

А. Н. Леонов<sup>1</sup>, Цинчжэнь Ли<sup>2</sup>, Э. В. Дыба<sup>3</sup>, Т. А. Непарко<sup>1</sup>, Е. Ю. Жущма<sup>1</sup>

<sup>1</sup>УО «Белорусский государственный аграрный технический университет»

г. Минск, Республика Беларусь

E-mail: lannik@rambler.ru

<sup>2</sup>Ибиньский профессиональный технический колледж

г. Сычуань, Китайская Народная Республика

E-mail: 190570873@qq.com

<sup>3</sup>РУП «НПЦ НАН Беларуси по механизации сельского хозяйства»

г. Минск, Республика Беларусь

E-mail: dibua-18@mail.ru

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСТЕНИЕВОДСТВА С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

*Аннотация.* Разработан метод стохастического моделирования однофакторных технологических процессов уравнениями в ортогональных многочленах. Метод проиллюстрирован на типовой задаче растениеводства – построение зависимости недобора урожая зерновых при отклонении срока посева от оптимального значения.

*Ключевые слова:* моделируемая функция (урожайность), моделирующая функция (алгебраический ряд Тейлора), ортогональные факторы, недобор урожая, сроки выполнения операций, абсолютная погрешность моделирующей функции.

A. N. Leonov<sup>1</sup>, Qingzhen Li<sup>2</sup>, E. V. Dyba<sup>3</sup>, T. A. Neparco<sup>1</sup>, E. Yu. Zhushma<sup>1</sup>

<sup>1</sup>EI “Belarusian State Agrarian Technical University”

Minsk, Republic of Belarus

E-mail: lannik@rambler.ru

<sup>2</sup>YiBin Vocational and Technical College

Sichuan, China

E-mail: 190570873@qq.com

<sup>3</sup>RUE “SPC NAS of Belarus for Agricultural Mechanization”

Minsk, Republic of Belarus

e-mail: dibua-18@mail.ru

## STOCHASTIC PROCESS MODELING CROP PRODUCTION WITH ORTHOGONAL POLYNOMIALS

*Abstract.* The method of stochastic modeling of single-factor technological processes by equations in orthogonal polynomials has been developed. The method is illustrated on the typical problem of crop production – the construction of a dependence on the shortage of grain yield when the sowing period deviates from the optimal value.

*Keywords:* simulated function (yield), simulating function (Taylor algebraic series), orthogonal factors, crop shortage, timing of operations, absolute error of simulating function.

### Введение

Эффективным методом исследования сложных технических систем (СТС), к которым относится аграрно-промышленный комплекс (АПК), является системный анализ. Начальный этап системного анализа – операция **анализ**, которая включает в себя разбиение СТС на подсистемы с последующим математическим моделированием. Моделирование подсистем, так как они являются объектами более низкого порядка по сравнению с обобщенной системой, реализовать значительно легче, чем моделирование всей системы в целом. Заключительный этап системного анализа – операция **синтез**, которая включает в себя объединение всех подсистем в единое целое путем наложения функциональных связей между ними и построение обобщенной модели [1].

Для построения обобщенной модели СТС в стандартных компьютерных системах (например, MS Excel, Mathcad) необходимо, чтобы их математические модели и функциональные связи между ними (далее – объекты) были представлены аналитическими функциями (функция и ее производные – непрерывны). Однако на практике это не всегда бывает возможно. В этом случае предполагается, что изучаемый объект описывается некоторой неизвестной функцией  $Y(t)$  (моделируемая функция), которая задается базой дискретных данных  $Y_j(t_j)$ , получаемых в результате эксперимента ( $t$  – независимый управляющий фактор). Математически задача моделирования объекта формулируется следующим образом: для моделируемой функции  $Y(t)$  необходимо «подобрать» такую моделирующую функцию  $\psi(t)$  чтобы  $[Y(t) \approx \psi(t)]$  [2].

### Основная часть

В данной статье рассмотрен случай, в котором и моделируемая функция  $Y(t)$ , и моделирующая функция  $\psi(t)$  являются однофакторными уравнениями. Известно, что любая аналитическая функция с определенной погрешностью может быть представлена, например, в виде конечного степенного ряда Тейлора. Поэтому в качестве моделирующей функции  $\psi(t)$  использован степенной ряд Тейлора  $k$ -ого порядка [3]

$$\psi(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_k t^k = \sum_{l=0}^k a_l t^l, \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}], \quad (1)$$

где  $a_l$  – размерный коэффициент,  $l = 0, \dots, k$ .

Моделируемая функция  $Y(t)$  и моделирующая функция  $\psi(t)$  являются функциями размерного фактора  $t$ . Такой способ задания обеих функций имеет ряд существенных недостатков. Для исключения отрицательных моментов, связанных с различной размерностью и масштабом размерного фактора  $t$ , выраженного в натуральных координатах, моделирование осуществляют в безразмерном нормированном факторе  $X$  [3].

$$X_j = \frac{t_j - t_0}{\Delta t}, \quad X_j \in [-1, +1], \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где  $t_0 = (t_{\min} + t_{\max})/2$  – основной уровень, а  $\Delta t = (t_{\max} - t_{\min})/2$  – интервал варьирования размерного фактора  $t$ .

После замены размерного фактора  $t$  на безразмерный  $X$  уравнение (1) принимает вид

$$\psi(X) = b_0 X^0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_k X^k = \sum_{l=0}^k b_l X^l, \quad X \in [-1, +1], \quad (3)$$

где  $b_l$  – безразмерный коэффициент уравнения,  $l = 0, \dots, k$ .

Однако уравнение (3) также имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что все факторы  $X^l$  взаимозависимы, что затрудняет интерпретацию параметра  $Y(X)$  и существенно усложняет расчет абсолютной ошибки моделирующей функции  $\Delta\psi(X)$ , которая необходима для предоставления полного комплекса результатов моделирования.

Существенный прогресс в повышение эффективности моделирования изучаемых объектов внес Дж. Форсайт, который предложил структуру моделирующей функции  $\psi(X)$  рассматривать в виде суммы ортогональных многочленов, а значения коэффициентов моделирующей функции рассчитывать по критерию Гаусса (1795) – Лагранжа (1805) методом наименьших квадратов (МНК) [4].

Уравнение моделирующей функции в ортогональных многочленах имеет следующий вид:

$$\psi(X) = c_0 q_0(X) + c_1 q_1(X) + c_2 q_2(X) + \dots + c_k q_k(X) = \sum_{l=0}^k c_l q_l(X), \quad (4)$$

где  $c_l$  – безразмерный коэффициент;  $q_l(X)$  – безразмерный ортогональный многочлен  $l$ -го порядка,  $l = 0, 1, \dots, k$ .

Моделированию объектов, описываемых детерминированными законами, в научной литературе посвящено достаточно большое количество публикаций [2, 4–8]. В этом случае каждому независимому управляющему фактору  $t$  со 100 % вероятностью соответствует одно значение моделирующей функции  $\psi_j(t_j)$ .

Ортогональные многочлены задаются уравнениями [5]

$$\begin{cases} q_0(X) = 1 \\ q_1(X) = X - \alpha_{10} \\ q_2(X) = X^2 - \alpha_{21}X - \alpha_{20} \\ \dots \\ q_k(X) = X^k - \alpha_{k,k-1}X^{k-1} - \dots - \alpha_{k0} \end{cases}, \quad (5)$$

где  $\alpha_{10}, \alpha_{21}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{k0}$  – коэффициенты, которые рассчитываются из условия ортогональности многочленов, задаваемым следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^N q_l(X_j) \cdot q_m(X_j) = \begin{cases} 0, & l \neq m \\ \sum_{j=1}^N q_l^2(X_j) > 0, & l = m \end{cases}. \quad (6)$$

Для того, чтобы моделирующая функция  $\psi(X)$  (см. уравнение (4)) «наилучшим образом» отражала дискретные экспериментальные значения моделируемой функции  $Y_j(X_j)$ , необходимо, чтобы ее коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_k$  при  $N > k + 1$  рассчитывались методом МНК:

$$\varphi(c_0, c_1, \dots, c_k) = \sum_{j=1}^N [\psi(X_j) - Y_j(X_j)]^2 = \min, \quad (7)$$

где  $\psi(X_j)$  – значение моделирующей функции при  $X = X_j$  (см. уравнение (4)).

Необходимое условие минимума функции  $\varphi(c_0, c_1, \dots, c_k)$

$$\partial \varphi / \partial c_l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, k. \quad (8)$$

Система уравнений (8) после преобразования имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_0 \sum_{j=1}^N q_0^2 + c_1 \sum_{j=1}^N q_0 q_1 + c_2 \sum_{j=1}^N q_0 q_2 + \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_0 q_k = \sum_{j=1}^N q_0 \bar{Y}_j \\ c_0 \sum_{j=1}^N q_0 q_1 + c_1 \sum_{j=1}^N q_1^2 + c_2 \sum_{j=1}^N q_1 q_2 + \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_1 q_k = \sum_{j=1}^N q_1 \bar{Y}_j \\ \dots \\ c_0 \sum_{j=1}^N q_0 q_k + c_1 \sum_{j=1}^N q_1 q_k + c_2 \sum_{j=1}^N q_2 q_k + \dots + c_k \sum_{j=1}^N q_k^2 = \sum_{j=1}^N q_k \bar{Y}_j \end{cases}. \quad (9)$$

Так как в системе уравнений (9) многочлены ортогональны (см. уравнение (6)), то эта система имеет диагональный вид и поэтому регрессионные коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  рассчитываются по достаточно простым формулам:

$$c_0 = \frac{\sum_{j=1}^N q_0 \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_0^2}, \quad c_1 = \frac{\sum_{j=1}^N q_1 \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_1^2}, \quad c_2 = \frac{\sum_{j=1}^N q_2 \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_2^2}, \quad \dots, \quad c_k = \frac{\sum_{j=1}^N q_k \bar{Y}_j}{\sum_{j=1}^N q_k^2}. \quad (10)$$

Абсолютная погрешность  $\Delta Y(X)$  моделируемой функции равна [2]:

$$\Delta Y(X) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N [\psi(X_j) - Y_j(X_j)]^2}{k+1}}, \quad (11)$$

Очевидно, что чем выше порядок ортогональных многочленов, тем точнее моделирующая функция  $\psi(X)$  отражает дискретные значения моделируемой функции  $Y(X)$ . Наилучшее среднеквадратичное приближение в случае объекта, описываемого детерминированными законами, достигается при таком значении коэффициента  $k$ , при котором абсолютная погрешность  $\Delta Y(X)$ , рассчитанная по уравнению (11), равна инструментальной погрешности измерения  $Y_j(X_j)$ .

Стохастическому моделированию объектов в ортогональных многочленах в научной литературе посвящено значительно меньшее число публикаций, причем порядок многочленов, используемых в них, не превышает  $k = 3$  [7–10]. При стохастическом моделировании каждому управляющему фактору  $t_j$  соответствуют различные значения объекта, причем каждое из значений в отдельно взятом опыте реализуется концептуально непредсказуемо даже при соблюдении одинаковых условий эксперимента.

Поясним применение стохастического моделирования на конкретном примере растениеводства. Система «растениеводство» состоит из большого количества подсистем (основная обработка почвы, внесение удобрений, предпосевная обработка почвы, посев, операции по уходу за посевами (подкормка, защита растений, орошение и др.), уборка, послеуборочная доработка продукции). Очевидно, что методология изучения основных закономерностей растениеводства должна базироваться на системном анализе. Кроме моделирования перечисленных подсистем, необходимо также наличие некоторого числа математических уравнений, характеризующих функциональные связи между ними, которые необходимы при объединении подсистем в единое целое. В растениеводстве в качестве таких связей используют, как правило, математические модели, отражающие зависимость недобора урожая зерновых культур от сроков выполнения производственных операций (пахота, посев, уборка) [11].

Моделирование процессов фотосинтеза, позволяющее установить зависимость прироста биомассы зерна на стадии молочно-воскового созревания, а также естественного процесса осыпания зерна на стадии уборки с помощью детерминированных закономерностей, выработанных в молекулярной биологии, в настоящее время практически невозможно. Кроме того, детерминированное моделирование этих процессов в значительной степени осложняется непредсказуемыми колебаниями природно-климатических условий. В результате агротехнических исследований установлено, что на величину собранного урожая значительное влияние оказывает соблюдение оптимальных сроков выполнения основных операций, возможно, даже большее, чем их качество [9, 10]. В свою очередь, соблюдение оптимальных сроков проведения операций оказывает существенное влияние на формирование рационального комплекса технических средств, что напрямую определяет эффективность производства (себестоимость зерна, производительность труда).

Поэтому стохастическое моделирование – эффективный способ моделирования функциональных связей между подсистемами, например, путем построения зависимости недобора урожая зерновых культур при отклонении сроков выполнения пахоты, посева и уборки от оптимальных значений.

Алгоритм Форсайта, разработанный для моделирования детерминированных процессов, в целом можно использовать и для моделирования стохастических процессов, но с учетом того, что при обработке исходных экспериментальных данных следует использовать аппарат математической статистики. Поэтому можно ожидать, что значения коэффициентов  $\alpha$  в ортогональных многочленах (см. уравнение (5)), а также абсолютная погрешность прогнозирования изучаемого объекта будут зависеть не только от порядка ортогональных многочленов  $k$ , но и от плана эксперимента, количества опытов  $N$ , числа дублей каждого опыта  $n$ .

Цель статьи – разработка методологии стохастического моделирования технологических процессов с помощью уравнений в ортогональных многочленах, а также иллюстрация разработанно-

го алгоритма при решении конкретной народнохозяйственной задачи – математическое моделирование зависимости урожая озимой пшеницы от сроков посева.

Прежде чем перейти к моделированию технологического процесса, необходимо задать базу экспериментальных данных  $Y_{ji}(X_j)$ , характеризующих этот процесс. Так как природа изучаемого явления стохастическая, то получение экспериментальных данных должно осуществляться по заранее выбранному плану: матрица планирования состоит из  $N$  опытов ( $j = 1, \dots, N$ ) и  $n$  дублей в каждом опыте ( $i = 1, \dots, n$ ). В качестве плана эксперимента используем равномерно-симметричный план (РСП), размерный фактор которого в натуральных координатах задается уравнением

$$t_j = t_{\min} + \frac{j-1}{N-1} \cdot (t_{\max} - t_{\min}), \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}], \quad \text{при } j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Равномерно-симметричный план эксперимента в безразмерных нормированных координатах  $X$  после подстановки уравнения (12) в уравнение (2) имеет следующий вид:

$$X_j = -1 + \frac{2(j-1)}{N-1}, \quad X_j \in [-1, +1], \quad \text{при } j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Если интервал варьирования фактора  $X_j \in [-1, +1]$  и значения фактора антисимметричны относительно начала координат, то ортогональный многочлен  $q_k(X)$  содержит только те степени фактора  $X$ , которые имеют одинаковую четность с номером  $k$  [5, 6]. Поэтому система уравнений (5) принимает следующий вид (для иллюстрации метода ограничимся случаем  $k = 5$ ):

$$\begin{cases} q_0(X) = 1 \\ q_1(X) = X \\ q_2(X) = X^2 - \alpha_{20} \\ q_3(X) = X^3 - \alpha_{31}X \\ q_4(X) = X^4 - \alpha_{42}X^2 - \alpha_{40} \\ q_5(X) = X^5 - \alpha_{53}X^3 - \alpha_{51}X \end{cases}, \quad (14)$$

где  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$  – коэффициенты ортогональных многочленов.

Следует отметить, что в работе была сделана попытка рассчитать коэффициенты  $\alpha$  по системе уравнений (5) для  $k = 5$ . Результат:  $\alpha_{10}, \alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{30}, \alpha_{43}, \alpha_{41}, \alpha_{54}, \alpha_{52}, \alpha_{50}$  тождественно равнялись нулю, что подтвердило справедливость утверждения работ [5, 6], сделанного для систем, описываемых детерминированными законами.

Так как факторы  $q_0(X), q_1(X), q_2(X), q_3(X), q_4(X), q_5(X)$  ортогональны между собой, то система уравнений (9) имеет диагональный вид, а коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  рассчитываются по уравнениям (10).

При расчете коэффициентов  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ , значения которых обеспечивают ортогональность многочленов  $q_0(X), q_1(X), q_2(X), q_3(X), q_4(X), q_5(X)$ , следует учесть, что при антисимметричности РСП:

$$X_j = -X_{N-j+1} \quad \text{для } j = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

имеют место формулы

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N X_j \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N X_j^{2m+1} \equiv 0 \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2. \quad (16)$$

Приведем еще одно очевидное равенство, которое будет полезно при расчете коэффициентов  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ :

$$\sum_{j=1}^N X_j^{2m} = \overline{X^{2m}} \cdot N, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Ниже приводится подробный расчет коэффициентов  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ .

$$1. \sum_{j=1}^N q_{1j} \cdot q_{0j} = \sum_{j=1}^N X_j \cdot 1 \equiv 0, \quad (18)$$

факторы  $(q_1, q_0)$  для РСП всегда ортогональны.

$$2. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{2j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^2 - \alpha_{20}) \cdot 1 = (\overline{X^2} - \alpha_{20}) \cdot N = 0 \rightarrow \alpha_{20} = \overline{X^2} \\ \sum_{j=1}^N q_{2j} \cdot q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^2 - \alpha_{20}) \cdot X_j \equiv 0 \end{cases}, \quad (19)$$

факторы  $(q_2, q_0), (q_2, q_1)$  для РСП ортогональны при  $\alpha_{20} = \overline{X^2}$ .

$$3. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - X_j) \cdot 1 \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \cdot X_j = \sum_{j=1}^N X_j^4 - \alpha_{31} \sum_{j=1}^N X_j^2 = (\overline{X^4} - \alpha_{31} \overline{X^2}) \cdot N = 0 \rightarrow \alpha_{31} = \overline{X^4} / \overline{X^2}, \\ \sum_{j=1}^N q_{3j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \cdot (X_j^2 - \alpha_{20}) \equiv 0 \end{cases} \quad (20)$$

факторы  $(q_3, q_0), (q_3, q_1), (q_3, q_2)$  для РСП ортогональны при  $\alpha_{31} = \frac{\overline{X^4}}{\overline{X^2}}$ .

$$4. \begin{cases} \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot 1 = (\overline{X^4} - \alpha_{42} \overline{X^2} - \alpha_{40}) \cdot N = 0 \rightarrow \overline{X^4} - \alpha_{42} \overline{X^2} - \alpha_{40} = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot X_j \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot (X_j^2 - \overline{X^2}) = \left[ (\overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}) - \alpha_{42} \left( \overline{X^4} - (\overline{X^2})^2 \right) \right] \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{4j} q_{3j} = \sum_{j=1}^N (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \cdot (X_j^3 - \alpha_{31} X_j) \equiv 0 \end{cases} \quad (21)$$

Для расчета констант  $\alpha_{42}, \alpha_{40}$  воспользуемся 1-м и 3-м уравнениями системы (21):

$$\begin{cases} \alpha_{42} \overline{X^2} + \alpha_{40} = \overline{X^4} \\ \alpha_{42} \left( \overline{X^4} - (\overline{X^2})^2 \right) = \overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}. \end{cases} \quad (22)$$

Из уравнений (22) следует, что факторы  $(q_4, q_0), (q_4, q_1), (q_4, q_2), (q_4, q_3)$  ортогональны при

$$\alpha_{42} = \frac{\overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2} \quad \text{и} \quad \alpha_{40} = \overline{X^4} - \alpha_{42} \overline{X^2} = \frac{(\overline{X^4})^2 - \overline{X^6} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2}. \quad (23)$$

$$5. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{0j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot 1 \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{1j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot X_j = (\overline{X^6} - \alpha_{53} \overline{X^4} - \alpha_{51} \overline{X^2}) \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{2j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot (X_j^2 - \overline{X^2}) \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{3j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot \left( X_j^3 - \frac{\overline{X^4}}{X^2} X_j \right) = \left[ \left( \overline{X^8} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^6} \right) - \alpha_{53} \left( \overline{X^6} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^4} \right) \right] \cdot N = 0 \\ \sum_{j=1}^N q_{5j} q_{4j} = \sum_{j=1}^N (X_j^5 - \alpha_{53} X_j^3 - \alpha_{51} X_j) \cdot (X_j^4 - \alpha_{42} X_j^2 - \alpha_{40}) \equiv 0 \end{array} \right. \quad (24)$$

Для расчета констант  $\alpha_{53}$ ,  $\alpha_{51}$  воспользуемся 2-м и 4-м уравнениями системы (24)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{53} \overline{X^4} + \alpha_{51} \overline{X^2} = \overline{X^6} \\ \alpha_{53} \left( \overline{X^6} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^4} \right) = \left( \overline{X^8} - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot \overline{X^6} \right), \end{array} \right. \quad (25)$$

из системы (25) следует, что факторы  $(q_5, q_0)$ ,  $(q_5, q_1)$ ,  $(q_5, q_2)$ ,  $(q_5, q_3)$ ,  $(q_5, q_4)$  для РСП ортогональны при

$$\alpha_{53} = \frac{\overline{X^8} \cdot \overline{X^2} - \overline{X^6} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2} \quad \text{и} \quad \alpha_{51} = \frac{\overline{X^6} - \alpha_{53} \overline{X^4}}{X^2} = \frac{(\overline{X^6})^2 - \overline{X^8} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2}. \quad (26)$$

Таким образом, моделирующая функция  $\psi(X)$  может быть представлена уравнением в ортогональных многочленах 5-го порядка (таким же методом можно получить больший порядок)

$$Y(X) = c_0 + c_1 X + c_2 (X^2 - \alpha_{20}) + c_3 (X^3 - \alpha_{31} X) + c_4 (X^4 - \alpha_{42} X^2 - \alpha_{40}) + c_5 (X^5 - \alpha_{53} X^3 - \alpha_{51} X), \quad (27)$$

или с учетом уравнений (18)–(20), (23), (26)

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(X) = c_0 + c_1 X + c_2 \left( X^2 - \overline{X^2} \right) + c_3 \left( X^3 - \frac{\overline{X^4}}{X^2} \cdot X \right) + c_4 \left( X^4 - \frac{\overline{X^6} - \overline{X^4} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2} \cdot X^2 - \frac{(\overline{X^4})^2 - \overline{X^6} \cdot \overline{X^2}}{\overline{X^4} - (\overline{X^2})^2} \right) + \\ + c_5 \left( X^5 - \frac{\overline{X^8} \cdot \overline{X^2} - \overline{X^6} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2} X^3 - \frac{(\overline{X^6})^2 - \overline{X^8} \cdot \overline{X^4}}{\overline{X^6} \cdot \overline{X^2} - (\overline{X^4})^2} X \right) \end{array} \right. , \quad (28)$$

в котором коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  рассчитываются по системе уравнений (10).

В таблице 1 приведены результаты расчетов коэффициентов  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ , которые являются функциями только 4-х параметров:  $\overline{X^2}, \overline{X^4}, \overline{X^6}, \overline{X^8}$ . Для расчета коэффициентов  $\alpha$ , например, в компьютерной программе MS Excel, в зависимости от числа опытов  $N$  сначала с учетом уравнения (13) формируют столбцы  $X^2, X^4, X^6, X^8$ , затем рассчитывают их средние значения, а потом по уравнениям (19), (20), (23), (26) рассчитывают  $\alpha_{20}, \alpha_{31}, \alpha_{42}, \alpha_{40}, \alpha_{53}, \alpha_{51}$ .

Таблица 1. Коэффициенты  $\alpha$  ортогональных многочленов для различных  $N$

$N$	$\alpha_{20}$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{42}$	$\alpha_{40}$	$\alpha_{53}$	$\alpha_{51}$
21	0,3667	0,6580	0,9357	-0,1018	1,2056	-0,2794
20	0,3684	0,6609	0,9395	-0,1026	1,2096	-0,2812
19	0,3704	0,6642	0,9436	-0,1035	1,2140	-0,2831
18	0,3725	0,6678	0,9481	-0,1044	1,2188	-0,2852
17	0,3750	0,6719	0,9531	-0,1055	1,2240	-0,2874
16	0,3778	0,6764	0,9587	-0,1066	1,2296	-0,2899
15	0,3810	0,6816	0,9650	-0,1080	1,2358	-0,2926
14	0,3846	0,6876	0,9721	-0,1094	1,2426	-0,2954
13	0,3889	0,6944	0,9802	-0,1111	1,2500	-0,2985
12	0,3939	0,7025	0,9894	-0,1130	1,2580	-0,3017
<b>11</b>	<b>0,4000</b>	<b>0,7120</b>	<b>1,0000</b>	<b>-0,1152</b>	<b>1,2667</b>	<b>-0,3051</b>
10	0,4074	0,7235	1,0123	-0,1177	1,2757	-0,3082
9	0,4167	0,7375	1,0268	-0,1205	1,2847	-0,3108
8	0,4286	0,7551	1,0437	-0,1237	1,2925	-0,3116

Как и предполагалось, значения ортогональных многочленов при стохастическом моделировании зависят от числа опытов  $N$ . Проиллюстрируем применение разработанного алгоритма стохастического моделирования в ортогональных полиномах для моделирования недобора урожая озимой пшеницы при отклонении срока посева от оптимального значения. Исходные данные, а также предварительная обработка экспериментальных данных приведены в таблицах 2–3 [11, 12].

Таблица 2. Исходные данные по озимой пшенице и рассчитанные ортогональные многочлены

$N$	$n$	$t_{\min}$ , дн	$t_{\max}$ , дн	$x_0$ , дн	$Dx$ , дн	$a_{20}$	$a_{31}$	$a_{42}$	$a_{40}$	$a_{53}$	$a_{51}$
11	3	-25	25	0	25	0,40	0,7120	1,00	-0,1152	1,2667	-0,3051

В таблице 3 приведены результаты предварительной обработки экспериментальных данных [3].

Таблица 3. Матрица планирования. Предварительная обработка экспериментальных данных

$j$	$t$ , дн.	$Y_{1r}$ , %	$Y_{2r}$ , %	$Y_{3r}$ , %	$\bar{Y}_j$ , %	$S_j^2$	
1	-25	30,1	32,3	33,6	<b>32,0</b>	3,130	
2	-20	24,0	25,5	22,5	<b>24,0</b>	2,250	
3	-15	18,1	19,2	16,7	<b>18,0</b>	1,570	
4	-10	10,5	10,4	12,1	<b>11,0</b>	0,910	
5	-5	6,2	5,2	6,6	<b>6,0</b>	0,520	
<b>6</b>	<b>0</b>	<b>4,3</b>	<b>4,4</b>	<b>3,3</b>	<b>4,0</b>	<b>0,370</b>	
7	5	4,7	5,8	4,5	<b>5,0</b>	0,490	
8	10	8,1	9,0	9,9	<b>9,0</b>	0,810	
9	15	14,0	13,2	11,8	<b>13,0</b>	1,240	
10	20	17,1	18,3	15,6	<b>17,0</b>	1,830	
11	25	21,9	20,5	23,6	<b>22,0</b>	2,410	
$G_3 = 0,202 < G_{2; 11; 0,95} = 0,417$				Сумма	<b>161,0</b>	<b>15,53</b>	<b>31</b>
$S_{\text{воспр}}^2 = \sum_{j=1}^N S_j^2 / N = 1,412; f_{\text{воспр}} = N(n-1) = 22; \Delta \bar{Y}_j = \frac{t_{n-1; 0,95} \cdot S_j}{\sqrt{n}}$							

В таблицах 4–6 приведены значения ортогональных многочленов при  $N = 11$  моделирующей функции  $\Psi_j^p$ , абсолютной погрешности  $\Delta \psi_j^p$ , коэффициентов  $c_k$ , а также результаты проверки коэффициентов  $c_k$  на значимость по критерию Стьюдента, моделирующей функции  $\psi(X)$  на адекватность по критерию Фишера [3].

Таблица 4. Матрица моделирования. Рассчитанные параметры  $\psi_j^p$  и их абсолютная погрешность  $\Delta\psi_j^p$

$j$	$\bar{Y}_j, \%$	$q_{0j}$	$q_{1j}$	$q_{2j}$	$q_{3j}$	$q_{4j}$	$q_{5j}$	$\psi_j^p, \%$	$(\psi_j^p - \bar{Y}_j)^2$	$\Delta\psi_j^p, \%$	$\Delta\bar{Y}_j, \%$	$\Delta\bar{Y}_j/\Delta\psi_j^p$
1	32,0	1	-1,00	0,60	-0,288	0,115	-0,038	31,22	0,603	1,2	4,4	3,7
2	24,0	1	-0,80	0,24	0,058	-0,115	0,077	24,82	0,665	0,9	3,7	4,1
3	18,0	1	-0,60	-0,04	0,211	-0,115	0,013	17,68	0,106	0,8	3,1	3,9
4	11,0	1	-0,40	-0,24	0,221	-0,019	-0,051	11,27	0,074	0,6	2,4	4,0
5	6,0	1	-0,20	-0,36	0,134	0,077	-0,051	6,65	0,427	0,7	1,8	2,6
<b>6</b>	<b>4,0</b>	<b>1</b>	<b>0,00</b>	<b>-0,40</b>	<b>0,000</b>	<b>0,115</b>	<b>0,000</b>	<b>4,45</b>	<b>0,202</b>	<b>0,8</b>	<b>1,5</b>	<b>1,9</b>
7	5,0	1	0,20	-0,36	-0,134	0,077	0,051	4,87	0,017	0,7	1,7	2,4
8	9,0	1	0,40	-0,24	-0,221	-0,019	0,051	7,71	1,670	0,6	2,2	3,7
9	13,0	1	0,60	-0,04	-0,211	-0,115	-0,013	12,33	0,449	0,8	2,8	3,5
10	17,0	1	0,80	0,24	-0,058	-0,115	-0,077	17,69	0,473	0,9	3,4	3,8
11	22,0	1	1,00	0,60	0,288	0,115	0,038	22,31	0,099	1,2	3,9	3,3
									$\varphi = 4,784$	<b>0,8</b>	<b>2,8</b>	<b>3,5</b>

Таблица 5. Коэффициенты уравнения моделирующей функции  $c_k$  и их значимость

Показатели	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	<b>B</b>
	<b>14,64</b>	<b>-4,5</b>	<b>22,3</b>	<b>-2,1</b>	<b>-10,9</b>	<b>3</b>	
$S^2(c_k) = \frac{S_{\text{воспр}}^2}{n \sum_{j=1}^n q_{kj}^2}$	0,04278	0,1070	0,3428	1,190	4,464	18,41	<b>4</b>
$S(c_k) = \sqrt{S^2(c_k)}$	0,2068	0,3270	0,5855	1,091	2,113	4,291	
$t_{N(n-1); 0,95}$	2,074	2,074	2,074	2,074	2,074	2,074	
$\Delta c_k = t_{N(n-1); 0,95} \cdot S(c_k)$	<b>0,43</b>	<b>0,7</b>	<b>1,2</b>	<b>2,3</b>	<b>4,4</b>	<b>9</b>	
Значимость $\Delta c_k <  c_k $	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	

Таблица 6. Результаты проверки уравнения моделируемой функции на адекватность

Уравнения	$S_{\text{воспр}}^2$ ( $f_{\text{воспр}}$ )	$S_{\text{ад}}^2$ ( $f_{\text{ад}}$ )	$F_{\text{э}}$	$F_{\text{табл}}$	Адекват.
$\Psi_0(X) = 14,64$	1,412 (22)	236,6 (10)	167,6	2,297	Нет
$\Psi_1(X) = 14,64 - 4,5X$	1,412 (22)	233,7 (9)	165,6	2,342	Нет
$\Psi_2(X) = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400)$	1,412 (22)	6,514 (8)	4,613	2,397	Нет
$\Psi_3(X)^* = \Psi_2(X) = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400)$	1,412 (22)	6,514 (8)	4,613	2,397	Нет
$Y_4 = 14,64 - 4,5X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400) - 10,9 \cdot (X^4 - X^2 + 0,115)$	1,412 (22)	2,050 (7)	1,452	2,464	<b>Да</b>

\* Уравнение  $\Psi_3(X) = \Psi_2(X)$ , так как коэффициент  $c_3$  – незначим.

Адекватность моделирующей функции проверяется по критерию Фишера:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{n \sum_{j=1}^N (\psi_j^p - \bar{Y}_j)^2}{N - B}, \quad f_{\text{ад}} = N - B, \quad F_{\text{э}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_{\text{воспр}}^2}.$$

$$F_{\text{т}} = F_{N-B, N(n-1); 0,95}, \text{ так как } S_{\text{ад}}^2 > S_{\text{воспр}}^2.$$

Если  $F_{\text{э}} < F_{\text{т}}$ , то уравнение регрессии адекватно, в противном случае – неадекватно [3].

Так как коэффициенты  $c_3$  и  $c_5$  незначимы (табл. 5), то

$$\psi(X) = 14,64 - 4,5 \cdot X + 22,3 \cdot (X^2 - 0,400) - 10,9 \cdot (X^4 - X^2 + 0,115).$$

Полученное уравнение адекватно, так как  $F_3 = 1,452 < 2,464 = F_{7,22; 0,95}$  (табл. 6).

Ортогональность многочленов позволяет рассчитать не только величину недобора урожая озимой пшеницы при отклонении оптимального срока посева от оптимального значения, но и ее абсолютную погрешность (уравнение (24))

$$\Delta Y(X) = t_{N(n-1); 0,95} \cdot \sqrt{S^2(c_0) + q_1^2 S^2(c_1) + q_2^2 S^2(c_2) + q_3^2 S^2(b_3) + q_4^2 S^2(c_4) + q_5^2 S^2(c_5)}. \quad (24)$$

$$\Delta Y(X) = 2,074 \cdot \sqrt{0,04278 + 0,1070 \cdot X^2 + 0,3428 \cdot (X^2 - 0,400)^2 + 4,464 \cdot (X^4 - X^2 + 0,115)^2} \quad (25)$$

Следует обратить внимание на то, что уравнения моделирующей функции 0-го, 1-го, 2-го, 3-го порядков не являются адекватными (таблица 6). В случае ортогональности многочленов последовательное повышение порядка уравнения  $\psi(X)$  не изменяет значения предыдущих коэффициентов  $c_k$ , что подтверждает независимость ортогональных многочленов. Так как уравнение 4-го порядка адекватно, коэффициент  $c_5$  должен быть незначимым, что и подтверждается данными таблицы 6.

Следует обратить внимание еще на один результат расчета. Из данных таблицы 4 следует, что среднее значение абсолютной погрешности моделирующей функции  $\Delta\psi(X)$  в 3,4 раза меньше, чем среднее значение абсолютной погрешности экспериментальных данных  $\Delta\bar{Y}_j$ . Объяснение этого явления достаточно простое и предсказуемое: среднее экспериментальное значение моделируемой функции  $\bar{Y}_j$  рассчитывается по 3 дублям ( $n = 3$ ), а значения моделирующей функции  $\psi(X)$  – по 33 экспериментальным точкам ( $Nn = 33$ ). Поэтому точность определения последнего параметра в  $\sqrt{N}$  раз выше ( $\sqrt{11} \approx 3,3$ ), чем первого. Вывод: математическая модель объекта позволяет делать прогноз точнее, чем породивший ее эксперимент!

На рис. 1 приведены графики, наглядно показывающие влияние отклонения срока посева озимой пшеницы от оптимального значения на недобор урожая.

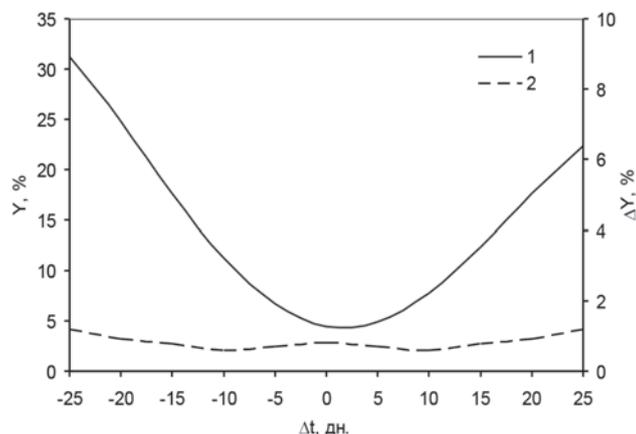


Рис. 1. График зависимости недобора урожая озимой пшеницы  $Y(\Delta t)$  (1) и абсолютной погрешности недобора урожая  $\Delta Y(\Delta t)$  (2) при отклонении срока посева от оптимального значения  $\Delta t$

### Заключение

1. Разработан алгоритм стохастического моделирования технологических процессов растениеводства с помощью ортогональных многочленов. Ортогональная форма уравнений регрессии позволяет корректно определить минимальный порядок алгебраического полинома моделирующей функции, оценить вклад каждого фактора, а также, благодаря отсутствия корреляции между ортогональными многочленами, рассчитать абсолютную ошибку при прогнозировании изучаемых объектов. Отличительная особенность стохастического моделирования в ортогональных много-

членах от детерминированного моделирования заключается в том, что минимальный порядок ортогонализирующих многочленов зависит от выбранного плана эксперимента, количества опытов и количества дублей в каждом опыте.

2. Разработанная стохастическая модель может быть использована в качестве уравнения функциональной связи при объединении подсистем в единую систему методом системного анализа.

#### Список использованных источников

1. Тарасенко, В. П. Прикладной системный анализ / В. П. Тарасенко. – М.: КНОРУС, 2010. – 224 с.
2. Вержбицкий, В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В. М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2001. – 104 с.
3. Леонов, А. Н. Основы научных исследований и моделирования / А. Н. Леонов, М. М. Дечко, В. Б. Ловкис. – Минск: БГАТУ, 2010. – 276 с.
4. Forsythe, G. E. Generation and use of orthogonal polynomial for data fitting with a digital computer / G. E. Forsythe // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1957. – Vol. 5. – P. 74–88.
5. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005 – 480 с.
6. Сухопаров, С. Ю. Вывод рекуррентного соотношения ортогональных многочленов из процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, а также схема применения полученного рекуррентного соотношения / С. Ю. Сухопаров // arxiv:submit/1109657 [cs.NA]. – 8 Nov 2014.
7. Леонов, А. Н. Моделирование зависимости фактической урожайности зерновых от сроков посева и уборки / А. Н. Леонов, Цинчжэнь Ли // Агропанорама. – 2018. – № 4. – С. 21–30.
8. Жушма, Е. Ю. Математическое моделирование объектов АПК с помощью ортогональных полиномов / Е. Ю. Жушма ; науч. рук. А. Н. Леонов, Ли Цинчжэнь // Перспективная техника и технологии в АПК : материалы Международной научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов, Минск, 13–14 апреля 2023 г. – С. 140–143.
9. Кадыров, М. А. О земледелии, селекции и рациональном хозяйствовании / М. А. Кадыров. – Минск: Несси, 2001. – 163 с.
10. Шило, И. Н. Ресурсосберегающие технологии сельскохозяйственного производства / И. Н. Шило, В. Н. Дашков. – Минск: БГАТУ, 2003. – 184 с. (С. 75–76).