УДК 532.135

А.А.Ким

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ РЕОДИНАМИКИ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ СРЕДЫ

Связь между компонентами тензоров напряжения и скорости деформации для любой реологически сложной среды в самом общем виде в декартовых координатах может быть записана так

$$P_{ik} = \delta_{ik} p + f(h)\left(\frac{\partial v_{xi}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{xk}}{\partial x_i}\right) \qquad (1)$$

В ур-нии (1) δ_{ik} - дельта-функция Кронекера, p - гидростатическое давление, h - интенсивность скоростей деформации. Ур-ние (1) в тензорной форме записывается в виде

$$\Pi_0 = 2f(h)\dot{\Phi}_0 \qquad (2)$$

где $\Pi_0, \dot{\Phi}_0$ - девиаторы тензоров напряжения и скорости деформации.

Компоненты напряжения должны удовлетворять ур-нию Коши

$$div\,\Pi = \rho_0(\bar{W} - \bar{F}) \qquad (3)$$

Решая совместно ур-ния (2) и (3), найдем:

$$f'(h)\,grad\,h \cdot \dot{\Phi}_0 + f(h)\,div\,\dot{\Phi}_0 + grad = \rho_0(\bar{W} - \bar{F}) \qquad (4)$$

Это есть уравнение движения реологически сложной среды в тензорной форме.

Перепишем это уравнение в проекциях на произвольные криволинейные оси координат. В этом случае удобно пользоваться смешанными компонентами тензора скоростей деформаций ε_i^k, которые выражаются через ковариантные и контравариантные составляющие скоростей v_i и v^k в следующем виде:

$$\varepsilon_i^k = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v^k + v_i \nabla^k\right). \qquad (5)$$

Ковариантная составляющая производной от контравариантной составляющей скорости вычисляются по формуле

$$\nabla_i V^{\kappa} = \Gamma^{\kappa}_{\lambda i} V^{\lambda} + \frac{\partial V^{\kappa}}{\partial X^{i}} \tag{6}$$

где $\Gamma_{\lambda i}$ - символ Кристофеля II рода.

Для вычисления контравариантной составляющей производной от ковариантной составляющей скорости найдем сначала ковариантную тензорную производную от ковариантной составляющей скорости.

$$\nabla_j V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij} V_{\lambda} \tag{7}$$

Тогда

$$\nabla^{\kappa} V_i = g^{\kappa j} \nabla_j V_i \tag{8}$$

где $g^{\kappa j}$ - фундаментальный тензор.

Далее, представляя девиатор тензора скоростей деформации в виде

$$\dot{\Phi}_0 = \bar{z}_{\kappa} \bar{z}^{i} \varepsilon_i^{\kappa} \tag{9}$$

Получим интенсивность скоростей деформации

$$h = \sqrt{2 \varepsilon_i^{\kappa} \varepsilon_{\kappa}^{i}} \tag{10}$$

и выражение для скалярного произведения в следующем виде

$$grad\ h \cdot \dot{\Phi}_0 = \frac{\partial h}{\partial x^j} \varepsilon_i^j \bar{z}_i \tag{11}$$

Расхождение тензора скоростей деформации может быть вычислено по формуле

$$div\ \dot{\Phi}_0 = \bar{z}^{i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i^{\kappa}}{} + \Gamma_{j\kappa} \varepsilon_i^{j} - \Gamma_{i\kappa}^{j} \varepsilon_j^{\kappa} \right) \tag{12}$$

Но принимая во внимание, что

$$\Gamma_{jk}^{k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial x^{j}} \qquad (13)$$

выражение (12) перепишем в виде

$$div\, \Phi_0 = \bar{z}^{i} \left[\frac{\partial(\sqrt{g}\, \varepsilon_i^{k})}{\sqrt{g}\, \partial x^{k}} - \Gamma_{ki}^{j} \varepsilon_j^{k} \right] \qquad (14)$$

Ускорение $\bar{W}$ в произвольных криволинейных координатах выражается в виде

$$\bar{W} = \bar{z}^{i} \left(\frac{\partial v^{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{j}} v^{j} + \Gamma_{\lambda j}^{\beta} v^{\lambda} v^{j} \right) g_{\beta i} \qquad (15)$$

Подставляя найденные значения в (4), получаем уравнение движения реологически сложной среды в произвольных координатах

$$f(h) \frac{\partial h}{\partial x^{j}} \varepsilon_i^{j} + f(h) \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \varepsilon_i^{k})}{\partial x^{k}} - \Gamma_{ik}^{j} \varepsilon_j^{k} \right] - \frac{\partial p}{\partial x^{i}} =$$

$$\rho_0 F_i + \rho_0 g_{\beta i} \left(\frac{\partial v^{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{j}} v^{j} + \Gamma_{\lambda j}^{\beta} v^{j} v^{\lambda} \right) \qquad (16)$$

(i = 1,2,3).

Для несжимаемых текучих систем также должно удовлетворяться уравнение неразрывности, которое в произвольных координатах имеет вид

$$\frac{\partial(\sqrt{g}\, v^{i})}{\partial x^{i}} = 0 \qquad (17)$$

Уравнение (16) в проекциях на ортогональные оси криволинейных координат принимает вид

$$f'(h)\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{H}\frac{\partial h}{\partial x^k}e_{ik}+f(h)\frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\Bigl[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial\left(\frac{H_1H_2H_3H_i}{H_k}e_{ik}\right)}{\partial x_k}- \tag{18}$$

$$-e_{ik}\frac{\partial \ln H_k}{\partial x^k}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial P}{\partial x^i}\Bigr]=\rho_0\frac{1}{H_i}\mathcal{F}_{xi}+\rho_0\Bigl[\frac{\partial v_x^i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\Bigl(\frac{v_{x^k}}{H_k}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k}-\frac{v_{x^k}^2}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}+$$

$$+\frac{v_{x^k}v_{x^i}}{H_kH_i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k}\Bigr)\Bigr]$$

Уравнение неразрывности деформации в ортогональных координатах имеет вид

$$\frac{\partial(H_2H_3v_{x^1})}{\partial x^1}+\frac{\partial(H_3H_1v_{x^2})}{\partial x^2}+\frac{\partial(H_1H_2v_{x^3})}{\partial x^3}=0 \tag{19}$$

УДК 517.925.12

Н.Н. Дедок

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\mu x+x\sum_{i=1}^{k}M_i(x,y)+P_n(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=\mu y+y\sum_{i=1}^{k}M_i(x,y)+Q_n(x,y),\end{aligned} \tag{1}$$

где $M_i(x,y), P_n(x,y), Q_n(x,y)$ – однородные многочлены степени i, n соответственно с действительными постоянными коэффициентами, μ – действительное постоянное число.