклад в величину термоЭДС.

Явление Пельтье (1834)

Пельтье установил, что при прохождении электрического тока через контакт двух различных проводников в зависимости от направления тока помимо джоулевой теплоты $Q = RI^2t$ в материалах проводников выделяется или поглощается дополнительная теплота, которая пропорциональна току в первой степени $Q = \Pi_{12}It$, здесь Π_{12} — постоянная Пельтье. Теплота Пельтье обратимо изменяет знак при изменении направления тока (рис. 4.23).

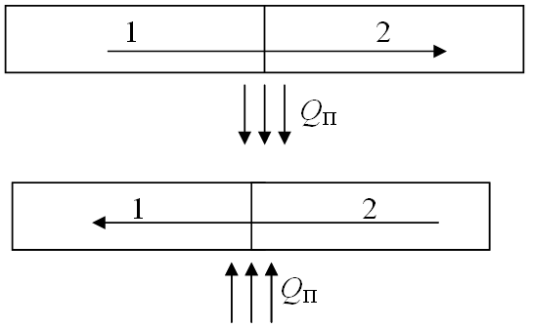

Рис. 4.23. Схема выделения (верхняя часть) и поглощения теплоты Пельтье при протекании тока через спай двух разнородных металлов

Объяснение этого эффекта заключается в следующем: электроны по разные стороны спая обладают разными средними энергиями. Если электроны попадают в область с меньшей энергией, то избыток своей энергии они отдадут кристаллической

Репозиторий ВГАТУ

решетке, и спай будет нагреваться. А если электроны переходят в металл с большей энергией, то забирают недостающую энергию у кристаллической решетки, и спай будет охлаждаться. Постоянная Пельтье связана с удельной термоэлектродвижущей силой данной пары проводящих материалов и зависит от рода материалов и температуры: $\Pi_{12} = \alpha_{12}T = (\alpha_1 - \alpha_2)T$. По величине и размерности постоянная Пельтье для большинства металлов составляет 10^{-4}–10^{-3} В.

Эффект Пельтье используют для охлаждения элементов электронных цепей, чтобы подавить тепловые шумы в фотоприемниках и повысить чувствительность аппаратуры, а также в бытовых приборах, так называемых термоэлектрических холодильниках.

Явление Томсона (1856)

Исследуя термоэлектрические явления, Томсон пришел к заключению, что при прохождении тока по *неравномерно* нагретому проводнику должно происходить дополнительное выделение (поглощение) теплоты, аналогичное эффекту Пельтье (рис. 4.24).

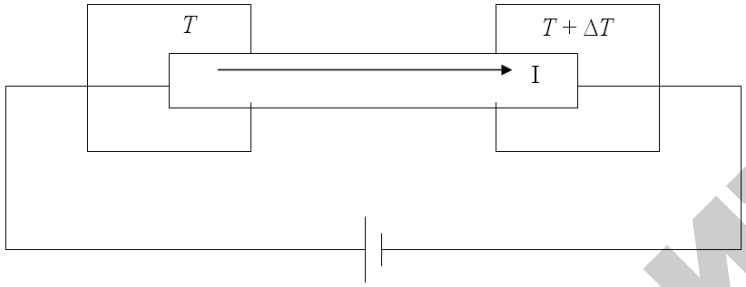

Рис. 4.24. Схема выделения тепла Томсона в неравномерно нагретом проводнике

Объяснить этот эффект можно, привлекая понятие эффекта Пельтье. Если представить, что неравномерный нагрев изменяет свойства вдоль длины для одного и того же материала, то такой неравномерно разогретый проводник можно представить как последовательный набор разнородных материалов, через который протекает электрический ток, и вдоль всей длины выделяется теплота Пельтье.

4.2.4. СОБСТВЕННАЯ И ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

По значению удельного электрического сопротивления *полупроводники* занимают промежуточное место между хорошими проводниками и диэлектриками. К числу полупроводников относятся многие химические элементы (германий, кремний, селен, теллур, мышьяк и др.), огромное количество сплавов и химических соединений. Почти все неорганические вещества окружающего нас мира — полупроводники. Самым распространенным в природе полупроводником является кремний, составляющий около 30 % земной коры.

Качественное отличие полупроводников от металлов проявляется прежде всего в зависимости удельного сопротивления от температуры. С понижением температуры сопротивление металлов падает. У полупроводников, напротив, с понижением температуры сопротивление возрастает, и вблизи абсолютного нуля они практически становятся изоляторами (рис. 4.25).

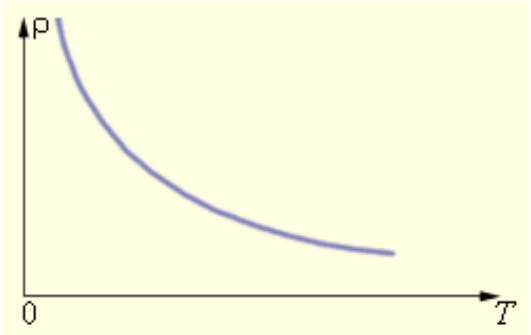

Рис. 4.25. Зависимость удельного сопротивления ρ чистого полупроводника от абсолютной температуры T

Такой ход зависимости $\rho(T)$ показывает, что у полупроводников концентрация носителей свободного заряда не остается постоянной, а увеличивается с ростом температуры. Механизм электрического тока в полупроводниках нельзя объяснить в рамках модели газа свободных электронов. Рассмотрим качественно этот механизм на примере германия (*Ge*). В кристалле кремния (*Si*) механизм аналогичен.

Репозиторий БГАТУ

Атомы германия имеют четыре слабо связанных электрона на внешней оболочке. Их называют *валентными электронами*. В кристаллической решетке каждый атом окружен четырьмя ближайшими соседями. Связь между атомами в кристалле германия является *ковалентной*, т. е. осуществляется парами валентных электронов. Каждый валентный электрон принадлежит двум атомам (рис. 4.26). Валентные электроны в кристалле германия гораздо сильнее связаны с атомами, чем в металлах, поэтому концентрация электронов проводимости при комнатной температуре в полупроводниках на много порядков меньше, чем у металлов. Вблизи абсолютного нуля температуры в кристалле германия все электроны заняты в образовании связей. Такой кристалл электрического тока не проводит.

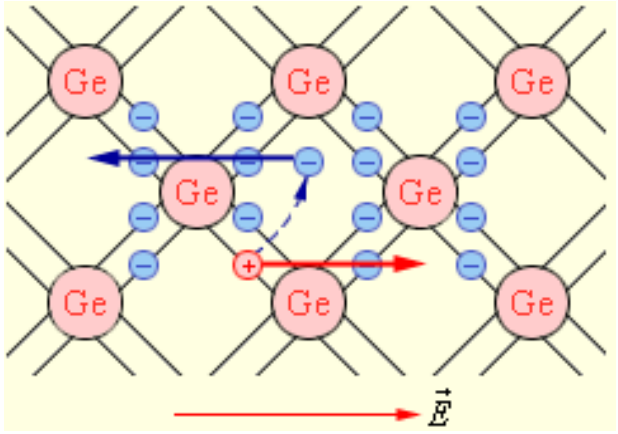

Рис. 4.26. Кристаллическая структура собственного полупроводника на примере германия. Четыре валентных электрона одного атома образуют химические связи с электронами четырех соседних атомов. Под действием температуры электронные химические связи разрываются с образованием электронно-дырочной пары

Собственная проводимость возникает за счет перехода электронов с верхних уровней валентной зоны в зону проводимости. Для этого нужно затратить энергию, равную, по крайней мере, ширине запрещенной зоны. Эта величина является важнейшей характеристикой электрических свойств полупроводников и называется *энергией активации* собственной проводимости (для германия — 0,8 эВ, кремния и бора — 1,1 эВ, селена — 1,7 эВ, фосфора — 1,5 эВ). При

этом в валентной зоне на верхних уровнях освобождаются места, которые называют дырками.

При повышении температуры некоторая часть валентных электронов может получить энергию, достаточную для разрыва ковалентных связей. Тогда в кристалле возникнут свободные электроны (электроны проводимости). Одновременно в местах разрыва связей образуются вакансии, атомы, имеющие недостаток электронов. Эти вакансии получили название «*дырок*». Вакантное место может быть занято валентным электроном из соседней пары, тогда дырка переместится на новое место в кристалле. При заданной температуре полупроводника в единицу времени образуется определенное количество электронно-дырочных пар. В то же время идет обратный процесс — при встрече свободного электрона с дыркой восстанавливается электронная связь между атомами германия. Этот процесс называется *рекомбинацией*.

Электронно-дырочные пары могут рождаться также при освещении полупроводника за счет энергии электромагнитного излучения. В отсутствие электрического поля электроны проводимости и дырки участвуют в хаотическом тепловом движении. Если полупроводник помещается в электрическое поле, то в упорядоченное движение вовлекаются не только свободные электроны, но и дырки, которые ведут себя как положительно заряженные частицы. Поэтому ток I в полупроводнике складывается из электронного I_n и дырочного I_p токов: $I = I_n + I_p$.

Концентрация электронов проводимости в полупроводнике равна концентрации дырок: $n_n = n_p$. Электронно-дырочный механизм проводимости проявляется только у чистых (т. е. без примесей) полупроводников. Он называется *собственной электрической проводимостью* полупроводников.

Расчет показывает, что уровень Ферми в собственных полупроводниках лежит точно посередине запрещенной зоны. Для электронов, перешедших на нижний уровень в зону проводимости, величина $\varepsilon - \mu \approx \frac{\Delta}{2}$, где Δ — ширина запрещенной зоны. Вероятность заполнения электронами уровня энергии на дне зоны проводимости:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta}{2kT}}+1}.$$

Репозиторий БГАТУ

При комнатной температуре величина kT составляет сотые доли электрон-вольта. Соответственно, показатель степени велик по сравнению с единицей. В знаменателе выражения для распределения электронов по энергиям единицей можно пренебречь: $e^{\frac{\Delta}{2kT}} + 1 >> 1$. Как следствие, вероятность заполнения уровней энергии в зоне проводимости определяется выражением, отвечающим распределению Максвелла–Больцмана, т. е.:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\Delta}{2kT}}} = e^{-\frac{\Delta}{2kT}}.$$

Количество электронов, перешедших в зону проводимости, а соответственно, и количество дырок, образовавшихся в валентной зоне, *пропорциональны вероятности* перехода электронов, задаваемой функцией распределения электронов по уровням энергии. Электроны являются носителями отрицательного заряда, дырки — положительного. В общем виде проводимость определяется как коэффициент связывающий плотность тока проводимости с величиной напряженности электрического поля $j = \sigma E$. Проводимость пропорциональна числу носителей заряда, которое определяется значением функции распределения. Перемещение дырки по кристаллу аналогично перемещению положительного заряда. Соответственно, проводимость можно представить как

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta}{2kT}}.$$

Это выражение показывает, что проводимость является экспоненциальной функцией, причем показатель степени экспоненты зависит от температуры и ширины запрещенной зоны. С понижением температуры проводимость уменьшается, поскольку отрицательный показатель степени экспоненты растет по абсолютной величине. Прологарифмируем выражение для σ: $ln\sigma = ln\sigma_0 - \frac{\Delta}{2kT}$, и сравним его с поведением линейной зависимости функции y от x вида $y = y_0 - kx$. Если сопоставить k и Δ, где $k = \Delta$, и обозначить

$x = \frac{1}{2kT}$, а $\Delta = tg\alpha$, то можно представить график зависимости $ln\sigma$ от $\frac{1}{2kT}$ в виде прямой с отрицательным наклоном (рис. 4.27).

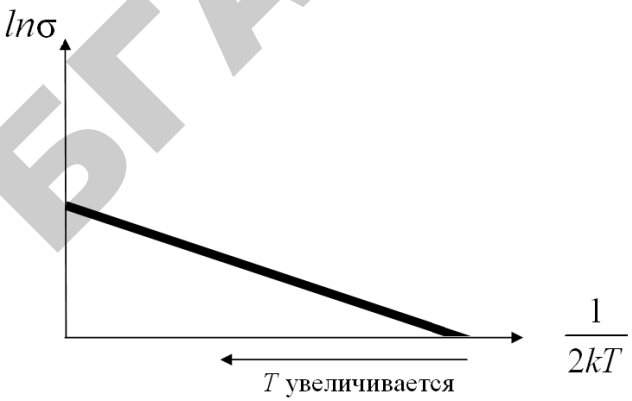

Рис. 4.27. Натуральный логарифм проводимости собственного полупроводника как функция обратной температуры. Натуральный логарифм проводимости является прямой линией, отсекающей на оси ординат отрезок, равный $ln\sigma_0$. Тангенс угла наклона равен энергии активации собственной проводимости, т. е. ширине запрещенной зоны полупроводника. Строя такой график, можно определить постоянную σ_0 и ширину запрещенной зоны ΔE

Наиболее распространенные собственные полупроводники: четырехвалентные *Si*, *Ge* (чистые материалы); химические соединения *GaAs*, *CdS*, *InSb*.

Примесные полупроводники

При наличии примесей электропроводимость полупроводников сильно изменяется. Например, добавка атомов фосфора в кристалл кремния в количестве 0,001 атомного процента уменьшает удельное сопротивление более чем на пять порядков. Такое сильное влияние примесей может быть объяснено на основе изложенных выше представлений об энергетической зонной структуре полупроводников.

Репозиторий БГАТУ

Условием резкого уменьшения удельного сопротивления полупроводника при введении примесей является отличие валентности атомов примеси от валентности основных атомов кристалла.

Проводимость полупроводников при наличии примесей называется *примесной проводимостью*. Различают два типа примесной проводимости – *электронную* и *дырочную*. *Электронная проводимость* возникает, когда в кристалл германия с четырехвалентными атомами введены пятивалентные атомы (например, атомы мышьяка (*As*), рисунок 4.28).

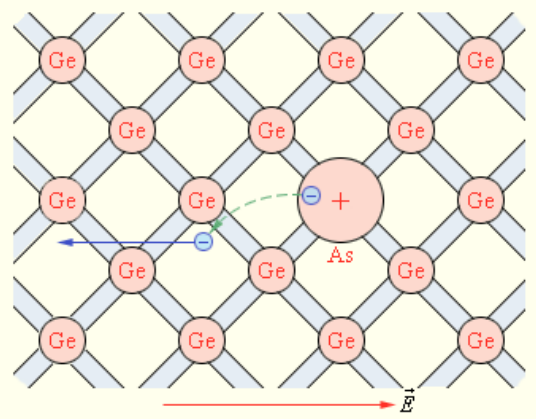

Рис. 4.28. Структура примесного полупроводника *n*-типа на основе германия. Пятый валентный электрон мышьяка способен легко покинуть атом, перейти в зону проводимости и стать свободным для переноса заряда

Если в кристаллической решетке четырехвалентных *Si*, *Ge* заменить 1 атом пятивалентным мышьяком, пятый валентный электрон мышьяка не будет участвовать в образовании химической связи. Он становится как бы лишним, слабо связан с ядром и легко покидает атом. Дырки при этом не образуются, хотя атом фосфора и остается с избыточным положительным зарядом. Значит, в полупроводниках с пятивалентной примесью есть только один тип носителей заряда — электроны.

Полупроводники с *электронной проводимостью называются полупроводниками n-типа*, а примеси, отдающие электроны в зону проводимости, называются донорами. Электроны, легко переходящие в зону проводимости, являются основными носителями заряда в этой зоне. Так как энергия активации донорных уровней энергии мала, эти уровни расположены в запрещенной зоне, близко ко дну зоны проводимости. В результате введения примеси в кристалл появляется значительное число свободных электронов. Это приводит к резкому уменьшению удельного сопротивления полупроводника — в тысячи и даже миллионы раз. Удельное сопротивление полупроводника с большим содержанием примесей может приближаться к удельному сопротивлению металлического проводника.

В кристалле германия с примесью мышьяка также есть электроны и дырки, ответственные за собственную проводимость кристалла. Но основным типом носителей свободного заряда являются электроны, оторвавшиеся от атомов мышьяка. В таком кристалле $n_n >> n_p$. Такая проводимость называется *электронной*, а полупроводник, обладающий электронной проводимостью, называется *полупроводником n-типа*.

Уровень Ферми в полупроводниках *n*-типа при $T = 0$ К лежит посередине между донорными уровнями и дном зоны проводимости, а при высоких температурах смещается к середине запрещенной зоны (когда возбуждается собственная проводимость).

Дырочная проводимость возникает, когда в кристалл германия введены трехвалентные атомы (например, атомы индия (*In*)). Если четырехвалентный полупроводник имеет трехвалентную примесь (атом германия замещен атомом индия), то для установления химической связи с одним из окружающих атомов германия валентного электрона у атома индия не хватает. Эта связь с атомом германия останется свободной, т. е. будет представлять собой место, способное захватить электрон из другого места. На рисунке 4.29 показан атом индия, который создал с помощью своих валентных электронов ковалентные связи лишь с тремя соседними атомами германия.

На образование связи с четвертым атомом германия у атома индия нет электрона. Этот недостающий электрон может быть захвачен атомом индия из ковалентной связи соседних атомов германия. В этом случае атом индия превращается в отрицательный ион, расположенный в узле кристаллической решетки, а в ковалентной связи соседних атомов образуется вакансия электрона. Примесный атом, способный захватывать электроны, называется *акцепторной примесью*. В результате введения атомов акцепторной примеси в кристалле разрывается множество ковалентных связей и образу-

Репозиторий БГАТУ

ются вакантные места (дырки). На эти места могут перескакивать электроны из соседних ковалентных связей, тем легче, чем выше температура. Это приводит к хаотическому блужданию дырок по кристаллу. Если на место атома с недостатком электрона перейдет электрон от соседнего атома германия, дырка окажется в другом месте, т. е. в полупроводнике с трехвалентной примесью носителями заряда являются дырки (+); полупроводники с дырочной проводимостью называются *полупроводниками p-типа*, а примеси, обеспечивающие дырочную проводимость, — *акцепторными*.

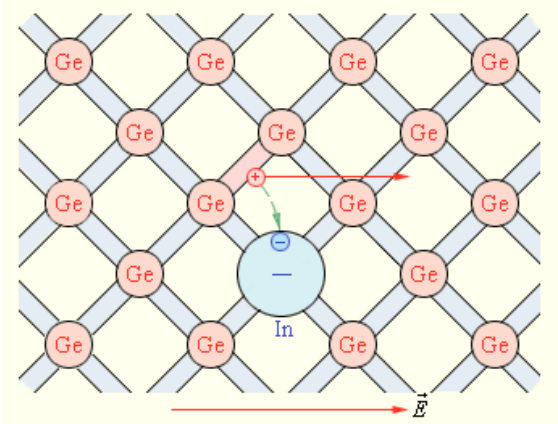

Рис. 4.29. Структура примесного полупроводника *p*-типа.
Три валентных электрона индия участвуют в образовании химической связи. Для образования четвертой химической связи собственного валентного электрона у атома индия недостает. Такой четвертый электрон захватывается из другой связи между атомами германия. В том месте, откуда захватывается электрон, образуется его дефицит, или дырка (положительно заряженный атом германия). Дырочное состояние — это атом с недостатком отрицательного заряда

Следует подчеркнуть, что дырочная проводимость обусловлена эстафетным перемещением положительного заряда от одного атома германия к другому за счет последовательного вырывания валентных электронов одними атомами германия у других.

Наличие акцепторной примеси так же, как и наличие донорной примеси, резко снижает удельное сопротивление полупро-

водника за счет появления большого числа свободных дырок. Концентрация дырок в полупроводнике с акцепторной примесью значительно превышает концентрацию электронов, которые возникли из-за механизма собственной электропроводности полупроводника: $n_p >> n_n$. Проводимость такого типа называется *дырочной проводимостью*. Примесный полупроводник с дырочной проводимостью называется *полупроводником p-типа*. Основными носителями свободного заряда в полупроводниках *p*-типа являются дырки.

Поскольку дырки перемещаются в валентной зоне и энергия активации их мала, акцепторные уровни расположены в запрещенной зоне, вблизи потолка валентной зоны. Уровень Ферми в полупроводнике *p*-типа при $T = 0$ К лежит между потолком валентной зоны и акцепторными уровнями.

Таким образом, проводимость примесного полупроводника складывается из примесной и собственной. При низких температурах преобладает примесная проводимость, т. к. энергия активации, то есть энергия, требуемая для ионизации донорных и акцепторных примесных уровней с образованием электронов и дырок, мала. При высоких температурах в проводимость вносят вклад механизмы собственной проводимости.

Введение примесей приводит к возникновению в запрещенной зоне примесных энергетических уровней: акцепторных (располагаются немного выше верхнего края валентной зоны) или донорных (располагаются немного ниже дна зоны проводимости).

Концентрация носителей заряда в примесном полупроводнике складывается из собственных и примесных носителей:

$$n = n_{\text{с}} + n_{\text{пр}} = C_1 e^{-\frac{\Delta}{2kT}} + C_2 e^{-\frac{\Delta_{\text{пр}}}{2kT}},$$

где Δ — ширина запрещенной зоны (энергия, требующаяся для активации, то есть перевода электрона из валентной зоны в зону проводимости); $\Delta_{\text{пр}}$ — расстояние от уровней энергии примесных атомов до зоны проводимости (донорные уровни) и до валентной зоны (акцепторные уровни); C_1, C_2 — константы.

Построим зависимость натурального логарифма проводимости примесного полупроводника от обратной температуры (рис. 4.30).

Репозиторий БГАТУ

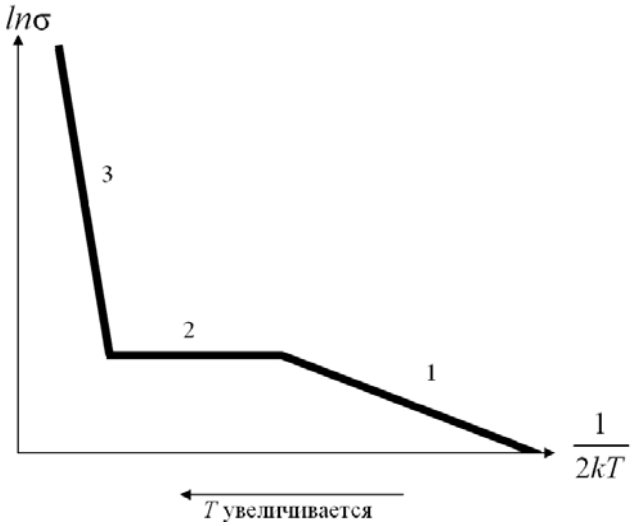

Рис. 4.30. Натуральный логарифм проводимости примесного полупроводника как функция температуры

Малый наклон графика в правой области (участок 1) соответствует зоне опустошения примесных уровней, увеличение температуры от самых низких значений приводит к увеличению числа электронов в зоне проводимости за счет опустошения донорных уровней. В центральной части (горизонтальный участок 2) наблюдается режим истощения, все примесные уровни опустошены, но величина температуры еще не достаточна, чтобы переводить электроны из валентной зоны в зону проводимости. В левой части (участок 3) наблюдается режим собственной проводимости за счет перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости.

На участке 3 температура достигает такой величины, что происходит интенсивный переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости и полупроводник приобретает черты собственной проводимости, ее величина быстро возрастает с повышением температуры. Тангенс угла наклона участка 3 определяет энергию активации собственной проводимости ΔE.

Применение полупроводников

В современной электронной технике полупроводниковые приборы играют исключительную роль. За последние три десятилетия они практически вытеснили электровакуумные приборы. Применяются в электро- и радиотехнике, транспорте, промышленности, быту и сельском хозяйстве. На основе полупроводников создают различные приборы: диоды, триоды-транзисторы, интегральные схемы.

Полупроводниковый *p–n*-переход

В полупроводнике *n*-типа основными носителями свободного заряда являются электроны, и их концентрация значительно превышает концентрацию дырок ($n_n >> n_p$). В полупроводнике *p*-типа основными носителями являются дырки ($n_p >> n_n$). При контакте двух полупроводников *n*- и *p*-типов начинается процесс диффузии: дырки из *p*-области переходят в *n*-область, а электроны, наоборот, из *n*-области в *p*-область. В результате в *n*-области вблизи зоны контакта уменьшается концентрация электронов и возникает положительно заряженный слой. В *p*-области уменьшается концентрация дырок и возникает отрицательно заряженный слой. Таким образом, на границе полупроводников образуется двойной электрический слой, электрическое поле которого препятствует процессу диффузии электронов и дырок навстречу друг другу (рис. 4.31). Контактная разность потенциалов и электрическое поле направлены из *n*-области в *p*-область. Пограничная область раздела полупроводников с разными типами проводимости (так называемый *запирающий слой*) обычно достигает толщины порядка десятков и сотен межатомных расстояний. Объемные заряды этого слоя создают между *p*- и *n*-областями запирающее напряжение $U_з$, приблизительно равное 0,35 В для германиевых *n–p*-переходов и 0,6 В для кремниевых.

Полупроводниковая структура с *n–p*-переходом обладает удивительным свойством односторонней проводимости. Если полупроводник с *n–p*-переходом подключен к источнику тока так, что положительный полюс источника соединен с *n*-областью, а отрицательный — с *p*-областью, то напряженность поля в запирающем

Репозиторий БГАТУ

слое возрастает. Дырки в *p*-области и электроны в *n*-области будут смещаться от *n*–*p*-перехода, увеличивая тем самым концентрации неосновных носителей в запирающем слое. Ток через *n*–*p*-переход практически не идет. Напряжение, поданное на *n*–*p*-переход в этом случае, называют *обратным*. Весьма незначительный обратный ток обусловлен только собственной проводимостью полупроводниковых материалов, т. е. наличием небольшой концентрации свободных электронов в *p*-области и дырок в *n*-области (рис. 4.31).

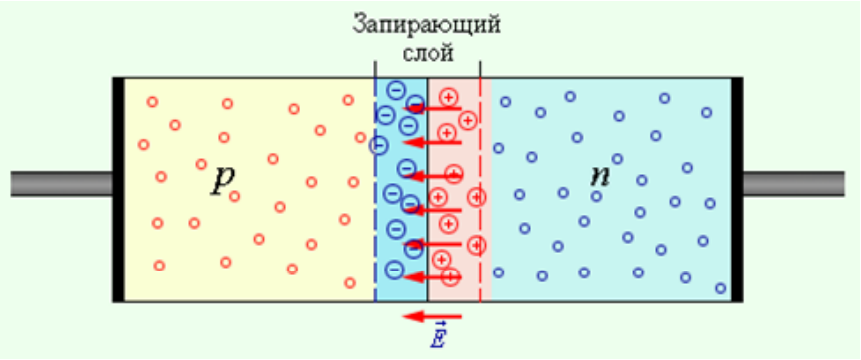

Рис. 4.31. Образование запирающего слоя
при контакте полупроводников *p*- и *n*-типов

Если *n*–*p*-переход соединить с источником так, чтобы положительный полюс источника был соединен с *p*-областью, а отрицательный — с *n*-областью, то напряженность электрического поля в запирающем слое будет уменьшаться, что облегчает переход основных носителей через контактный слой. Дырки из *p*-области и электроны из *n*-области, двигаясь навстречу друг другу, будут пересекать *n*–*p*-переход, создавая ток в *прямом* направлении. Сила тока через *n*–*p*-переход в этом случае будет возрастать при увеличении напряжения источника.

Способность *n*–*p*-перехода пропускать ток практически только в одном направлении используется в приборах, которые называются *полупроводниковыми диодами*. Полупроводниковые диоды изготавливаются из кристаллов кремния или германия. При их изготовлении в кристалл с каким-либо типом проводимости вплавляют примесь, обеспечивающую другой тип проводимости.

Полупроводниковые диоды используются в выпрямителях для преобразования переменного тока в постоянный. Типичная вольт-амперная характеристика кремниевого диода приведена на рис. 4.32.

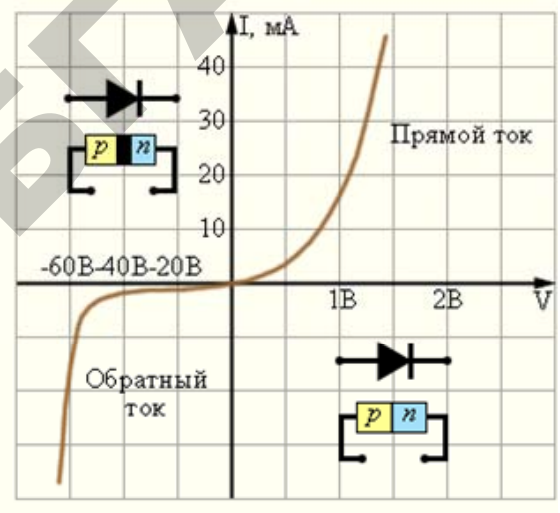

Рис. 4.32. Вольт-амперная характеристика кремниевого диода. На графике использованы различные шкалы для положительных и отрицательных напряжений

Полупроводниковые диоды обладают многими преимуществами по сравнению с вакуумными диодами — малые размеры, длительный срок службы, механическая прочность. Существенным недостатком полупроводниковых диодов является зависимость их параметров от температуры. Германиевые диоды, например, могут удовлетворительно работать только в диапазоне температур от –70 °С до 80 °С. У кремниевых диодов диапазон рабочих температур несколько шире.

Полупроводниковые приборы не с одним, а с двумя *n*–*p*-переходами называются *транзисторами*. Название происходит от сочетания английских слов: transfer — переносить и resistor — сопротивление. Обычно для создания транзисторов используют германий и кремний. Транзисторы бывают двух типов: *p*–*n*–*p*-тран-

Репозиторий БГАТУ

зисторы и *n–p–n*-транзисторы. Например, германиевый транзистор *p–n–p*-типа представляет собой небольшую пластинку из германия с донорной примесью, т. е. из полупроводника *n*-типа. В этой пластинке создаются две области с акцепторной примесью, т. е. области с дырочной проводимостью (рис. 4.33). В транзисторе *n–p–n*-типа основная германиевая пластинка обладает проводимостью *p*-типа, а созданные на ней две области — проводимостью *n*-типа (рис. 4.34).

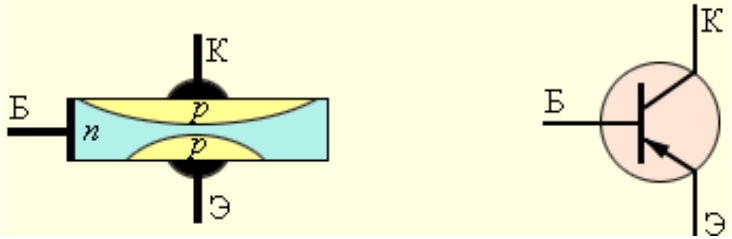

Рис. 4.33. Транзистор со структурой *p–n–p*-типа

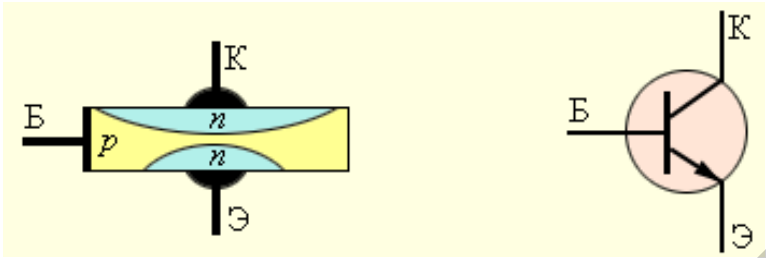

Рис. 4.34. Транзистор со структурой *n–p–n*-типа

Оба *n–p*-перехода транзистора соединяются с двумя источниками тока. На рис. 4.35 показано включение в цепь транзистора *p–n–p*-структуры. Переход «эмиттер–база» включается в прямом (пропускном) направлении (цепь эмиттера), а переход «коллектор–база» — в запирающем направлении (цепь коллектора).

Пока цепь эмиттера разомкнута, ток в цепи коллектора очень мал, так как для основных носителей свободного заряда — электронов в базе и дырок в коллекторе — переход заперт.

При замыкании цепи эмиттера дырки — основные носители заряда в эмиттере — переходят из него в базу, создавая в этой цепи ток $I_э$. Но для дырок, попавших в базу из эмиттера, *n–p*-переход

в цепи коллектора открыт. Большая часть дырок захватывается полем этого перехода и проникает в коллектор, создавая ток $I_к$. Для того чтобы ток коллектора был практически равен току эмиттера, базу транзистора делают в виде очень тонкого слоя. При изменении тока в цепи эмиттера изменяется сила тока и в цепи коллектора.

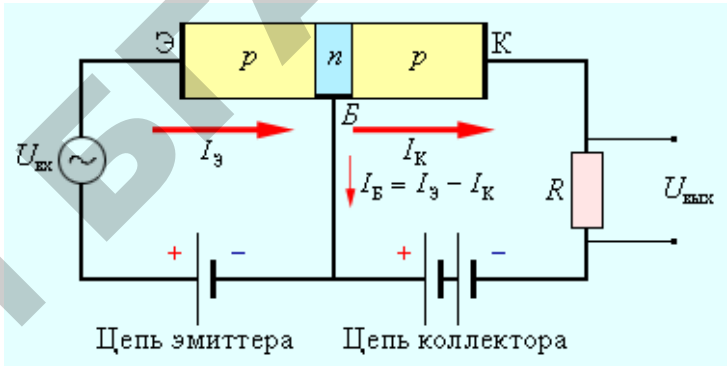

Рис. 4.35. Включение в цепь транзистора *p–n–p*-структуры

Если в цепь эмиттера включен источник переменного напряжения (рис. 4.35), то на резисторе *R*, включенном в цепь коллектора, также возникает переменное напряжение, амплитуда которого может во много раз превышать амплитуду входного сигнала. Следовательно, транзистор выполняет роль усилителя переменного напряжения.

Однако такая схема усилителя на транзисторе является неэффективной, так как в ней отсутствует усиление сигнала по току, и через источники входного сигнала протекает весь ток эмиттера $I_э$. В реальных схемах усилителей на транзисторах источник переменного напряжения включают так, чтобы через него протекал только небольшой ток базы $I_б = I_э - I_к$. Малые изменения тока базы вызывают значительные изменения тока коллектора. Усиление по току в таких схемах может составлять несколько сотен.

В настоящее время полупроводниковые приборы находят исключительно широкое применение в радиоэлектронике. Современная технология позволяет производить полупроводниковые приборы — диоды, транзисторы, полупроводниковые фотоприемники и т. д. — размером в несколько микрометров. Качественно новым этапом электронной техники явилось развитие *микроэлектроники*,

Репозиторий БГАТУ

которая занимается разработкой интегральных микросхем и принципов их применения.

Интегральной микросхемой называют совокупность большого числа взаимосвязанных элементов — сверхмалых диодов, транзисторов, конденсаторов, резисторов, соединительных проводов, изготовленных в едином технологическом процессе на одном кристалле. Микросхема размером в 1 см^2 может содержать несколько сотен тысяч микроэлементов.

Применение микросхем привело к революционным изменениям во многих областях современной электронной техники. Это особенно ярко проявилось в области электронной вычислительной техники. На смену громоздким ЭВМ, содержащим десятки тысяч электронных ламп и занимавшим целые здания, пришли персональные компьютеры.

4.2.5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа

Э. Резерфорд, исследуя прохождение α-частиц с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт через тонкие пленки золота, пришел к выводу о том, что атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Проанализировав эти опыты, Резерфорд также показал, что атомные ядра имеют размеры примерно 10^{-14}–10^{-15} м (линейные размеры атома — примерно 10^{-10} м).

Атомное ядро состоит из элементарных частиц — протонов и нейтронов. Протон (p) имеет положительный заряд, равный заряду электрона, и массу покоя $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1836\, m_e$, где m_e — масса электрона. Нейтрон (n) — нейтральная частица с массой покоя $m_p = 1{,}6747 \cdot 10^{-27}$ кг $\approx 1839\, m_e$. Протоны и нейтроны называются нуклонами (от лат. nucleus — ядро). Общее число нуклонов в атомном ядре называется массовым числом A.

Атомное ядро характеризуется зарядом Ze, где e — заряд протона, Z —зарядовое число ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов Менделеева. Известные в настоящее время 107 элементов таблицы Менделеева имеют зарядовые числа ядер от $Z = 1$ до $Z = 107$.

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^{A}_{Z}X$, где X — символ химического элемента; Z — атомный номер (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре).

Так как атом нейтрален, то заряд ядра определяет и число электронов в атоме. От числа же электронов зависит их распределение по состояниям в атоме, от которого, в свою очередь, зависят химические свойства атома. Следовательно, заряд ядра определяет специфику данного химического элемента, т. е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию их электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Ядра с одинаковыми Z, но разными A (т. е. с разными числами нейтронов $N = A - Z$) называются изотопами, а ядра с одинаковыми A, но разными Z — изобарами. Например, водород ($Z = 1$) имеет три изотопа: ${}^{1}_{1}H$ — протий ($Z = 1$, $N = 0$), ${}^{2}_{1}H$ — дейтерий ($Z = 1$, $N = 1$), ${}^{3}_{1}H$ — тритий ($Z = 1$, $N = 2$); олово — десять и т. д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами (исключение составляют, например, изотопы водорода), определяющимися в основном структурой электронных оболочек, которая является одинаковой для всех изотопов данного элемента. Примером ядер-изобар могут служить ядра ${}^{10}_{4}Be$, ${}^{10}_{5}B$, ${}^{10}_{6}C$. В настоящее время известно более 2000 ядер, отличающихся либо Z, либо A, либо и тем и другим.

Радиус ядра задается эмпирической формулой $R = R_0 A^{1/3}$, где $R_0 = (1{,}3 \div 1{,}7) \cdot 10^{-15}$ м. Из формулы вытекает, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер (около 10^7 кг/м^3).

Дефект массы и энергия связи ядра

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Это означает, что в ядре между нуклонами существует определенная связь. Массу ядер очень точно можно определить с помощью масс-спектрометров — измерительных приборов, разделяющих с помощью электрических и магнитных полей

Репозиторий БГАТУ

пучки заряженных частиц (обычно ионов) с разными удельными зарядами Q/m. Масс-спектрометрические измерения показали, что масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов. Но так как всякому изменению массы должно соответствовать изменение энергии, то следовательно, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, называется энергией связи ядра.

Энергия связи нуклонов в ядре $E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]c^2$, где m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводятся не массы ядер, а массы m атомов. Поэтому для вычисления энергии связи ядра пользуются формулой $E_{св} = [Zm_H + (A - Z)m_n - m]c^2$, где m_H — масса атома водорода. Так как m_H больше m_p на величину m_e, то первый член в квадратных скобках включает в себя массу Z электронов. Но так как масса атома m отличается от массы ядра как раз на массу Z электронов, то вычисления по обеим формулам приводят к одинаковым результатам.

Величина $\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я$ называется дефектом массы ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра. Часто вместо энергии связи рассматривают удельную энергию связи $\delta E_{св}$ — энергию связи, отнесенную к одному нуклону. Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер, т. е. чем больше $\delta E_{св}$, тем устойчивее ядро. Удельная энергия связи зависит от массового числа A элемента (рис. 4.36).

Для легких ядер ($A \le 12$) удельная энергия связи круто возрастает до 6–7 МэВ, затем более медленно возрастает до максимальной величины 8,7 МэВ у элементов с A = 50–60, а потом постепенно уменьшается у тяжелых элементов (например, для $^{238}_{92}U$ она составляет 7,6 МэВ). Отметим для сравнения, что энергия связи валентных электронов в атомах составляет примерно 10 эВ (в 10^6 раз меньше).

Уменьшение удельной энергии связи при переходе к тяжелым элементам объясняется тем, что с возрастанием числа протонов

в ядре увеличивается и энергия их кулоновского отталкивания. Поэтому связь между нуклонами становится менее сильной, а сами ядра менее прочными.

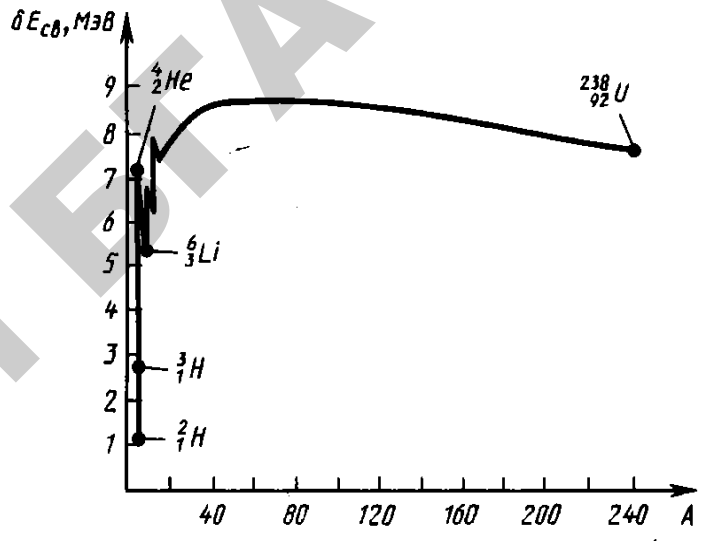

Рис. 4.36. Зависимость удельной энергии связи от массового числа элемента

Наиболее устойчивыми оказываются так называемые магические ядра, у которых число протонов или число нейтронов равно одному из магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особенно стабильны дважды магические ядра, у которых магическими являются и число протонов, и число нейтронов (этих ядер насчитывается всего пять: ^4_2He, $^{16}_8O$, $^{40}_{20}Ca$, $^{48}_{20}Ca$, $^{208}_{82}Pb$).

Из рисунка 4.36 следует, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на более легкие; 2) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые. При обоих процессах выделяется огромное количество энергии; эти процессы в настоящее время осуществлены практически (реакции деления и термоядерные реакции).

Репозиторий БГАТУ

Ядерные силы. Модели ядра

Между составляющими ядро нуклонами действуют особые, специфические для ядра силы, значительно превышающие кулоновские силы отталкивания между протонами. Они называются ядерными силами. С помощью экспериментальных данных (рассеяние нуклонов на ядрах, ядерные превращения и т. д.) доказано, что ядерные силы намного превышают гравитационные, электрические и магнитные взаимодействия и не сводятся к ним. Ядерные силы относятся к классу так называемых сильных взаимодействий.

Перечислим основные свойства ядерных сил:

1. Ядерные силы являются силами притяжения.

2. Ядерные силы являются короткодействующими — их действие проявляется на расстояниях, не превышающих 10^{-15} м. При увеличении расстояния между нуклонами ядерные силы быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших их радиуса действия, оказываются примерно в 100 раз больше кулоновских сил, действующих между протонами на том же расстоянии.

3. Ядерным силам свойственна зарядовая независимость: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или, наконец, между протоном и нейтроном, одинаковы по величине. Отсюда следует, что ядерные силы имеют неэлектрическую природу.

4. Ядерным силам свойственно насыщение, т. е. каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Насыщение проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов в ядре (если не учитывать легкие ядра) при увеличении числа нуклонов не растет, а остается приблизительно постоянной.

5. Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтрон (ядро изотопа $^{2}_{1}H$) только при условии параллельной ориентации их спинов.

6. Ядерные силы не являются центральными, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

Сложный характер ядерных сил и трудность точного решения уравнений движения всех нуклонов ядра (ядро с массовым числом

A представляет собой систему из A тел) не позволили до настоящего времени разработать единую последовательную теорию атомного ядра. Поэтому на данной стадии прибегают к рассмотрению приближенных ядерных моделей, в которых ядро заменяется некоторой модельной системой, довольно хорошо описывающей только определенные свойства ядра и допускающей более или менее простую математическую трактовку.

1. Капельная модель ядра (1936; Н. Бор и Я. И. Френкель). Капельная модель ядра является первой моделью. Она основана на аналогии между поведением нуклонов в ядре и поведением молекул в капле жидкости. Так, в обоих случаях силы, действующие между составными частицами — молекулами в жидкости и нуклонами в ядре, — являются короткодействующими и им свойственно насыщение. Для капли жидкости при данных внешних условиях характерна постоянная плотность ее вещества. Ядра же характеризуются практически постоянной удельной энергией связи и постоянной плотностью, не зависящей от числа нуклонов в ядре. Наконец, объем капли, так же как и объем ядра, пропорционален числу частиц. Существенное отличие ядра от капли жидкости в этой модели заключается в том, что она трактует ядро как каплю электрически заряженной несжимаемой жидкости (с плотностью, равной ядерной), подчиняющуюся законам квантовой механики. Капельная модель ядра позволила получить полуэмпирическую формулу для энергии связи нуклонов в ядре, объяснила механизм ядерных реакций и особенно реакции деления ядер. Однако эта модель не смогла, например, объяснить повышенную устойчивость ядер, содержащих магические числа протонов и нейтронов.

2. Оболочечная модель ядра (1949–1950; американский физик М. Гепперт-Майер (1906–1975) и немецкий физик Х. Иенсен (1907–1973)). Оболочечная модель предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней. Считается, что ядра с целиком заполненными оболочками являются наиболее устойчивыми. Такие особо устойчивые (магические) ядра действительно существуют. Оболочечная модель ядра позволила объяснить спины и магнитные моменты ядер, различную устойчивость атомных ядер, а также периодичность изменений их свойств. Эта модель особенно хорошо применима для описания

Репозиторий БГАТУ

легких и средних ядер, а также для ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.

По мере дальнейшего накопления экспериментальных данных о свойствах атомных ядер появлялись все новые факты, не укладывающиеся в рамки описанных моделей. Так возникли обобщенная модель ядра (синтез капельной и оболочечной моделей), оптическая модель ядра (объясняет взаимодействие ядер с налетающими частицами) и т. д.

Радиоактивное излучение и его виды

Французский физик А. Беккерель (1852–1908) в 1896 г. при изучении люминесценции солей урана случайно обнаружил самопроизвольное испускание ими излучения неизвестной природы, которое действовало на фотопластинку, ионизировало воздух, проникало сквозь тонкие металлические пластинки, вызывало люминесценцию ряда веществ. Продолжая исследование этого явления, супруги Кюри — Мария (1867–1934) и Пьер — обнаружили, что беккерелевское излучение свойственно не только урану, но и многим другим тяжелым элементам, таким как торий и актиний. Они показали также, что урановая смоляная обманка (руда, из которой добывается металлический уран) испускает излучение, интенсивность которого во много раз превышает интенсивность излучения урана. Таким образом удалось выделить два новых элемента — носителя беккерелевского излучения: полоний $\left({}^{210}_{84}Po\right)$ и радий $\left({}^{226}_{86}Ra\right)$. Обнаруженное излучение было названо радиоактивным излучением, а само явление — испускание радиоактивного излучения — радиоактивностью.

Дальнейшие опыты показали, что на характер радиоактивного излучения препарата не оказывают влияния вид химического соединения, агрегатное состояние, механическое давление, температура, электрические и магнитные поля, т. е. все те воздействия, которые могли бы привести к изменению состояния электронной оболочки атома. Следовательно, радиоактивные свойства элемента обусловлены лишь структурой его ядра.

В настоящее время под радиоактивностью понимают способность некоторых атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц. Радиоактивность подразделяется на естественную (наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе) и искусственную (наблюдается у изотопов, полученных посредством ядерных реакций). Принципиального различия между этими двумя типами радиоактивности нет, так как законы радиоактивного превращения в обоих случаях одинаковы.

Радиоактивное излучение бывает трех типов: α-, β- и γ-излучение. Подробное их исследование позволило выяснить природу и основные свойства. α-излучение отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (например, поглощается слоем алюминия толщиной примерно 0,05 мм). α-излучение представляет собой поток ядер гелия; заряд α-частицы равен $+2e$, а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия ${}^{4}_{2}He$. По отклонению α-частиц в электрическом и магнитном полях был определен их удельный заряд Q/m, значение которого подтвердило правильность представлений об их природе.

β-излучение отклоняется электрическим и магнитным полями; его ионизирующая способность значительно меньше (примерно на два порядка), а проникающая способность гораздо больше (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 2 мм), чем у α-частиц. β-излучение представляет собой поток быстрых электронов (это вытекает из определения их удельного заряда). Поглощение потока электронов с одинаковыми скоростями в однородном веществе подчиняется экспоненциальному закону $N = N_0 e^{-\mu x}$, где N_0 и N — число электронов на входе и выходе слоя вещества толщиной x; μ — коэффициент поглощения. β-излучение сильно рассеивается в веществе, поэтому μ зависит не только от вещества, но и от размеров и формы тел, на которые β-излучение падает.

γ-излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (например, проходит через слой свинца толщиной 5 см), при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию. γ-излучение представляет собой электромагнитное излучение с чрезвычайно малой длиной волны $\lambda < 10^{-10}$ м и вследствие этого — ярко выраженными корпускулярными свойствами, т. е. является потоком частиц — γ-квантов (фотонов).

Репозиторий БГАТУ

Закон радиоактивного распада

Под радиоактивным распадом, или просто распадом, понимают естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется материнским, возникающее ядро — дочерним.

Теория радиоактивного распада строится на предположении о том, что радиоактивный распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Поскольку отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, можно считать, что число ядер dN, распавшихся в среднем за интервал времени от t до $t + dt$, пропорционально промежутку времени dt и числу N нераспавшихся ядер к моменту времени t: $dN = -\lambda N dt$, где λ — постоянная для данного радиоактивного вещества величина, называемая постоянной радиоактивного распада; знак минус указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается. Разделив переменные и интегрируя: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$, $\int\limits_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int\limits_{0}^{t} dt$, $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$, получим $N = N_0 e^{-\lambda t}$, где N_0 — начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); N — число нераспавшихся ядер в момент времени t.

Формула $N = N_0 e^{-\lambda t}$ выражает закон радиоактивного распада, согласно которому число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте.

Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада $T_{1/2}$ и среднее время жизни τ радиоактивного ядра. Период полураспада $T_{1/2}$ — время, за которое исходное число радиоактивных ядер в среднем уменьшается вдвое. Тогда $\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t}$, откуда $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$. Периоды полураспада для естественно-радиоактивных элементов колеблются от десятимиллионных долей секунды до многих миллиардов лет.

Суммарная продолжительность жизни dN ядер равна $t|dN| = \lambda N dt$. Проинтегрировав это выражение по всем возможным t (т. е. от 0 до ∞) и разделив на начальное число ядер N_0, получим среднее время жизни τ радиоактивного ядра: $\tau = \frac{1}{N_0} \int\limits_0^\infty \lambda N t dt = \frac{1}{N_0} \int\limits_0^\infty \lambda N_0 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int\limits_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$.

Таким образом, среднее время жизни τ радиоактивного ядра есть величина, обратная постоянной радиоактивного распада λ.

Активностью A нуклида (общее название атомных ядер, отличающихся числом протонов Z и нейтронов N) в радиоактивном источнике называется число распадов, происходящих с ядрами образца в 1 с: $A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N$. Единица активности в СИ — беккерель (Бк): 1 Бк — активность нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада. До сих пор в ядерной физике применяется и внесистемная единица активности нуклида в радиоактивном источнике — кюри (Ku): 1 Ku = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Закономерности α-распада

В настоящее время известно более двухсот α-активных ядер, главным образом тяжелых ($A > 200$, $Z > 82$). Только небольшая группа α-активных ядер приходится на области с $A = 140$–160 (редкие земли). Примером α-распада служит распад изотопа урана ${}^{238}_{92}U$ с образованием Th: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}He$.

Скорости вылетающих при распаде α-частиц очень велики и колеблются для разных ядер в пределах от $1{,}4 \cdot 10^7$ до $2 \cdot 10^7$ м/с, что соответствует энергиям от 4 до 8,8 МэВ. Согласно современным представлениям, α-частицы образуются в момент радиоактивного распада при встрече движущихся внутри ядра двух протонов и двух нейтронов.

α-частицы, испускаемые конкретным ядром, обладают, как правило, определенной энергией. Более тонкие измерения, однако, показали, что энергетический спектр α-частиц, испускаемых данным радиоактивным элементом, обнаруживает «тонкую структуру», т. е. испускается несколько групп α-частиц, причем в пределах каждой группы их энергии практически постоянны. Дискретный спектр α-частиц свидетельствует о том, что атомные ядра обладают дискретными энергетическими уровнями.

Репозиторий БГАТУ

Для α-распада характерна сильная зависимость между периодом полураспада $T_{1/2}$ и энергией E вылетающих частиц. Эта взаимосвязь определяется эмпирическим законом Гейгера–Нэттола (1912), который обычно выражают в виде связи между пробегом R_α (расстоянием, проходимым частицей в веществе до ее полной остановки) α-частиц в воздухе и постоянной радиоактивного распада λ: $\ln\lambda = A + B\ln R_\alpha$, где A и B — эмпирические константы. Таким образом, чем меньше период полураспада радиоактивного элемента, тем больше пробег, а следовательно, и энергия испускаемых α-частиц. Пробег α-частиц в воздухе (при нормальных условиях) составляет несколько сантиметров, в более плотных средах он гораздо меньше, составляя сотые доли миллиметра (α-частицы можно задержать обычным листом бумаги).

β^--распад. Нейтрино

Явление β^--распада (в дальнейшем будет показано, что существует и β^+-распад) связано с выбросом электрона. Пришлось преодолеть целый ряд трудностей с трактовкой β^--распада. Во-первых, необходимо было обосновать происхождение электронов, выбрасываемых в процессе β^--распада. Протонно-нейтронное строение ядра исключает возможность вылета электрона из ядра, поскольку в ядре электронов нет.

Предположение же, что электроны вылетают не из ядра, а из электронной оболочки, несостоятельно, поскольку тогда должно было бы наблюдаться оптическое или рентгеновское излучение, что не подтверждают эксперименты.

Во-вторых, необходимо было объяснить непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов (типичная для всех изотопов кривая распределения β^--частиц по энергиям приведена на рисунке 4.37). Каким же образом β^--активные ядра, обладающие до и после распада вполне определенными энергиями, могут выбрасывать электроны со значениями энергии от нуля до некоторого максимального E_{max}? Т. е. энергетический спектр испускаемых электронов является непрерывным? Гипотеза о том, что при β^--распаде электроны покидают ядро со строго определенными энергиями, но в результате каких-то вторичных взаимодействий теряют ту или иную долю своей энергии, так что их первоначальный дискретный спектр превращается в непрерывный, была опровергнута прямыми калориметрическими опытами. Так как максимальная энергия E_{max} определяется разностью масс материнского и дочернего ядер, то распады, при которых энергия электрона $E < E_{max}$, как бы протекают с нарушением закона сохранения энергии. Н. Бор даже пытался обосновать это нарушение, высказывая предположение, что закон сохранения энергии носит статистический характер и выполняется лишь в среднем для большого числа элементарных процессов. Отсюда видно, насколько принципиально важно было разрешить это затруднение.

Рис. 4.37. Кривая распределения β^--частиц по энергиям

В-третьих, необходимо было разобраться с несохранением спина при β^--распаде. При β^--распаде число нуклонов в ядре не изменяется (так как не изменяется массовое число A), поэтому не должен изменяться и спин ядра, который равен целому числу $\hbar$ при четном A и полуцелому $\hbar$ при нечетном A. Однако выброс электрона, имеющего спин $\hbar/2$, должен изменить спин ядра на величину $\hbar/2$. Последние два затруднения привели В. Паули к гипотезе (1931) о том, что при β^--распаде вместе с электроном испускается еще одна нейтральная частица — нейтрино. Нейтрино имеет нулевой заряд, спин $\hbar/2$ и нулевую (а скорее, $10^{-4}m_e$) массу покоя; обозначается ${}^0_0\nu_e$. Впоследствии оказалось, что при β^--распаде испускается не нейтрино, а антинейтрино (античастица по отношению к нейтрино; обозначается ${}^0_0\tilde{\nu}_e$).

Репозиторий БГАТУ

Гипотеза о существовании нейтрино позволила Э. Ферми создать теорию β^--распада (1934), которая в основном сохранила свое значение и в настоящее время, хотя экспериментально существование нейтрино было доказано более чем через 20 лет (1956). Столь длительные «поиски» нейтрино сопряжены с большими трудностями, обусловленными отсутствием у нейтрино электрического заряда и массы. Нейтрино — единственная частица, не участвующая ни в сильных, ни в электромагнитных взаимодействиях; единственный вид взаимодействий, в котором может принимать участие нейтрино, — слабое взаимодействие. Поэтому прямое наблюдение нейтрино весьма затруднительно. Ионизирующая способность нейтрино столь мала, что один акт ионизации в воздухе приходится на 500 км пути. Проникающая же способность нейтрино столь огромна (пробег нейтрино с энергией 1 МэВ в свинце составляет порядка 10^{18} м!), что затрудняет удержание этих частиц в приборах.

Для экспериментального выявления нейтрино (антинейтрино) применялся поэтому косвенный метод, основанный на том, что в реакциях (в том числе и с участием нейтрино) выполняется закон сохранения импульса. Таким образом, нейтрино было обнаружено при изучении отдачи атомных ядер при β^--распаде. Если при β^--распаде ядра вместе с электроном выбрасывается и антинейтрино, то векторная сумма трех импульсов — ядра отдачи, электрона и антинейтрино — должна быть равна нулю. Это действительно подтвердилось на опыте. Непосредственное обнаружение нейтрино стало возможным лишь значительно позднее, после появления мощных реакторов, позволяющих получать интенсивные потоки нейтрино.

Введение нейтрино (антинейтрино) позволило не только объяснить кажущееся несохранение спина, но и разобраться с вопросом непрерывности энергетического спектра выбрасываемых электронов. Сплошной спектр β^--частиц обязан распределению энергии между электронами и антинейтрино, причем сумма энергий обеих частиц равна E_{max}. В одних актах распада большую энергию получает антинейтрино, в других — электрон; в граничной точке кривой на рисунке, где энергия электрона равна E_{max}, вся энергия распада уносится электроном, а энергия антинейтрино равна нулю.

Наконец, рассмотрим вопрос о происхождении электронов при β^--распаде. Поскольку электрон не вылетает из ядра и вырывается из оболочки атома, было сделано предположение, что β-электрон рождается в результате процессов, происходящих внутри ядра. Так

как при β^--распаде число нуклонов в ядре не изменяется, а Z увеличивается на единицу, то единственной возможностью одновременного осуществления этих условий является превращение одного из нейтронов β^--активного ядра в протон с одновременным образованием электрона и вылетом антинейтрино: ${}^1_0n \to {}^1_1p + {}^0_{-1}e + {}^0_0\tilde{\nu}_e$.

Этот процесс сопровождается выполнением законов сохранения электрических зарядов, импульса и массовых чисел. Кроме того, данное превращение энергетически возможно, так как масса покоя нейтрона превышает массу атома водорода, т. е. протона и электрона вместе взятых. Данной разности в массах соответствует энергия, равная 0,782 МэВ. За счет этой энергии может происходить самопроизвольное превращение нейтрона в протон; энергия распределяется между электроном и антинейтрино.

Если превращение нейтрона в протон энергетически выгодно и вообще возможно, то должен наблюдаться радиоактивный распад свободных нейтронов (т. е. нейтронов вне ядра). Обнаружение этого явления подтвердило бы изложенную теорию β^--распада. Действительно, в 1950 г. в потоках нейтронов большой интенсивности, возникающих в ядерных реакторах, был обнаружен радиоактивный распад свободных нейтронов. Энергетический спектр возникающих при этом электронов соответствовал приведенному на рисунке, а верхняя граница E_{max} энергии электронов оказалась равной рассчитанной выше (0,782 МэВ).

Гамма-излучение и его свойства

Экспериментально установлено, что γ-излучение не является самостоятельным видом радиоактивности, а только сопровождает α- и β-распады и также возникает при ядерных реакциях, при торможении заряженных частиц, их распаде и т. д. γ-спектр является линейчатым. γ-спектр — это распределение числа γ-квантов по энергиям (такое же толкование β-спектра дано ранее). Дискретность γ-спектра имеет принципиальное значение, так как является доказательством дискретности энергетических состояний атомных ядер.

В настоящее время установлено, что γ-излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром. Дочернее ядро в момент своего образования, оказываясь возбужденным, за время примерно 10^{-13}–10^{-14} с, значительно меньшее времени жизни возбужденного атома (примерно 10^{-8} с), переходит в основное состояние с испус-

Репозиторий БГАТУ

канием γ-излучения. Возвращаясь в основное состояние, возбужденное ядро может пройти через ряд промежуточных состояний, поэтому γ-излучение одного и того же радиоактивного изотопа может содержать несколько групп γ-квантов, отличающихся одна от другой своей энергией.

При γ-излучении A и Z ядра не изменяются, поэтому оно не описывается никакими правилами смещения. γ-излучение большинства ядер является столь коротковолновым, что его волновые свойства проявляются весьма слабо. Здесь на первый план выступают корпускулярные свойства, поэтому γ-излучение рассматривают как поток частиц — γ-квантов. При радиоактивных распадах различных ядер γ-кванты имеют энергии от 10 кэВ до 5 МэВ.

γ-кванты, обладая нулевой массой покоя, не могут замедляться в среде, поэтому при прохождении γ-излучения сквозь вещество они либо поглощаются, либо рассеиваются им. γ-кванты не несут электрического заряда и тем самым не испытывают влияния кулоновских сил. При прохождении пучка γ-квантов сквозь вещество их энергия не меняется, но в результате столкновений ослабляется интенсивность, изменение которой описывается экспоненциальным законом $I = I_0 e^{-\mu x}$ (I и I_0 — интенсивности γ-излучения на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; μ — коэффициент поглощения). Так как γ-излучение — самое проникающее излучение, то μ для многих веществ — очень малая величина; μ зависит от свойств вещества и от энергии γ-квантов.

γ-кванты, проходя сквозь вещество, могут взаимодействовать как с электронными оболочками атомов вещества, так и с их ядрами. В квантовой электродинамике доказывается, что основными процессами, сопровождающими прохождение γ-излучения через вещество, являются фотоэффект и комптон-эффект (комптоновское рассеяние).

Фотоэффект, или фотоэлектрическое поглощение γ-излучения — это процесс, при котором атом поглощает γ-квант и испускает электрон. Так как электрон выбивается из одной из внутренних оболочек атома, то освободившееся место заполняется электронами из вышележащих оболочек, и фотоэффект сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Фотоэффект является преобладающим механизмом поглощения в области малых энергий γ-квантов ($E_\gamma \le 100$ кэВ). Фотоэффект может идти только на связанных электронах, так как свободный электрон не может поглотить γ-квант,

при этом одновременно не удовлетворяются законы сохранения энергии и импульса.

По мере увеличения энергии γ-квантов ($E_\gamma > 0{,}5$ МэВ) вероятность фотоэффекта становится очень мала, и основным механизмом взаимодействия γ-квантов с веществом оказывается комптоновское рассеяние.

Ядерные реакции и их основные типы

Ядерные реакции — это превращения атомных ядер при взаимодействии с элементарными частицами (в том числе и с γ-квантами) или друг с другом. Наиболее распространенным видом ядерной реакции является реакция, записываемая символически следующим образом: $X + a \rightarrow Y + b$, или $X(a, b)Y$, где X и Y — исходное и конечное ядра; a и b — бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

В ядерной физике эффективность взаимодействия характеризуют эффективным сечением σ. С каждым видом взаимодействия частицы с ядром связывают свое эффективное сечение: эффективное сечение рассеяния определяет процессы рассеяния, эффективное сечение поглощения — процессы поглощения. Эффективное сечение ядерной реакции $\sigma = \dfrac{dN}{nNdx}$, где N — число частиц, падающих за единицу времени на единицу площади поперечного сечения вещества, имеющего в единице объема n ядер; dN — число этих частиц, вступающих в ядерную реакцию в слое толщиной dx. Эффективное сечение σ имеет размерность площади и характеризует вероятность того, что при падении пучка частиц на вещество произойдет реакция. Единица эффективного сечения ядерных процессов — барн (1 барн = 10^{-26} м^2). В любой ядерной реакции выполняются законы сохранения электрических зарядов и массовых чисел: сумма зарядов (массовых чисел) ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме зарядов (массовых чисел) конечных продуктов (ядер и частиц) реакции. Выполняются также законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В отличие от радиоактивного распада, который протекает всегда с выделением энергии, ядерные реакции могут быть как экзотермическими

Репозиторий БГАТУ

(с выделением энергии), так и эндотермическими (с поглощением энергии).

Важную роль в объяснении механизма многих ядерных реакций сыграло предположение Н. Бора (1936) о том, что ядерные реакции протекают в две стадии по следующей схеме: $X + a \rightarrow C \rightarrow Y + b$. Первая стадия — это захват ядром X частицы a, приблизившейся к нему на расстояние действия ядерных сил (примерно $2 \cdot 10^{-15}$ м), и образование промежуточного ядра C, называемого составным (или компаунд-ядром). Энергия влетевшей в ядро частицы быстро распределяется между нуклонами составного ядра, в результате чего оно оказывается в возбужденном состоянии. При столкновении нуклонов составного ядра один из нуклонов (или их комбинация, например, дейтрон — ядро тяжелого изотопа водорода, дейтерия, содержащее один протон и один нейтрон) или α-частица может получить энергию, достаточную для вылета из ядра. В результате возможна вторая стадия ядерной реакции — распад составного ядра на ядро Y и частицу b.

В ядерной физике вводится характерное ядерное время — время, необходимое для пролета частицей расстояния порядка величины, равной диаметру ядра ($d \approx 10^{-15}$ м). Так, для частицы с энергией 1 МэВ (что соответствует ее скорости $u \approx 10^7$ м/с) характерное ядерное время $\tau = 10^{-22}$ с. С другой стороны, доказано, что время жизни составного ядра равно 10^{-16}–10^{-12} с, т. е. составляет $(10^6 \div 10^{10})\tau$. Это же означает, что за время жизни составного ядра может произойти очень много столкновений нуклонов между собой, т. е. перераспределение энергии между нуклонами действительно возможно. Следовательно, составное ядро живет настолько долго, что полностью «забывает», каким образом оно образовалось. Поэтому характер распада составного ядра (испускание им частицы b) — вторая стадия ядерной реакции — не зависит от способа образования составного ядра — первой стадии.

Если испущенная частица тождественна с захваченной ($b \equiv a$), то указанная схема описывает рассеяние частицы: упругое — при $E_b = E_a$, неупругое — при $E_b \neq E_a$. Если же испущенная частица не тождественна с захваченной ($b \neq a$), то имеем дело с ядерной реакцией в прямом смысле слова. Некоторые реакции протекают без образования составного ядра, они называются прямыми ядерными взаимодействиями (например, реакции, вызываемые быстрыми нуклонами и дейтронами).

Ядерные реакции классифицируются по следующим признакам:

1) по роду участвующих в них частиц — реакции под действием нейтронов; реакции под действием заряженных частиц (например, протонов, дейтронов, α-частиц); реакции под действием γ-квантов;

2) по энергии вызывающих их частиц — реакции при малых энергиях (порядка электрон-вольт), происходящие в основном с участием нейтронов; реакции при средних энергиях (до нескольких мегаэлектрон-вольт), происходящие с участием γ-квантов и заряженных частиц (протоны, α-частицы); реакции при высоких энергиях (сотни и тысячи мегаэлектрон-вольт), приводящие к рождению отсутствующих в свободном состоянии элементарных частиц и имеющие большое значение для их изучения;

3) по роду участвующих в них ядер — реакции на легких ядрах ($A < 50$); реакции на средних ядрах $50 < A < 100$); реакции на тяжелых ядрах ($A > 100$);

4) по характеру происходящих ядерных превращений — реакции с испусканием нейтронов; реакции с испусканием заряженных частиц; реакции захвата (в случае этих реакций составное ядро не испускает никаких частиц, а переходит в основное состояние, излучая один или несколько γ-квантов).

Первая в истории ядерная реакция осуществлена Э. Резерфордом (1919) при бомбардировке ядра азота α-частицами, испускаемыми радиоактивным источником: ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{18}_{9}F \rightarrow {}^{17}_{8}F + {}^{1}_{1}p$.

Позитрон. β^+-распад. Электронный захват

П. Дираком было получено (1928) релятивистское волновое уравнение для электрона, которое позволило объяснить все основные свойства электрона, в том числе наличие у него спина и магнитного момента. Замечательной особенностью уравнения Дирака оказалось то, что из него для полной энергии свободного электрона получались не только положительные, но и отрицательные значения. Этот результат мог быть объяснен лишь предположением о существовании античастицы электрона — позитрона.

Гипотеза Дирака, недоверчиво воспринимавшаяся большинством физиков, была блестяще подтверждена в 1932 г. К. Андерсоном (американский физик (1905–1991); Нобелевская премия 1936 г.), обнаружившим позитрон в составе космического излучения. Суще-

Репозиторий ГГАТУ

ствование позитронов было доказано наблюдением их треков в камере Вильсона, помещенной в магнитном поле. Эти частицы в камере отклонялись так, как отклоняется движущийся положительный заряд. Опыты показали, что позитрон $\left({}^{0}_{+1}e\right)$ — частица с массой покоя, в точности равной массе покоя электрона, и спином $\hbar/2$, несущая положительный электрический заряд $+e$. Жолио-Кюри — Фредерик (1900–1958) и Ирен (1897–1956), — бомбардируя различные ядра α-частицами (1934), обнаружили искусственно-радиоактивные ядра, испытывающие β^--распад, а реакции на *B*, *Al*, *Mg* привели к искусственно-радиоактивным ядрам, претерпевающим β^+-распад, или позитронный распад:

$$
{}^{10}_{5}B + {}^{4}_{2}He \to {}^{14}_{7}N \to {}^{13}_{7}N + {}^{1}_{0}n,
$$

$$
{}^{13}_{7}N \to {}^{13}_{6}C + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e;
$$

$$
{}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \to {}^{31}_{15}P \to {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n,
$$

$$
{}^{30}_{15}P \to {}^{30}_{14}Si + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e;
$$

$$
{}^{24}_{12}Mg + {}^{4}_{2}He \to {}^{28}_{14}Si \to {}^{27}_{14}Si + {}^{1}_{0}n,
$$

$$
{}^{27}_{14}Si \to {}^{27}_{13}Al + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e
$$

(Нобелевская премия 1956 г.). Наличие в этих реакциях позитронов доказано при изучении их треков в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле.

Таким образом, в экспериментах Жолио-Кюри, с одной стороны, открыта искусственная радиоактивность, а с другой — впервые обнаружен позитронный радиоактивный распад. Энергетический β^+-спектр, как и β^--спектр, непрерывен. β^+-распад подчиняется следующему правилу смещения: ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e$. Процесс β^+-распада протекает так, как если бы один из протонов ядра превратился в нейтрон, испустив при этом позитрон и нейтрино: ${}^{1}_{1}p \to {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e$, причем одновременный выброс нейтрино вытекает из тех же соображений, которые излагались при обсуждении β^--распада. Так как масса покоя протона меньше, чем у нейтрона, то эта реакция для свободного протона наблюдаться не может. Однако для протона, связанного в ядре благодаря ядерному взаимодействию частиц, эта реакция оказывается энергетически возможной.

Вскоре после опытов К. Андерсона, а также обоснования β^+-распада было установлено, что позитроны могут рождаться при взаимодействии γ-квантов большой энергии (E_γ > 1,02 МэВ = $2m_ec^2$) с веществом. Этот процесс идет по схеме $\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$. Электронно-позитронные пары были действительно обнаружены в помещенной в магнитное поле камере Вильсона, в которой электрон и позитрон, имеющие противоположные по знаку заряды, отклонялись в противоположные стороны. Для выполнения последнего соотношения помимо выполнения законов сохранения энергии и импульса необходимо, чтобы фотон обладал целым спином, равным 0 или 1, поскольку спины электрона и позитрона равны 1/2. Ряд экспериментов и теоретических выкладок привели к выводу, что спин фотона действительно равен 1 (в единицах $\hbar$).

При столкновении позитрона с электроном происходит их аннигиляция: ${}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e \to 2\gamma$; в ее процессе электронно-позитронная пара превращается в два γ-кванта, причем энергия пары переходит в энергию фотонов. Появление в этом процессе двух γ-квантов следует из закона сохранения импульса и энергии. Реакция подтверждена прямыми экспериментами под руководством советского ученого Л. А. Арцимовича (1909–1973). Процессы возникновения и превращения электронно-позитронных пар являются примером взаимосвязи различных форм материи: в этих процессах материя в форме вещества превращается в материю в форме электромагнитного поля и наоборот.

Для многих ядер превращение протона в нейтрон помимо описанного процесса происходит посредством электронного захвата, или *e*-захвата, при котором ядро спонтанно захватывает электрон с одной из внутренних оболочек атома (*K*, *L* и т. д.), испуская нейтрино: ${}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e \to {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{0}\nu_e$. Необходимость появления нейтрино вытекает из законов сохранения. Схема *e*-захвата:

Репозиторий БГАТУ

${}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \to {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{0}\nu_e$, т. е. один из протонов ядра превращается в нейтрон, заряд ядра убывает на единицу и оно смещается влево так же, как и при позитронном распаде.

Электронный захват обнаруживается по сопровождающему его характеристическому рентгеновскому излучению, возникающему при заполнении образовавшихся вакансий в электронной оболочке атома (именно так *e*-захват и был открыт в 1937 г.). При *e*-захвате кроме нейтрино никакие другие частицы не вылетают, т. е. вся энергия распада уносится нейтрино. В этом *e*-захват (часто его называют третьим видом β-распада) существенно отличается от $\beta^{\pm}$-распадов, при которых вылетают две частицы, между которыми и распределяется энергия распада. Примером электронного захвата может служить превращение радиоактивного ядра бериллия ${}^{7}_{4}Be$ в стабильное ядро ${}^{7}_{3}Li$: ${}^{7}_{4}Be + {}^{0}_{-1}e \to {}^{7}_{3}Li + {}^{0}_{0}\nu_e$.

Необходимость появления нейтрино вытекает из закона сохранения спина.

Открытие нейтрона. Ядерные реакции под действием нейтронов

Нейтроны, являясь электрически нейтральными частицами, не испытывают кулоновского отталкивания и поэтому легко проникают в ядра и вызывают разнообразные ядерные превращения. Ядерные реакции под действием нейтронов не только сыграли огромную роль в развитии ядерной физики, но и привели к появлению ядерных реакторов.

Краткая история открытия нейтрона такова. Немецкие физики В. Боте и Г. Беккер в 1930 г., облучая ряд элементов, в частности, ядра бериллия, α-частицами, обнаружили возникновение излучения очень большой проникающей способности. Так как сильно проникающими могут быть только нейтральные частицы, то было высказано предположение, что обнаруженное излучение — жесткие γ-лучи с энергией примерно 7 МэВ (энергия рассчитана по поглощению). Дальнейшие эксперименты (Ирен и Фредерик Жолио-Кюри, 1931 г.) показали, что обнаруженное излучение, взаимодействуя с водородосодержащими соединениями, например, парафином, выбивает протоны с пробегами примерно 26 см. Из расчетов следовало, что для получения протонов с такими пробегами предполагаемые γ-кванты должны были обладать фантастической по тем временам энергией 50 МэВ вместо расчетных 7 МэВ!

Пытаясь найти объяснение описанным экспериментам, английский физик Д. Чэдвик (1891–1974) предположил (1932), а впоследствии доказал, что новое проникающее излучение представляет собой не γ-кванты, а поток тяжелых нейтральных частиц, названных им нейтронами. Таким образом, нейтроны были обнаружены в следующей ядерной реакции: ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \to {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$. Эта реакция не является единственной, ведущей к выбрасыванию из ядер нейтронов (например, нейтроны возникают в реакциях ${}^{7}_{3}Be(\alpha, n){}^{10}_{5}B$, ${}^{11}_{5}C(\alpha, n){}^{14}_{7}N$). Характер ядерных реакций под действием нейтронов зависит от их скорости (энергии). В зависимости от энергии нейтроны условно делят на две группы: медленные и быстрые. Область энергий медленных нейтронов включает в себя область ультрахолодных (с энергией до 10^{-7} эВ), очень холодных (10^{-7}–10^{-4} эВ), холодных (10^{-4}–10^{-3} эВ), тепловых (10^{-3}–0,5 эВ) и резонансных (0,5–10^{4} эВ) нейтронов. Ко второй группе можно отнести быстрые (10^{4}–10^{8} эВ), высокоэнергетичные (10^{8}–10^{10} эВ) и релятивистские ($\geq 10^{10}$ эВ) нейтроны.

Замедлить нейтроны можно, пропуская их через какое-либо вещество, содержащее водород (например, парафин, вода). Проходя через такие вещества, быстрые нейтроны испытывают рассеяние на ядрах и замедляются до тех пор, пока их энергия не станет равной, например, энергии теплового движения атомов вещества-замедлителя, т. е. равной приблизительно *kT*.

Медленные нейтроны эффективны для возбуждения ядерных реакций, так как они относительно долго находятся вблизи атомного ядра. Благодаря этому вероятность захвата нейтрона ядром становится довольно большой. Однако энергия медленных нейтронов мала, потому они не могут вызывать, например, неупругое рассеяние. Для медленных нейтронов характерны упругое рассеяние на ядрах (реакция типа (*n*, *n*)) и радиационный захват (реакция типа (*n*, γ)). Реакция (*n*, γ) приводит к образованию нового изотопа исходного вещества:

Репозиторий БГАТУ

$_{Z}^{A}X + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{Z}^{A+1}Y + \gamma$, например ${}_{48}^{113}Cd + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{48}^{114}Cd + \gamma$.

Часто в результате (n, γ)-реакции образуются искусственные радиоактивные изотопы, дающие, как правило, β⁻-распад. Например, в результате реакции ${}_{15}^{31}P + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{15}^{32}P + \gamma$ образуется радиоактивный изотоп ${}_{15}^{32}P$, претерпевающий β⁻-распад с образованием стабильного изотопа серы: ${}_{15}^{32}P \rightarrow {}_{16}^{32}S + {}_{-1}^{0}e$.

Под действием медленных нейтронов на некоторых легких ядрах наблюдаются также реакции захвата нейтронов с испусканием заряженных частиц — протонов и α-частиц (под действием тепловых нейтронов):

$$ {}_{2}^{3}He + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{3}H + {}_{1}^{1}p, $$

$$ {}_{5}^{10}B + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{3}^{7}Li + {}_{2}^{4}He $$

(используется для обнаружения нейтронов) или

$$ {}_{3}^{6}Li + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{1}^{3}H + {}_{2}^{4}He $$

(используется для получения трития, в частности, в термоядерных взрывах).

Реакции типа (n, p) и (n, α), т. е. реакции с образованием заряженных частиц, происходят в основном под действием быстрых нейтронов, так как в случае медленных нейтронов энергии атомного ядра недостаточно для преодоления потенциального барьера, препятствующего вылету протонов и α-частиц. Эти реакции, как и реакции радиационного захвата, часто ведут к образованию β⁻-активных ядер.

Для быстрых нейтронов наблюдается неупругое их рассеяние, совершающееся по схеме:

$$ {}_{Z}^{A}X + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{Z}^{A}X^{*} + {}_{0}^{1}n', $$

где вылетающий из ядра нейтрон обозначен как ${}_{0}^{1}n'$, поскольку это не тот нейтрон, который проник в ядро; ${}_{0}^{1}n'$ имеет энергию, меньшую энергии ${}_{0}^{1}n$, а остающееся после вылета нейтрона ядро находится

в возбужденном состоянии (отмечено звездочкой), поэтому его переход в нормальное состояние сопровождается испусканием γ-кванта.

Когда энергия нейтронов достигает значений 10 МэВ, становятся возможными реакции типа (n, $2n$). Например, в результате реакции ${}_{92}^{238}U + {}_{0}^{1}n \rightarrow {}_{92}^{237}U + 2\,{}_{0}^{1}n$ образуется искусственно β⁻-активный изотоп ${}_{92}^{237}U$, претерпевающий распад по схеме ${}_{92}^{237}U \rightarrow {}_{93}^{237}Np + {}_{-1}^{0}e$.

Реакция деления ядра

К началу 40-х годов работами многих ученых — Э. Ферми (1901–1954) (Италия), О. Гана (1879–1968), Ф. Штрассмана (1902–1980) (ФРГ), О. Фриша (1904–1979) (Великобритания), Л. Мейтнер (1878–1968) (Австрия), Г. Н. Флерова (1913–1990), К.Н. Петржака (1907–1998) (СССР) — было доказано, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины периодической системы — лантан и барий. Этот результат положил начало ядерным реакциям совершенно нового типа — реакциям деления ядра, заключающимся в том, что тяжелое ядро под действием нейтронов, а как впоследствии оказалось, и других частиц делится на несколько более легких ядер (осколков), чаще всего на два ядра, близких по массе.

Замечательной особенностью деления ядер является то, что оно сопровождается испусканием двух-трех вторичных нейтронов, называемых нейтронами деления. Так как для средних ядер число нейтронов примерно равно числу протонов $\left(\frac{N}{Z} \approx 1\right)$, а для тяжелых ядер число нейтронов значительно превышает число протонов $\left(\frac{N}{Z} \approx 1{,}6\right)$, то образовавшиеся осколки деления перегружены нейтронами, в результате чего они и выделяют нейтроны деления. Однако испускание нейтронов деления не устраняет полностью перегрузку ядер-осколков нейтронами. Это приводит к тому, что осколки оказываются радиоактивными. Они могут претерпеть ряд β⁻-превращений, сопровождаемых испусканием γ-квантов. Так как β⁻-распад сопровождается превращением нейтрона в протон, то после цепочки β⁻-превращений соотноше-

Репозиторий БГАТУ

ние между нейтронами и протонами в осколке достигнет величины, соответствующей стабильному изотопу. Например, при делении ядра урана $^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{54}Xe + {}^{95}_{38}Sr + 2\,{}^{1}_{0}n$ осколок деления $^{139}_{54}Xe$ в результате трех актов β⁻-распада превращается в стабильный изотоп лантана $^{139}_{57}La$: $^{139}_{54}Xe \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{55}Cs \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{56}C \xrightarrow{\beta^-} {}^{139}_{57}La$.

Осколки деления могут быть разнообразными, поэтому данная реакция деления $^{235}_{92}U$ не единственная. Возможна, например, реакция $^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{94}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n$.

Большинство нейтронов при делении испускается практически мгновенно ($t \le 10^{-14}$ с), а часть (около 0,7 %) испускается осколками деления спустя некоторое время после деления ($0{,}05 \le t \le 60$ с). Первые из них называются мгновенными, вторые — запаздывающими. В среднем на каждый акт деления приходится 2,5 испущенных нейтрона. Они имеют сравнительно широкий энергетический спектр в пределах от 0 до 7 МэВ, причем на один нейтрон в среднем приходится энергия около 2 МэВ.

Расчеты показывают, что деление ядер должно сопровождаться также выделением большого количества энергии. В самом деле, удельная энергия связи для ядер средней массы составляет примерно 8,7 МэВ, в то время как для тяжелых ядер она равна 7,6 МэВ. Следовательно, при делении тяжелого ядра на два осколка должна освобождаться энергия, равная примерно 1,1 МэВ на один нуклон. Эксперименты подтверждают, что при каждом акте деления действительно выделяется огромная энергия, которая распределяется между осколками (основная доля), нейтронами деления, а также между продуктами последующего распада осколков деления.

В основу теории деления атомных ядер (Н. Бор, Я. И. Френкель) положена капельная модель ядра. Ядро рассматривается как капля электрически заряженной несжимаемой жидкости (с плотностью, равной ядерной, и подчиняющейся законам квантовой механики), частицы которой при попадании нейтрона в ядро приходят в колебательное движение, в результате чего ядро разрывается на две части, разлетающиеся с огромной энергией.

Вероятность деления ядер определяется энергией нейтронов. Например, если высокоэнергетичные нейтроны вызывают деление практически всех ядер, то нейтроны с энергией в несколько мега-

электрон-вольт — только тяжелых ядер ($A > 210$). Нейтроны, обладающие энергией активации (минимальной энергией, необходимой для осуществления реакции деления ядра) порядка 1 МэВ, вызывают деление ядер урана $^{238}_{92}U$, тория $^{232}_{90}Th$, протактиния $^{231}_{91}Pa$ и плутония $^{239}_{94}Pu$. Тепловыми нейтронами делятся ядра $^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$, $^{233}_{92}U$, $^{230}_{90}Th$ — два последних изотопа в природе не встречаются, они получаются искусственным путем. Например, изотоп $^{233}_{92}U$ получается в результате радиационного захвата (реакции (n, γ)) нейтронов ядром $^{232}_{90}Th$: $^{232}_{90}Th + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{233}_{90}C \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}_{91}Pa \xrightarrow{\beta^-} {}^{233}_{92}U$.

Цепная реакция деления

Испускаемые при делении ядер вторичные нейтроны могут вызвать новые акты деления, что делает возможным осуществление цепной реакции деления — ядерной реакции, в которой частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции. Цепная реакция деления характеризуется коэффициентом размножения k нейтронов, который равен отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении. Необходимым условием для развития цепной реакции деления является требование $k \ge 1$.

Оказывается, что не все образующиеся вторичные нейтроны вызывают последующее деление ядер, что приводит к уменьшению коэффициента размножения. Во-первых, из-за конечных размеров активной зоны (пространство, где происходит цепная реакция) и большой проникающей способности нейтронов часть из них покинет активную зону раньше, чем будет захвачена каким-либо ядром. Во-вторых, часть нейтронов захватывается ядрами неделящихся примесей, всегда присутствующих в активной зоне. Кроме того, наряду с делением могут иметь место конкурирующие процессы радиационного захвата и неупругого рассеяния.

Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа — от их количества, а также размеров и формы активной зоны. Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называются критическими размерами. Минимальная масса делящегося вещества,

Репозиторий БГАТУ

находящегося в системе критических размеров, необходимая для осуществления цепной реакции, называется критической массой.

Скорость развития цепных реакций различна. Пусть T — среднее время жизни одного поколения, а N — число нейтронов в данном поколении. В следующем поколении их число равно kN, т. е. прирост числа нейтронов за одно поколение $dN = kN - N = N(k - 1)$. Прирост же числа нейтронов за единицу времени, т. е. скорость нарастания цепной реакции: $\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}$. Интегрируя, получим $N = N_0 \exp\left[(k-1)\frac{t}{T}\right]$, где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; а N — их число в момент времени t. N определяется знаком $(k - 1)$. При $k > 1$ идет развивающаяся реакция, число делений непрерывно растет и реакция может стать взрывной. При $k = 1$ идет самоподдерживающаяся реакция, при которой число нейтронов с течением времени не изменяется. При $k < 1$ идет затухающая реакция.

Цепные реакции делятся на управляемые и неуправляемые. Взрыв атомной бомбы, например, является неуправляемой реакцией. Чтобы атомная бомба при хранении не взорвалась, в ней $^{235}_{92}U$ (или $^{239}_{94}Pu$) делится на две удаленные друг от друга части с массами ниже критических. Затем с помощью обычного взрыва эти массы сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической, и возникает взрывная цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением огромного количества энергии и большими разрушениями. Взрывная реакция начинается за счет имеющихся нейтронов спонтанного деления или нейтронов космического излучения. Управляемые цепные реакции осуществляются в ядерных реакторах.

В природе имеется три изотопа, которые могут служить ядерным топливом ($^{235}_{92}U$; в естественном уране его содержится примерно 0,7 %) или сырьем для его получения ($^{232}_{90}Th$ и $^{238}_{92}U$; в естественном уране его содержится примерно 99,3 %). $^{232}_{90}Th$ служит исходным продуктом для получения искусственного ядерного

топлива $^{233}_{92}U$, а $^{238}_{92}U$, поглощая нейтроны, посредством двух последовательных β^--распадов — для превращения в ядро $^{239}_{94}Pu$:

$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U \xrightarrow{\beta^-} ^{239}_{93}Np \xrightarrow{\beta^-} ^{239}_{94}Pu.$$

Таким образом, открывается реальная возможность воспроизводства ядерного горючего в процессе цепной реакции деления.

Понятие о ядерной энергетике

Большое значение в ядерной энергетике приобретает не только осуществление цепной реакции деления, но и управление ею. Устройства, в которых осуществляется и поддерживается управляемая цепная реакция деления, называются ядерными реакторами. Пуск первого реактора в мире осуществлен в Чикагском университете (1942) под руководством Э. Ферми, в СССР (и в Европе) — в Москве (1946) под руководством И. В. Курчатова.

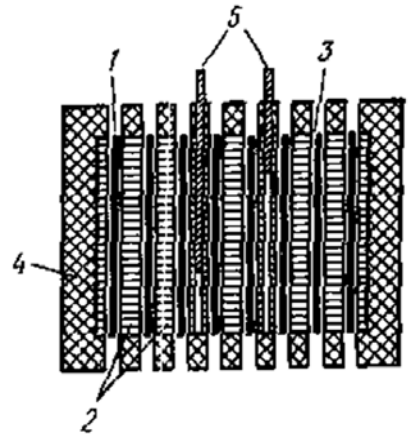

Рис. 4.38. Схема реактора на тепловых нейтронах

Для пояснения работы реактора рассмотрим принцип действия реактора на тепловых нейтронах (см. рис. 4.38). В активной зоне реактора расположены тепловыделяющие элементы и замедлитель 2, в котором нейтроны замедляются до тепловых скоростей. Тепло-

Репозиторий БГАТУ

выделяющие элементы (твэлы) представляют собой блоки из делящегося материала, заключенные в герметическую оболочку, слабо поглощающую нейтроны. За счет энергии, выделяющейся при делении ядер, твэлы разогреваются, а поэтому для охлаждения они помещаются в поток теплоносителя (*3* — канал для протока теплоносителя). Активная зона окружается отражателем *4*, уменьшающим утечку нейтронов. Управление цепной реакцией осуществляется специальными управляющими стержнями *5* из материалов, сильно поглощающих нейтроны (например, *B*, *Cd*). Параметры реактора рассчитываются так, что при полностью вставленных стержнях реакция заведомо не идет, при постепенном вынимании стержней коэффициент размножения нейтронов растет и при некотором их положении доходит до единицы. В этот момент реактор начинает работать. По мере его работы количество делящегося материала в активной зоне уменьшается и происходит ее загрязнение осколками деления, среди которых могут быть сильные поглотители нейтронов. Чтобы реакция не прекратилась, из активной зоны с помощью автоматического устройства постепенно извлекаются управляющие (а часто специальные компенсирующие) стержни. Подобное управление реакцией возможно благодаря существованию запаздывающих нейтронов, испускаемых делящимися ядрами с запаздыванием до 1 мин. Когда ядерное топливо выгорает, реакция прекращается. До нового запуска реактора выгоревшее ядерное топливо извлекают и загружают новое. В реакторе имеются также аварийные стержни, введение которых при внезапном увеличении интенсивности реакции немедленно ее обрывает.

Ядерный реактор является мощным источником проникающей радиации (нейтроны, γ-излучение), примерно в 10^{11} раз превышающей санитарные нормы. Поэтому любой реактор имеет биологическую защиту — систему экранов из защитных материалов (например, бетон, свинец, вода), располагающуюся за его отражателем, и пульт дистанционного управления.

Ядерные реакторы различаются:

1) по характеру основных материалов, находящихся в активной зоне (ядерное топливо, замедлитель, теплоноситель): в качестве делящихся и сырьевых веществ используются ${}^{235}_{92}U$, ${}^{239}_{94}Pu$, ${}^{233}_{92}U$, ${}^{238}_{92}U$, ${}^{232}_{90}Th$, в качестве замедлителей — вода (обычная и тяжелая),

графит, бериллий, органические жидкости и т. д., в качестве теплоносителей — воздух, вода, водяной пар, *He*, CO_2 и т. д.;

2) по характеру размещения ядерного топлива и замедлителя в активной зоне: гомогенные (оба вещества равномерно смешаны друг с другом) и гетерогенные (оба вещества располагаются порознь в виде блоков);

3) по энергии нейтронов: реакторы на тепловых и быстрых нейтронах (в последних используются нейтроны деления и замедлитель вообще отсутствует);

4) по типу режима: непрерывные и импульсные;

5) по назначению: энергетические, исследовательские, реакторы по производству новых делящихся материалов, радиоактивных изотопов и т. д.

В соответствии с рассмотренными признаками реакторы называются уран-графитовыми, водо-водяными, графито-газовыми и т. д.

Среди ядерных реакторов особое место занимают энергетические реакторы-размножители. В них наряду с выработкой электроэнергии идет процесс воспроизводства ядерного горючего. Это означает, что в реакторе на естественном или слабообогащенном уране используется не только изотоп ${}^{235}_{92}U$, но и изотоп ${}^{238}_{92}U$. В настоящее время основой ядерной энергетики с воспроизводством горючего являются реакторы на быстрых нейтронах.

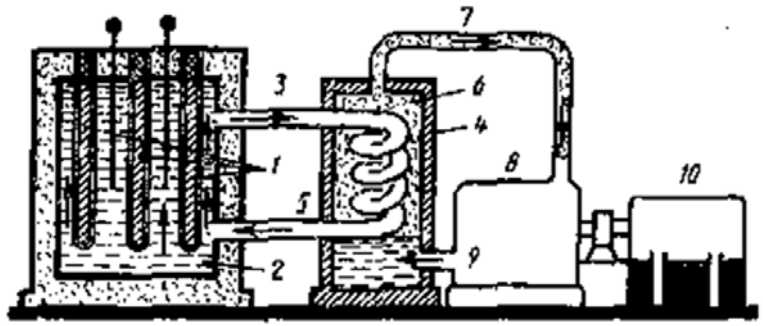

Рис. 4.39. Схема атомной электростанции на водо-водяном реакторе

Впервые ядерная энергия для мирных целей была использована в СССР. В Обнинске под руководством И. В. Курчатова введена

Репозиторий БГАТУ

в эксплуатацию (1954) первая атомная электростанция мощностью 5 МВт. Схема атомной электростанции на водо-водяном реакторе приведена на рисунке 4.39. Урановые блоки *1* погружены в воду *2*, которая служит одновременно и замедлителем, и теплоносителем. Горячая вода (она находится под давлением и нагревается до 300 °С) из верхней части активной зоны реактора поступает через трубопровод *3* в парогенератор *4*, где она охлаждается, и возвращается через трубопровод *5* в реактор. Насыщенный пар *6*, образующийся в парогенераторе, через трубопровод *7* поступает в паровую турбину *8*, возвращаясь после отработки через трубопровод *9* в парогенератор. Турбина вращает электрический генератор *10*, ток от которого поступает в электрическую сеть.

Создание ядерных реакторов привело к промышленному применению ядерной энергии. Энергетические запасы ядерного горючего в рудах примерно на два порядка превышают запасы химических видов топлива. Поэтому если, как предполагается, основная доля электроэнергии будет вырабатываться на АЭС, то это, с одной стороны, снизит стоимость электроэнергии, большая часть которой сейчас вырабатывается на тепловых электростанциях, а с другой — решит энергетическую проблему на несколько столетий и позволит использовать сжигаемые сейчас нефть и газ в качестве ценного сырья для химической промышленности.

В настоящее время помимо создания мощных АЭС большое внимание уделяется созданию небольших АЭС (750–1500 кВт), удобных для эксплуатации в специфических условиях, а также решению задач малой ядерной энергетики. Так, построены первые в мире передвижные АЭС, создан первый в мире реактор («Ромашка»), в котором с помощью полупроводников происходит непосредственное преобразование тепловой энергии в электрическую (в активной зоне содержится 49 кг $^{235}_{92}U$, тепловая мощность реактора — 40 кВт, электрическая — 0,8 кВт), и т. д.

Огромные возможности для развития атомной энергетики открываются с созданием реакторов-размножителей на быстрых нейтронах (бридеров), в которых выработка энергии сопровождается производством вторичного горючего — плутония, что позволит кардинально решить проблему обеспечения ядерным горючим. Как показывают оценки, 1 т гранита содержит примерно 3 г $^{238}_{92}U$ и 12 г

$^{232}_{90}Th$ (именно они используются в качестве сырья в реакторах-размножителях), т. е. при потреблении энергии $5 \cdot 10^8$ МВт (на два порядка выше, чем сейчас) запасов урана и тория в граните хватит на 10^9 лет.

Техника реакторов на быстрых нейтронах находится в стадии поисков наилучших инженерных решений. Первая опытно-промышленная станция такого типа мощностью 350 МВт построена в г. Шевченко на берегу Каспийского моря. Она используется для производства электроэнергии и опреснения морской воды, обеспечивая водой город и прилегающий район нефтедобычи с населением порядка 150 000 человек. Шевченковская АЭС положила начало новой «атомной отрасли» — опреснению соленых вод, которая в связи с дефицитом пресноводных ресурсов во многих районах может иметь большое значение.

Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций

Колоссальным источником энергии может служить реакция синтеза атомных ядер — образование из легких ядер более тяжелых. Удельная энергия связи ядер резко увеличивается при переходе от ядер тяжелого водорода (дейтерия $^{2}_{1}H$ и трития $^{3}_{1}H$) к литию $^{6}_{3}Li$ и особенно к гелию $^{4}_{2}He$, т. е. реакции синтеза легких ядер в более тяжелые должны сопровождаться выделением большого количества энергии, что действительно подтверждается расчетами. В качестве примеров рассмотрим реакции синтеза:

$$^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{2}_{1}H + {}^{1}_{1}p \left(Q = 4{,}0\ МэВ\right),$$

$$^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n \left(Q = 3{,}3\ МэВ\right),$$

$$^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n \left(Q = 17{,}6\ МэВ\right),$$

$$^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He \left(Q = 22{,}4\ МэВ\right),$$

где Q — энерговыделение.

Репозиторий БГАТУ

Реакции синтеза атомных ядер обладают той особенностью, что в них энергия, выделяемая на один нуклон, значительно больше, чем в реакциях деления тяжелых ядер. В самом деле, если при делении ядра $^{238}_{92}U$ выделяется энергия примерно 200 МэВ, что составляет на один нуклон примерно 0,84 МэВ, то в реакциях синтеза эта величина равна 17,6/5 МэВ ≈ 3,5 МэВ.

Оценим на примере реакции синтеза ядер дейтерия $^{2}_{1}H$ температуру ее протекания. Для соединения ядер дейтерия их надо сблизить до расстояния $2 \cdot 10^{-15}$ м, равного радиусу действия ядерных сил, преодолевая при этом потенциальную энергию отталкивания $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \approx 0,7$ МэВ. Так как на долю каждого сталкивающегося ядра приходится половина указанной энергии, то средней энергии теплового движения, равной 0,35 МэВ, соответствует температура, приблизительно равная $2,6 \cdot 10^9$ К. Следовательно, реакция синтеза ядер дейтерия может происходить лишь при температуре, на два порядка превышающей температуру центральных областей Солнца (примерно $1,3 \cdot 10^7$ К).

Однако оказывается, что для протекания реакции синтеза атомных ядер достаточно температуры порядка 10^7 К. Это связано с двумя факторами: 1) при температурах, характерных для реакций синтеза атомных ядер, любое вещество находится в состоянии плазмы, распределение частиц которой подчиняется закону Максвелла; поэтому всегда имеется некоторое число ядер, энергия которых значительно превышает среднее значение; 2) синтез ядер может происходить вследствие туннельного эффекта. Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах (примерно 10^7 К и выше), называются термоядерными реакциями.

Термоядерные реакции являются, по-видимому, одним из источников энергии Солнца и звезд. В принципе, высказаны два предположения о возможных способах протекания термоядерных реакций на Солнце:

1) протонно-протонный, или водородный, цикл, характерный для температур примерно 10^7 К;

2) углеродно-азотный, или углерод-углеродный, цикл, характерный для более высоких температур (примерно $2 \cdot 10^7$ К):

$$^{12}_{6}C + ^{1}_{1}p \rightarrow ^{13}_{7}N + \gamma,$$

$$^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6}C + ^{0}_{+1}e + ^{0}_{0}\nu_e,$$

$$^{13}_{6}C + ^{1}_{1}p \rightarrow ^{14}_{7}N + \gamma,$$

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{1}p \rightarrow ^{15}_{8}O + \gamma,$$

$$^{15}_{8}O \rightarrow ^{15}_{7}N + ^{0}_{+1}e + ^{0}_{0}\nu_e,$$

$$^{15}_{7}N + ^{1}_{1}p \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{4}_{2}He.$$

В результате этого цикла четыре протона превращаются в ядро гелия и выделяется энергия, равная 26,7 МэВ. Ядра же углерода, число которых остается неизменным, участвуют в реакции в роли катализатора. Термоядерные реакции дают больший выход энергии на единицу массы «горючего», чем любые другие превращения, в том числе и деление тяжелых ядер. Например, количество дейтерия в стакане простой воды энергетически эквивалентно примерно 60 л бензина. Поэтому заманчива перспектива осуществления термоядерных реакций искусственным путем.

Впервые искусственная термоядерная реакция была осуществлена в СССР (1953), а затем (через полгода) в США в виде взрыва водородной (термоядерной) бомбы, являющегося неуправляемой реакцией. Взрывчатым веществом, в котором происходила реакция, являлась смесь дейтерия и трития, а запалом — «обычная» атомная бомба, при взрыве которой возникает необходимая для протекания термоядерной реакции температура. Особый интерес представляет осуществление управляемой термоядерной реакции, для обеспечения которой необходимо создание и поддерживание в ограниченном объеме температуры порядка 10^8 К. Так как при данной температуре термоядерное рабочее вещество представляет собой полностью ионизованную плазму, возникает проблема ее эффективной термоизоляции от стенок рабочего объема. На данном этапе развития считается, что основной путь в этом направлении — это удержание плазмы в ограниченном объеме сильными магнитными полями специальной формы.

Начало широкого международного сотрудничества в области физики высокотемпературной плазмы и управляемого термоядерного

Репозиторий БГАТУ

синтеза положено в знаменитом докладе И. В. Курчатова в Харуэле в 1956 г. Хотя проблема управляемого термоядерного синтеза не решена до сих пор, за последнее десятилетие в этом направлении достигнут значительный прогресс. Под руководством Л. А. Арцимовича коллектив ученых Института атомной энергии (ИАЭ) им. И. В. Курчатова осуществил широкий круг исследований, результатом которых явился пуск летом 1975 г. в ИАЭ крупнейшей в мире термоядерной установки «Токамак-10» (Т-10).

В Т-10, как и во всех установках этого типа, плазма создается в тороидальной камере, находящейся в магнитном поле, а само плазменное образование — плазменный шнур — также имеет форму тора. В Т-10 плазма с температурой примерно $(7\div8)\cdot10^6$ К и плотностью примерно 10^{14} частиц/см^3 создается в объеме, приблизительно равном 5 м^3, на время около 1 с. Однако следует отметить, что до осуществления критерия Лоусона — условия, необходимого для начала самоподдерживающейся термоядерной реакции, — еще остается значительный «путь»: примерно 20 раз по $n\tau$ (произведение плотности частиц на время удержания плазмы) и примерно 10 раз по температуре. Результаты, полученные на Т-10, вместе с результатами, ожидаемыми на создаваемых установках (например, Т-20), по мере решения разного рода инженерно-технологических проблем служат базой для создания термоядерного реактора «Токамака».

Управляемый термоядерный синтез открывает человечеству доступ к неисчерпаемой «кладовой» ядерной энергии, заключенной в легких элементах. Наиболее заманчивой в этом смысле является возможность извлечения энергии из дейтерия, содержащегося в обычной воде. В самом деле, количество дейтерия в океанской воде составляет примерно $4\cdot10^{13}$ т, чему соответствует энергетический запас 10^{17} МВт · год. Другими словами, эти ресурсы неограниченны. Остается только надеяться, что решение этих проблем — дело недалекого будущего.

4.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

4.3.1. ФОТОПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Фотопроводимость полупроводников — увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения — может быть связана со свойствами как основного вещества, так и содержащихся в нем примесей. В первом случае при поглощении фотонов, соответствующих собственной полосе поглощения полупроводника, т. е. когда энергия фотонов не меньше ширины запрещенной зоны ($h\nu \geq \Delta$), могут совершаться перебросы электронов из валентной зоны в зону проводимости, что приведет к появлению добавочных (неравновесных) электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне). В результате возникает собственная фотопроводимость, обусловленная как электронами, так и дырками. Если полупроводник содержит примеси, то фотопроводимость может возникать и при $h\nu < \Delta$: в этом случае фотон должен обладать энергией $h\nu \geq \Delta_{пр}$. При поглощении света примесными центрами происходит переход электронов с донорных уровней в зону проводимости в случае полупроводника *n*-типа или из валентной зоны на акцепторные уровни в случае полупроводника *p*-типа. В результате возникает примесная фотопроводимость, являющаяся чисто электронной для полупроводников *n*-типа и чисто дырочной для полупроводников *p*-типа.

Исходя из условий возникновения фотопроводимости можно определить ее красную границу — максимальную длину волны, при которой фотопроводимость еще возбуждается:

$\lambda_0 = \dfrac{ch}{\Delta}$ — для собственных полупроводников,

$\lambda_0 = \dfrac{ch}{\Delta_{пр}}$ — для примесных полупроводников.

Учитывая значения Δ и $\Delta_{пр}$ для конкретных полупроводников, можно показать, что красная граница фотопроводимости для собственных полупроводников приходится на видимую область спектра, для примесных же полупроводников — на инфракрасную.

Репозиторий БГАТУ

На рисунке 4.40 представлена типичная зависимость фотопроводимости j и коэффициента поглощения κ от длины волны λ падающего на полупроводник света. Из рисунка следует, что при $\lambda > \lambda_0$ фотопроводимость действительно не возбуждается. Спад фотопроводимости в коротковолновой части полосы поглощения объясняется большой скоростью рекомбинации в условиях сильного поглощения в тонком поверхностном слое толщиной $x \approx 1$ мкм.

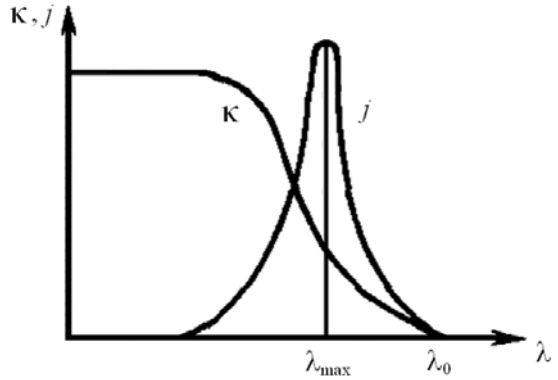

Рис. 4.40. Зависимость фотопроводимости j и коэффициента поглощения κ от длины волны падающего на полупроводник света

Наряду с поглощением, приводящим к появлению фотопроводимости, может иметь место экситонный механизм поглощения. Экситоны представляют собой квазичастицы — электрически нейтральные связанные состояния электрона и дырки, образующиеся в случае возбуждения с энергией, меньшей ширины запрещенной зоны. Уровни энергии экситонов располагаются у дна зоны проводимости. Так как экситоны электрически нейтральны, то их возникновение в полупроводнике не приводит к появлению дополнительных носителей тока, вследствие чего экситонное поглощение света не сопровождается увеличением фотопроводимости.

5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

5.1. МАТЕРИАЛЫ К ЛЕКЦИЯМ

План лекции 1 «Общие сведения о квантовых статистиках и зонной теории твердых тел»

1. Отличие квантовой статистики от классической.
2. Бозоны и фермионы. Принцип Паули. Распределение Ферми–Дирака для электронного газа в металле.
3. Энергия Ферми. График функции распределения при различных температурах. Температура Ферми.
4. Статистика Бозе–Эйнштейна.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается смысл статистических методов исследования термодинамических систем как систем, состоящих из большого числа микроскопических частиц?
2. Что такое фазовое пространство для макроскопических систем? Отличие фазового пространства от обычного трехмерного пространства.
3. Микрочастицы и их волновые свойства. Отличие методов описания движения частиц, подчиняющихся законам классической и квантовой механики.
4. Фазовый объем для частиц, подчиняющихся законам классической и квантовой механики.
5. Ячейка фазового пространства при классическом и квантовом методе описания систем из большого числа микрочастиц.
6. Распределение Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.
7. Принцип запрета Паули.
8. Энергия Ферми.
9. Понятие квантового состояния частицы.

Репозиторий БГАТУ

План лекции 2 «Контактные и термоэлектрические явления»

1. Потенциальная, кинетическая и полная энергии свободных электронов внутри металла.
2. Термоэлектронная работа выхода. Контактная разность потенциалов. Явление термоэлектричества. Эффект Зеебека. Термоэлектродвижущая сила металла. Эффект Пельтье. Эффект Томсона.
3. Зонная структура твердых тел: металл, полупроводник, диэлектрик.

Вопросы для самоконтроля

1. Зонная модель металлов, полупроводников и диэлектриков.
2. Работа выхода и контактная разность потенциалов.
3. Законы А. Вольта.
4. Сторонние электродвижущие силы. Термоэлектричество и эффект Зеебека.
5. Термоэлектрический ток в замкнутом контуре из двух металлов.
6. Термоэлектрическая разность потенциалов в разомкнутом контуре из одного металла, в контуре из двух металлических проводников.
7. Эффект Пельтье.
8. Эффект Томсона.
9. Смысл понятия «обратимый характер тепловыделения».

План лекции 3 «Элементы физики атомного ядра»

1. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц. Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа. Энергия связи и дефект массы ядра.
2. Ядерные силы. Модели атомных ядер.
3. Радиоактивное излучение и его виды. Закон радиоактивного распада.
4. Ядерные реакции. Реакции деления и синтеза атомных ядер. Проблема ядерной энергетики. Управляемый термоядерный синтез.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие частицы образуют ядро атома цинка? Сколько их?
2. Атомное ядро «составили» из N свободных нуклонов (масса каждого нуклона равна m). Чему равны масса и удельная энергия связи этого ядра?

3. Чем отличаются изобары и изотопы?
4. Почему прочность ядер уменьшается при переходе к тяжелым элементам?
5. Как и во сколько раз изменится число ядер радиоактивного вещества за время, равное трем периодам полураспада?
6. Как (по какому закону) изменяется со временем активность нуклида?
7. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после двух α-распадов ядер его атомов? После последовательных одного α-распада и двух β-распадов?
8. Как объясняется α-распад на основе представлений квантовой теории?
9. Как объясняется непрерывность энергетического спектра β-частиц?
10. Изменится ли химическая природа элемента при испускании его ядром γ-кванта?
11. Какие явления сопровождают прохождение γ-излучения через вещество и в чем их суть?
12. Запишите схему *e*-захвата. Что сопровождает *e*-захват? В чем его отличие от β-распадов?
13. Чем объяснить выброс нейтрино (антинейтрино) при β-распадах?
14. По каким признакам можно классифицировать ядерные реакции?
15. Под действием каких частиц (α-частиц, нейтронов) ядерные реакции более эффективны? Почему?
16. Что представляет собой реакция деления ядер? Приведите примеры.
17. Охарактеризуйте нейтроны деления. Какие они бывают?
18. В результате какой реакции происходит превращение ядер ${}^{238}_{92}U$ в ядра ${}^{239}_{94}Pu$? Каковы ее перспективы?
19. Что можно сказать о характере цепной реакции деления, если: а) $k > 1$; б) $k = 1$; в) $k < 1$?
20. По каким признакам можно классифицировать ядерные реакторы?
21. Почему деление тяжелых ядер и синтез легких атомных ядер сопровождаются выделением большого количества энергии? Когда на один нуклон выделяется больше энергии? Почему?
22. Что такое дефект массы, критическая масса?

Репозиторий БГАТУ

5.2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Задание. Объяснить увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения. Изобразить зоны и уровни энергии, получить выражения для определения красной границы фотопроводимости собственных и примесных полупроводников.

Элементы квантовой статистики и зонной теории твердых тел. Классическая и квантовая статистики. Фазовое пространство. Микроскопическое и макроскопическое состояния систем. Ферми-распределение. Контактная разность потенциалов

Минимальный элементарный объем dV , в пределах которого находится квантовая частица называют *элементарной ячейкой.* $dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z = \hbar^3$.

Классическое распределение Максвелла–Больцмана $f(\varepsilon) = Ae^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ дает вероятность $f(\varepsilon)$ того, что из какого-то числа N частиц определенная их часть имеет энергию ε.

В квантовой статистике функция распределения $f(\varepsilon)$ показывает *вероятность* заполнения элементарной ячейки с энергией ε частицами, т. е. *вероятность нахождения частиц в состоянии с энергией* ε:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} \pm 1};$$

— Знак «минус» применяют для *бозонов* (фотонов, фононов) — частиц с целочисленным спином: $S = 0, 1, 2, \ldots$. Для бозонов количество частиц, которые находятся в одинаковом состоянии, может быть произвольным: $0 \le n \le \infty$ (*статистика Бозе–Эйнштейна*).

— Знак «плюс» применяют для *фермионов* (электронов, протонов, нейтронов), то есть частиц с нецелочисленным спином

$S = \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}, \ldots$, которые подчиняются *принципу запрета Паули* (*распределение Ферми–Дирака*).

Величина μ — *химический потенциал* — есть изменение внутренней энергии, приходящееся на одну частицу при изохорноизоэнтропийном процессе (V = const, S = const). Иначе, химический потенциал равен свободной энергии одной частицы: $\mu = \left(\frac{dU}{dn}\right)_{V,S}$.

Функция Ферми–Дирака для газа свободных электронов металла $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}$ показывает, сколько в среднем электронов приходится на одно квантовое состояние с энергией ε.

Энергия Ферми как наивысший из заполненных электронных уровней при $T = 0$ *K* определяется выражением: $\varepsilon_F = \mu = \frac{\hbar^2\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}}{2m}$, где m — масса свободного электрона; n — концентрация электронов (число электронов, приходящихся на единицу объема).

С повышением температуры *химический потенциал* опускается в область меньших значений энергии: $\mu\left(T \ne 0\right) = \varepsilon_F\left(1 - \frac{\pi^2\left(kT\right)^2}{12{\varepsilon_F}^2}\right)$.

Температура вырождения электронного газа $T_в \approx \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{km}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}}$.

Энергия, которую необходимо сообщить электрону вблизи уровня Ферми, чтобы удалить его из объема в вакуум, называется *термоэлектронной работой выхода*: $A_{вых} = Ф$. С работой выхода связывают потенциал работы выхода $\varphi_{вых} = \frac{Ф}{e}$.

Контактная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность химических потенциалов или разность работ выхода приведенная к заряду электрона.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{e} = \frac{Ф_1 - Ф_2}{e}.$$

Репозиторий БГАТУ

Законы А. Вольты

1. Разность потенциалов между концами цепи, составленной из нескольких металлов, определяется разностью потенциалов выхода для металлов, образующих крайние звенья цепи.

2. Сумма разностей потенциалов в замкнутой цепи, составленной из проводников, соприкосновение которых не влечет за собой химического превращения (металлы, сплавы, полупроводники, полуметаллы и т. д.) равна нулю.

Зависимость проводимости собственного полупроводника от температуры $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta}{2kT}}$, где Δ — ширина запрещенной зоны.

5.3. МАТЕРИАЛЫ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Общие сведения о квантовых статистиках и зонной теории твердых тел. Контактные и термоэлектрические явления.

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. Определить размерность фазового пространства d для описания микроскопического состояния классического идеального газа, занимающего объем 100 м^3 при нормальных условиях (T = 300 K, $P = 10^5$ Па).

Решение. Микроскопическое описание означает возможность задания координат точек фазового пространства для каждой частицы газа. Используя уравнение Клайперона–Менделеева и преобразуя его, получаем выражение для определения количества молекул газа N. Учтем, что для описания состояния каждой молекулы требуется 6 параметров.

$$PV = \frac{m}{M} RT\ ,\ PV = NkT,\ d = 6N,$$

$$d = \frac{6PV}{kT},\ d = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 100}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \approx 10^{28}\ .$$

II уровень

Пример 1. Определить энергию Ферми электронного газа в алюминии, предполагая, что при валентности алюминия, равной 3, все валентные электроны покидают свои атомы и коллективизируются. Молярная масса алюминия M = 27 г/моль, плотность ρ = 2,7 г/см^3.

Решение. Используя данные по молярной массе, плотности и учитывая, что каждый атом отдает в зону проводимости три электрона, найдем число свободных электронов на единицу объема

Репозиторий БГАТУ

$n = \frac{3N}{V}$. В следующем действии определим энергию Ферми на основании соотношения (4.6).

$$n = \frac{3N_A\rho}{M},$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2\left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}}}{2m}\frac{\left(3N_A\rho\right)^{\frac{2}{3}}}{M^{\frac{2}{3}}},$$

$$\varepsilon_F = \frac{\left(10^{-34}\right)^2\left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}\frac{\left(3\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 2700\right)^{\frac{2}{3}}}{0{,}027^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 10{,}5\ (\text{эВ}).$$

Пример 2. Определить вероятность заполнения электроном ячейки фазового пространства, отвечающей энергии, которая больше энергии химического потенциала на 0,01 эВ. Температура окружающей среды $T = 300$ K.

Решение. Применяем выражение для функции распределения Ферми–Дирака, учитывая, что постоянную Больцмана следует перевести в электрон-вольты.

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1},$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{0{,}01\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1{,}6\cdot 10^{-21}}{4{,}1\cdot 10^{-21}}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{1{,}6}{4{,}1}}+1} = 0{,}913.$$

Пример 3. Конфигурация электронных энергетических зон двух металлов изображена на рисунке 4.41. Металл 1 имеет работу выхода 1,5 эВ, Металл 2 — 2,5 эВ. Установить вид энергетических зон системы из двух металлов в момент контакта и после перехода системы к равновесию. Определить величину и знак контактной разности потенциалов на границе раздела.

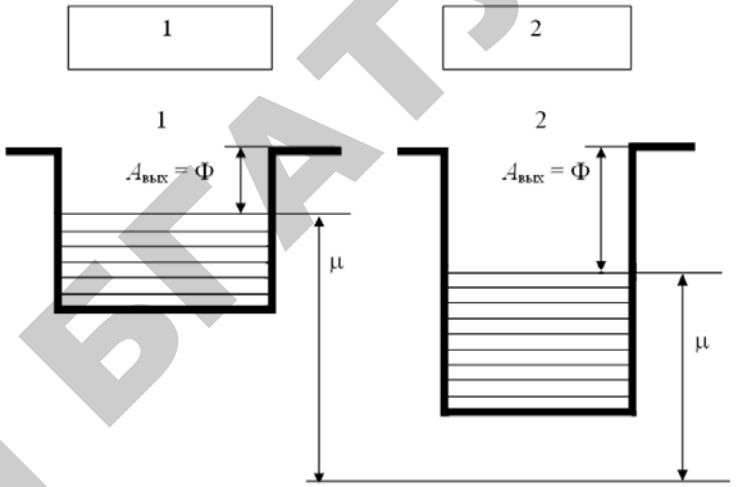

Рис. 4.41. Схематический вид энергетических электронных зон двух металлов. Величина их работ выхода и химических потенциалов при отсчете от одного уровня энергии

Решение. Если привести оба указанных металла в омический контакт, то в первый момент времени система не будет находиться в термодинамическом равновесии. Термодинамическое равновесие имеет место тогда, когда химический потенциал есть величина постоянная по всему объему, что означает отсутствие потоков частиц между различными частями системы. Здесь в момент контакта химический потенциал является неоднородной (неодинаковой по объему) характеристикой (рис. 4.42). Как следствие возникает движение частиц из одного металла в другой и наоборот.

Поток электронов во 2-й металл будет продолжаться до тех пор, пока химический потенциал не выровняется для обоих металлов. В результате энергетические зоны электронов сместятся, как изображено на рисунке 4.43.

Для определения величины и знака контактной разности потенциалов используем положение, что в равновесии электрохимические потенциалы как суммы химического μ до наступления контакта и наведенного электрического $e\varphi$ потенциалов, то есть $e\varphi + \mu$, для обеих частей системы одинаковы. Для этого уравниваем значения электрохимических потенциалов: $e\varphi_1 + \mu_1 = e\varphi_2 + \mu_2$.

Репозиторий БГАТУ

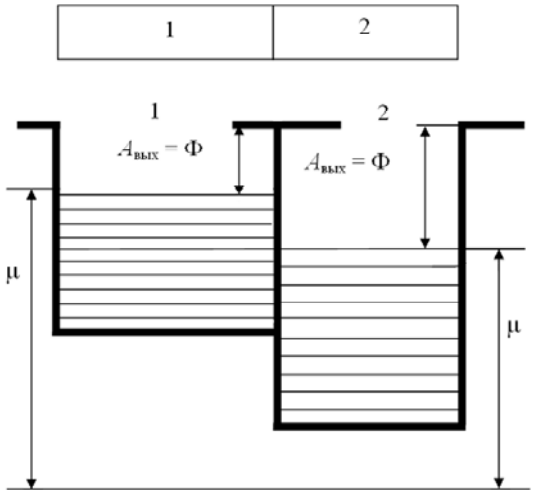

Рис. 4.2. Вид энергетических зон электронов проводимости металлов 1 и 2 непосредственно после приведения их в контакт. Различие уровней химических потенциалов металлов 1 и 2 показывает, что система электронов не находится в равновесии

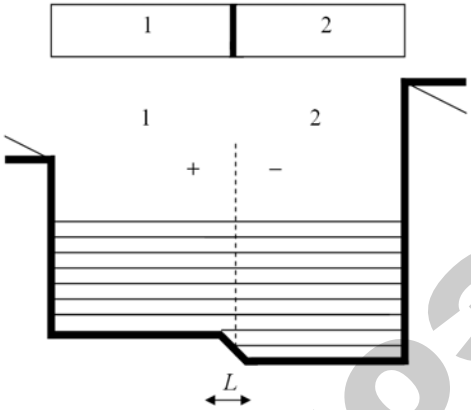

Рис. 4.43. Энергетическая диаграмма электронных уровней двух металлов как единой системы после прихода в равновесное состояние. На границе раздела существует переходной электрический слой, препятствующий перетеканию электронов

Из полученного выражения определяем контактную разность как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e}(\mu_2 - \mu_1) = \frac{1}{e}(Ф_1 - Ф_2).$$

В данном случае:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e}(Ф_1 - Ф_2) = \frac{1}{e}(1,5 - 2,5)\ \text{эВ} = \frac{-1|e|\,\text{В}}{e} = 1\ \text{В}.$$

То, что в выражение для электрон-вольт заряд электрона входит по модулю, приводит к изменению знака в полученном результате после вычитания работ выхода.

Металл 1 как отдавший свои электроны приобретет положительный заряд и потенциал на границе раздела, металл 2 как получивший электроны приобретет отрицательные заряд и потенциал на границе раздела.

Аудиторные задачи

1. Определить размерность фазового пространства для описания микроскопического состояния классического идеального газа с массой молекулы m_M, равной 4 а.е.м., имеющего молярную массу 0,001 кг/моль и занимающего объем 100 м^3 при нормальных условиях.

2. Определить размерность фазового пространства и вид статистического распределения для описания газа свободных электронов полупроводника с концентрацией электронов $n = 10^{24}$ м$^{-3}$ при температуре окружающей среды 1 K, 10 K, 100 K.

3. Определить энергию Ферми электронного газа в меди, предполагая, что при валентности, равной 1, атомная масса меди равна 63,54, а плотность $\rho = 9$ г/см^3.

4. Определить вероятность заполнения электроном ячейки фазового пространства, отвечающей энергии, которая меньше энергии химического потенциала на 0,001 эВ. Температура окружающей среды $T = 300$ K.

5. Определить положение химического потенциала по отношению к уровню Ферми для электронного газа с плотностью $2 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ при температуре окружающей среды 500 К.

6. Определить температуру вырождения электронного газа с плотностью $1 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$.

Репозиторий БГАТУ

Задачи для самостоятельного решения

I уровень

1. Определить объем элементарной ячейки фазового пространства для электронного газа.

2. Определить положение химического потенциала вольфрама по отношению к уровню Ферми при температуре окружающей среды 1500 К. Энергию Ферми принять равной 2,5 эВ.

3. Используя известное соотношение, связывающее кинетическую энергию (энергия Ферми) и массу электрона, оценить скорость Ферми при величине энергии Ферми порядка 1 эВ.

4. Определить температуру вырождения электронного газа с плотностью $1 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$.

II уровень

1. Определить смещение химического потенциала по отношению к энергии Ферми для электронного газа в галлии при температуре 300 К. Валентность галлия равна 3, атомная масса — 70, а плотность $\rho = 6$ г/см^3.

2. Определить вероятность заполнения электроном ячейки фазового пространства с энергией, которая больше уровня химического потенциала на 0,01 эВ. Температура окружающей среды $T = 300$ К.

3. Определить энергию Ферми электронного газа в натрии при условии, что его валентность равна 1, атомная масса — 23, плотность $\rho = 0{,}97$ г/см^3.

4. Определить температуру вырождения электронного газа меди при условии, что при валентности, равной 1, атомная масса меди равна 63,54, а плотность $\rho = 9$ г/см^3.

5. Определить энергию Ферми и температуру Ферми электронного газа серебра при условии, что этот металл входит в первую группу периодической таблицы, его атомная масса — 108, плотность $\rho = 10{,}5$ г/см^3.

6. Определить энергию Ферми электронного газа в галлии, предполагая, что при валентности, равной 3, атомная масса равна 70, а плотность $\rho = 6$ г/см^3.

7. Используя известное соотношение, связывающее кинетическую энергию (энергия Ферми) и импульс, определить в приближении свободного электронного газа скорость электронов на уровне Ферми (скорость Ферми) для золота. Валентность равна 1, атомная масса — 197, плотность $\rho = 19{,}3$ г/см^3

8. Оценить температуру Ферми для газа электронов с плотностью $5 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$.

9. Оценить скорость Ферми электронов при величине их энергии порядка 0,01 эВ.

10. Определить размерность фазового пространства для микроскопического и статистического описаний газообразного азота, имеющего массу 0,001 кг. Атомная масса азота — 28 а.е.м.

11. Определить минимальный объем фазового пространства, требующийся для размещения 10 электронов.

12. Используя выражение для средней энергии, приходящейся на один электрон в металле, получить точное выражение для теплоемкости одного моля электронного газа.

13. Определить положение химического потенциала по отношению к уровню Ферми для электронного газа с плотностью $5 \cdot 10^{21}$ см$^{-3}$ при температуре окружающей среды 3000 К.

14. Металл 1 имеет работу выхода 3 эВ, металл 2 имеет работу выхода 4,5 эВ. Изобразить схематично вид энергетических зон металлов в момент их соединения, после установления равновесия. Определить величину и знак контактной разности потенциалов на границе раздела.

15. Коэффициент термоЭДС металла составляет 0,000001 В/К. Определить разность потенциалов между холодным и горячим концами проловоки из этого металла, если холодный конец имеет температуру 300 К, а горячий — 1300 К.

16. Через спай двух проводников с коэффициентом термоЭДС 0,000002 В/К и 0,000001 В/К протекает электрический ток силой 100 А. Определить величину плотности потока тепла, выделяемого в спае при температуре окружающей среды 500 К.

III уровень

1. Используя выражение для средней энергии, приходящейся на один электрон в металле, в приближении квантовой статистики и используя график для энергии в квантово-механическом и классическом приближениях, показать, почему теплоемкость электронного газа при температурах, меньших температуры вырожде-

Репозиторий БГАТУ

ния, значительно меньше теплоемкости в классическом рассмотрении.

2. Доказать, что положительность химического потенциала для бозонов приводит к отрицательным числам заполнения ячеек фазового пространства, что нереально по физическому смыслу.

3. Оценить степень вырождения электронного газа для уровня энергии, равного химическому потенциалу.

4. Используя сферическую систему координат и понятие импульса Ферми, получить выражение, связывающее плотность электронного газа в металле с его энергией Ферми.

Элементы физики атомного ядра. Основной закон радиоактивности. Период полураспада

Примеры решения задач

I уровень

Пример 1. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}^{7}_{3}Li$, если масса атома лития m_α = 7,01601 а.е.м., масса нейтрона m_n = 1,00867 а.е.м.

Решение. Масса ядра всегда меньше суммы масс свободных (находящихся вне ядра) протонов и нейтронов, из которых ядро образовалось. Дефект массы ядра Δm и есть разность между суммой масс свободных нуклонов (протонов и нейтронов) и массой ядра, т. е.:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я, \qquad (4.18)$$

где Z — порядковый номер (число протонов в ядре) данного изотопа в таблице Менделеева; A — массовое число (число нуклонов, составляющих ядро); m_p, m_n, $m_я$ — соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

В справочных таблицах обычно даются не массы ядер, а массы нейтральных атомов. Поэтому формулу (4.18) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила не масса ядра, а масса нейтрального атома, равная сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку данного атома: $m_а = m_я + Zm_e$, откуда:

$$m_я = m_а - Zm_e. \qquad (4.19)$$

Подставив формулу (4.19) в уравнение (4.18), получим:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_а + Zm_e = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_а.$$

Поскольку масса атома водорода $m_H = m_p + m_e$, то:

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_а. \qquad (4.20)$$

Подставив в выражение (4.20) числовые значения, получим:

$$\Delta m = 3 \cdot 1{,}00783 + (7 - 3) \cdot 1{,}00867 - 7{,}01601 = 0{,}04216 \text{ а. е. м.}$$

В соответствии с законом пропорциональности массы и энергии энергия связи ядра:

$$\Delta E_{св} = \Delta mc^2, \qquad (4.21)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ — скорость света в вакууме.

Так как энергетический эквивалент атомной единицы массы равен 931,5 МэВ, то выраженная в мегаэлектронвольтах энергия связи ядра:

$$\Delta E_{св} = 931{,}5\Delta m = 931{,}5 \cdot 0{,}04216 \approx 39{,}3 \text{ (МэВ)}.$$

Энергия связи ядра, выраженная в СИ:

$$\Delta E_{св} \approx 39{,}3 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \approx 6{,}29 \cdot 10^{-12} \text{ (Дж)}.$$

Пример 2. При захвате теплового нейтрона ядром урана ${}^{235}_{92}U$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определить порядковый номер Z и массовое число A одного из осколков, если другим осколком является ядро стронция ${}^{95}_{38}Sr$.

Решение. Запишем ядерную реакцию в следующем виде:

$${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{95}_{38}Sr + {}^{A}_{Z}Y + 2({}^{1}_{0}n), \qquad (4.22)$$

где ${}^{A}_{Z}Y$ — осколок, зарядовое число Z и массовое число A которого требуется определить.

В соответствии с законами сохранения зарядового и массового чисел можем записать:

$$92 + 0 = 38 + Z + 0,\ 235 + 1 = 95 + A + 2.$$

Отсюда зарядовое число искомого осколка Z = 54; массовое число A = 139. По таблице Менделеева находим, что элемент, у которого ядро содержит 54 протона, — ксенон (${}^{139}_{54}Xe$).

Репозиторий БГАТУ

II уровень

Пример 1. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния $^{27}_{12}Mg$ массой m = 0,2 мкг, а также активность A по истечении времени t = 6 ч. Период полураспада магния $T_{1/2}$ = 10 мин.

Решение. Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа dN ядер, распавшихся за интервал времени dt, к этому интервалу:

$$A = -\frac{dN}{dt}. \tag{4.23}$$

Знак «минус» показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Для того чтобы найти активность $\frac{dN}{dt}$, воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{4.24}$$

где N — число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени t; N_0 — число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный (t = 0); λ — постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (4.24) по времени:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.25}$$

Исключив из формул (4.23) и (4,25) $\frac{dN}{dt}$, находим активность препарата в момент t:

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{4.26}$$

Начальную активность A_0 препарата получим при t = 0:

$$A_0 = \lambda N_0. \tag{4.27}$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \tag{4.28}$$

Число N_0 радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν данного изотопа:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \tag{4.29}$$

где m — масса изотопа; M — молярная масса.

С учетом выражений (4.28) и (4.29) формулы (4.27) и (4.26) принимают вид:

$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A, \tag{4.30}$$

$$A = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}}. \tag{4.31}$$

Произведем вычисления, учитывая, что $T_{1/2}$ = 10 мин = 600 с, ln2 = 0,693, t = 6 ч = 2,16 · 10^4 с:

$$A_0 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0{,}693}{600} 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ Бк} = 5{,}13 \cdot 10^{12} \text{ Бк},$$

$$A = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0{,}693}{600} 6{,}02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0{,}693}{600} \cdot 2{,}16 \cdot 10^4} \text{ Бк} = 81{,}3 \text{ Бк}.$$

Пример 2. В реакции $^{14}_{7}N(\alpha, p)$ кинетическая энергия α-частицы W_1 = 7,7 МэВ. Под каким углом φ к направлению движения α-частицы вылетает протон, если известно, что его кинетическая энергия W_2 = 7,0 МэВ?

Решение. Запишем с учетом закона сохранения зарядового и массового чисел схему ядерной реакции:

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}p.$$

Репозиторий БГАТУ

Энергетический эффект такой реакции с учетом значений масс нейтральных атомов m_N = 14,00307 а.е.м., m_α = 4,00260 а.е.м., m_O = 16,99913 а.е.м., m_p = 1,00783 а.е.м. (энергетический эквивалент атомной единицы массы равен 931,5 МэВ):

$$Q = 931{,}5[(14{,}00307 + 4{,}00260) - (16{,}99913 + 1{,}00783)] \approx -1{,}2 \text{ МэВ}$$

Обозначим (рис. 4.44) как m_1, m_2 и m_3 массы бомбардирующей α-частицы, протона и ядра (в нашем случае ядра кислорода); W_1, W_2 и W_3 — их кинетические энергии. Если ядро азота (его массу примем равной m) неподвижно, то закон сохранения энергии запишется так:

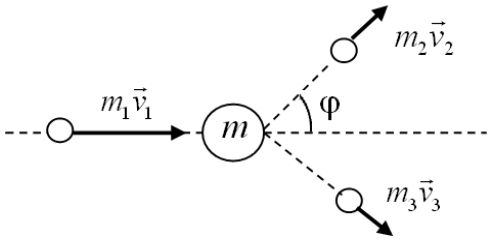

Рис. 4.44. Движение частиц в ядерной реакции

$$W_1 = W_2 + W_3 + Q, \qquad (4.32)$$

где Q — энергия реакции. Закон сохранения импульса в векторной форме имеет вид:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 + \vec{P}_3, \; m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3. \qquad (4.33)$$

В соответствии с теоремой косинусов:

$$P_3^2 = P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos\varphi. \qquad (4.34)$$

Импульс частицы P связан с ее кинетической энергией W соотношением:

$$P = \sqrt{2mW}. \qquad (4.35)$$

С учетом условия (4.35) выражение (4.34) примет вид:

$$2m_3W_3 = 2m_1W_1 + 2m_2W_2 - 2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_1 \cdot 2m_2W_2}.$$

Отсюда

$$W_3 = \frac{m_1}{m_3}W_1 + \frac{m_2}{m_3}W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1W_1 \cdot m_2W_2}. \qquad (4.36)$$

Из формул (4.32) и (4.36) следует:

$$W_1 - W_2 - Q = \frac{m_1}{m_3}W_1 + \frac{m_2}{m_3}W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1W_1 \cdot m_2W_2}.$$

Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{m_1W_1 + m_2W_2 - m_3(W_1 - W_2 - Q)}{2\sqrt{m_1W_1 \cdot m_2W_2}},$$

или

$$\cos\varphi = \frac{(m_1 - m_3)W_1 + (m_2 + m_3)W_2 + m_3Q}{2\sqrt{m_1W_1 \cdot m_2W_2}}.$$

Тогда

$$\varphi = \arccos\frac{(m_1 - m_3)W_1 + (m_2 + m_3)W_2 + m_3Q}{2\sqrt{m_1W_1 \cdot m_2W_2}}.$$

Подставив значения физических величин, считая массы ядер приблизительно равными массам соответствующих атомов, получим:

$$\varphi = \arccos\frac{(4{,}00260 - 16{,}99913)7{,}7 + (1{,}00783 + 16{,}99913)7 + 16{,}99913 \cdot (-1{,}2)}{2\sqrt{4{,}00260 \cdot 7{,}7 \cdot 1{,}00783 \cdot 7}} =$$
$$= \arccos 0{,}189 = 79{,}1°.$$

Задачи для самостоятельного решения

I уровень

1. Определить число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов бора: а) ${}^{9}_{5}B$; б) ${}^{10}_{5}B$; в) ${}^{11}_{5}B$.

Репозиторий БГАТУ

2. Определить число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов кислорода: 1) $^{16}_{8}O$; 2) $^{17}_{8}O$; 3) $^{18}_{8}O$.

3. Определить, пользуясь таблицей Менделеева, число нейтронов и протонов в атомах платины и урана.

4. Определить зарядовые числа ядер, массовые числа и символы ядер, которые получатся, если в ядрах $^{9}_{4}Be$, $^{13}_{7}N$, $^{23}_{11}Na$ нейтроны заменить протонами, а протоны — нейтронами.

5. Определить, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{44}_{20}Ca + {}^{1}_{1}H \rightarrow {}^{41}_{19}K + {}^{4}_{2}He$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m(Ca)$ = 7,2992 · 10^{-26} кг, $m(H)$ = 1,6737 · 10^{-27} кг, $m(K)$ = 6,8021 · 10^{-27} кг, $m(He)$ = 6,6467 · 10^{-27} кг.

6. Определить, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m(N)$= 2,3253 · 10^{-26} кг, $m(He)$ = 6,6467 · 10^{-27} кг, $m(H)$ = 1,6737 · 10^{-27} кг, $m(O)$ = 2,8229 · 10^{-26} кг.

7. Записать α-распад радия $^{226}_{88}Ra$.

8. Записать β^--распад магния $^{27}_{12}Mg$

9. Определить зарядовое число и массовое число частицы, обозначенной буквой X, в ядерных реакциях: а) $^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + X$; б) $^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{12}_{6}C + X$; в) $^{6}_{3}Li + X \rightarrow {}^{3}_{1}H + {}^{4}_{2}He$.

10. Дополнить недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях: $^{235}_{x}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{145}_{57}La + x + 4\,{}^{1}_{0}n$; $^{235}_{x}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{90}_{x}Zr + {}^{135}_{x}Te + x\,{}^{1}_{0}n$; $^{232}_{x}Th + {}^{1}_{0}n \rightarrow x + {}^{140}_{x}Xe + 3\,{}^{1}_{0}n$; $^{x}_{x}Pu + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{80}_{x}Se + {}^{157}_{x}Nd + 3\,{}^{1}_{0}n$.

II уровень

1. Определить удельную энергию связи для ядра $^{12}_{6}C$, если масса его нейтрального атома равна 19,9272 · 10^{-27} кг. (7,7 МэВ/нуклон)

2. Определить, какая часть (в процентах) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени, равного трем средним временам жизни радиоактивного ядра. (5 %)

3. Период полураспада радиоактивного изотопа составляет 24 ч. Определить время, за которое распадется 1/4 начального количества ядер. (10,5 ч)

4. Определить, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции $^{2}_{1}H + {}^{3}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{4}_{2}He$. Определить эту энергию. (18,4 МэВ)

5. В процессе осуществления реакции $\gamma \rightarrow {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$ энергия фотона была равна 2,02 МэВ. Определить полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения. (1 МэВ)

6. В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни одного поколения нейтронов составляет T = 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов k = 1,003, определить период τ реактора, т. е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов увеличится в e раз. (30 с)

7. Записать недостающие обозначения X в следующих ядерных реакциях: а) $^{10}_{5}B(n,\alpha)X$; б) $^{40}_{18}Ar(\alpha,n)X$; в) $X(h,n)^{37}_{18}Ar$; г) $^{3}_{2}He(x,p)^{3}_{1}H$; д) $X(n,\alpha)^{3}_{1}H$.

8. Жолио-Кюри облучали алюминий $^{23}_{13}Al$ α-частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+-распад. Записать эту реакцию.

9. Жолио-Кюри облучали магний $^{24}_{12}Mg$ α-частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+-распад. Записать данную реакцию.

10. Записать превращение протона в нейтрон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объяснить, почему это превращение энергетически возможно только для протона, связанного в ядре.

11. Записать схему электронного захвата (e-захвата) и объяснить его отличие от β^+- и β^--распадов. Привести пример электронного захвата.

12. Для обнаружения нейтронов используются реакции захвата тепловых нейтронов легкими ядрами ($^{3}_{2}He$, $^{10}_{5}B$), в результате чего испускаются заряженные частицы. Записать возможные реакции.

Репозиторий БГАТУ

13. При энергиях нейтронов около 10 МэВ становится возможной на ядре урана $^{238}_{92}U$ ядерная реакция типа (n, $2n$), в результате чего образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^--распад. Записать эту реакцию.

14. Ядро урана $^{238}_{92}U$, захватывая быстрый нейтрон, превращается в радиоактивный изотоп урана, который претерпевает β^--распад и превращается в трансурановый элемент, который, в свою очередь, также претерпевает β^--распад, в результате чего образуется плутоний. Записать все эти процессы в виде ядерной реакции.

15. Ядро урана $^{235}_{92}U$, захватывая тепловой нейтрон, делится на два осколка с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^--распада. Записать реакцию деления, а также цепочку β^--распадов.

6. ОБРАЗЕЦ КОНТРОЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

I уровень

1. В чем состоит отличие квантовых статистик от классической статистики?
2. Сформулируйте принцип Паули.
3. Что такое энергия Ферми?
4. Дайте определение работы выхода и контактной разности потенциалов.
5. Какова сущность эффекта Зеебека?
6. Какие частицы образуют ядро атома цинка? Сколько их?
7. Чем отличаются изобары и изотопы?
8. Как объясняется непрерывность энергетического спектра β-частиц?
9. Определить температуру вырождения электронного газа меди при условии, что при валентности, равной 1, атомная масса меди равна 63,54, а плотность $\rho = 9$ г/см^3.

II уровень

1. Метод определения относительного числа частиц в пределах объема фазового пространства размером $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$ с помощью классической функции распределения частиц по пространству и скоростям.
2. Объяснить, как изменяется положение химического элемента в таблице Менделеева после α- и β^--распадов ядер его атомов.

III уровень

Докажите, что химический потенциал для классических частиц и бозонов может быть только отрицательной величиной.

Репозиторий БГАТУ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ветрова, В. Т. Сборник задач по физике : с индивидуал. заданиями : учеб. пособие для вузов / В. Т. Ветрова. — Минск : Выш. шк., 1991. — 386 с.
2. Детлаф, А. А. Курс физики : учеб. пособие для вузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Высш. шк., 1999. — 492 с.
3. Савельев, И. В. Курс физики : учеб. : в 3-х т. Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И. В. Савельев. — Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 320 с.
4. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова.— 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Высш. шк., 1990. — 478 с.
5. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики : учеб. пособие для студентов втузов / Т. И. Трофимова. — Москва: Высш. шк., 1991. — 303 с.

Дополнительная

6. Наркевич, И. И. Физика для втузов. Электричество и магнетизм. Оптика. Строение вещества : учеб. пособие / И. И. Наркевич, Э. И. Волмянский, С. И. Лобко. — Минск : Выш. шк., 1994. — 554 с.

Учебное издание

ФИЗИКА

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 3

Составители:
Чернявский Валерий Антонович,
Соболь Валерий Романович,
Дымонт Василий Петрович и др.

Ответственный за выпуск В. А. Чернявский
Редактор А. И. Третьякова
Компьютерная верстка А. И. Третьяковой

Подписано в печать 13.12.2011. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 20,72. Тираж 170 экз. Заказ 1100.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости. 99-2, 220023, Минск.

Репозиторий БГАТУ