Секция 2. Почвощадящие технологии и машиностроение

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР В ПОЧВЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ

Б.Х. Драганов, И.И. Мойсейкина

Рациональная организация теплового режима в сооружениях защищенного грунта связана с расчетом и оценкой факторов, определяющих формирование температурного поля в почве и в прилегающем к ней воздухе. Анализ и расчет температурного поля в почве обычно проводят на основе аналитической теории теплопроводности. Ввиду неоднородности, многофазности почв, содержащих помимо почвенного скелета также межзерновой газ и почвенную влагу, обращаются к уравнениям, описывающим процесс эффективной теплопроводности. При этом почву рассматривают как некоторую квазиоднородную среду, в связи с чем вводят эквивалентные теплофизические характеристики почвы. Более целесообразно рассматривать почву как кусочно-однородную среду с плоскими границами раздела. Подобная модель в большей мере учитывает неоднородность теплофизических характеристик почвы по глубине. Кроме того, желательно создать расчетную модель, учитывающую дискретные источники теплоты в почве.

В данной задаче имеем дело с полем температур, т.е. с потенциальной гармонической функцией *E*, которую обозначим $\varphi(x,y,z)$. Определим ее в каждом слое многослойной области.

Рассчитаем потенциальную функцию $\varphi(x,y,z)$ от точечного источника тепловой мощности *p*, расположенного в одном из слоев среды (см. рисунок). Поле температур трехмерное, в среде, где расположен источник, оно удовлетворяет уравнению Пуассона, в остальных средах - уравнению Лапласа. Выберем систему координат так, чтобы плоскость *XOY* совпала с одной из границ раздела сред, например с нижней. Ось Z направим так, чтобы она проходила через точечный источник. Координаты точечного источника $\rho(x_M, y_M, z_M)$ соответственно равны О, О, *h*. Среда имеет три границы раздела, слои между ними обозначены соответственно 0, I, II, III и имеют проводимости $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Толщины соответствующих слоев обозначены как H_1 и H_2. Основное уравнение поля для такой четырехслойной среды:

$$\Delta\varphi_3 = -\rho\delta(x,y,z,-h);\ \Delta\varphi_2 = 0;\ \Delta\varphi_1 = 0;\ \Delta\varphi_0 = 0. \qquad (1)$$

Выражение (1) -уравнение Пуассона. В него входят единичная функция Дирака $\delta(x,y,z,-h)$, поскольку источник точечный. Функция Дирака δ $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ (она принимает всюду нулевые значения, за исключением точки (x_0,y_0,z_0), где обращается в бесконечность) применяется для математического описания точечного источника, определив поле которого (функция Грина), легко найти поле любого распределения источников методом наложения. Краевые условия на бесконечности и на границах раздела сред следующие:

$$\varphi_3(\infty)=0;\ \varphi_0(-\infty)=0;\ \varphi_3(0)=\varphi_2(0);\ \varphi_2(-H_2)=\varphi_1(-H_2);$$
$$\varphi_1(-H_1-H_2)=\varphi_0(-H_1-H_2);$$
$$\gamma_3 \frac{d\varphi_3}{dz}\Big|_{z=0} = \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dz}\Big|_{z=0};\ \gamma_2 \frac{d\varphi_2}{dz}\Big|_{z=-H_2} = \gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dz}\Big|_{z=-H_2};$$
$$\gamma_1 \frac{d\varphi_1}{dz}\Big|_{z=-(H_1+H_2)} = \gamma_0 \frac{d\varphi_0}{dz}\Big|_{z=-(H_1+H_2)}. \qquad (2)$$

Из этих уравнений и краевых условий найдем распределение функции $\varphi(x,y,z)$ в любой точке пространства. Для этого применим двухкратное интегральное преобразование Фурье по координатам x и y к уравнениям (1) и краевым условиям (2), в результате чего получим преобразованные уравнения

$$\frac{d^2\varphi_3}{dz^2} - q^2\varphi_3 = \frac{\rho}{\gamma_3}\frac{1}{4\pi^2}\delta(z-h);\ \frac{d^2\varphi_2}{dz^2} - q^2\varphi_2 = 0;$$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} - q^2\varphi_1 = 0;\ \frac{d^2\varphi_0}{dz^2} - q^2\varphi_0 = 0, \qquad (3)$$

где $q = \zeta_x^2 + \zeta_y^2$; ζ_x, ζ_y - переменные преобразования Фурье по координатам x и y.

Преобразованные краевые условия на границах раздела и на бесконечности:

$$\varphi_3(\infty)=0;\ \varphi_0(-\infty)=0;\ \varphi_3(0)=\varphi_2(0);\ \varphi_2(-H_2)=\varphi_1(-H_2);$$

$$\varphi_1(-H_1-H_2)=\varphi_0(-H_1-H_2);$$

$$\gamma_3\frac{d\varphi_3}{dz}\Big|_{z=0}=\gamma_2\frac{d\varphi_2}{dz}\Big|_{z=0};\quad \gamma_2\frac{d\varphi_2}{dz}\Big|_{z=-H_2}=\gamma_1\frac{d\varphi_1}{dz}\Big|_{z=-H_2};$$

$$\gamma_1\frac{d\varphi_1}{dz}\Big|_{z=-(H_1+H_2)}=\gamma_0\frac{d\varphi_0}{dz}\Big|_{z=-(H_1+H_2)}. \tag{4}$$

Общие решения этих уравнений, содержащие постоянные интегрирования C_{mn} (mn - номер слоя), известны.

Запишем их

$$\varphi_3\Big|_{h\le z_Q<\infty}=\frac{1}{2q}\left[e^{qz_Q}(C_{13}-C_0e^{-qh})+e^{-qz_Q}(C_{23}-C_0e^{qh})\right];$$

$$\varphi_3\Big|_{-\infty\le z_Q<h}=\frac{1}{2q}\left[e^{qz_Q}C_{13}+e^{-qz_Q}C_{23}\right],$$

где z_Q - координата точки Q, в которой ищем поле;

$C_0=\ \rho/\ (\gamma_3 4\pi^2)$

Решение для $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$:

$$\varphi_2=C_{12}e^{qz_Q}+C_{22}e^{-qz_Q};\varphi_1=C_{11}e^{qz_Q}+C_{21}e^{-qz_Q};$$

$$\varphi_0=C_{10}e^{qz_Q}+C_{20}e^{-qz_Q} \tag{5}$$

Постоянные интегрирования найдем, решив систему уравнений относительно этих постоянных. Для этого приравняем потенциалы из (5) и их производные на границах раздела сред, используя краевые условия на бесконечности. Подставив значения постоянных в (5), найдем изображения искомой функции для всех слоев. Чтобы вернуться к оригиналу, воспользуемся обратным преобразованием Фурье. Рассмотрим выражение для потенциала нулевого слоя. Подставив в него значение постоянных интегрирования, получим

$$\varphi_0 = \mu_{32}\mu_{10}\mu_{21}C_0e^{-qh} / (2q)C_0e^{-qh}e^{qzQ} / (1 + \\ + \lambda_{32}e^{-2qH_1} + \lambda_{10}\lambda_{21}e^{-2H_1} + \lambda_{32}\lambda_{10}e^{-2q(H_1+H_2)}) \qquad (6)$$

где $\lambda_{mn} = (\gamma_m - \gamma n)/(\gamma_m + \gamma n)$; $\mu_{mn} = 2\gamma_m / (\gamma_m + \gamma n)$.

Вернувшись к оригиналу функции, т.е. сделав обратное преобразование Фурье, запишем:

$$\varphi_0(x,y) = C_0\mu_{32}\mu_{10}\mu_{21} / 2\int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qh}e^{qzQ}e^{j(\zeta_x x+\zeta_y y)}d\zeta_x d\zeta_y : \\ :\left[q(1 + \lambda_{32}\lambda_{21}e^{-2qH_1} + \lambda_{10}\lambda_{21}e^{-2qH_2} + \lambda_{32}\lambda_{10}e^{-2q(H_1+H_2)}\right] \qquad (7)$$

где j - мнимая единица, равная $\sqrt{-1}$.

Перейдя к полярным координатам и использовав функцию Бесселя $I_0(\chi, R)$, придем к следующему значению для потенциала.

$$\varphi_0(x,y) = \frac{\mu_{32}\mu_{10}\mu_{21}\rho}{4\pi\gamma_3}\int_0^{\infty} e^{(zQ-h)\chi} I_0(\chi, R)d\chi : \\ :\left[1 + \lambda_{32}\lambda_{21}e^{-2\chi H_1} + \lambda_{10}\lambda_{21}e^{-2\chi H_2} + \lambda_{32}\lambda_{10}e^{-2\chi(H_1+H_2)}\right]. \qquad (8)$$

где $\chi^2 = \zeta_x^2 + \zeta_y^2$, $R^2 = x_Q^2 + y_Q^2$ (т. е. $\chi = q$).

Аналогичный вид будет и у остальных выражений потенциала для всех четырех слоев.

В (8) под знаком интеграла стоит произведение функции Бесселя на экспоненту и некоторую функцию

$$f(\chi) = 1 / \left[1 + ae^{-2H_1\chi} + be^{-2H_2\chi} + ce^{-2(H_1+H_2)\chi}\right]$$

Из теории функции Бесселя известно, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha\chi} I_0(\chi, R)d\chi = 1/\sqrt{\alpha^2 + R^2} \qquad (9)$$

где α, R - некие параметры

Поэтому, если функцию f(x) разложить в сходящийся ряд экспоненциальных функций, то каждое из выражений для потенциала в слоях можно представить в виде ряда интегралов (9) и точно вычислить.

Разложение функции имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} P_{mn} e^{-2[(n-m)H_1 + mH_2]\chi} \qquad (10)$$

где коэффициент

P_{mn}=

$$= (-1)^n a^{n-2m} \left\{\left[n - m + 1 + \sum \frac{\prod\limits_{i=0}^{p-1}(m-1-i)\prod\limits_{i=0}^{p}(m-n+1-i)}{p!(p+1)!}\right] \times\right.$$

$$\times a^m b^m + \sum_{q=1}^{m}\left[n - m + 1 - q + \sum_{p=1}^{m-1} \frac{\prod\limits_{i=0}^{p-1}(m-1-i)\prod\limits_{i=1}^{p}(n-m+1-q-i)}{p!(p+1)!}\right] \times$$

$$\left. \times (-1)^q \frac{\prod\limits_{i=1}^{q-1}(m-i)}{q!} ab^{m-q}c^q \right\},$$

где *n, m, p, i* - индексы суммирования; $a=\lambda_{32}\lambda_{21}$; $b=\lambda_{10}\lambda_{21}$; $c=\lambda_{32}\lambda_{10}$.

Подставив значение P_{mn} в (10), а затем функции из (10) в (8) и поменяв порядок интегрирования и суммы ряда, взяв интеграл (2), получим

$$\varphi_0(x,y)=\frac{\mu_{32}\mu_{10}\mu_{21}\rho}{4\pi\gamma_3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_{mn}\int e^{-2[(n-m)H_1+mH_2]\chi}I_0(\chi,R)d\chi=$$

$$=\frac{\mu_{32}\mu_{10}\mu_{21}\rho}{4\pi\gamma_3}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_{mn}(-1)\div\sqrt{\left\{-2\left[(n-m)H_1+mH_2\right]+(z_Q-h)^2\right\}+R^2}$$

Проделав аналогичные операции и преобразования, получим выражение для потенциалов всех слоев многослойной среды. Такой метод применим для решения различных практических задач, связанных с теплоотдачей в почву (от почвы) в сельскохозяйственных производственных помещениях.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПЛОТНЕНИЯ ПОЧВЫ

А.Н. Орда, к.т.н., доцент (БАТУ)

Характер и закономерности уплотнения почвы зависят от размеров и режимов нагружения деформатора, а также от исходного состояния почвенного массива. При наличии взрыхленного слоя конечной толщины в расчетах, как правило, допускают, что уплотняется лишь этот слой. Тракторы и другая сельскохозяйственная техника уплотняют почву на глубину, превышающую пахотный слой. Высота уплотняемого слоя зависит от размеров ходового аппарата и нагрузки, передаваемой через него на почву.

Анализ механико-математических моделей показал, что при расчете уплотнения почвы лучше всего подходит энергетический метод, учитывающий влияние закона поглощения энергии на изменение свойств почвы. С учетом этого получено следующее уравнение распределения плотности почвы по глубине:

$$\rho_x=\rho_0-k_1\sigma_0\left(1-e^{-\beta x}\right), \qquad (1)$$