

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Л.Н.Беляцкая, А.В.Чигарев

Белорусская государственная политехническая академия

Функционирование машин, приборов, аппаратуры всегда сопровождается определенными потерями энергии на возбуждение вибраций и волн, излучение которых позволяет диагностировать состояние механической системы. Существует большое количество технологий, основанных на интенсификации процессов за счет подведения в рабочую зону звуковых и ультразвуковых колебаний. Например, при обработке материалов применение ультразвука позволяет повысить интенсивность и качество обработки материала. В вибродиагностике требуется решение обратных задач, которые являются некорректными. Это означает, что даже малая погрешность в определении вибрационного поля приводит к большим погрешностям в оценке диагностируемого процесса. Возникновение хаотизации в вибрационном или волновом поле сильно сказывается на погрешности диагностирования, идентификации исследуемого процесса. Хаотизация процессов распространения вибраций и волн звуковой обработки материалов ведет к тому, что энергия поступает в рабочую зону в количествах, меньших подводимых. Таким образом, хаотизация процессов распространения вибраций и волн в механических системах является актуальной. Представляет интерес тот факт, что стохастизация в машинах, приборах даже в том случае, если они представляют собой линейные механические системы. Стохастизация может возникать за счет структурной неоднородности материалов, неоднородных полей напряжений.

Рассмотрим стохастизацию процесса распространения высокочастотных вибраций в неоднородных средах. В настоящее время в различных машинах, приборах используется все больше композиционных материалов, которые имеют существенно неоднородную структуру. Известно, что энергия высокочастотных колебаний в среде распространяется вдоль лучевых трубок, образуемых траекториями лучей. Стохастизация этих траекторий обуславливает хаотический отток или приток энергии в рассматриваемой области среды. •

Основную роль в задачах диагностики и обработки материалов представляет изучение поверхностных полей вибраций и волн. Рассмотрим плоскость xOy , ограничивающую неоднородную среду $z \leq 0$. По плоскости распространяются вибрации в виде поверхностных волн или скачки волн напряжений от ударов или развивающихся трещин. Энергия вибраций и

волн распространяется вдоль лучей, траектории которых находятся на основе принципа Ферма [1]. В однородном материале при отсутствии остаточных напряжений лучи — прямые линии. Вследствие неоднородности материала или поля напряжений траектории лучей — кривые линии $y=y(x)$, удовлетворяющие уравнению

$$y + y(1+y^2)\varphi_1(x,y) - y^2(2-y^2)\varphi_2(x,y) - \varphi_3(x,y) = 0.$$

$$y = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi_1 = \frac{\delta \ln n}{\delta x}, \quad \varphi_2 = \frac{\delta \ln n}{\delta y}, \quad (1)$$

где n — коэффициент преломления.

При условии, что в уравнении (1) можно учесть нелинейность по y до третьего порядка, получаем

$$z + z\omega^2(1 + \alpha z^2) - \varepsilon \alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX) = 0, \\ z = yn^{1/2}, \quad X = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \Omega \ll \omega, \quad \omega^2 = N, \quad M = 0, \quad L = \omega^2 \alpha. \quad (2)$$

Аналогично [2] установлено, что стохастизация поверхностных траекторий и полей вибрации возникает при условии $\varepsilon \frac{\Delta \omega}{\Omega} \gg 1$, т.е.

расстояние $X = \frac{2\pi}{\Omega}$ между жесткими включениями должно быть достаточно велико. Находится расстояние вдоль направления распространения вибраций и волн, начиная с которого происходит стохастизация.

Запишем уравнение (2) в переменных действие (I) — фаза (θ)

$$I = \varepsilon \Psi(I, \theta, x), \quad \theta = \omega(I), \quad (3)$$

$$\Psi = I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX) \sin 2\theta$$

Введем функцию плотности вероятностей $p(x, I, \theta)$, удовлетворяющую известному уравнению Лиувилля [3].

$$\frac{\delta p}{\delta x} + \theta \frac{\delta p}{\delta \theta} + i \frac{\delta p}{\delta I} = 0, \\ \int p(x, I, \theta) dI d\theta = 1 \quad (4)$$

Представим $p(x, I, \theta)$ и $\psi(x, I, \theta)$ в виде

$$p(x, l, \theta) = \sum p_n(x, l) e^{in\theta} + p_{-n}(x, l) e^{-in\theta},$$

$$\Psi(x, l, \theta) = I \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX) \sin 2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^+(x, l) e^{in\theta} + \Psi_n^-(x, l) e^{-in\theta}, \quad (5)$$

$$p_{-n} = p_n, \quad \Psi_{-n} = \Psi_n^*$$

Подставляя (5) в (4), получим в нулевом приближении уравнение Фоккера-Планика-Колмогорова (ФПК) для $p_0(x, l)$ с граничным условием $p_n(0, l, \theta) = p_0(0, l) \delta_{n0}$

$$\frac{\delta p_0}{\delta x} = -\frac{\delta}{\delta l} (\alpha_1 l p_0) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta l^2} (2\alpha_1 l^2 p_0), \quad (6)$$

$$\alpha_1 = \varepsilon^2 8\pi\Omega$$

Уравнению (6) поставим в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение, которое определим однозначным образом.

Обозначим коэффициент сноса в уравнении (6) через K_1 , коэффициент диффузии через K_2 , тогда, т.к. $K_1 = \alpha_1 l$, $K_2 = 2\alpha_1 l^2$, то получим

$$I = 2 \sqrt{\frac{\alpha_1}{N}} l(x) v(x) \quad (7)$$

Здесь $v(x)$ - чисто случайный процесс, $\langle v \rangle = 0$, $\langle v(x)v(x') \rangle = N\delta(x-x')$.

Рассмотренное приближение соответствует приближению хаотических фаз.

Вернемся к начальным переменным x , y , тогда в приближении хаотических фаз траектория луча удовлетворяет уравнению

$$y = y \left[-\frac{1}{2} (\ln n)' + \sqrt{\frac{\alpha_1}{N}} v \right] \quad (8)$$

Уравнение ФПК в переменных x , y имеет вид

$$\frac{\delta f(y, x)}{\delta x} = -\frac{\delta}{\delta y} \left[\frac{\alpha_1}{4} - \frac{1}{2} (\ln n)' y f \right] + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta y^2} \left[\frac{\alpha_1}{2} y^2 f \right], \quad (9)$$

где $f(y, x)$ - плотность вероятностей отклонения y луча от оси x .

Уравнение (9) имеет аналитическое решение в виде

$$f(y, x) = \frac{1}{y \sqrt{\pi \alpha_1 x}} \exp \left\{ -\frac{\ln^2 y n^{1/2}}{\alpha_1 x} \right\} \quad (10)$$

Во всех вышенаписанных формулах $n(x)$ представляет собой детерминированную функцию, от конкретного вида которой существенно зависит поведение лучей, вдоль которых переносится энергия поверхностных

волн и вибраций. Таким образом, установлены условия, при которых возникает детерминированный хаос в волновых полях.

На рис. 1 изображена поверхность плотности вероятности в зависимости от x, y при заданных значениях n, Q .

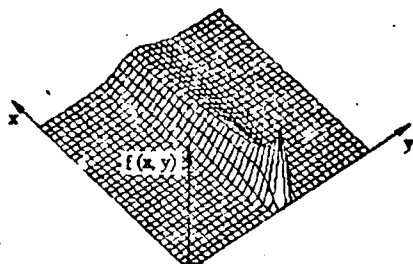


Рис. 1. Поверхность распределения плотности вероятности $f(x, y)$ при $n = 1,5, Q = 0.0995$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г.М. Статическая необратимость в нелинейных системах. -М.: Наука, 1970, 143 с.
2. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. -Акустический журнал, 1978, XXIV, вып. 5, с. 765-771.
3. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. -М.: Наука, 1988, 368 с.